SULLE SUPERFICIE GENERABILI DAL MOVIMENTO DI UNA LINEA PIANA QUALUNQUE

MEMORIA

DEL DOTT. GASPARE MAINARDI

SUPPLENTE ALLA CATTEDRA DI MATEMATICA PURA ELEMENTARE

NELL' I. R. UNIVERSITÀ DI PAVIA

PRESENTATA DAL SOCIO

SIGNOR PROFESSORE CONFIGLIACHI

IL XX SETTEMBRE MDCCCXXIX.

ED APPROVATA DAL SOCIO

SIGNOR PROFESSOR MAGISTRINI

Se una linea piana si move nello spazio, e nello stesso tempo varia di grandezza con qualsivoglia legge, genera una superfice tale, che la sua estensione e quella dei solidi terminati da essa comprendono, pressochè tutte le grandezze geometriche delle quali finora si è stabilita la misura. Infatti variando la natura di quella curva, e moderando diversamente le leggi del suo movimento, potranno venir generate le superficie coniche, cilindriche, anulari, le superficie gobbe, quelle del secondo ordine, le superficie sviluppabili, e simili.

Quando poi la linea generatrice è retta, un punto il quale scorra lungo della medesima con legge determinata, descriverà nello spazio una curva la quale, per rispetto ad un altra che dirigga il movimento di quella retta, potrà rappresentare molte di quelle linee la cui importanza attrasse mag-

giormente l'attenzione dei geometri. Per tal modo infatti potranno venir generate le evolventi ed evolute di Huyghens e di Monge, le curve parallele di Leibnitz, le linee dei centri osculatori, quelle di curvatura sferica ecc.

Nella presente memoria per me si svolge questo importante argomento; cioè si offrono le formole per descrivere e misurare le estensioni nominate, qualunque siasi la legge della loro generazione, quindi percorrendo i casi particolari della maggiore importanza, si ottengono i risultamenti noti ed altri ancora che forse mi si devono interamente. Tali sono, a cagion d'esempio, le espressioni della estensione e curvatura delle evolventi ed evolute, della linea dei centri osculatori, e dell'evoluta per il piano di una linea data qualunque: alcune relazioni semplici che regnano fra lo spigolo di regresso di una superficie sviluppabile ed una linea qualunque tracciata in essa, d'onde si desume l'equazione delle linee brevissime di quella superficie, la quale equazione si riduce alle quadrature; poi si ricavano la famosa teoria delle sviluppate di Monge, e gli eleganti teoremi di Lancret. Finalmente si dà una nuova estensione al famoso teorema di Guldino, cioè si generalizza la regola insegnata da Archimede per misurare la solidità del cono ordinario.

Avrei potuto applicare le formole trovate in questa memoria a molte ricerche particolari, ma la quantità delle medesime e la prolissità di alcuni calcoli mi hanno determinato a fare di queste l'argomento di un altro lavoro, che mi farò sollecito di pubblicare.

PARTE PRIMA.

DELLE SUPERFICIE GENERATE DAL MOVIMENTO DI UNA LINEA RETTA

PROPOSIZIONE PRIMA.

Una retta si mova nello spazio in maniera che un punto individuato di essa percorra una linea data, o roti intorno

a questo punto con legge determinata qualunque, e nello stesso tempo un punto scorra lungo la retta generatrice pure con data legge: mi propongo di trovare le equazioni della superficie e della linea che vengono generate dal movimento di quella retta e di quel punto.

I punti e le estensioni che mi occorrerà di considerare in appresso, le supporrò riferite a tre assi ortogonali Gx, Gy, Gz; colla traccia Gg rappresento una curva qualunque cui sia tangente l'asse Gx; con MG la retta generatrice considerata nella posizione primitiva, e con MP, PQ, GQ le coordinate del punto M. Si conduca la retta MQ, e si suppongano Ang.°MGQ $= b$, Ang.°MQP$=\omega$. Fingiamo poi che movendosi la retta GM, il punto G della medesima scorra lungo la curva Gg, e tragga seco gli assi coordinati, per modo che l'asse Gx sia sempre tangente alla curva diretrice Gg, ed il piano yGz non roti intorno a quell'asse. Giunto l'estremo G in g ed M in m, supponghiamo che gli angoli, b, ω divengano rispettivamente $b+\alpha$, $\omega+\theta$; ove considereremo α, θ quali funzioni determinate della lunghezza dell'arco Gg.

Ponghiamo quest'arco $Gg=s$, $gm=m$, e chiamiamo x, y, z le coordinate del punto m; p, q, r quelle del punto g; e finalmente rappresentate con gx'' la retta tangente in g la curva Gg, con gx' la sua projezione sul piano delle rette gx, gz rispettivamente parallele agli assi Gx, Gz; supponiamo Ang.°$xgx'=h$, Ang.°$x'gx''=k$. Ciò posto immagino condotta pel punto G una retta GM$'=m$ per la quale le coordinate del punto M' siano M'P$'=z''$, P'Q$'=y''$, GQ$'=x''$, Ang.°M'G$x=b+\alpha$, Ang.°M'Q'P$'=\omega+\theta$; e scrivendo per brevità ω ed α in luogo di $\omega+\theta$, $\alpha+b$ avremo

$$x''=m\cos.\alpha,\ y''=m\,\text{sen}.\alpha\cos.\omega,\ z''=m\,\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.\omega$$

Fingiamo ora che il sistema delle rette Gx, Gy, Gz, GM' si disponga in maniera che il punto G cada in g, l'asse Gx si adatti a gx'', nè accada rotazione intorno al punto G. È chiaro che la retta GM' si confonderà colla generatrice gm, e le

coordinate del punto m per rispetto a questi assi saranno x'', y'', z''. Ciò posto l'asse Gx considerato in questa posizione si mova ora nel piano $x''gx'$ traendo seco gli altri due finchè si adatti alla retta gx', senza però che accada rotazione intorno ad esso, e supposte x', y', z', le coordinate del punto m rispetto agli assi primitivi Gx ec. considerati in questa terza posizione, avremo facilmente

$$x' = x''\cos.k - y''\text{sen}.k,\ y' = x''\text{sen}.k + y''\cos.k,\ z' = z''.$$

Supponghiamo per ultimo che gli assi Gx ec. vengano rimossi ancora dalla terza posizione, l'asse gx' si avvicini a gx nel piano xgx', finchè si confonda con esso, e tragga con se gli altri due assi senza altro moto di questi. Siccome $x-p$, $y-q$, $z-r$ sono le coordinate del puuto m rispetto a quest' ultimo sistema di assi, quindi avremo

$$x-p = x'\cos.h - z'\text{sen}.h,\ y-q = y',\ z-r = x'\text{sen}.h + z'\cos.h.$$

Eliminando ora dalle equazioni trovate le quantità x', y' ec. x'' ec. si avranno

$$(1)\quad \begin{aligned} x &= p + m\cos.a\cos.h\cos.k - m\text{sen}.a(\text{sen}.h\text{sen}.\omega + \cos.h\text{sen}.k\cos.\omega) \\ y &= q + m\cos.a\text{sen}.k + m\text{sen}.a\cos.k\cos.\omega \\ z &= r + m\cos.a\text{sen}.h\cos.k - m\text{sen}.a(\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega - \cos.h\text{sen}.\omega) \end{aligned}$$

ove gli angoli h, e k si determinano mediante le equazioni

$$(2)\qquad \cos.h\cos.k = \left(\frac{dp}{ds}\right),\ \text{sen}.h\cos.k = \left(\frac{dr}{ds}\right),\ \text{sen}.k = \left(\frac{dq}{ds}\right).$$

Ora tutte le volte che le quantità p, q, r, a ed ω saranno date in funzione di s, eliminando m, ed s da quelle equazioni, la risultante rappresenterà la superficie generata dalla retra GM. Se poi il punto M scorre lungo la retta generatrice, espressa la lunghezza variabile m in funzione di s, eliminando dalle equazioni (1) questa quantità s, si avranno due risul-

tanti dalle quali verrà rappresentata la linea descritta da quel punto.

Per indicare con un esempio facile e comune l' uso di quelle formole, fingiamo che si voglia trovare l'equazione della superficie generata da una retta, la quale si appoggia costantemente sopra altre tre rette date. L'asse Gx sia una di queste direttrici, l' asse Gy sia il prolungamento della minima distanza di quella retta e di un altra direttrice, le cui equazioni siano $x = Az$, $y = D$; e supponghiamo la terza direttrice rappresentata dalle equazioni $x' = Mz' + N$, $y' = Pz' + Q$. Supposto nel caso presente, che la linea Gg sia lo stesso asse Gx, avremo $q = 0$, $r = 0$, $h = 0$, $k = 0$ e le equazioni (1) forniranno

$$x = p + m\cos.a,\ y = m\text{sen}.a\cos.\omega,\ z = m\text{sen}.a\text{sen}.\omega$$

quindi indicando con m, m' le parti della retta generatrice intercette fra l' asse Gx ed ognuna delle altre due direttrici avremo

$$p + m\cos.a = Am\text{sen}.a\text{sen}.\omega,\quad m\text{sen}.a\cos.\omega = D$$

$$p + m'\cos.a = Mm'\text{sen}.a\text{sen}.\omega + N,$$

$$m'\text{sen}.a\cos.\omega = Pm'\text{sen}.a\text{sen}.\omega + Q.$$

Eliminando ora m ed m' si ottengono

$$p\cos.\omega\text{sen}.a = D(A\text{sen}.\omega\text{sen}.a - \cos a),$$

$$(p - N)(\cos.\omega - P\text{sen}.\omega)\text{sen}.a = Q(M\text{sen}.\omega\text{sen}.a - \cos.a),$$

e siccome $\text{tang}.\omega = \frac{z}{y}$, $\cos.a = \frac{x-p}{m}$, $m = \sqrt{((x-p)^2 + y^2 + z^2)}$ quelle equazioni si trasformano nelle seguenti,

$$p(y - D) = D(Az - x),\ (p - N)(y - Pz) = Q(Mz - x + p)$$

da cui eliminata p si ottiene per la superficie di cui si tratta, la seguente equazione

$$[D(Az - x) - N(y - D)](y - Pz) = Q[(Mz - x)(y - D) + D(Az - x)].$$

Mediante le nostre equazioni si risolvono molte questioni relative alla superficie considerata, sulle quali però non ci dobbiamo trattenere.

PROPOSIZIONE SECONDA

SI DOMANDA LA LUNGHEZZA DELLA LINEA CONSIDERATA NELLA PROPOSIZIONE ANTECEDENTE.

Formando le derivate, per rispetto ad s delle equazioni (1), nell'ipotesi che m sia funzione di questa variabile, ed indicando cogli apici quelle derivate che non si possono effettuare, secondo il metodo delle funzioni analitiche di Lagrange, si ottengono

$$x'=\left\{\begin{array}{c}\cos.h\cos.k+mh'(\text{sen}.a\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega-\text{sen}.a\cos.h\text{sen}.\omega\\ -\cos.a\text{sen}.h\cos.k)-mk'(\text{sen}.a\cos.h\cos.k\cos.\omega+\cos.a\cos.h\text{sen}.k)\\ +m\theta'\text{sen}.a(\cos.h\text{sen}.k\text{sen}\,\omega-\text{sen}.h\cos.\omega)+\frac{m'}{m}(x-p)\\ -ma'[\text{sen}.a\cos.h\cos.k+\cos.a(\text{sen}.h\text{sen}.\omega+\cos.h\text{sen}.k\cos.\omega)]\end{array}\right\}$$

$$(3)\quad y'=\text{sen}.k+mk'(\cos.a\cos.k-\text{sen}.a\text{sen}.k\cos.\omega)-m\theta'\text{sen}.a\cos.k\text{sen}.\omega$$
$$+\frac{m'}{m}(y-q)-ma'(\text{sen}.a\text{sen}.k-\cos.a\cos.k\cos.\omega)$$

$$z'=\left\{\begin{array}{c}\text{sen}.h\cos.k+mh'(\cos.a\cos.h\cos.k-\text{sen}.a\cos.h\text{sen}.k\cos.\omega\\ -\text{sen}.a\text{sen}.h\text{sen}.\omega)-mk'(\cos.a\text{sen}.h\text{sen}.k+\text{sen}.a\text{sen}.h\cos.k\cos.\omega)\\ +m\theta'\text{sen}.a(\text{sen}.h\text{sen}.k\text{sen}.\omega+\cos.h\cos.\omega)+\frac{m'}{m}(z-r)\\ -ma'[\text{sen}.a\text{sen}.h\cos.k+\cos.a(\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega-\cos.h\text{sen}.\omega)]\end{array}\right\}$$

Rappresentando ora con v la parte della linea cercata compresa fra i punti M ed m, quadrando le equazioni (3), poi sommandole avremo

$$v'^2=\left\{\begin{array}{l} 1+m^2h'^2[(\cos.a\cos.k-\text{sen}.a\text{sen}.k\cos.\omega)^2+\text{sen}.^2a\text{sen}.^2\omega] \\ +m^2k'^2(1-\text{sen}.^2a\text{sen}.^2\omega)+m^2\theta'^2\text{sen}.^2a-2mh'\text{sen}.a\cos.k\text{sen}.\omega \\ -2mk'\text{sen}.a\cos.\omega+2m^2h'k'\text{sen}a\text{sen}\omega(\text{sen}.a\cos.k\cos.\omega+\cos.a\text{sen}.k) \\ -2m^2\theta'h'\text{sen}.a(\text{sen}.a\text{sen}.k-\cos.a\cos.k\cos.\omega) \\ -2m^2\theta'k'\text{sen}.a\cos.a\text{sen}.\omega+m'^2+m^2a'^2+2(m\cos.a') \\ +2m^2a'(h'\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega) \end{array}\right\}$$

da cui, dopo alcune facili riduzioni, si deduce

$$v'^2=[\text{sen}.a-m(a'+h'\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)]^2$$

$$(4)\qquad +m^2[\theta'\text{sen}.a-k'\cos.a\text{sen}\omega.-k'(\text{sen}.a\text{sen}.k-\cos.a\cos.k\cos.\omega)]^2$$

$$+(m'\cos.a)^2$$

PROPOSIZIONE TERZA.

Proponiamoci di determinare la tangente ed il raggio osculatore la linea considerata nella proposizione seconda, corrispondenti ad un punto individuato qualunque della medesima linea.

Formando le derivate per rispetto ad s delle equazioni (2) si ottengono

$$p''=-h'\text{sen}.h\cos.k-k'\cos.h\text{sen}.k,\quad q''=k'\cos.k,$$

$$r''=h'\cos.h\cos.k-k'\text{sen}.h\text{sen}.k$$

$$p'''=-h''\text{sen}.h\cos.k-k''\cos.h\text{sen}.k-(h'^2+k'^2)\cos.h\cos.k$$
$$+2h'k'\text{sen}.h\text{sen}.k$$

$$q'''=k''\cos.k-k'^2\text{sen}.k$$

$$r'''=h''\cos.h\cos.k-k''\text{sen}.h\text{sen}.k-(h'^2+k'^2)\text{sen}.h\cos.k$$
$$-2h'k'\cos.h\text{sen}.k$$

da cui si desumono

$$p'q''-p''q'=h'\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k+k'\cos.h,\ r'p''-r''p'=-h'\cos.^2k,$$

$$q'r''-q''r'=h'\cos.h\text{sen}.k\cos.k-k'\text{sen}.h.$$

Indicato poi con R il raggio osculatore; con e', i' le derivate degli angoli di prima e seconda flessione della curva Gg, avremo

$$\frac{1}{R^2}=p''^2+q''^2+r''^2=k'^2+h'^2\cos.^2k$$

$$e'^2i'=(p'q''-p''q')r'''+(r'p''-r''p')q'''+(q'r''-q''r')p'''$$

$$=(h''k'-h'k'')\cos.k-(2k'^2+h'^2\cos.^2k)h'\text{sen}.k.$$

Ciò posto, essendo $\frac{x-p}{m}$, $\frac{y-q}{m}$, $\frac{z-r}{m}$ i coseni degli angoli compresi dalla retta m e dagli assi coordinati, ed Rp'', Rq'', Rr'' le quantità analoghe per la retta R; rappresentando col simbolo R.m l' angolo compreso da quelle linee, con ms.Rs l'inclinazione dei piani che passano l'uno lungo le rette m ed s; l'altro lungo le rette R ed s; della quale indicazione userò sempre in appresso; si avrà

$$(5)\qquad \cos.\text{R}.m=\frac{\text{R}}{m}[p''(x-p)+q''(y-q)+r''(z-r)]$$

$$=\text{R}\text{sen}.a\,(h'\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega),$$

e dalla trigonometria sferica avremo

$$\cos.\text{R}.m=\text{sen}.a\cos.ms.\text{R}s.$$

Siccome poi, indicato con m.Rs l' angolo formato dalle rette m col piano Rs si ha

$\cos.^2m.\text{R}s=\cos.^2a+\cos.^2\text{R}.m$, onde $\text{sen}.^2m.\text{R}s=\text{sen}.^2a\cos.^2\text{R}.m$,

quindi avremo

$$(6)\qquad \text{sen}.m.\text{R}s=\text{R}\text{sen}.a(k'\text{sen}.\omega-h'\cos.k\cos.\omega)$$

Ciò premesso, osserviamo che le equazioni dei piani i quali si segano lungo la retta m, e passano rispettivamente per le tangenti le curve s e v sono

$$[r'(y-q)-q'(z-r)](\mathrm{P}-p)+[p'(z-r)-r'(x-p)]$$
$$\times(\mathrm{Q}-q)+[q'(x-p)-p'(y-q)](\mathrm{R}-r)=0$$

$$[z'(y-q)-y'(z-r)](\mathrm{X}-x)+[x'(z-r)-z'(x-p)]$$
$$\times(\mathrm{Y}-y)+[y'(x-p)-x'(y-q)](\mathrm{Z}-z)=0$$

purchè P, Q ecc. X, ecc. rappresentino le coordinate di un punto qualunque dell'uno e dell'altro piano, avremo quindi il coseno dell'angolo compreso dai piani medesimi, cioè

$$\cos.\, mv.\, ms =$$

$$\frac{[r'(y-q)-q'(z-r)][z'(y-q)-y'(z-r)]+[p'(z-r)-r'(x-p)][x'(z-r)-z'(x-p)]+\text{ec.}}{\sqrt{[[r'(y-q)-q'(z-r)]^2+[p'(z-r)-r'(x-p)]^2+\text{ec.}]}\sqrt{[(z'(y-q)-y'(z-r))^2+(x'(z-r)-z'(x-p))^2+\text{ec.}]}}$$

Ora il numeratore si riduce facilmente alla quantità che segue

$$(p'x'+q'y'+r'z')[(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2]-[x'(x-p)+y'(y-q)$$
$$+z'(z-r)][p'(x-p)+q'(y-q)+r'(z-r)]$$

ed essendo

$$(x-p)p'+(y-q)q'+(z-r)r'=m\cos.a,$$

$$p'x'+q'y'+r'z'=1+(m\cos.a)'-m\,\mathrm{sen}.a(h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega),$$

e dall' equazione $(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=m^2$, cavandosi

$$(x-p)x'+(y-q)y'+(z-r)z'=m(m'+\cos.a)$$

il detto numeratore si ridurrà ad

$$m^2\mathrm{sen}.a[\mathrm{sen}.a-m(a'+h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega)];$$

siccome pei

$$[r'(y-q)-q'(z-r)]^2+[p'(z-r)-r'(x-p)]^2+\text{ec.}$$
$$=m^2(p'^2+q'^2+r'^2)-[p'(x-p)+q'(y-q)+r'(z-r)]^2=m^2\text{sen.}^2a;$$
$$[z'(y-q)-y'(z-r)]^2+[x'(z-r)-z'(x-p)]^2+\text{ec.}$$
$$=m^2(x'^2+y'^2+z'^2)-[x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)]^2$$
$$=m^2[v'^2-(m'+\cos.a)^2]$$

avremo, per ultimo sostituendo

$$\cos.mv.\,ms=\frac{\text{sen.}\,a-m(a'+h'\cos.k\text{sen.}\omega+k'\cos.\omega}{\sqrt{[v'^2-(m'\cos.a)^2]}}.$$

Essendo poi

$$\cos.m.v=\frac{1}{mv'}[x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)]$$

avremo la seguente equazione

(7) $$v'.\cos.m.v=m'+\cos.a$$

e quindi sarà

(8) $$v'\text{sen}.m.v.\cos.mv.ms=\text{sen}.a-m(a'+h'\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)$$

Così siccome

$$v'.\cos.v.s=p'x'+q'y'+r'z'=1+(m\cos.a)'$$
$$-m\text{sen}.a(h\cos.k\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega),\text{ sarà}$$

(9) $$v'.\cos.v.s=1+(m\cos.a)'-\frac{m}{R}\cos.R.m.$$

L' equazione del piano osculatore la curva Mm nel punto m è la seguente

$$(y'z''-y''z')(X-x)+(z'x''-z''x')(Y-y)+(x'y''-x''y')(Z-z)=0$$

ove X, Y, Z rappresentano le coordinate di qualsivoglia punto di quel piano. Dunque indicando con ρ il raggio osculatore di quella curva, avremo

$$\cos.mv.\ \rho v =$$

$$\frac{[z'(y-q)-y'(z-r)](y'z''-y''z')+[x'(z-r)-z'(x-p)](z'x''-z''x')+[y'(x-p)-x'(y-q)](x'y''-x''y')}{[\sqrt{(z'(y-q)-y'(z-r))^2+(x'(z-r)-z'(x-p))^2+\text{ec.}}\sqrt{[(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+\text{ec.}}]},$$

ma il numeratore del secondo membro non è altro che

$$[\,x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)\,](x'x''+y'y''+z'z'')$$
$$-\,x''(x-p)+y''(y-q)+z''(z-r)](x'^2+y'^2+z'^2),$$

e siccome formando la derivata per rispetto ad s dell' equazione

$$x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)=m(m'+\cos.a) \quad \text{si ha}$$

$$x''(x-p)+y''(y-q)+z''(z-r)=\tfrac{1}{2}(m^2)''+2(m\cos.a)'$$
$$+1-v'^2-m\,\text{sen}.a(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos\omega),$$

e sono inoltre

$$\sqrt{[(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2+\text{ec.}]}=\frac{v'^3}{\rho},$$

$$\sqrt{[(z'(y-q)-y'(z-r))^2+(x'(z-r)-z'(x-p))^2+\text{ec.}}=mv'\text{sen}.m.v,$$

per conseguenza sostituendo avremo

$$(10)\quad \frac{mv'^3}{\rho}\text{sen}.m.v.\cos.mv.\rho v=m(m'+\cos.a)v''-v'[\tfrac{1}{2}(m^2)''$$
$$+2(m\cos.a)'+1-v'^2-m\,\text{sen}.a(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega+k'\cos.\omega)]$$

ove $\text{sen}.m.v.\cos.mv.\rho v=\cos.m.\rho$, come risulta dalla trigonometria sferica.

La ricerca diretta del raggio osculatore ρ conduce mediante calcoli prolissi ad un risultamento complicato. Possiamo per altro ottenerne il valore col seguente processo di calcolo, che indicherò soltanto, mentre sebbene sia più spedito del primo, pure la formola risultante è del pari complicata.

L' equazione di un piano che passa per l' origine delle coordinate ed è parallelo alle rette tangenti le curve v ed s nei loro estremi variabili e corrispondenti, è della forma seguente

$$Z(q'x'-p'y')+Y(p'z-r'x')+X(r'y'-q'z')=0$$

ove X, Y, Z rappresentano le coordinate di un suo punto qualunque.

Sarà per conseguenza

$$\cos.\rho v.\, vs=$$

$$\frac{(q'x'-p'y')(x'y''-x''y')+(p'z-r'x')(z'x''-z''x')+(r'y'-q'z')(y'z''-y''z')}{\frac{v'^3}{\rho}\sqrt{[(q'x'-p'y')^2+(p'z-r'x')^2+(r'y'-q'z')^2]}}.$$

Ora il numeratore del secondo membro non è altro se non se

$$(p'x''+q'y''+r'z'')(x'^2+y'^2+z'^2)-(x'x''+y'y''+z'z'')(p'x'+q'y'+r'z'),$$

e siccome mediante le formole riferite disopra si trova

$$p''x'+q''y'+r''z'=m(k'^2+h'^2\cos.^2k)\cos.a+(h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega)\times$$
$$[(m\,\mathrm{sen}.a)'+m(\theta'-h'\,\mathrm{sen}.k)\,\mathrm{sen}.a],$$

perciò formando la derivata per rispetto ad s dell'equazione

$$p'x'+q'y'+r'z'=1+(m\cos.a)'-m\,\mathrm{sen}.a(h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega)$$

si otterrà il valore del trinomio $p'x''+q'y''+r'z''$, e quindi quello della frazione che si considera. Avremo poi anche quello del denominatore osservando che

$$(p'y'-q'x')^2+(r'x'-p'z')^2+(q'z'-r'y')^2=(p'^2+q'^2+r'^2)(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$-(p'x'+q'y'+r'z')^2.$$

Cerchiamo ora $\cos.mv.vs$, e siccome sono date le equazioni dei piani mv, e vs si avrà

$$\cos.mv.vs=$$

$$\frac{(q'x'-p'y')[y'(x-p)-x'(y-q)]+(p'z'-r'x')[x'(z-r)-z'(x-p)]+(r'y'-q'z')[z'(y-q)-y'(z-r)]}{mv.\text{sen}.m.v\sqrt{[(q'x'-p'y')^2+(p'z'-r'x')^2+(r'y'-q'z')^2]}},$$

Ora il numeratore del secondo membro non è altro che

$$(p'x'+q'y'+r'z')[x'(x-p)+y'(y-q)+z'(z-r)]-(x'^2+y'^2+z'^2)$$
$$[p'(x-p)+q'(y-q)+r'(z-r)]$$

la quale espressione è formata di quantità totalmente conosciute.

Posto tutto ciò supponghiamo $\cos.\rho v.vs=\rho.A$, $\cos\rho v.vm=\rho.B$, $\cos.mv.vs=C$, e siccome $\text{Ang.}^\circ mv.vs=\text{Ang.}^\circ\rho v.vm-\text{Ang.}^\circ\rho v.vs$ avremo $\rho^2=\frac{1-C^2}{A^2+B^2-2ABC}$.

Determinato così il valore di ρ si avrà immediatamente la posizione del piano osculatore; e quindi si conoscerà tutto quanto ci siamo proposti di trovare.

Corollarj. Se la retta m movendosi si conserva tangente alla curva direttrice Gg, siccome $a=0$, $b=0$ avremo dall' equazione (7) $v'.\cos.v.s=1+m'$, e dall'equazione (4) $v'^2=(1+m')^2+\frac{m^2}{R^2}$ per cui sarà $v'.\text{sen}.v.s=\frac{m}{R}$

Se inoltre fingiamo $\text{Ang.}^\circ v.s=90.^\circ$ saranno $1+m'=0$ e $v'=\frac{m}{R}$.

Se poi nella ipotesi di $a=0$, $b=0$ vuolsi che la lunghezza della retta m sia costante, avremo $v'.\cos.v.s=1$, $v'^2=\frac{m^2+R^2}{R^2}$, d' onde si ricava $m=R\text{tang}.v.s$

Se la generatrice sarà ovunque normale alla curva Gg che ne dirigge il movimento, supposti $a=0$, $b=90^\circ$, avremo dalla formola (7) $v'\cos.m.v=m'$, e dalla (9) $v'\cos.v.s=\frac{R-m\cos.R.m}{R}$. La prima ne insegna che essendo m costante sarà $\text{Ang.}^\circ m.v=90^\circ$ e viceversa: e supponendo nella seconda $\text{Ang.}^\circ v.s=0$, nel qual caso le curve v ed s sono parallele, si avrà la nota relazione

che regna fra gli archi corrispondenti di due curve di questa specie.

PROPOSIZIONE QUARTA.

Nella superficie generata dal movimento di una linea retta, che qui si considera, immaginiamo un poligono mistilineo qualunque, e proponiamoci di trovarne la quadratura. Chiamerò S la parte di quella superficie compresa fra un arco qualunque s della curva direttrice, dalle rette generatrici che passano per gli estremi di quell'arco, e da una linea qualunque Mm tracciata in quella superficie. Rappresenterò con x, y, z le coordinate di un punto m di questa linea arbitraria, con v la sua lunghezza, e chiamata n la parte della retta generatrice compresa fra il punto m e la curva Gg, avremo

$$\left(\frac{d^2S}{dv.dn}\right)=\sqrt{\left[\left\{\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)-\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right)\right\}^2+\left\{\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)-\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)\right\}^2\right.}$$

$$\left.+\left\{\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dx}{dn}\right)-\left(\frac{dx}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)\right\}^2\right],$$

Siccome poi le derivate $\left(\frac{dx}{dv}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$, $\left(\frac{dz}{dv}\right)$ rappresentano i coseni degli angoli che la retta tangente la curva v nel punto m, forma cogli assi coordinati, e $\left(\frac{dx}{dn}\right)$, ec. i coseni analoghi relativi alla generatrice, e il secondo membro di quella equazione rappresenta la funzione sen.$v.n$ e sarà

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)\text{sen}v.n,$$

ponendo ora nella formola (7) $m'=0$, cambiando m in n, per cui si ha $v'\cos.v'.n=\cos.a$ ossia $v'.\text{sen}.v.n=\sqrt{v'^2-\cos.^2a}$, sostituito quivi il valore di v' quale fornisce la formola (4) dopo di avervi supposto $m=n$ e costante, si avrà

$$(11)\quad \left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right)=\sqrt{[(\text{sen}.\alpha - n(\alpha'+h'\cos.k\,\text{sen}.\varpi + k'\cos.\varpi))^2}$$

$$+n^2(\theta'\text{sen}.\alpha - k'\cos.\alpha\,\text{sen}.\varpi - h'(\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.k - \cos.\alpha\cos.k\cos.\varpi))^2].$$

Ciò posto si effettui la integrazione per rispetto ad n il che è sempre possibile. Infatti chiamato B^2 il coefficiente di n^2, A il coefficiente di $-2n\text{sen}.\alpha$, e supposto

$$\sqrt{(\text{sen}.^2\alpha - 2An\,\text{sen}.\alpha + B^2n^2)} - Bn = u\,\text{sen}.\alpha,$$ si avrà

$$\left(\frac{d^2S}{ds.du}\right) = -\frac{\text{sen}.^2\alpha}{4}\frac{(B+2Au+Bu^2)^2}{(A+Bu)^3}.$$

Fatto poi $A + Bu = z$ si ha $\left(\frac{d^2S}{ds.dz}\right) = -\frac{\text{sen}.\alpha}{4B^3}\cdot\frac{(B^2-A^2+z^2)^2}{z^3}$: quindi integrando ed eliminando z si avrà

$$\left(\frac{dS}{ds}\right) = \text{Cost.} - \frac{\text{sen}.^2\alpha}{8B^3}\left[(A+Bu)^2 - \frac{(B^2-A^2)^2}{(A+Bu)^2} + 4(B^2-A^2)\log(A+Bu)\right].$$

Si estenda ora questo integrale da $n = 0$ fino ad n eguale a quella funzione di s che rappresenta la parte della retta generatrice compresa fra la direttrice Gg, ed uno dei lati del poligono di cui si cerca la quadratura, onde si avrà

$$\text{Cost.} = \frac{\text{sen}.^2\alpha}{2B^3}\left[AB + (B^2 - A^2)\log.(A+B)\right].$$

eseguita ora di nuovo la integrazione per rispetto ad s, si estenderà il risultato dall'uno all'altro termine di quel lato del poligono che si considera. Ripetuta poi una simile operazione per ciascun lato di quella figura, nella somma algebraica delle quantità successivamente ottenute si avrà l'espressione dell'area richiesta.

Ma in tanta generalità di supposizioni non è possibile spingere più oltre la integrazione. Possiamo per altro ridurre quella ricerca alla misura dell'estensione di una linea, come già usarono in simili indagini il grande Eulero ed altri. Infat-

ti immaginiamo una curva piana qualunque, per esempio la stessa linea Gg, distesa su di un piano. Fingiamo che una retta scorra con un estremo lungo quella curva e sia tangente ad un'altra linea da determinarsi. Prendo nella curva arbitraria un arco di lunghezza s, chiamo v l'arco corrispondente della linea cercata, m la parte della retta generatrice compresa fra quelle linee, e λ l'angolo formato da questa retta colla curva arbitraria e data. Posti nell'equazione (7) Ang.°$m.v=0$, $a=\lambda$ avremo $v'=m'+\cos.\lambda$, ossia $v=m+\int\cos.\lambda.ds$. Si supponga ora

$$C\cos.\lambda=\frac{A\,\text{sen.}^2a}{2B^2}-\frac{\text{sen.}^2a}{8B^3}\left[(A+Bu)^2-\frac{(A^2-B^2)^2}{(A+Bu)^2}+4(B^2-A^2)\log.\frac{A+Bu}{A+B}\right],$$

essendo C una costante richiesta dalla omogeneità, ed avremo $S=\text{Cost}+\frac{v-m}{C}$.

Dunque descritta la curva v poi misurate le linee v ed m si conoscerà l'estensione cercata. Riguardo poi alla lunghezza della retta m si desumerà dall'equazione (8) ponendo in essa

$h=0$, $\omega=\theta=0$, Ang.°$m.v=0$, $a=\lambda$, e si avrà $m(k'+\lambda')=\text{sen.}\lambda$.

Corol.° 1.° Se la superficie sarà sviluppabile avremo $A=B$, come fra poco verrà dimostrato, per cui sparirà la quantità trascendente dalla formola che abbiamo superiormente trovata.

Se la retta m si conserva tangente alla curva direttrice Gg, essendo $a=b=0$ avremo

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right)=n\sqrt{(h'^2\cos.^2k+k'^2)}=\frac{n}{R},\ \text{e quindi}\ \left(\frac{dS}{ds}\right)=\frac{n^2}{2R}+\text{Cost.}$$

Il geometra Tinseau in una memoria presentata all'Accademia di Parigi si propone di quadrare la parte di una superficie sviluppabile, quale attualmente si considera, compresa fra lo spigolo di regresso, due lati rettilinei, ed una curva

piana qualunque; e giunge ad una formola particolare, più complicata ed essenzialmente diversa dalla nostra. Per comprendere la ragione di tale differenza si osservi che il Tinseau considera due lati infinitamente vicini di quella superficie compresi fra lo spigolo di regresso e la linea piana, quindi descritto nel piano di essi un arco circolare avente il centro nell'estremo del lato maggiore in cui tocca la curva direttrice, e per raggio questo lato medesimo, suppone che la parte del lato minore intercetta fra quella circonferenza e la linea piana nominata superiormente eguagli il differenziale del lato, mentre con facilità si prova essere eguale alla somma algebrica dei differenziali del lato e dello spigolo di regresso.

Corol.° 2.° Se la retta m tangente alla direttrice è anche di lunghezza costante sarà $S = \frac{n^2}{2}\int\frac{ds}{R}$: e siccome $\int\frac{ds}{R}$ eguaglia l' angolo di contingenza della direttrice medesima, perciò indicato quest' angolo con Δ avremo $S = \frac{n^2}{2}\Delta$, da cui discende la regola insegnata da Archimede per quadrare la superficie del cono retto.

Corol.° 3.° Fingiamo che la direttrice sia una retta, per es.° lo stesso asse Gx, per cui saranno $h = k = 0$, e supposto costante l' angolo a, siccome $A = 0$, $B = \theta'\text{sen}.a$ avremo

$$\left(\frac{dS}{ds}\right) = \text{Cost.} - \frac{\text{sen}.a}{8\theta'}\left[u^2 - \frac{1}{u^2} + 4\log.u\theta'\text{sen}.a\right] \text{ove } u = \sqrt{(1+n^2\theta'^2)} - n\theta'.$$

Limitando maggiormente le condizioni del problema, desumeremo poi da questa formola le espressioni già trovate da Fergola nell'Accademia di Napoli e da Saladini nell'I. R. Istituto Italiano, per la quadratura della Volta spirale scalena.

Corol.° 4.° Supponendo che la linea direttrice e la curva limite siano parallele, posti nella formola

$$(9) \qquad a = 0,\ b = 90^\circ,\ \text{Ang.}^\circ v.s = 0$$

avremo $v' = 1 - \frac{n}{R}\cos.R.n$, e siccome in questo caso

$\left(\frac{d^2S}{dn.ds}\right)=v'=1-\frac{n}{R}\cos.R.n$, avremo $\left(\frac{dS}{ds}\right)=n-\frac{n^2}{2R}\cos.R.n$, ed integrando di nuovo $S=Cost.+n.s-\frac{n^2}{2}\int\frac{\cos.R.n}{R}ds$. Ora nel piano normale alla curva Gg, pel centro del circolo osculatore si conduca la perpendicolare al raggio R, e si estenda fino ad incontrare la retta n. La parte di questa retta compresa fra la curva s e la perpendicolare ad R, rappresenta un raggio di curvatura della linea s, onde indicata quella parte con R', essendo $R=R'\cos.R.n$, sarà $\int\frac{\cos.R.n}{R}ds=\int\frac{ds}{R'}$, e questo integrale rappresenta l'angolo di contingenza dello spigolo di regresso di quella superficie sviluppabile in cui sono collocate quelle curve parallele. Avremo per conseguenza $S=Cost.+n.s-\frac{n^2}{2}\int\frac{ds}{R'}$, che è la formola trovata.

Corol.° 5.° Supposta la superficie sviluppabile cioè A=B, si finga inoltre che il punto in cui la retta m incontra la direttrice sia il proprio centro di grandezza, e siano $\omega=\theta=0$, m ed a costanti. L'equazione A=B ridurrassi per tanto ad $h'\cos.(a+k)=0$, onde supposto $h'=0$ si avrà $\left(\frac{d^2S}{ds.dn}\right)=\text{sen}.a-nk'$, ossia $\left(\frac{dS}{ds}\right)=n\,\text{sen}.a-\frac{n^2}{2}k'+Cost.$ Estendendo ora da $n=-m$ ad $n=m$ l'integrale, avremo $\left(\frac{dS}{ds}\right)=2m\,\text{sen}.a$, e finalmente $S=2m.s.\text{sen}.a$. Teorema di cui forse non si conobbe finora che il solo caso considerato da Euclide nel quale la direttrice è una linea retta.

PROPOSIZIONE QUINTA.

Immaginiamo il poligono mistilineo considerato nella proposizione antecedente, poi le superficie cilindriche che passano lungo i lati di quella figura e le cui caratteristiche sono perpendicolari per es.° al piano xGy, e proponiamoci di

trovare la cubatura del solido compreso fra quelle superficie e questo piano.

Si chiami M il volume del solido terminato dalla superficie che nella proposizione antecedente si è indicata con S, nella parte inferiore dal piano xGy, e lateralmente dalle superficie cilindriche perpendicolari a quel piano e che passano lungo i lati del quadrilatero S. Indicata poi con t la lunghezza di una curva qualunque che passa per il punto m e da cui dipende il valore di M, avremo

$$\left(\frac{d^3M}{dv.dt.dn}\right)=\left(\frac{dx}{dv}\right)\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dn}\right)-\left(\frac{dz}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dn}\right)\right]+\left(\frac{dx}{dt}\right)\left[\left(\frac{dy}{dn}\right)\left(\frac{dz}{dv}\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{dz}{dn}\right)\left(\frac{dy}{dv}\right)\right]+\left(\frac{dx}{dn}\right)\left[\left(\frac{dy}{dv}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)-\left(\frac{dz}{dv}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right].$$

Ora, siccome le derivate $\left(\frac{dx}{dv}\right)$, $\left(\frac{dy}{dv}\right)$ ec. rappresentano i coseni degli angoli compresi dalla curva v e dagli assi coordinati; $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ec. sono le quantità analoghe per la curva t; ec.; così per quanto ha provato il cel. Lagrange nella meccanica analitica, il secondo membro di quella equazione eguaglierà il prodotto sen.n. $t$sen.$v.nt$, ove $v.nt$ indica l' inclinazione della curva v al piano delle altre due linee n e t. Avremo quindi

$$\left(\frac{d^3M}{dv.dt.dn}\right)=\text{sen}.n.t.\text{sen}.v.nt$$

La curva arbitraria t sia presentemente la stessa ordinata z, per cui ritenute le denominazioni assunte disopra avremo

$$n\text{sen}.n.z=\sqrt{[(x-p)^2+(y-q)^2]}.\ \text{Essendo}$$
$$(Y-y)(p-x)-(X-x)(q-y)=0$$

l' equazione del piano $n.z$, purchè siano X, Y le coordinate di un suo punto qualunque, sarà sen.$v.nz=\frac{(p-x)y'-(q-y)x'}{v\sqrt{[(x-p)^2+(y-q)^2]}}$,

e perciò avremo

$$\left(\frac{d^3M}{dv.dt.dn}\right) = \frac{1}{n.v'}\,[(p-x)y' - (q-y)x'].$$

Sostituendo finalmente il valore dell' espressione $(p-x)y' - (q-y)x'$, introducendo la variabile s in luogo di v, integrando per rispetto a z e supponendo per brevità

$$U = (\text{sen}.h\text{sen}.k\text{sen}.\omega + \cos.h\cos.\omega)\text{sen}.a,$$

$$T = \left\{\begin{array}{l} h'(\cos.a\text{sen}.k + \text{sen}.a\cos.k\cos.\omega)[(\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega - \cos.h\text{sen}.\omega)\text{sen}.a \\ - \text{sen}.h\cos.k\cos.a] - k'[\cos.h(\cos.^2a + \text{sen}.^2a\cos.^2\omega) \\ - \text{sen}.a\text{sen}.h\text{sen}.\omega(\cos.a\cos.k - \text{sen}.a\text{sen}.k\cos.\omega)] \\ + \theta'\text{sen}.a[\cos.a(\cos h\text{sen}.\omega - \text{sen}\, h\text{sen}.k\cos.\omega) - \text{sen}.a\text{sen}.h\cos.k] \\ - a'(\text{sen}.h\text{sen}.k\text{sen}.\omega + \cos.h\cos.\omega) \end{array}\right\}$$

avremo $$\left(\frac{d^2M}{ds.dn}\right) = (nT + U)\,z.$$

Sostituendo ora il valore di z ed integrando per rispetto ad n si avrà

$$(12)\left(\frac{dM}{ds}\right) = \left\{\begin{array}{l} Tn^2[\frac{1}{2}r + \frac{1}{3}n\cos.a\text{sen}.h\cos.k - \frac{1}{3}n\text{sen}.a(\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega \\ -\cos.h\text{sen}.\omega)] + Un[r + \frac{1}{2}n\cos.a\text{sen}.h\cos k \\ -\frac{1}{3}n\text{sen}.a(\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega - \cos.h\text{sen}.\omega)] + \text{Cost}. \end{array}\right\}$$

Esteso ora quest' ultimo integrale da $n = 0$ fino a quel valore di n che rappresenta la lunghezza della parte di questa retta che è compresa fra la curva direttrice e la linea v, quindi integrando per rispetto ad s ed estendendo dall'uno all'altro termine di questa linea si avrà l' espressione del solido rappresentato con M. Il volume del solido domandato nella

proposizione sarà poi la somma algebraica di tanti solidi conformati analogamente a quello di cui abbiamo superiormente esibita la cubatura.

Corol.° 1.° La superficie generata dalla retta m sia sviluppabile e la linea Gg il suo spigolo di regresso. Supposti nella formola trovata $a = b = 0$ avremo

$$\left(\frac{dM}{ds}\right) = \text{Cost.} - \frac{n^2}{2.3}(3r + 2n\text{sen}.h\cos.k)(h'\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k + k'\cos.h).$$

Introduciamo le coordinate della curva Gg, e siccome

$$k'\cos.h + h'\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k = q''p' - q'p'' = p'^3\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right),$$

$$\text{sen}.h\cos.k = r' = \left(\frac{dr}{dp}\right) : \left(\frac{ds}{dp}\right) \text{ si avrà}$$

$$\left(\frac{dM}{dp}\right) = \text{Cost.} - \frac{n^2\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)}{6\left(\frac{ds}{dp}\right)^3}\left[2n\left(\frac{dr}{dp}\right) + 3r\left(\frac{ds}{dp}\right)\right].$$

Sostituendo poi alle variabili s ed n le projezioni di queste linee sul piano Gxy, le quali indicherò rispettivamente con u ed l, siccome $\cos.n.z = \left(\frac{dr}{dp}\right) : \left(\frac{ds}{dp}\right)$, $l = n.\text{sen}.n.z$, $\left(\frac{ds}{dp}\right)^2 - \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = \left(\frac{du}{dp}\right)^2$, per cui $l : \left(\frac{du}{dp}\right) = \pm n : \left(\frac{ds}{dp}\right)$, avremo quindi per ultimo

$$\left(\frac{dM}{dp}\right) = \text{Cost.} - \frac{l^2\left(\frac{d^2q}{dp^2}\right)}{6\left(\frac{du}{dp}\right)^2}\left[3r \pm 2l\frac{\left(\frac{dr}{dp}\right)}{\left(\frac{du}{dp}\right)}\right].$$

Paragonando questa formola con quella proposta dal Tinseau nella memoria citata ove suppone che la linea v sia la traccia della superficie sviluppabile sul piano Gxy, si scorge che

la nostra è differente e assai più semplice di quella, e ciò per l' errore superiormente avvertito.

Corol.° 2.° Se la linea direttrice è lo stesso asse Gx, supposti nella formola (12) $h = k = 0$, ed $r = 0$ si ottiene

$$\left(\frac{dM}{ds}\right) = \frac{1}{3} n^3 \text{sen}.a \text{sen}.\omega (0' \text{sen}.a \cos.a \text{sen}.\omega - a' \cos.\omega)$$
$$+ \frac{1}{2} n^3 \text{sen}.^2 a \text{sen}.\omega \cos.\omega + \text{Cost}.$$

Se fingiamo inoltre $a = 90°$ si avrà

$$\left(\frac{dM}{ds}\right) = \text{Cost}. + \frac{1}{4} n^3 \text{sen}.2\omega.$$

PROPOSIZIONE SESTA.

Si domandano le formole per determinare la posizione dei centri di gravità della superficie e del solido considerati nelle proposizioni antecedenti.

Incominciando dalla superficie quadrilatera indicata superiormente con S, consideriamo la curva descritta dal centro di gravità di quella parte della retta variabile n che è compresa fra la direttrice e la linea arbitraria v che termina quella figura. Fingasi che la densità d'ogni punto di essa curva sia proporzionale alla lunghezza della retta generatrice che passa per il punto medesimo, ed il centro di gravità di questa curva sarà manifestamente il punto cercato.

Ritenendo ora le denominazioni assunte disopra ed indicando con X, Y, Z le coordinate del centro richiesto, mediante le formole notissime che offre la meccanica, si avranno le seguenti equazioni

$$X \int nv'ds = \int nxv'ds, \quad Y \int nv'ds = \int nyv'ds, \quad Z \int nv'ds = \int nzv'ds.$$

Ciò posto dovremo sostituire in queste formole i valori di x, y, z e v' desunti dalle formole (1) e (4), dopo di avervi cam-

biata m in $\frac{1}{2}n$, e di aver sostituito ad n il valore che si ottiene combinando le equazioni (1) con quella che rappresenta la curva arbitraria tracciata nella superficie che si considera.

Se il quadrilatero S fosse attraversato da una di quelle linee chiamate da Monge *lignes de strictions*, dovremo allora considerare separatamente le due parti in cui il quadrilatero medesimo vien diviso da quella curva, ad una di esse si potranno applicare le formole trovate, e quelle per l'altra si otterranno cambiando la n esplicita in $\frac{n'-n}{2}$, e la implicita in x, y, z e v in $\frac{n'+n}{2}$, essendo n' il valore di n che corrisponde alla curva più lontana dalla direttrice.

In quanto poi al centro di gravità del solido M, espresse con X, Y, Z le sue coordinate, e ritenuto quanto sopra, avremo

$$MX=\int\int\int x\left(\frac{d^3M}{ds.dn.dz}\right)dsdndz,\ MY=\int\int\int y\left(\frac{d^3M}{ds.dn.dz}\right)ds.dn.dz,$$

$$MZ=\int\int\int z\left(\frac{d^3M}{ds.dn.dz}\right)ds.dn.dz.$$

Supponiamo ora nelle equazioni (1)

$$\cos.a\cos.h\cos.k-\text{sen}.a(\cos.h\text{sen}.k\cos.\omega+\text{sen}.h\text{sen}.\omega)=P,$$

$$\cos.a\text{sen}.k+\text{sen}.a\cos.k\cos.\omega=Q,$$

$$\cos.a\text{sen}.h\cos.k-\text{sen}.a(\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.\omega-\cos.h\text{sen}.\omega)=R,$$

per cui saranno $x=p+nP$, $y=q+nQ$, $z=r+aR$: sostituendo in quelle formole questi valori non che quello di $\left(\frac{d^3M}{ds.dn.dz}\right)$ ed integrando rispetto a z avremo

$$MX = \int\int (p + nP)(r + nR)(U + nT)\, dn.ds,$$

$$MY = \int\int (q + nQ)(r + nR)(U + nT) dn.ds,$$

$$MZ = \int\int (r + nR)^2 (U + nT) dn.ds.$$

Sviluppando, poi integrando per rispetto ad n, avremo per ultimo

$$MX = \int [prU.n + \tfrac{1}{2}(RUp + PUr + Tpr)n^2 + \tfrac{1}{3}(RUP + RTp + PTr)n^3$$

$$+ \tfrac{1}{4} PRTn^4] ds$$

$$MY = \int [qrU.n + \tfrac{1}{2}(RUq + UQr + Tqr)n^2 + \tfrac{1}{3}(RUQ + RTq + QTr)n^3$$

$$+ \tfrac{1}{4} QRT.n^4] ds$$

$$MZ = \int [r^2 Un + \tfrac{1}{2}(2Ru + Tr^2)n^2 + \tfrac{1}{3}(R^2U + 2RT)n^3 + \tfrac{1}{4} R^2T.n^4] ds.$$

Ove ho omesse le costanti, mentre il solido M si annulla tanto per $n=0$ come per $z=0$. Determinata finalmente n in funzione di s, come si è detto disopra, eseguita l'integrazione rispetto ad s ed estesa fra i limiti dati, si conoscerà la posizione del centro richiesto.

È poi manifesto come mediante le formole trovate si giunga a determinare il centro di gravità di qualsivoglia porzione della superficie ovvero del solido, di cui abbiamo in questo luogo parlato.

PROPOSIZIONE SETTIMA.

Si cerca qual relazione deve aver luogo fra le leggi che regolano il moto della retta generatrice, perchè la superficie descritta possa distendersi su di un piano.

Si osservi che la generatrice dovrà in tal caso serbarsi

tangente ad una curva tracciata in quella superficie, perchè essendo Mm questa curva fatto, nelle equazioni (7) (8) Ang.$^{o}m.v=0$ si avranno

$$v'=m'+\cos.a,\ m(a'+h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega)=\mathrm{sen}.a.$$

Combinando ora queste due equazioni colla formola (4) si ottiene

$$(15)\qquad k'\mathrm{sen}.\omega-h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+\mathrm{tang}.a(h'\mathrm{sen}.k-\theta')=0$$

che è la relazione cercata. Mediante questa equazione essendo dato a ovvero θ in funzione di s si troverà l'altro angolo. Avremo poi $m=\mathrm{sen}.a:(a'+h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega+k'\cos.\omega)$, $v=\mathrm{cost.}+m+\int\cos.a.ds$, e dall'equazione (6) si avra

$$\mathrm{sen}.m.\mathrm{R}s=\mathrm{R}\,\frac{\mathrm{sen}.^2a}{\cos.a}\,(\theta'-h'\mathrm{sen}.k).$$

PROPOSIZIONE OTTAVA.

Supponendo che la superficie considerata finora sia sviluppabile, e che la linea Gg ne sia lo spigolo di regresso, prendiamo a considerare alcune relazioni che regnano fra questo spigolo ed un' altra linea qualunque tracciata in quella superficie.

Supponendo $a=0$ le equazioni (4) (7) forniscono

$$v'.\cos.m.v=1+m',\ v'^2=\frac{m^2}{\mathrm{R}^2}+(1+m')^2,\ v'\mathrm{sen}.m.v=\frac{m}{\mathrm{R}},$$

combinandole poi coll'equazione (10) ne dedurremo facilmente

$$\frac{mv'}{\rho}\cos.m.\rho=v'.\mathrm{sen}.^2m.v+m.(m.v)'\mathrm{sen}.m.v$$

la quale, per essere $e'=\frac{1}{\mathrm{R}}$, e $v'\mathrm{sen}.m.v=m.e'$, supposto $\frac{v'}{\rho}=\mathrm{E}'$ conduce alla seguente

$$\mathrm{E}'\cos.m.\rho=[e'+(m.v)']\mathrm{sen}.m.v.$$

Siccome poi

$$\frac{m.v^3}{\rho}\text{sen}.m.\rho v=(x-p)(y'z''-y''z')+(y-q)(z'x''-z''x')+(z-r)(x'y''-x''y')$$

$$=z''[y'(x-p)-x'(y-q)]+y''[x'(z-r)-z'(x-p)]+x''[z'(y-q)-y'(z-r)],$$

e nella presente ipotesi di $a=0$ si hanno

$$x''=-(h'+2m'h'+mh'')\text{sen}.h\cos.k-(k'+2m'k'+mk'')\cos.h\text{sen}.k$$

$$+2mh'k'\text{sen}.h\text{sen}.k-m(h'^2+k'^2)\cos.h\cos.k,$$

$$y''=(k'+2m'k'+mk'')\cos.k+m''\text{sen}k-mk'\text{sen}.k,$$

$$z''=(h'+2m'h'+mh'')\cos.h\cos.k-(k'+2m'k'+mk'')\text{sen}.h\text{sen}.k$$

$$-2mh'k'\cos.h\text{sen}.k-m(h'^2+k'^2)\text{sen}.h\cos.k,$$

$$y'(x-p)-x'(y-q)=m^2(k'\cos.h+h'\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k),$$

$$x'(z-r)-z'(x-p)=-m^2h'\cos^2.k$$

$$z'(y-q)-y'(z-r)=m^2(h'\cos.h\text{sen}.k\cos.k-k'\text{sen}.h),$$

onde sostituendo nel valore di sen.$m.\rho v$ e riducendo si avrà

$$\text{sen}.m.\rho v=\frac{m^2\rho}{v^3}[(h''k'-h'k'')\cos.k-h'(2k'^2+h'^2\cos.^2k)\text{sen}.k].$$

Ora ponendo mente al valore del prodotto e'^2i' trovato nella terza proposizione si avrà

(16) $\quad E'.\text{sen}.m.\rho v=\frac{m^2}{R^2v^2}i'$ ovvero $E'\text{sen}.m.\rho v=i'\text{sen}.^2m.v.$

Da queste eleganti relazioni (15) (16) si desume poi ancora

(17) $$E'^2\frac{\cos.^2m.\rho\text{sen}.^2m.v+\text{sen}.^2m.\rho v}{\text{sen}.^4m.v}=[e'+(m.v)']^2+i'^2.$$

Per ottenere l'espressione del raggio osculatore della curva di cui si tratta formiamo le quantità seguenti

$$x'y''-x''y'=\left\{\begin{array}{l}(1+3m'+2m'^2-mm'')(h'\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k+k'\cos.h)\\+m(1+m')(k''\cos.h+h''\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k+h'^2\cos.h\text{sen}.k\cos.k\\-2h'k'\text{sen}.h\text{sen}.^2k)+m^2[(h''k'-h'k'')\text{sen}.h\cos.^2k\\+h'^2k'\cos.h\cos.^2k-k'^2h'\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k+k'^3\cos.h]\end{array}\right\}$$

$$y'z''-y''z'=\left\{\begin{array}{l}(1+3m'+2m'^2-mm'')(h'\cos.h\text{sen}.k\cos.k-k'\text{sen}.h)\\+m(1+m')(h''\cos.h\text{sen}.k\cos.k-k''\text{sen}.h-h'^2\text{sen}.h\text{sen}.k\cos.k\\-2h'k'\cos.h\text{sen}^2k)+m^2[(h''k'-h'k'')\cos h\cos.^2k-h'^2k'\text{sen}h\cos.^2k\\-k'^2h'\cos.h\text{sen}.k\cos.k-k'^3\text{sen}.h]\end{array}\right\}$$

$$z'x''-z''x'=\left\{\begin{array}{l}-(1+3m'+2m'^2-mm'')h'\cos.^2k-m(1+m')(h''\cos.^2k\\-2h'k'\text{sen}.k\cos.k)+m^2[(h''k'-h'k'')\text{sen}.k\cos.k\\-(h'^2+k'^2)h'\cos.^2k-2h'k'^2\text{sen}.^2k].\end{array}\right\}$$

Avendosi $\frac{v'^3}{R\rho}\text{sen}.R.\rho v=(y'z''-y''z')p''+(z'x''-z''x')q''+(x'y''-x''y')r''$

sostituendosi si ottiene

$$(18)\qquad \frac{v'^3}{R\rho}\text{sen}.R.\rho v=-m(1+m')[h''k'-h'k'')\cos.k$$
$$-h'(2k'^2-h'k'\text{sen}.k\cos.k+h'^2\cos.^2k)\text{sen}.k].$$

Quadrando poi quelle equazioni e sommandole avremo facilmente l' espressione del raggio osculatore che quì non riferisco, essendo alquanto complicata.

Corol.° 1.° Supponendo che l' angolo $m.v$ debba essere di grandezza costante, dalle equazioni trovate desumeremo le seguenti

$$E'\cos.m.\rho=e'.\text{sen}.m.v,\quad E'\text{sen}.m.\rho v=i'\text{sen}.^2m.v,$$

$$\frac{\text{sen}.^2m.\rho v+\text{sen}.^2m.v\cos.^2m\rho}{\text{sen}.^4m.v}E'^2=e'^2+i'^2,$$

inoltre $m.\cos.m\,\rho=\rho.\text{sen}.^2m.v.$

È noto che il Ch. Lancret pubblicò una memoria sulle sviluppate imperfette, la quale trovasi registrata nel secondo volume delle memorie presentate dai dotti stranieri all' Istituto di Francia. È assai probabile che quell' illustre autore rimarcasse prima di me le formolette eleganti riferite in questo corollario: io però non posso asserirlo non essendomi stato possibile il consultare che il primo volume di quella collezione, che unico possiede la I. R. Biblioteca di Pavia.

Corol.° 2.° Fingasi ora Ang.°$m.v=90°$: ed avremo

$$\text{Ang.}^{\circ}m.\rho=\text{Ang.}^{\circ}m.\rho v,$$

$$e'=\text{E}'\cos.m.\rho,\ i'=\text{E}'.\text{sen}.m.\rho,\ \text{E}'^2=e'^2+i'^2,$$

$$\text{tang}.m.\rho=\frac{i'}{e'},\ 1+m'=0,\ v'=\frac{m}{\text{R}},\ \text{e}\ \rho=m\cos.m.\rho.$$

Le prime tre formole sono quelle trovate da Lancret in una bellissima memoria registrata nel primo volume della collezione superiormente citata, e le ultime conducono alla famosa teoria delle sviluppanti e sviluppate di cui siamo debitori all' immortale Monge. Infatti Essendo $\rho=m.\cos.m.\rho$, Ang.°$m.v=90°$ ne segue che tutte le sviluppate di una curva sono disposte in una superficie che può venir generata dal movimento di una retta, la quale scorra lungo la curva dei centri osculatori di quella linea, e si conservi perpendicolare alla superficie osculatrice la linea medesima. Dall' equazione $m'+1=0$ ossia $m=\text{cost.}-s$, si raccoglie che fissato ad un punto della curva Gg il capo di un filo e disteso in maniera che l' altro estremo incontri la linea Mm, se questo estremo si obbliga a percorrere la stessa curva Mm, il filo distendendosi sulla superficie che è il luogo delle sviluppate, si adatta alla linea Gg, per cui questa linea come pure un' altra evoluta qualunque saranno curve brevissime di quella superficie.

Supposto nell' equazione (18) $1+m'=0$ si ha sen.R.$\rho v=0$, cioè il raggio R è parallelo alla curva v, ossia il piano $m.\rho$ è perpendicolare al raggio R della linea brevissima Gg, e quin-

di tangente alla superficie in cui questa linea è tracciata.

Concludiamo adunque che la superficie luogo delle evolute di una curva qualunque è l'inviluppo dei piani normali a questa linea, ossia è una superficie sviluppabile di cui uno spigolo è la retta che unisce i punti non comuni alle linee ρ ed m.

Corol.° 3.° Se l'inclinazione dello spigolo di regresso ad un piano qualunque zOx è costante, cioè se $k=$ cost.; avremo $y''=m''$sen.k ec.; ma per una sviluppata qualunque di quello spigolo si ha $m''=0$ per cui $y''=0$, ossia $y=As+B$ ove A, B rappresentano due costanti: dunque ciascuna di quelle sviluppanti ha una costante inclinazione al piano nominato, il che non concorda con quanto asserisce il sagacissimo Bobilier nel volume 17.° degli annali di Gergonne.

PROPOSIZIONE NONA.

Date le equazioni dello spigolo di regresso di una superficie sviluppabile, si domanda quella della linea brevissima che congiunge due punti qualisivogliano della medesima superficie.

Sia Mm la linea brevissima di cui si cercano le equazioni. Siccome il piano osculatore della medesima deve essere ovunque perpendicolare alla superficie sviluppabile in cui quella linea è tracciata, dall'equazione (15) supposto

$$\text{Ang.}^{\circ}\rho.m=90^{\circ}. \text{ si avrà}$$

$$e'+(m.v)'=0, \text{ ossia } e+(m.v)=a \text{ costante.}$$

Essendo poi cos.$m.\rho v=$ cos.$m.v$ l'equazione (16) fornirà la seguente

$$E'=i'\text{sen}.m.v.$$

Ciò posto, siccome $m=R(1+m')$ tang.$m.v$. ossia $m'-\frac{\cot.(c-s)}{R}m=-1$, integrando col metodo noto questa equazione alle derivate del primo ordine, si avrà

$$m = \varepsilon^{\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds} \left[b - \int \varepsilon^{-\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds} ds \right]$$

ove ε rappresenta la base dei logaritmi iperbolici e b la costante portata dall' integrazione. Avremo poi ancora

$$1 + m' = \frac{\cot.(a-e)}{R} \left[b - \int \varepsilon^{-\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds} ds \right] . \varepsilon^{\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds},$$

$$v' = \frac{i\varepsilon^{\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds}}{R \operatorname{sen}(a-e)} \left[b - \int \varepsilon^{-\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds} ds \right]$$

e siccome $E' = i' \operatorname{sen}.(a-e)$, $\rho = \frac{v'}{E'}$, ed $\frac{1}{R} = e'$,

quindi avremo

$$m = \frac{b - \int ds . \operatorname{sen}.(a-e)}{\operatorname{sen}.(a-e)}, \quad v' = \frac{b - \int ds \operatorname{sen}.(a-e)}{R \operatorname{sen}.^2(a-e)}, \quad \rho = \frac{b - \int ds \operatorname{sen}.(a-e)}{R . i' \operatorname{sen}.^2(a-e)},$$

mediante le quali equazioni la linea sarà totalmente determinata.

Per determinare poi le due costanti che entrano in quelle equazioni, dagli estremi fra i quali si deve estendere la linea brevissima si condurranno le rette tangenti lo spigolo di regresso; si misureranno le lunghezze di queste tangenti, che indico con m', m'', ed anche le parti del detto spigolo comprese fra il primo termine arbitrario dell' arco s ed i punti in cui lo stesso arco è toccato dalle rette m', m'', le quali parti chiamerò rispettivamente s' ed s''. Ciò posto rappresentata con $m = f(s, a, b)$ l'equazione della linea brevissima, avremo $m' = f(s', a, b)$, $m'' = f(s'', a, b)$ e mediante queste equazioni caveremo i valori delle quantità a e b cercate.

Osservazione. Se vorremmo trovare l' equazione delle linee brevissime che ponno tracciarsi nella superficie generabile dal movimento di una linea retta, qualunque essa siasi, basterà supporre nell' equazione (10) della Prop. 3. l' angolo $m.\rho = 90.^\circ$ e si avrà quanto si cerca.

Se poi vorremo conoscere le linee di massima e minima curvatura, trovato il valore di ρ, ne formeremo la derivata per rispetto ad m' considerata qual variabile unica ed indipendente dalle altre, e questa derivata posta eguale a zero fornirà l' equazione delle linee richieste.

PROPOSIZIONE DECIMA.

Supponiamo che la retta m movendosi descriva quella superficie sviluppabile, la quale distesa su di un piano trasforma la linea Gg data in una linea retta, sia cioè la superficie di Lancret, e proponiamoci di trovare l' equazione dello spigolo di regresso di quella superficie.

Rappresentato colla linea Mm lo spigolo cercato, dovranno essere $\text{Ang.}^\circ m.v = 0$, $\text{Ang.}^\circ ms.\text{R}s = 90^\circ$: per il che le equazioni (5) forniscono

$$\text{Ang.}^\circ \text{R}.m = 90^\circ: \quad h'\cos.k\,\text{sen}\,\omega. + k'\cos.\omega = 0.$$

Essendo poi $\text{R}^2 = 1:(k'^2 + h'^2\cos.^2 k) = \text{sen.}^2\omega : k^2(\text{sen.}^2\omega + \cos.^2\omega)$, avremo $\text{sen.}\omega = \text{R}k'$, $\cos.\omega = -\text{R}h'\cos.k$. Ponendo ora nelle equazioni (7), (9) $\text{Ang.}^\circ m.v = 0$, $\cos.\text{R}.m = 0$, $\text{Ang.}^\circ v.s = \text{Ang.}^\circ m.s = a$, si avranno $v' = m' + \cos.a$, $v'\cos.a = 1 + (m\cos.a)'$, e quindi $ma' = \text{sen.}a$. Per determinare l' angolo a si ponga nell' equazione (4) $v' = m' + \cos.a$, ed essendo $\text{sen.}a - ma' = 0$, $h'\cos.k\,\text{sen.}\omega + k'\cos.\omega = 0$ si avrà

$$\theta'\text{sen.}a - k'\cos.a\,\text{sen.}\omega - h'(\text{sen.}a\,\text{sen.}k - \cos.a\cos.k\cos.\omega) = 0.$$

Sostituendo i valori di $\text{sen.}\omega$, $\cos.\omega$ trovati disopra, dividendo per $\cos.a$, ed osservando che

$$k'^2 + h'^2\cos.^2 k = \frac{1}{R^2}, \text{ avremo } \tang.a = \frac{1}{R(\theta' - h'\sen.k)}.$$

Dall' equazione $\sen.\varpi = Rk'$ poi si ricava

$$\theta' = -\frac{(Rk')'}{Rh'\cos.k} = -R^2[(h''k' - h'k'')\cos.k + h'k'^2\sen.k] \text{ e}$$

$$\tang.a = -1:[(h''k' \quad h'k'')\cos k + h'(2k'^2 + h'^2\cos.^2 k)\sen.k]R^3 = 1:R^3e'^2i':$$

ma $e' = \frac{1}{R}$ onde avremo per ultimo $\tang.a = \frac{e'}{i'}$: come altrimenti ha dimostrato il sagacissimo Lancret.

Dall' equazione $m = \frac{\sen.a}{a'}$ si desume poi $m = e'\sqrt{e'^2 + i'^2}$: $:(e''i' - e'i'')$, onde conoscendo m, a ed ϖ potremo descrivere per punti lo spigolo di regresso della superficie cercata.

Per conseguire le espressioni dell'arco, del raggio osculatore ec. della medesima curva si osservi, che siccome la retta m tocca la linea Mm, dalle formole della proposizione ottava, fatto

$$\text{Ang.}^\circ m.s = 180^\circ - a \text{ caveremo } m' + v' = -\cos.a, \ \rho\sen.a = mv',$$

e per quanto abbiamo osservato nella proposizione nona si avranno

$$e' = I'\sen.a, \ E - a = \text{cost.} \text{ Essendo poi } e' = i'\tang.a$$

si deducono $\quad i' = I'\cos.a, \quad I' = \sqrt{e'^2 + i'^2}$

altre formole dovute a Lancret, dalle quali si ricavano poi

$$E = \text{cost.} + \text{Arc.tang.}\frac{e'}{i'}, \ v = \frac{e'\sqrt{e'^2 + i'^2}}{e'i' - e''i'} - \int \frac{i'ds}{\sqrt{e'^2 + i'^2}}$$

e finalmente $\rho = \frac{v'}{E'}$.

PROPOSIZIONE DECIMA PRIMA.

Si cercano le equazioni della linea di curvatura sferica o sviluppata per il piano di una linea data.

Questa curva considerata la prima volta io credo dal Cel. Monge, è lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile, luogo geometrico delle evolute della curva proposta.

La linea data sia Gg, Mm la richiesta. Siccome i piani tangenti la superficie sviluppabile nominata, cioè i piani osculatori della curva Mm sono perpendicolari alla linea Gg, ed i lati di quella superficie, ossia le rette tangenti la stessa linea Mm sono perpendicolari alla superficie osculatrice della curva Gg, perciò gli angoli di prima e seconda flessione di questa linea saranno rispettivamente eguali agli angoli di seconda e prima flessione dell'altra; ossia $E=i$, ed $I=e$, siccome è noto. Ciò posto indicando con M, r, w le quantità rappresentate disopra con m, ρ e v, siccome $a=90°$ ed Ang.°Mw.Ms=90°, l' equazione (8) fornisce

$$M\,(\,h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\varpi + k'\cos.\varpi\,) = 1$$

e quindi dall' equazione (5) si caverà $R = M.\cos.R.M$, come d' altronde sappiamo. Avendosi poi $\mathrm{sen}.M.w = \cos.M.R$, Ang.°M$w.rw = 0$, dalle equazioni (7) (10) otterremo

$$w'.\mathrm{sen}.R.M = M',\ \frac{Mw'^2}{r}\cos.R.M = MM'w'' - w'(M'^2 + MM'' - w'^2).$$

La prima di queste ci dà $w' = \frac{MM'}{\sqrt{M^2 - R^2}}$ e siccome $\frac{w'}{r} = i'$, eliminata w dalla seconda si avrà $M^2 = R^2 + \left(\frac{R'}{i'}\right)^2$, e quindi

$$w' = Ri' + \left(\frac{R'}{i'}\right)' \text{ ossia } w = \frac{R'}{i'} + \int Ri'.ds.$$

Chiamato poi l il cateto del triangolo rettangolo di cui l' ipotenusa è la retta M, e l' altro cateto il raggio osculatore, R si avrà

$$l^2 = M^2 - R^2 \text{ ossia } R' = li'.$$

Così avremo $\cos.R.M = \frac{Ri'}{\sqrt{R'^2 + R^2 i'^2}}$, quindi $\tang.R.M = \frac{R'}{Ri'}$, e finalmente

$$r = \frac{w'}{i'} = R + \frac{1}{i'}\left(\frac{R'}{i'}\right)' \text{ ossia } r = R + \frac{l'}{i'},$$

ed ecco costruite tutte le formole necessarie per determinare compiutamente la curva dei centri di curvatura sferica di qualsivoglia linea data.

Corol.° 1.° Siccome le evolute della curva Gg, che giacciono nella superficie sviluppabile di cui $M\omega$ è lo spigolo di regresso, sono linee brevissime di quella superficie, così combinando quanto si è detto nella proposizione presente e nella proposizione nona, giungeremo a trovare l'estensione e la curvatura di una qualunque di quelle sviluppate.

Chiamata L la parte del lato di quella superficie sviluppabile che è intercetta fra l'evoluta richiesta e la curva dei centri osculatori, cambiando nelle equazioni trovate nel Corol.° citato m in $l - L$, e angolo di contingenza della detta curva dei centri in i, e viceversa; ds in $d\omega = [Ri' + \left(\frac{R'}{i'}\right)']ds$; $\frac{ds}{R}$ in $\frac{w'}{r}ds = i'ds = di$, e finalmente R in $r = R + \frac{1}{i'}\left(\frac{R'}{i'}\right)'$: siccome $\int \frac{\cot.(a-e)}{R} ds = \int di \cot.(a-i) = -\log.\text{sen}.(a-i)$, e

$$\int_{\varepsilon} \frac{\cot.(a-e)}{R} ds = \frac{1}{\text{sen}.(a-i)},$$

così avremo le seguenti equazioni

$$L = \frac{R'}{i'} - \frac{1}{\text{sen}.(a-i)}\left[b - \int [Ri' + \left(\frac{R'}{i'}\right)'] \text{sen}.(a-i).ds\right],$$

$$v' = \frac{1}{[R + \frac{1}{i'}\left(\frac{R'}{i'}\right)'] \text{sen}.^2(a-i)}\left[b - \int [Ri' + \left(\frac{R'}{i'}\right)'] \text{sen}.(a-i).ds\right]$$

$$\rho = \frac{b - \int [\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)'] \mathrm{sen.}\,(a-i).ds}{e'[\mathrm{R} + \frac{1}{i'}\left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right)'] \mathrm{sen.}^3(a-i)},$$

mediante le quali si troverà facilmente un' evoluta qualunque di una linea data.

Corol.° 2.° Affinchè una linea data possa adattarsi interamente alla superficie di una sfera, la sua sviluppata per il piano, cioè la linea di curvatura sferica, dovrà ridursi ad un unico punto, per cui supposto $\omega = 0$ nella formola che esprime l' estensione di questa linea si avrà

$$\mathrm{R}i' + \left(\frac{\mathrm{R}'}{i'}\right) = 0$$

che è la condizione cercata. Mediante le espressioni di M e dell' angolo R.M si troverà poi la grandezza del raggio e la posizione del centro di quella sfera.

PROPOSIZIONE DECIMA SECONDA.

La curva descritta dall' estremo libero della retta generatrice sia il luogo dei centri osculatori di una linea data, e cerchiamo quanto è necessario per determinare compiutamente questa curva.

Supposto che sia Gg la linea data, ed Mm la curva dei centri osculatori, saranno

$$\mathrm{Ang.}^{\circ}\mathrm{R}.m = 0,\ \mathrm{Ang.}^{\circ}a = 90^{\circ},\ \mathrm{sen}.m.\mathrm{R}s = 0 \text{ ed } m = \mathrm{R},$$

onde dalle equazioni (4) (5) (6) si desumeranno le seguenti

$$m(h'\cos.k\,\mathrm{sen}.\omega + k'\cos.\omega) = 1,\ \mathrm{tang}.\omega = \frac{h'\cos.k}{k'},$$
$$v'^2 = m^2(h'\mathrm{sen}.k - \theta')^2 + m'^2.$$

Formando ora la derivata per rispetto ad s del valore di tang.ω si ottiene $\theta' = \frac{(h''k' - h'k')\cos k - h'k'^2 \mathrm{sen}\,k}{k'^2 + h'^2 \cos^2 k}$, per cui sarà

$$h'\text{sen}.k-\theta'=R^2[(k''h'-k'h'')\cos.k+h'\text{sen}.k(2k'^2+h'^2\cos.^2k)]$$

$$=-R^2e'^2i'=-i'.\ \text{Siccome poi } R=m=\frac{1}{e'},\ \text{ed}$$

$$m'=-\frac{e''}{e'},\ \text{sarà } v'^2=m^2i^2+m'^2,\ \text{ossia}$$

$$(19)\qquad v'^2=R^4(e'^2i'^2+e''^2).$$

Si ponga ora nell' equazione (9) $\cos.R.m=1$, $m=R$, $a=90.°$ e ne verrà $\text{Ang.}°v.s=90°$, da cui si apprende che il piano $m.v$ deve essere perpendicolare alla curva Gg. Dall' equazione (7) poi si ricava $v'\cos.m.v=m'$ e quindi

$$(20)\qquad \text{tang.}R.v=\frac{\sqrt{v'^2-m'^2}}{m'}=-\frac{e'i'}{e''},$$

le quali equazioni semplicissime bastano a rettificare la curva non che a descriverla esattamente per punti.

Osserviamo ora che essendo la linea v tracciata nella superficie sviluppabile di cui lo spigolo di regresso è il luogo dei centri di curvatura sferica della linea Gg, cambiate nelle equazioni (15) (16) della Proposizione ottava m in l, e angolo di contingenza della sviluppata per il piano in i e viceversa: avremo

$$E'.\cos l.\rho=[i'+(lv)']\text{sen}.l.v;\ E'.\text{sen}.l.\rho v=e'\text{sen}.^2l.v;$$

siccome poi $l.v=90°-R.v$ e dalla trigonometria sferica si hanno

$$\text{sen}.l.v.\cos.lv.\rho v=\cos.l.\rho,\ \cos.^2l.\rho+\cos.^2l.v=\cos.^2l.\rho v,$$

ossia $\qquad \text{sen}.^2l.\rho v=\cos.^2R.v-\cos.^2l\rho,\ \text{sarà}$

$$E'^2=[i'+(R.v)']^2+e'^2.\cos.^2R.v.$$

Ma $\qquad \text{tang.}R.v=-\frac{e'i'}{e''}$ onde $\cos.Rv=\frac{e''}{\sqrt{e''^2+e'^2i'^2}}$,

$$\text{ed } (\mathrm{R}.v)' = -\left(\frac{e'i'}{e''}\right)' \frac{e''^2}{e''^2+e'^2i'^2}$$

avremo per conseguenza

$$\mathrm{E}'^2 = \left[i' + \left(\frac{e'i'}{e''}\right)' \frac{e''^2}{e''^2+e'^2i'^2} \right]^2 + \frac{e'^2e''^2}{e''^2+e'^2i'^2}.$$

e quindi si avrà tosto $\rho = \frac{v'}{\mathrm{E}'}$.

Essendo poi $\cos.lv.\rho v = \frac{i'-(\mathrm{R}.v)'}{\mathrm{E}'}$ avremo

$$\text{tang}.lv.\rho v = \frac{e'e''}{\sqrt{e''^2+e'^2i'^2}} : \left[i' + \left(\frac{e'i'}{e''}\right)' \frac{e''^2}{e''^2+e'^2i'^2} \right]$$

onde nulla resta a desiderare intorno alla curva considerata.

Corol.° 1.° Abbiamo trovato $\text{tang}.\mathrm{R}.v = -\frac{e'i'}{e''} = \frac{\mathrm{R}i'}{\mathrm{R}'}$, e dalla proposizione antecedente si ha $\text{tang}.\mathrm{M}.\mathrm{R}' = \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}i'}$, onde ne segue $\text{tang}.\mathrm{R}.v.\text{tang}.\mathrm{R}.\mathrm{M} = 1$, la quale ne apprende che la curva dei centri d' osculo è perpendicolare alla retta M.

Corol.° 2.° Se la curva Mm, di cui sopra, fosse un evoluta della linea Gg, avremmo $v' = \mathrm{R}'$ ossia $v'^2 = \frac{e''^2}{e'^4} = \mathrm{R}^4 e''^2$, e quindi $i' = 0$ ossia $i = 0$; cioè l' evolvente sarebbe una linea piana, come ha osservato credo la prima volta il Monge.

Corol.° 3.° Se la curvatura della linea Gg è costante, per cui $e'' = 0$, saranno $\text{tang}.\mathrm{R}.v = \frac{1}{0}$ ossia la curva dei centri osculatori perpendicolare al raggio R, $v' = \mathrm{R}i'$ ossia $v = \mathrm{R}i + \text{cost.}$, quindi $\mathrm{E}' = i'$ per cui $\rho = \frac{v'}{\mathrm{E}'} = \frac{\mathrm{R}i'}{i'} = \mathrm{R}$. Avremo poi dalla proposizione antecedente $l = 0$, $\mathrm{M} = \mathrm{R}$; cioè la linea dei centri di curvatura sferica coinciderà con quella dei centri osculatori, per cui $\mathrm{I}' = e' = \frac{1}{\mathrm{R}}$, ossia $\mathrm{I} = e = \frac{s}{\mathrm{R}} + \text{Cost.}$ Ciascu-

na delle linee Gg, M*m* sarà la curva dei centri d'osculo dell' altra, come ha osservato il Monge in una elegantissima memoria che verte sull' integrazione delle equazioni che non soddisfanno ai criterj d' integrabilità.

Corol.° 4.° Colle formole trovate si possono risolvere molte questioni. Eccone una per esempio.

Si cerca l' equazione generale di quelle curve l'estensione delle quali, e l' estensione corrispondente della curva dei centri osculatori differiscono di una quantità costante.

L' equazion di condizione sarà $v' = \pm 1$ ossia, attesa la formola (19) sarà

$$e'^4 = e'^2 i'^2 + e''^2.$$

Per introdurre le coordinate si osservi che $e'^2 = p''^2 + q''^2 + r''^2$,

$$e'^4 i'^2 = e'^2 (p'''^2 + q'''^2 + r'''^2) - (p'' p''' + q'' q''' + r'' r''')^2 - e'^6,$$

onde quell' equazione si ridurrà alla seguente

$$p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 = 2(p''^2 + q''^2 + r''^2)^2,$$

Se la curva richiesta sarà piana, facilmente si troverà la sua equazione finita.

PARTE SECONDA

DELLE SUPERFICIE GENERABILI DAL MOVIMENTO DI UNA LINEA PIANA QUALUNQUE.

PROPOSIZIONE PRIMA.

Una linea piana si muova nello spazio in maniera che un punto individuato del piano di essa scorra lungo una linea data, roti comunque intorno a quel punto, e la linea medesima varii di grandezza con legge determinata e tale, che il punto in cui il piano della linea generatrice incontra succes-

sivamente la curva che ne dirigge il movimento, sia sempre disposto similmente per rispetto alla linea medesima.

Supponendo che si conoscano la linea direttrice, la generatrice e le leggi colle quali questa linea si muove e varia di grandezza, cerchiamo le equazioni della superficie che viene descritta.

Tutte le estensioni che dovremo considerare in appresso le supporrò riferite a tre assi ortogonali Gx, Gy, Gz; e riterremo poi le denominazioni già assunte nella prima parte di questa memoria.

Sia Gg la linea che deve percorrere un punto G individuato nel piano della generatrice considerata nella posizione primitiva, ed M qualunque punto della medesima. Nel mentre che il punto G percorre l'arco $Gg=s$, il punto M descriva la curva Mm, e supposto $GM=m$, sia $gam=m.n$, essendo n una funzione data dell'arco $Gg=s$, dipendente dalla legge con cui varia la dimensione della curva generatrice. Questa curva considerata allorchè il suo piano passa pel punto g sia mhf. Supponiamo che gli assi gx, gy, gz ortogonali accompagnino la generatrice nel suo movimento, di modo che la retta gex tocchi costantemente la direttrice Gg, ed il piano ygz non roti intorno a quella retta. Sia poi gcf la sezione comune al piano della generatrice $gmhf$ e al piano xgy, e gbh una retta arbitraria tracciata nel primo piano. Ciò posto, dal centro g all' intervallo eguale all' unità si descriva la superficie sferica $abcde$, su cui si conduca l' arco di circolo massimo ad perpendicolare all'arco cde: finalmente si suppongano

$$\text{Arc.}ec=\Delta,\ \text{Arc.}bc=\lambda,\ \text{Ang.}^{\circ}eca=\omega,$$
$$\text{Arc.}ab=\mu,\ \text{Arc.}ea=a,\ \text{Ang.}^{\circ}aec=\varpi+\theta,$$

e finalmente $\mu+\lambda=\tau$.

Conoscendo gli angoli Δ, λ, ω, a, ϖ, e θ che sono funzioni di s, e l'angolo μ funzione di quell'arco della generatrice considerata nella posizione primitiva che corrisponde ad hm, il quale indicherò con t, conoscendo dico quegli angoli, si

conoscerà la superficie di cui si tratta. Infatti dalla trigonometria sferica abbiamo

$$\text{(I)}\ \cos.a = \cos.\Delta\cos.\tau + \text{sen}.\Delta\,\text{sen}.\tau\cos.\omega, \cot.\varpi = \frac{\cot.\tau\,\text{sen}.\Delta - \cos.\omega\cos.\Delta}{\text{sen}.\omega}$$

per cui se nelle equazioni (1) della prima parte cambieremo m nel prodotto $m.n$, vi porremo i valori di a, ϖ forniti dalle precedenti equazioni (I) ed il valore di m espresso per t, quale fornisce l'equazione della generatrice considerata nella prima posizione, eliminando dalle risultanti le variabili t ed s si avrà l'equazione richiesta.

Se poi vi elimineremo soltanto t, si avranno due equazioni che rappresentano la generatrice considerata allorquando il suo piano incontra la direttrice nel punto g, ed eliminando s avremo le equazioni della curva generata dall' estremo variabile M del raggio vettore GM.

PROPOSIZIONE SECONDA

Si cerca l' espressione della superficie di cui abbiamo superiormente parlato.

Si chiami S la parte della superficie richiesta che è compresa fra le curve $mh = \text{I}$, $\text{M}m = v$ ed altre due qualisivogliano: per quanto si è detto nella proposizione quarta della prima parte sarà

$$\left(\frac{d^2\text{S}}{dv.d\text{I}}\right) = \text{sen}.v.\text{I}, \text{ e quindi siccome } \text{I} = n.t \text{ avremo}$$

$$\left(\frac{d^2\text{S}}{ds.dt}\right) = n\left(\frac{dv}{ds}\right)\text{sen}.v.\text{I}.$$

Indicato poi con a l'angolo cae e con ξ l'angolo $mv.ms$ formato dai piani che passano per la retta gm e per le tangenti alle curve v ed s, dalla risoluzione dei triangoli sferici avremo $\cot.a = \frac{\cot.\Delta\,\text{sen}.\tau - \cos.\omega\cos.\tau}{\text{sen}.\omega}$,

$$\cos.v.\mathrm{I} = \cos.l.v.\cos.l.\mathrm{I} + \mathrm{sen}.l.v\mathrm{sen}.l.\mathrm{I}.\cos.(a - \xi)$$

ove colla lettera l rappresento la retta $gm = m.n$.

Essendo poi tang.$l.\mathrm{I} = \frac{m\mu_{,}}{m_{,}}$, ove gli apici posti al piede delle lettere μ ed m indicano le derivate prese per rispetto a t, siccome $m^2\mu_{,}^2 + m_{,}^2 = 1$, avremo sen. $l.\mathrm{I} = m\mu_{,}$, $\cos.l.\mathrm{I} = m_{,}$ e quindi $\cos.v.\mathrm{I} = m_{,}\cos.l.v + m\mu_{,}.\mathrm{sen}.l.v\cos.(a - \xi)$. Ora dalle equazioni (7) (8) cambiatovi m in $m.n$ si hanno

$$v'.\cos.l.v = mn' + \cos.a,\ v'\mathrm{sen}.l.v.\cos.\xi = \mathrm{sen}.a$$

$$- mn(a' + h'\cos.k\mathrm{sen}.\varpi + k'\cos.\varpi),$$

e quindi per l' equazione (4) avrassi

$$v'\mathrm{sen}.l.v.\mathrm{sen}.\xi = mn[\theta'\mathrm{sen}.a - k'\cos.a\mathrm{sen}.\varpi$$

$$- h'(\mathrm{sen}.a\mathrm{sen}.k - \cos.a\cos.k\cos.\varpi)],$$

e finalmente

$$\text{(II)}\quad \left(\frac{d^2\mathrm{S}}{ds.dt}\right) = n\sqrt{\left\{\begin{array}{l} [\mathrm{sen}.a - mn(a' + h'\cos.k\mathrm{sen}.\varpi + k'\cos.\varpi)]^2 \\ + m^2n^2[\theta'\mathrm{sen}.a - k'\cos.a\mathrm{sen}.\varpi - h'(\mathrm{sen}.a\mathrm{sen}.k \\ - \cos.a\cos.k\cos.\varpi)]^2 + (mn' + \cos.a)^2 \\ - [m_{,}(mn' + \cos.a) + m\mu_{,}\cos.a[\mathrm{sen}.a \\ - mn(a' + h'\cos.k\mathrm{sen}.\varpi + k'\cos.\varpi)] \\ + m^2n\mu_{,}\mathrm{sen}.a[\theta'\mathrm{sen}.a - k'\cos.a\mathrm{sen}.\varpi \\ - h'(\mathrm{sen}.a\mathrm{sen}.k - \cos.a\cos.k\cos.\varpi)]]^2 \end{array}\right\}}$$

che è quanto ci siamo proposto di trovare.

È cosa facile l' applicare la nostra formola ai casi particolari, per cui mi limiterò a pochi esempj e ai più comuni.

Uno dei teoremi più importanti sulla quadratura delle su-

perficie si è quello di Guldino. Per darne una dimostrazione assai semplice, divierò per un momento dalla formola (II).

La curva generatrice sia sempre normale alla linea Gg, non roti intorno al punto G, nè varj di grandezza, per il che saranno $n=1$, Ang.°$v.I=90°$, $a=90°$. e quindi mediante la formola (9) della prima parte, avremo

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dt}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)=1-\frac{m.\cos.R.m}{R}.$$

Nel piano mgf in cui giace il raggio osculatore R della curva Gg si conduca una retta qualunque gbh e si rappresentino rispettivamente con φ ψ gli angoli mgh, R.gh, per cui sarà Ang.°R.$m=\varphi-\psi$, ove φ è funzione di t e non di s, e ψ funzione di s soltanto. Avremo quindi

$$\left(\frac{d^2S}{ds.dt}\right)=1-\frac{m}{R}\cos.(\varphi-\psi),\text{ ossia } S=s.t-\int\frac{\cos.\psi}{R}ds\int m.\cos.\varphi.dt$$
$$-\int\frac{\text{sen}.\psi}{R}ds\int m.\text{sen}.\varphi.dt.$$

Ora se il punto g è il centro di gravità della curva generatrice, estesi gli integrali rispetto a t a tutta la curva medesima, si hanno $\int m.\cos.\varphi dt=0$, $\int m.\text{sen}.\varphi dt=0$, dunque chiamata I la totale estensione di quella linea avremo $S=s.I$ che è quanto ec.

Nei corpi dei quali in pratica occorre spesso di misurare la superficie, il piano della generatrice non rota, e la direttrice è una retta che supporremo essere l'asse Gx. Saranno adunque $a'=t'=0$, $h=k=0$ e la formola (II) si trasformerà nella seguente

$$\text{(III)}\quad \left(\frac{d^2S}{ds.dt}\right)=n\sqrt{\left(\text{sen.}^2a+(mn'+\cos.a)^2-[m_{,}(mn'+\cos.a)-m\mu_{,}\text{sen.}a\cos.a]^2\right)}.$$

Supponiamo dippiù che il piano xGy arbitrario sia perpendico-

lare al piano generatore per cui $w = 90°$, e fatto $\lambda = 0$ avremo

$$\cos.a = \cos.\Delta.\cos.\mu, \quad \cot a = \cot.\Delta \operatorname{sen}.\mu \text{ e quindi,}$$

$\cos.a \operatorname{sen}.a = \cos.\Delta \operatorname{sen}.\mu$. Introducendo questi valori e sostituendo μ alla variabile t, se ciò riesce più comodo si avrà,

$$\left(\frac{d^2S}{ds.d\mu}\right) = \sqrt{\left([\operatorname{sen}.a^2 + (mn' + \cos.a)^2]\left(\frac{dI}{d\mu}\right)^2 - n^2[(mn' + \cos.a)\left(\frac{dm}{d\mu}\right) + m\cos.\Delta \operatorname{sen}.\mu]^2\right)}$$

e siccome

$$\left(\frac{dI}{d\mu}\right)^2 = n^2\left[m^2 + \left(\frac{dm}{d\mu}\right)^2\right], \text{ posto } \left(\frac{dm}{d\mu}\right) = m_{,},$$

si avrà per ultimo

$$\left(\frac{d^2S}{ds.d\mu}\right) = n\sqrt{\left((m^2 + m_{,}^2)\operatorname{sen}.^2\Delta + [m^2 n + (m\cos.\mu - m_{,}\operatorname{sen}.\mu)\cos.\Delta]^2\right)}.$$

Se la superficie fosse cilindrica avremmo $n' = 0$ e quindi dalla formola (III) si caverà

$$\left(\frac{dS}{dI}\right) = s\sqrt{\left(1 - \cos.^2\Delta.\cos.^2(II - \mu)\right)}$$

Se ora si finge $\operatorname{sen}.\lambda = \cos.\Delta\cos.(II - \mu)$, si potrà descrivere una curva dalla rettificazione della quale dipenda l'integrale che rimane a trovarsi; come già si è fatto sul fine della quarta Proposizione.

Se la superficie è conica sarà, n proporzionale ad s, onde supposto $n = a.s$ si avrà

$$\left(\frac{dS}{d\mu}\right) = \frac{1}{2}as^2\sqrt{\left((m^2 + m_{,}^2)\operatorname{sen}.^2\Delta + [am^2 + (m\cos.\mu - m_{,}\operatorname{sen}.\mu)\cos\Delta]^2\right)}.$$

Se il cono è retto, essendo $\Delta = 90°$, avremo

$$\left(\frac{dS}{d\mu}\right) = \frac{1}{2}as^2\sqrt{(m^2 + m_{,}^2 + a^2m^4)};$$

se poi il cono è obbliquo, ma la base circolare, supposto $m = 1$ si avrà

$$\left(\frac{dS}{d\mu}\right) = \frac{1}{2}\, as^2 \sqrt{\left(\text{sen.}^2\Delta + (a + \cos.\Delta \cos.\mu)^2\right)}$$

che è la formola trovata da Eulero, Leibnitz, ed altri.

PROPOSIZIONE TERZA.

Si cerca il volume del solido terminato dalla superficie considerata superiormente, e da altre qualisivogliano, delle quali si conosca la natura.

Si chiami M il volume del corpo i di cui estremi sono, la superficie S della proposizione antecedente, il piano della generatrice considerato in una posizione qualunque, la superficie generata dalla retta $gm = l$, ed altre superficie di natura conosciuta.

Ritenendo le denominazioni adottate finora, per quanto si è osservato nella Prop. 5. della prima parte si avrà

$$\left(\frac{d^3 M}{dv.dl.dl}\right) = \text{sen.}v.\Pi.\text{sen.}\,\Pi\,,$$

siccome poi $\text{sen.}v.\Pi = \text{sen.}l.v.\text{sen.}(a - \xi)$, sarà per conseguenza

$$\left(\frac{d^3 M}{ds.dl.dl}\right) = \left(\frac{dv}{ds}\right) \text{sen.}l.v.\text{sen.}\Pi..\text{sen.}(a - \xi).$$

Sostituendo ora i valori delle quantità che formano il secondo membro di questa equazione, quali abbiamo trovati sul principio della proposizione antecedente, ponendovi

$$mn = l,\ \text{sen.}l.\mathrm{I} = l\left(\frac{d\mu}{dl}\right),\ \text{avremo}$$

$$\left(\frac{d^3 M}{ds.dl.dl}\right) = l\mu_{,}\text{sen.}a[\text{sen.}a - \mathrm{L}'(a' + h'\cos.k\,\text{sen.}\omega + k'\cos.\omega)]$$

$$- l^2\mu_{,}\cos.a[\theta'\text{sen.}a - k'\cos.a\,\text{sen.}\omega - h'(\text{sen.}a\,\text{sen.}k$$

$$- \cos.a\cos.k\cos.\omega)\,]$$

ove $\mu_{,}=\left(\frac{d\mu}{dl}\right)$: integrando ora per rispetto ad l ed estendendo fra i limiti di $l=o$ e di $l=mn$ si avrà

$$\text{(IV)}\quad \left(\frac{d^3 M}{ds.dl}\right)=m^2n^2\mu_{,}\text{sen}.a\left(\frac{1}{2}\text{sen}.a-\frac{1}{3}mn(a'+h'\cos.k\text{sen}.\omega\right.$$

$$+k'\cos.\omega)]-\frac{1}{3}m^3n^3\cos.a[\theta'\text{sen}.a-k'\cos.a\text{sen}.\omega$$

$$\left.-h'(\text{sen}.a\text{sen}.k-\cos.a\cos.k\cos.\omega)\right)$$

che è la formola cercata.

Mediante questa formola si potrà poi trovare il volume del solido di cui si è parlato nella proposizione.

Veniamo ora alle applicazioni.

Riferirò qui pure una dimostrazione del teorema di Guldino, senza farla dipendere dalla formola (IV), perchè riesca più semplice.

Fingiamo che la grandezza della generatrice resti invariabile, il punto G rappresenti il centro di gravità dell'area terminata da quella linea, ed il suo piano sia sempre perpendicolare alla curva Gg che ne dirigge il movimento. Avremo per conseguenza

$$\text{sen}.v.\Pi=\cos.v.s \text{ e quindi } \left(\frac{d^3M}{ds.dl.dl}\right)=v'.\text{sen}.l.\text{I}.\cos.v.s;$$

si sostituisca il valore di $v'.\cos.v.s$ che fornisce la formola (9) della prima parte nell' ipotesi di $a=90°$ e si avrà

$$\left(\frac{d^3M}{ds.dl.dl}\right)=\left(1-\frac{m.\cos.\text{R}.m}{\text{R}}\right)\text{sen}.m.t.$$

Supponendo Ang.°R.$m=\phi-\psi$ come nella proposizione, sostituendo ed integrando si ha

$$\text{M}=s\int\int\text{sen}.m.tdm.dt-\int\frac{\cos.\psi}{\text{R}}ds\int\int m.\cos.\phi\text{sen}.m.t.dm.dt$$

$$-\int \frac{\text{sen}\,\psi}{R}\, ds \int\int m\,\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.m.t.dt.dm\,.$$

Estesi ora gli integrali rispetto a t ed m, a tutta la superficie generatrice, siccome il punto G è il centro di gravità di quella superficie, saranno

$$\int\int m\cos.\varphi\,\text{sen}.m.t.dt.dm = 0,\quad \int\int m\,\text{sen}.\varphi\,\text{sen}.m.t.dt.dm = 0,$$

e siccome $\int\int \text{sen}.m.t.dt.dm$ rappresenta l'area generatrice, indicata quest'area con A, avremo

$$M = As \quad \text{che è quanto ec.}$$

Supponiamo che l'area generatrice debba essere sempre perpendicolare alla curva che ne dirigge il movimento, per cui saranno $\Delta = w = 90°$, $a = a = 90°$, e $\omega + \theta = \tau = \lambda + \mu$ e la formola (IV) si ridurrà alla seguente

$$\left(\frac{d^2M}{d\mu.ds}\right) = m^2 n^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} mn(h'\cos.k\,\text{sen}.\omega + k'\cos.\omega)\right];$$

siccome poi le quantità n, h, k e λ sono funzioni della sola variabile s, ed m funzione soltanto dell'angolo μ, avremo integrando

$$\left(\frac{dM}{ds}\right) = n^2 \int \frac{1}{2} m^2.d\mu - \frac{n^3}{3}(h'\cos.k\cos.\lambda - k'\text{sen}\lambda.)\int m^3\text{sen}.\mu.d\mu$$

$$- \frac{n^3}{3}(h'\cos.k\,\text{sen}.\lambda + k'\cos.\lambda)\int m^3\cos.\mu.d\mu.$$

Fingiamo che il punto in cui l'area generatrice incontra la linea Gg, sia il proprio centro di gravità e saranno visibilmente

$$\int m^3\text{sen}.\mu.d\mu = 0,\quad \int m^3.\cos.\mu.d\mu = 0;$$

siccome poi chiamata A la totale estensione della generatrice considerata nella posizione primitiva, si ha $\int \frac{1}{2} m^2 d\mu = A$, perciò

indipendentemente dalla natura della linea direttrice e dalla legge colla quale la generatrice rota intorno a questa linea avremo

$$M = A\int n^2 ds$$

teorema che parmi degno di qualche osservazione.

Si finga $n = \frac{a-s}{a}$, essendo a costante, come nel caso comune in cui l'asse del cono è rettilineo, si avrà $M = \frac{A}{a^2}\int (a-s)^2 ds$. Integrando quindi ed estendendo fra i limiti di $s = 0$ e di $s = a$ avremo

$$M = \frac{1}{3} A.a.$$

Dunque la regola insegnata da Archimede per trovare la solidità di un cono a base circolare ed estesa dai moderni alla misura dei coni di qualunque base, vale quand'anche l'asse sia una curva e l'area generatrice roti intorno a quell'asse con una legge qualunque, purchè si conservi perpendicolare ad esso.

Particolarizzando ancora più questo teorema ne segue quello di Guldino superiormente dimostrato. Infatti se $n=1$, cioè l'area generatrice non varia durante il suo movimento si avrà

$$M = As.$$

Ognuno vede quali e quante applicazioni potremo fare della nostra formola; mi limiterò per altro alla seguente perchè presenta qualche cosa di nuovo.

La generatrice sia sempre perpendicolare al piano xGy e non roti intorno alla direttrice, inoltre questa linea sia lo stesso asse Gx, onde saranno $h = k = 0$, $\alpha' = \theta' = 0$, $\omega = 90°$. $\lambda = 0$, sen.a sen.α = sen.Δ e $\left(\frac{d^2M}{ds.dl}\right) = \frac{1}{2} m^2 n^2 \mu$ sen.Δ. Fingiamo $n^2 = 2as + bs^2$, ove a, b siano quantità costanti, e finalmente $m=1$. Egli è manifesto che il solido per tal modo generato sarà del secondo ordine ed avremo per esso

$$M = \frac{\mu \text{sen.}\Delta}{2.3} (3as + bs^2)s ,$$

di qui si ricavano i seguenti teoremi, i quali parmi che si credano tuttora esclusivi ai solidi di rivoluzione.

Se per la retta luogo dei centri dei circoli generatori una superficie di secondo ordine si conducono due piani qualisivogliano, l' unghia solida compresa fra essi ed il piano di uno di quei cerchj è proporzionale all'angolo che formano le rette lungo le quali i primi due piani segano quello del cerchio nominato.

Se la curva che regola le variazioni del circolo generatore è una parabola avremo $b = 0$, onde

$$M = \frac{\mu \text{sen.}\Delta}{4} s.2as = \frac{1}{4} \mu n.^2 s \text{sen.}\Delta, \text{ e se } \mu = 2\pi \text{ sarà}$$

$$M = \frac{1}{2} \pi n.^2 s.\text{sen.}\Delta ,$$

cioè il solido terminato dalla superficie generata e dal piano di un cerchio qualunque vale la metà del cilindro circoscritto.

Supposto che l' equazione della curva regolatrice sia

$$n^2 = \pm \frac{B^2}{A^2} (2As - s^2), \text{ cioè supposti } a = \pm \frac{B^2}{A^2}, \; b = \mp \frac{B^2}{A^2}$$

fatto $\mu = 2\pi$ avremo

$$M : \pm \pi (As^2 - \frac{1}{3} s^3) \text{sen.}\Delta = B^2 : A^2 ;$$

cioè se la regolatrice è un elissi od un iperbole, il rapporto geometrico che ha il solido terminato dalla superficie di secondo ordine e da un cerchio qualunque, alla differenza dei volumi di un cilindro obbliquo dell' angolo Δ, di cui l'altezza ed il raggio della base sono rispettivamente il semidiametro della curva regolatrice, luogo dei centri de' circoli generatori, e la parte di questo o del suo prolungamento, intercetta dal solido che si considera, e del cono rettangolo obbli-

quo pure dell'angolo Δ, che ha per asse la stessa parte dell' asse nominata; il rapporto geometrico di questi solidi eguaglia quello che hanno fra loro il quadrato del diametro della direttrice conjugato al suddetto e di questo diametro medesimo.

Pongo fine al presente lavoro con un' altra osservazione relativa al teorema di Guldino. È noto ai Geometri quanto siasi scritto intorno a questo argomento, e come venisse ampliato da Eulero, Bernoulli, Vincenzo Riccati, e da Monge; parmi però che esso riceva, se l'amor del vero non m'inganna, una nuova rimarcabile estensione dal teorema dimostrato nella terza proposizione di questa seconda parte. Nessun Geometra poi prima del Chiar. Professor Bordoni sembrami aver osservato che regge il teorema di Guldino, anche quando l'area generatrice ruoti intorno al proprio centro di gravità, e tutti ammisero, ma nessuno ha dimostrato che le altre condizioni siano essenziali, prima di quell'illustre Geometra nel XX. Volume degli Atti di questa celebre Società delle Scienze. Siccome però la parte del teorema reciproco del Sig. Bordoni, cioè quella che riguarda la genesi delle superficie lascia forse tutt'ora qualche cosa a desiderare, così ho divisato di tentare la dimostrazione di quella parte, cioè di provare che se la superficie generata dal movimento di una linea piana qualunque è proporzionale al prodotto dell' estensione di quella linea, e dell'altra che vien descritta dal proprio centro di gravità, il piano della generatrice sarà sempre perpendicolare alla curva percorsa dal centro nominato, e quando la linea generatrice non sia un cerchio, non potrà rotare intorno al centro medesimo.

Immaginiamo la generatrice nella sua posizione primitiva. Conduciamo pel suo centro di gravità G tre assi ortogonali Gx, Gy, Gz, di cui i primi giacciano nel piano di quella linea. Siano x, y le coordinate di un suo punto qualunque, e fingiamo che allorquando il punto G occupa il luogo cui corrispondono le coordinate p, q, r, siano x', y', z' quelle

del punto nominato della generatrice ed s l' estensione della curva percorsa dal centro suddetto.

Fra le coordinate x, y, x', y', z', p, ed r sussisteranno le seguenti equazioni

$$(1) \qquad x'=p+ax+a'y,\ y'=q+bx+b'y,\ z'=r+cx+c'y$$

ove le quantità a, a', b ec. che sono funzioni di s, rappretano coseni di angoli.

Indicando ora con t l'arco della generatrice compreso fra l' asse Gx ed il punto x, y, e con S quella parte della superficie che si considera, la quale è intercetta fra le curve descritte da un estremo della generatrice, e dal punto x, y; e l' intera generatrice considerata nella posizione primitiva e nella seconda; per l' enunciato del teorema dovrà essere S =H.T.s: essendo H una quantità costante, e T la lunghezza totale della generatrice.

Ora siccome

$$\left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\sqrt{\left[\left(\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right)-\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)\right)^2+\left(\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dz'}{ds}\right)\right.\right.}$$
$$\left.\left.-\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right)\right)^2+\left(\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)-\left(\frac{dz'}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)\right)^2\right].$$

Se si formano le derivate per rispetto a t e ad s delle equazioni (1) coll' avvertenza che le quantità p, q, r, a, a' ec. sono funzioni di s e non di t, ed x, y sono funzioni di questa variabile t ma non della prima, si avrà

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)-\left(\frac{dz'}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{dt}\right)=\mathrm{A}\left(\frac{dx}{dt}\right)+\mathrm{B}\left(\frac{dy}{dt}\right),$$

più termini moltiplicati per i prodotti di una qualunque delle quantità x ed y per le derivate $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)$, e dove per brevità ho supposto

$$A = c\left(\frac{dp}{ds}\right) - a\left(\frac{dr}{ds}\right),\quad B = c'\left(\frac{dp}{ds}\right) - a'\left(\frac{dr}{ds}\right),$$

Così avremo

$$\left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dz'}{ds}\right) - \left(\frac{dz'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right) = A'\left(\frac{dx}{dt}\right) + B'\left(\frac{dy}{dt}\right) + \text{ecc.},$$

$$\left(\frac{dx'}{dt}\right)\left(\frac{dy'}{ds}\right) - \left(\frac{dy'}{dt}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right) = A''\left(\frac{dx}{dt}\right) + B''\left(\frac{dy}{dt}\right) + \text{ecc.}$$

ove il significato di A', B' ec. è analogo a quello di A, e B.

Supponiamo ora espressa la variabile y da una serie ordinata per rispetto alle potenze crescenti dell' arco t e sia $y = Mt^m + Nt^n + \text{ec.}$ ove non può essere $m < 1$, altrimenti a $t = 0$ corrisponderebbe $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{0}$, il che è assurdo.

Noi supporemo che l'arco generatore della superficie S abbia le estremità nei punti a cui corrispondono $t = \tau$ e $t = \tau'$, onde sarà $T = \tau - \tau'$, quindi nelle serie che forniscono i valori di x, y ec. espressi per t, terremo a calcolo solo quei termini i quali non contengono alcuna dimensione delle quantità t, τ e τ'. Del che se ne vedrà tosto la ragione.

Essendo G il centro di gravità dell'arco T sarà $\int_{\tau'}^{\tau} y\,dt = 0$ ossia

$$\frac{M}{m+1}\left(\tau^{m+1} - \tau'^{m+1}\right) + \frac{N}{n+1}\left(\tau^{n+1} - \tau'^{n+1}\right) + \text{ec.} = 0$$

per cui il parametro M conterrà almeno $n - m$ dimensioni degli archi τ, τ', e sarà per conseguenza $y = 0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0$.

Dall'equazione $\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ si hanno $\left(\frac{dx}{dt}\right) = 1$, $x = t + \text{Cost.}$, ove i termini ommessi contengono dimensioni di t, τ e τ' maggiori della prima.

Siccome poi $\int_{\tau'}^{\tau} x\,dt = 0$, ossia $(\tau - \tau')\text{cost.} + \frac{1}{2}(\tau^2 - \tau'^2) + \text{ec.} = 0$,

avremo Cost.=o ed x=o. Sostituendo ormai i valori trovati nell' equazion di condizione, eseguendo l'integrazione rispetto a t ed estendendo da $t=\tau$ a $t=\tau'$ si avrà

$$(\tau-\tau')\int\sqrt{(A^2+A'^2+A''^2)}ds+\text{ec.}=H(\tau-\tau').s,$$

ove i termini ommessi nel primo membro contengono potenze di τ, τ' non minori della seconda. Dunque quell' equazione non può essere identica quando non sia

$$\int\sqrt{(A^2+A'^2+A''^2)}ds=Hs,$$

qualunque siasi s, cioè

$$\sqrt{(A^2+A'^2+A''^2)}=H,$$

o finalmente

$$\sqrt{\left[\left[c\left(\frac{dp}{ds}\right)-a\left(\frac{dr}{ds}\right)\right]^2+\left[a\left(\frac{dq}{ds}-b\left(\frac{dp}{ds}\right)\right]^2\right.\right.}$$
$$\left.\left.+\left[b\left(\frac{dr}{ds}\right)-c\left(\frac{dq}{ds}\right)\right]^2\right]=H,$$

la quale ne indica che considerata la generatrice in qualunque posizione che movendosi assume la tangente alla curva descritta dal centro di gravità, ed una retta qualunque Gx condotta nel piano della generatrice, dovranno formare un angolo di grandezza costante; ossia la detta tangente dovrà essere perpendicolare al piano della medesima generatrice.

Rappresentiamo ora con v l'arco descritto dal punto x,y e si avrà

$$\left(\frac{d^2S}{dv.dt}\right)=\text{sen}.v.t \text{ ossia } \left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\left(\frac{dv}{ds}\right)\text{sen}.v.t.$$

Ma dalla formola (9) della prima parte si ha $\left(\frac{dv}{ds}\right)$ cos. $v.s=$ $1-\frac{m}{R}$cos.R.m, ove $m=\sqrt{x^2+y^2}$, ed R è il raggio osculatore, del-

la linea s nell' estremo variabile di sua lunghezza: avremo perciò

$$\left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\frac{\text{sen}.v.t}{\cos.v.s}.$$

Siccome poi nel caso presente Ang.$^o m.v=0^o$, come si è provato nella Proposizione 3.ª della prima parte, si proverà facilmente colla trigonometria sferica che $\cos.v.t=\text{sen}.v.s.\text{sen}.m.t$ onde

$$\frac{\text{sen}.v.t}{\cos.v.s}=\sqrt{(1+\cos.^2m.t.\text{tang}.^2v.s)}\text{, e}$$

$$\left(\frac{d^2S}{dt.ds}\right)=\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\sqrt{(1+\cos.^2m.t\text{tang}.^2v.s.)}.$$

Ciò premesso osserviamo che se in qualche posizione della curva generatrice il perimetro di essa segasse la superficie sviluppabile descritta dal suo piano, più non avrebbe luogo il teorema di cui si tratta, e siccome questa superficie non è altro che il luogo delle evolute della curva direttrice, così non potrà essere giammai $R:\cos.R.m<m$ ossia $1-\frac{m}{R}\cos.R.m<0$.

Il minimo valore poi che può ottenere l' espressione $\sqrt{(1+\cos.^2m.t.\text{tang}.^2v.s)}$ essendo l'unità, avremo

$$\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\sqrt{(1+\cos.^2m.t.\text{tang}.^2v.s)}\text{non}<1-\frac{m}{R}\cos.R.m,$$

e quindi

$$\int\int\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)\sqrt{(1+\cos.^2m.t.\text{tang}.^2v.s)}dt.ds$$

$$>\int\int\left(1-\frac{m}{R}\cos.R.m\right)dt.ds$$

cioè maggiore di $T.s$, come risulta dalla proposizione seconda di questa seconda parte.

Dunque la condizione $S=T.s$ non potrà essere soddisfatta

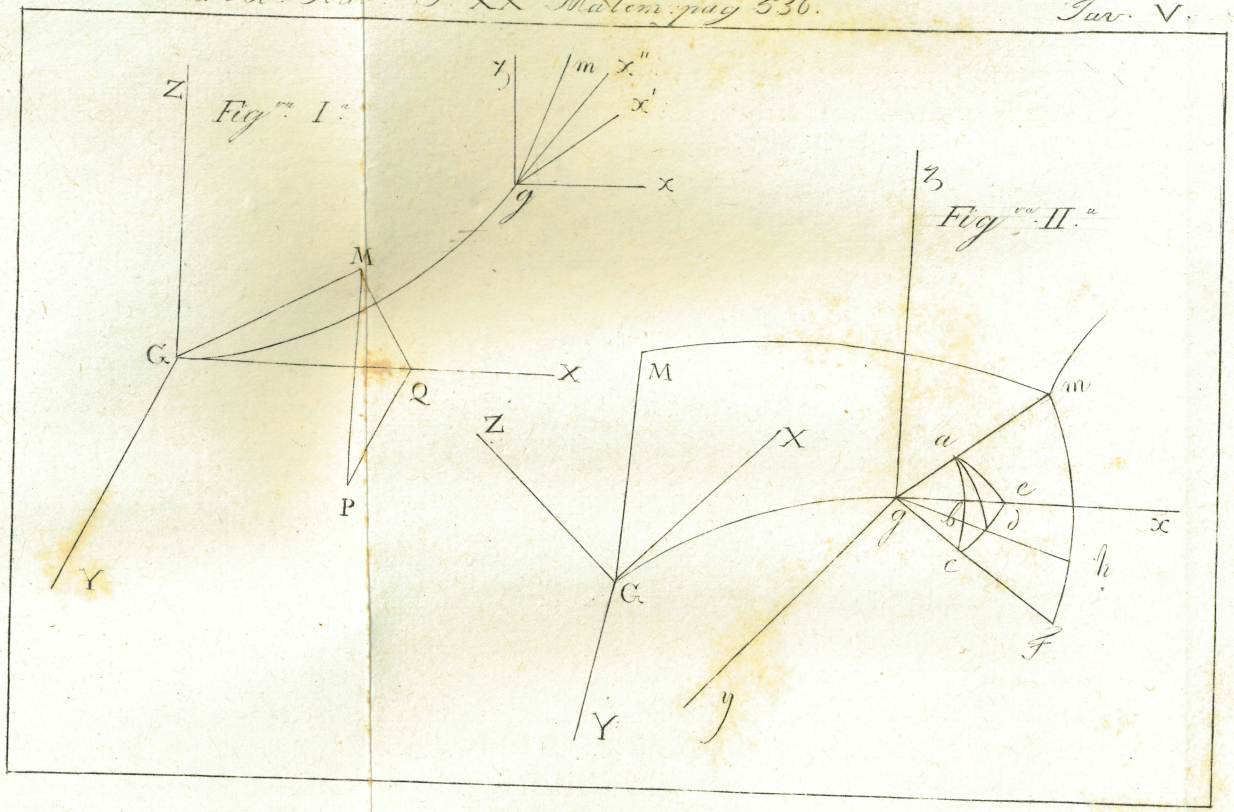
Fig.va I.a
Z
Y
G
M
P
Q
X
y
m
x''
x'
x
Fig.va II.a
z
M
Z
X
G
Y
y
m
a
e
b
d
g
x
c
h
F

a meno che si abbia $\cos.m.t.\tang.v.s=0$ cioè $\cos.m.t=0$, ossia la curva generatrice una circonferenza, ovvero $\tang.v.s=0$, vale a dire le rette che toccano le linee descritte da qualunque punto della generatrice e dal suo centro di gravità, la dove le medesime vengono incontrate dalla generatrice, tali rette dovranno essere parallele fra loro, ossia la generatrice non dovrà rotare intorno al proprio centro di gravità, che è quanto ci restava a provare.