RIFLESSIONI ANALITICHE

SULLA RIDUZIONE DEGLI ARCHI CIRCOLARI

AI LOGARITMI IMMAGINARJ

MEMORIA

DEL SIGNOR GIUSEPPE CALANDRELLI

Ricevuta adì 1. Marzo 1825.

1. All'occasione di una controversia nata tra i due chiarissimi analisti Conte Vincenzo Riccati, e Gioacchino Pessuti pubblicai già nel 1778. una Memoria sulla riduzione degli archi circolari ai logaritmi immaginarj. Tenni in seguito una letteraria corrispondenza coi celebri analisti d' Alembert, Conte Giordano Riccati, e Canterzani. Ora dunque, che mi si presentano ulteriori riflessioni sullo stesso argomento atte a togliere qualunque questione, queste tanto più volontieri manifesto, poichè derivate sono da' medesimi principj, che il grande Eulero propose già nel Cap. VII., ed VIII. della sua introduzione all' analisi degli infiniti.

2. Essendo a la base logaritmica, ed ω un numero infinitamente piccolo, onde soltanto non sia uguale a zero, al num. (114) stabilisce Eulero essere $a^{\omega} = 1 + \psi$; essendo anche ψ un numero infinitamente piccolo. Siccome poi può essere $\psi = \omega$; $\psi > \omega$; o finalmente $\psi < \omega$; dipendendo il valore di ψ dal valore di a; quindi pone $\psi = k\omega$, onde ne venga $a^{\omega} = 1 + k\omega$. Essendo poi a la base logaritmica, sarà $\omega = \mathrm{L}.(1 + k\omega)$.

3. Nel sistema de' logaritmi tabulari si pone $a = 10$, ed al numero (114) trova $k = 2,30258$; $\omega = 0,0000043429$. Al

numero (122) si riflette, che può prendersi a piacere la base logaritmica a; ma volendola prendere, onde sia $k=1$, si trova la base logaritmica iperbolica compresa da 2,718281828459045235360 28. Chiamando dunque e questa base, sarà $e^{\omega}=1+\omega$, e $L.e^{\omega}=\omega=L.(1+\omega)$.

4. A norma del num. (115) essendo $e^{\omega}=1+\omega$ sarà $e^{i\omega}=(1+\omega)^{i}=1+\frac{i\omega}{1}+\frac{i.(i-1)}{2}\omega^2+\frac{i.(i-1).(i-2)}{1.2.3}\omega^3+f$. Quando i rappresenti l'infinito, potrà farsi $\omega=\frac{z}{i}$ rappresentando z un numero qualunque finito, onde $\frac{z}{i}$ una frazione infinitesima, equivalente ad ω. In luogo di ω si sostituisca $\frac{z}{i}$, e sarà $e^{z}=(1+\frac{z}{i})^{i}$ $=1+\frac{z}{i}+\frac{i.(i-1)}{1.2}\frac{z^2}{i^2}+\frac{i.(i-1)(i-2)}{1.2.3}\frac{z^3}{i^3}+\frac{i.(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}\frac{z^4}{i^4}+f$. Ma essendo i infinito, i fattori $i-1$; $i-2$; $i-3$; $i-4$; f; possono prendersi tutti pel medesimo fattore i; onde sostituendo sarà $e^{z}=(1+\frac{z}{i})^{i}=1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\frac{z^5}{1.2.3.4.5}$ $+f$. Questa serie evidentemente, secondo il diverso valore di z, può rappresentare un diverso qualunque numero finito $1+x$. Quindi secondo il numero (119) sarà $e^{z}=(1+\frac{z}{i})^{i}$ $=1+x$, e perciò $(1+x)^{\frac{1}{i}}-1=\frac{z}{i}$, e $z=i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i$. Ma essendo $e^{z}=1+x$, sarà $z=L(1+x)=i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i$. Si trova poi $(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{1}{i}x-\frac{1.(i-1)}{i.2i}x^2+\frac{1.(i-1).(2i-1)}{i.2i.3i}x^3$ $-\frac{1.(i-1).(2i-1).(3i-1)}{i.2i.3i.4i}x^4+\frac{1.(i-1).(2i-1).(3i-1).(4i-1)}{i.2i.3i.4i.5i}x^5-f$, ed essendo infinito il valore di i sarà $\frac{i-1}{2i}=\frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i}=\frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i}=\frac{3}{4}$; $\frac{4i-1}{5i}=\frac{4}{5}f$. Sostituendo dunque questi valori, sarà $(1+x)^{\frac{1}{i}}=1+\frac{x}{i}-$

$-\frac{x^2}{2i}+\frac{x^3}{3i}-\frac{x^4}{4i}+\frac{x^5}{5i}-f$. Dunque $i(1+x)^{\frac{1}{i}}-i=\text{L.}(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-f$. Con questo metodo, se in luogo di x fosse data $\sqrt{-1}$, si trova $\text{L.}(1+\sqrt{-1})=\frac{\sqrt{-1}}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-1}}{3}-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{-1}}{5}+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{-1}}{7}-\frac{1}{8}+f$, come si vedrà (10).

5. Su di tutto ciò non ha luogo difficoltà alcuna, superando anche l' x il valore di 1 di quanto mai si voglia. Vuole dunque esaminarsi, se lo stesso possa dirsi, divenendo l' esponente della base e negativo, ossia uguale a $-\frac{z}{i}$, ed in secondo luogo essendo positivo, o negativo, ma nel tempo stesso immaginario l' esponente, supponendolo $\pm z\frac{\sqrt{-1}}{i}$. Primieramente data $e^{-\frac{z}{i}}$, sarà anche $e^{-\frac{z}{i}}=1-\frac{z}{i}$. Ciò può rilevarsi dall' essere $\frac{1}{1+\frac{z}{i}}=1-\frac{z}{i}$, poichè moltiplicando per $1+\frac{z}{i}$ si trova $1=1-\frac{z^2}{i^2}$; equazione, che può aver luogo essendo $\frac{z^2}{i^2}$ infinitesimo di secondo ordine. Ma $e^{-\frac{z}{i}}=\frac{1}{e^{\frac{z}{i}}}=\frac{1}{1+\frac{z}{i}}$. Dunque può anche stabilirsi $e^{-\frac{z}{i}}=1-\frac{z}{i}$, e quindi $e^{-z}=(1-\frac{z}{i})^i$. Nella serie ora stabilita (4) in luogo di $+\frac{z}{i}$ sostituendo $-\frac{z}{i}$, sarà $e^{-z}=(1-\frac{z}{i})^i=1-\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\frac{z^5}{1.2.3.4.5}+f$. Questa serie può evidentemente rappresentarsi per $1-y$, dipendendo il valore di y dal valore di z. Sarà dunque $e^{-z}=(1-\frac{z}{i})^i=1-y$, onde $1-\frac{z}{i}=(1-y)^{\frac{1}{i}}$, $e^{-z}=i\,(1-y)^{\frac{1}{i}}-i$.

Ma $-z = \text{L}.e^{-z} = \text{L}.(1-y)^{i}$. Dunque stando alla serie dimostrata (4), sarà $\text{L}.(1-y) = -\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5} - f$. Quando in luogo di $-y$ si sostituisca $-\sqrt{-1}$, sarà pur anche $\text{L}.(1-\sqrt{-1}) = -\frac{\sqrt{-1}}{1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-1}}{3} - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{-1}}{5} + \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{-1}}{7} - f$; come si vedrà in seguito (10). Qui opportunamente può rilevarsi, che nella dedotta equazione l'y non può mai superare l'unità, ma bensì dee essere sempre minore di 1. In fatti essendo $e^{-z} = 1 - y = \frac{1}{e^{z}}$, si comprende, che per quanto voglia immaginarsi grande il valore di e^{z}, e supponendolo anche infinito, darebbe $\frac{1}{e^{z}}$ uguale ad un infinitesimo, onde anche infinitesimo il valore di $1 - y$, e perciò y minore sempre di 1.

6. Si consideri ora l'esponente immaginario $+\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, onde dato sia $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}}$. Posto ciò, e posto anche $1^{\sqrt{-1}} = 1$, dico che sarà anche data l'equazione $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{i}$. Si è già veduto (4) essere $e^{\frac{z}{i}} = 1 + \frac{z}{i}$, onde sarà ancora $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = (1+\frac{z}{i})^{\sqrt{-1}} = 1 + \frac{\sqrt{-1}}{1}\frac{z}{i} - \frac{1+\sqrt{-1}}{1.2}\frac{z^2}{i^2} + \frac{3+\sqrt{-1}}{1.2.3}\frac{z^3}{i^3} - \frac{10}{1.2.3.4}\frac{z^4}{i^4} + \frac{40-10\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.}\frac{z^5}{i^5} - \frac{190-90\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.6}\frac{z^6}{i^6} + f$. Volendo continuare questa serie, si rileva sempre, che i termini dopo il primo 1, e secondo $\frac{z\sqrt{-1}}{1.i}$ sono reali, ed immaginarj, ma i reali sono tutti di un valore infinitesimo di secondo, terzo, quarto f grado, onde negligentabili rispetto al primo termine 1.

Gli immaginarj poi sono similmente tutti di un valore immaginario, ed infinitesimo di secondo, terzo, quarto f grado, e perciò negligentabili rispetto al secondo termine immaginario $\frac{z\sqrt{-1}}{1.i}$. Sarà dunque $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = (1+\frac{z}{i})^{\sqrt{-1}} = 1+\frac{z\sqrt{-1}}{i}$.

7. Posta l' equazione $e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = 1+\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e paragonata colla consimile $e^{\frac{z}{i}} = 1+\frac{z}{i}$ (4), sarà ancora $e^{z\sqrt{-1}} = (1+\frac{z\sqrt{-1}}{i})^i$ consimile ad $e^z = (1+\frac{z}{i})^i$. Nella serie dunque la quale esprime il valore di $(1+\frac{z}{i})^i$ (4) in luogo delle diverse potenze di $\frac{z}{i}$ si sostituiscano quelle di $\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e sarà $e^{z\sqrt{-1}} = (1+\frac{z\sqrt{-1}}{i})^i = 1+\frac{z\sqrt{-1}}{1}-\frac{z^2}{1.2}-\frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{z^4}{1.2.3.4}+\frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.}-\frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.}-f = 1-\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^4}{1.2.3.4}-\frac{z^6}{1.2.3.4.5.6}+f+\frac{z\sqrt{-1}}{1}-\frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3}+\frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5}-f = \cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1}$; come anche può rilevarsi dallo stesso Eulero Cap. VIII. num. (134).

8. Sarà quindi $e^{z\sqrt{-1}} = (1+\frac{z\sqrt{-1}}{i})^i = \cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1}$, e perciò $1+\frac{z\sqrt{-1}}{i} = (\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$, e $\frac{z\sqrt{-1}}{i} = (\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-1$, e finalmente $z\sqrt{-1} = i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i$. Ma $\text{L}.e^{\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = \frac{z\sqrt{-1}}{i} = \text{L}.(1+\frac{z\sqrt{-1}}{i}) = \text{L}.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Dunque $z\sqrt{-1} = i\text{L}(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Di un' arco perciò qualunque z due sono i valori, cioè potrà

farsi $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(\cos.z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\right)$, e potrà anche essere $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, i\, \text{L}.(\cos.z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$.

9. Come si è fatto al numero (6. e 7) si prenda a considerare l'esponente immaginario $-\frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e nel modo medesimo potrà stabilirsi l'equazione $e^{-\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = 1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i}$, e quindi similmente sarà $e^{-z\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i}\right)^i = 1 - \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + f = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + f - \frac{z\sqrt{-1}}{1} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} - \frac{z^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} + f = \cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1}$. Sarà quindi similmente, come si è rilevato (8) $e^{-z\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i}\right)^i = \cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1}$, e perciò $-\frac{z\sqrt{-1}}{i} = (\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - 1$; onde $z\sqrt{-1} = -i(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i$. Ma $\text{L}.e^{-\frac{z\sqrt{-1}}{i}} = -\frac{z\sqrt{-1}}{i} = \text{L}.\left(1 - \frac{z\sqrt{-1}}{i}\right) = \text{L}.(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Dunque $z\sqrt{-1} = -i\,\text{L}.(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$, e così saranno i due valori $z = -\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i\right)$ o anche $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(-i\,\text{L}.(\cos.z - \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}\right)$. Finalmente combi-

nando il valore di $z\sqrt{-1}$ già trovato (8) col presente, sarà $2.z\sqrt{-1}$ $=i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i-i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}+i=$ $i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$, o anche $2.z\sqrt{-1}$ $=i\,\text{L}.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\text{L}.(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Generalmente poi parlando, si trova $\cos.z\times\tan.z=\text{sen}.z$. Dunque sarà ancora $2.z\sqrt{-1}=i\,\text{L}(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $-i\,\text{L}.(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=i\,\text{L}.(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}+$ $i\,\text{L}.(\cos.z)^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(\cos.z)^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(1-\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=$ $i\,\text{L}.(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(1-\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=$ $\text{L}.(1+\tan.z\sqrt{-1})-\text{L}.(1-\tan.z\sqrt{-1})=\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}+\frac{\tan.z^2}{2}$ $-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}-\frac{\tan.z^4}{4}+\frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}+\frac{\tan.z^6}{6}-f(4)+\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}$ $-\frac{\tan.z^2}{2}-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{\tan.z^4}{4}+\frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}-\frac{\tan.z^6}{6}-f(5)=$ $\frac{2\tan.z\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}-f$, onde per una pronta, e facile esattezza, e precisione, essendo $z=45°$, o anche minore, ovvero essendo la tangente 1, o minore ancora, sarà $z=\frac{\tan.z}{1}-\frac{\tan.z^3}{3}+\frac{\tan.z^5}{5}-\frac{\tan.z^7}{7}+f$.

10. Sia $z=45°$, sarà $\cos.z=\cos.45°=\sqrt{\frac{1}{2}}$ e $\text{sen}.45°$ $=\sqrt{\frac{1}{2}}$, essendo 1 il raggio, sarà poi (8) $z\sqrt{-1}=45°\sqrt{-1}=$ $i\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i=i\,\text{L}.\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}}(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Ma

$\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2i}} = \frac{1^{\frac{1}{2i}}}{(1+1)^{\frac{1}{2i}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2i}} = \frac{2i}{2i+1} = 1$. Può dunque dirsi $45^\circ\sqrt{-1} = i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i = i\,\mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$. Si rileva poi $i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i = i\mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = \mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})$ $= \frac{\sqrt{-1}}{1} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{5} + \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{-1}}{7} - \frac{1}{8} + f(4)$. Sarà dunque questa serie uguale a $45^\circ\sqrt{-1}$, onde $45^\circ = 1 + \frac{1}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4\sqrt{-1}} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6\sqrt{-1}} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8\sqrt{-1}} + f$; quantità immaginaria, la quale non può mai rappresentare l'arco di 45° rispetto al raggio 1. Si prenda ora il secondo valore di $z\sqrt{-1}$ già trovato (9), e sarà $z\sqrt{-1} = 45^\circ\sqrt{-1} = -i(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i = -i\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = -\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1})$ $= \frac{\sqrt{-1}}{1} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-1}}{3} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{-1}}{5} - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{-1}}{7} + \frac{1}{8} + f$. Sarà dunque anche in questo caso ripresentato l'arco di 45° per una falsa serie immaginaria $1 - \frac{1}{2\sqrt{-1}} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4\sqrt{-1}} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6\sqrt{-1}} - \frac{1}{7} + f$. Per altro combinando le due serie, le quali esprimono il valore di $45^\circ\sqrt{-1}$ si trova $2.45^\circ\sqrt{-1}$ $= i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i - i(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i = i(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $- i(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} = i\,\mathrm{L}.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} - i\,\mathrm{L}.(1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $= \mathrm{L}.(1+\sqrt{-1}) - \mathrm{L}.(1-\sqrt{-1}) = \mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \mathrm{L}.\sqrt{-1}$.

Quindi annientandosi l'immaginarietà si rileva $L.\sqrt{-1} = \frac{2\sqrt{-1}}{1} - \frac{2\sqrt{-1}}{3} + \frac{2\sqrt{-1}}{5} - \frac{2\sqrt{-1}}{7} + \frac{2\sqrt{-1}}{9} - \frac{2\sqrt{-1}}{11} + f$; onde $45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{2\sqrt{-1}}{1} - \frac{2\sqrt{-1}}{3} + \frac{2\sqrt{-1}}{5} - \frac{2\sqrt{-1}}{7} + \frac{2\sqrt{-1}}{9} - \frac{2\sqrt{-1}}{11} + f\right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + f$. Serie trovata dal Leibnitz rappresentante la vera, e reale lunghezza dell'arco di 45° rispetto al raggio 1. Come si trova $\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, così $\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$. Dunque sarà $L.\frac{1-\sqrt{-1}}{1+\sqrt{-1}} = L-\sqrt{-1} = -\frac{2\sqrt{-1}}{1} + \frac{2\sqrt{-1}}{3} - \frac{2\sqrt{-1}}{5} + \frac{2\sqrt{-1}}{7} - \frac{2\sqrt{-1}}{9} + \frac{2\sqrt{-1}}{11} - f$, e $L.\sqrt{-1} = -L.-\sqrt{-1}$. Se quindi si prenda un numero d qualunque positivo della serie aritmetica $+1; +5; +9; +13; +f$, sarà $+d.45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}} d.L.\sqrt{-1} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L.\sqrt{-1} = \frac{d}{1} - \frac{d}{3} + \frac{d}{5} - f$. Se poi per $-d$ si prenda un numero negativo della serie medesima, ossia $-1; -5; -9; -f$, sarà $-d45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(-d.L.\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} L.-\sqrt{-1} = -\frac{d}{1} + \frac{d}{3} - \frac{d}{5} + \frac{d}{7} - f$.

11. Quando incontrasse difficoltà l'aver fatto $\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}} = 1$, allora il primo valore di $45^\circ\sqrt{-1} = iL.\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}} \cdot (1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ potrà risolversi in $iL.(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i\,L.\sqrt{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{i}} = L.(1+\sqrt{-1})$

$+L\sqrt{\frac{1}{2}}$. Ma $L.\sqrt{\frac{1}{2}} = L.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} L.\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} L.\,2 =$

$-\frac{1}{2} L.(1+1) = -\frac{1}{2} L.(1+\tan.45^\circ) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\tan.45^\circ}{1} - \frac{(\tan.45^\circ)^2}{2}\right.$

$+\frac{(\tan.45^\circ)^3}{3} - \frac{(\tan.45^\circ)^4}{4} + \frac{(\tan.45^\circ)^5}{5} - \frac{(\tan.45^\circ)^6}{6} + f\Big)(4) = -\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2}$

$+\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + f\Big)(4) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - f.$

Si trova similmente $L.(1+\sqrt{-1}) = L.(1+\tan.45^\circ\sqrt{-1})$

$= \frac{\tan.45^\circ\sqrt{-1}}{1} + \frac{(\tan.45^\circ)^2}{2} - \frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{(\tan.45^\circ)^4}{4} + \frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5}$

$+\frac{(\tan.45^\circ)^6}{6} - \frac{(\tan.45^\circ)^7\sqrt{-1}}{7} - \frac{(\tan.45^\circ)^8}{8} + f = \frac{\tan.45^\circ\sqrt{-1}}{1} + \frac{1}{2}$

$-\frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{1}{4} + \frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5} + \frac{1}{6} - \frac{(\tan.45^\circ)^7\sqrt{-1}}{7} - \frac{1}{8}$

$+f(4) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + f + \frac{\tan.45^\circ\sqrt{-1}}{1} - \frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3}$

$+\frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{(\tan.45^\circ)^7\sqrt{-1}}{7} + \frac{(\tan.45^\circ)^9\sqrt{-1}}{9} - f.$ Dunque

$L.(1+\tan.45^\circ\sqrt{-1}) + L.\cos.45^\circ = L.(1+\sqrt{-1}) + L.\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= L.(1+\sqrt{-1}) - \frac{1}{2} L.(1+1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + f$

$+\frac{\tan.45^\circ\sqrt{-1}}{1} - \frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{(\tan.45^\circ)^7\sqrt{-1}}{7}$

$+\frac{(\tan.45^\circ)^9\sqrt{-1}}{9} - f - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - f = \frac{\tan.45^\circ\sqrt{-1}}{1}$

$-\frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3} + \frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5} - \frac{(\tan.45^\circ)^7\sqrt{-1}}{7} + \frac{(\tan.45^\circ)^9\sqrt{-1}}{9}$

$-f = \frac{\sqrt{-1}}{1} - \frac{\sqrt{-1}}{3} + \frac{\sqrt{-1}}{5} - \frac{\sqrt{-1}}{7} + \frac{\sqrt{-1}}{9} - f$, e perciò

$45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + f$, valore vero, e reale. Questo medesimo metodo dà il secondo valore di $45^\circ\sqrt{-1} = -L.(1-\sqrt{-1})$

$-L.\sqrt{\frac{1}{2}} = -L.(1-\sqrt{-1}) + \frac{1}{2} L.(1+1) = -\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-f+\frac{\sqrt{-1}}{1}-\frac{\sqrt{-1}}{3}+\frac{\sqrt{-1}}{5}$ $-\frac{\sqrt{-1}}{7}+f(5)+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+f=\frac{\sqrt{-1}}{1}-\frac{\sqrt{-1}}{3}$ $+\frac{\sqrt{-1}}{5}-\frac{\sqrt{-1}}{7}+f$. Sarà quindi anche il secondo valore di $45^\circ=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+f$ vero e reale, e la già trovata equazione ritorna ancora, poichè si trova $2.45^\circ\sqrt{-1}=$ $L.(1+\sqrt{-1})+L.\sqrt{\frac{1}{2}}-L.\sqrt{\frac{1}{2}}-L.(1-\sqrt{-1})=L.\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}$ $=L.\sqrt{-1}$. Questo facile ed evidente computo potea ben determinarsi, ed allora da questo medesimo computo, e da quanto si è rilevato (9) sarebbesi compreso, che $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ $L.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})$ uguaglia $\frac{1}{\sqrt{-1}}(L.(1+\tan.z\sqrt{-1})+L.\cos.z)$, quantità reale, benchè in apparenza sembri immaginaria. Quando dunque $L.(1+\tan.z\sqrt{-1})$ si possa risolvere in termini reali, ed immaginarj, sarà necessario che $L.\cos.z$ annienti tutti i termini reali. Da ciò dunque ne deriva un teorema non conosciuto, e questo è, che il logaritmo iperbolico, ossia $L.\cos.z$ debba uguagliare $-\frac{\tan.z^2}{2}+\frac{\tan.z^4}{4}-\frac{\tan.z^6}{6}+f$. La dimostrazione di questo teorema dipende dal trovato valore dell' arco $z=45^\circ$, al quale può ridursi un qualunque arco z. Sia dunque $z:45^\circ=m:n$, onde $z=\frac{m}{n}45^\circ$. Così per esempio l'arco z sia di $25^\circ.\ 50'.\ 31''=93031''$. Essendo $45^\circ=162000''$, sarebbe $z:45^\circ=m:n=93031:162000$, onde $z=\frac{93031}{162000}45^\circ$. Da ciò dunque, e da quanto ora si è dimostrato, sarà $45^\circ\sqrt{-1}=L.(1+\tan.45^\circ\sqrt{-1})+L.\cos.45.^\circ=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}$ $+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+f+\frac{\tan.45\sqrt{-1}}{1}-\frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5}-f$

$+ \text{L.cos.}45^\circ$; ossia $-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-f$. Dunque

$$z\sqrt{-1}=\frac{m}{n}45^\circ\sqrt{-1}=\frac{m}{n}\text{L.}(1+\tan.45^\circ\sqrt{-1})+\frac{m}{n}\text{L.cos.}45^\circ$$

$$=\frac{m}{n}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+f\right)+\frac{m}{n}\frac{\tan.45^\circ\sqrt{-}}{1}-\frac{m}{n}\frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3}$$

$$+\frac{m}{n}\frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5}-f+\frac{m}{n}\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-f\right).$$

È evidente dunque, che il valore di $z\sqrt{-1}$ non può portare, che i soli termini immaginarj, poichè si annientano tutti gli altri reali. Ma la formola generale (9) porta $z\sqrt{-1}$ $=\text{L.}(1+\tan.z\sqrt{-1})+\text{L.cos.}z=\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}+\frac{\tan.z^2}{2}-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}$ $-\frac{\tan.z^4}{4}+\frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}+\frac{\tan.z^6}{6}-\frac{\tan.z^7\sqrt{-1}}{7}-f+\text{L.cos.}z$. Dunque per la prima equazione non potendo portare il valore di $z\sqrt{-1}$, che i soli termini immaginarj, sarà in questa seconda equazione necessariamente $\text{Lcos.}z=-\frac{\tan.z^2}{2}+\frac{\tan.z^4}{4}-$ $\frac{\tan.z^6}{6}+f$; dovendo essere il valore reale di $z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\tan.45^\circ\sqrt{-1}}{1}\right.$ $\left.-\frac{m}{n}\cdot\frac{(\tan.45^\circ)^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{m}{n}\frac{(\tan.45^\circ)^5\sqrt{-1}}{5}-f\right)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}\right.$ $\left.-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}-f\right)$ (9). Può anche assegnarsi una più semplice, e generale dimostrazione. Si è già dimostrato (9) essere $2z\sqrt{-1}=\frac{2\tan.z\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}-f$. Dunque sarà $z\sqrt{-1}=\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}-f$. Ma $z\sqrt{-1}=\text{L.}(\cos.z+\text{sen.}z\sqrt{-1}=\text{L.}(1+\tan.z\sqrt{-1})$ $+\text{L. cos. }z\,(8.\ 9.)=\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}+\frac{\tan.z^2}{2}-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}-\frac{\tan.z^4}{4}$ $+\frac{\tan.z^5\sqrt{-1}}{5}+\frac{\tan.z^6}{6}-f$ (4) $+\text{L.cos.}z$. Dunque $\text{L.cos.}z=-\frac{\tan.z^2}{2}$ $+\frac{\tan.z^4}{4}-\frac{\tan.z^6}{6}+f$. Come si è fatto (9) per ottenere una

pronta, e facile esattezza, e precisione, sia z non maggiore di 45.°, e per esempio si ponga $z=25.^{\circ}50.'31''$, la di cui tangente è 4843223, ed il coseno uguale a $.9000000=\frac{9}{10}$. Sarà dunque $L.\cos.z=L.\frac{9}{10}=L.\left(1-\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{10}-\frac{1}{200}-\frac{1}{3000}-\frac{1}{40000}-\frac{1}{500000}-f\,(5)=-.10000000-.00500000-.00033333-.00002500-.00000202=-.10536033$. Sarà poi

$$-\frac{\tan.z^2}{2}+\frac{\tan.z^4}{4}-\frac{\tan.z^6}{6}+\frac{\tan.z^8}{8}-\frac{\tan.z^{10}}{10}+\frac{\tan.z^{12}}{12}-\frac{\tan.z^{14}}{14}+\frac{\tan.z^{16}}{16}-f$$

$$=-\frac{.23456809}{2}+\frac{.05502218}{4}-\frac{.01290644}{6}+\frac{.00302744}{8}-\frac{.00071014}{10}$$

$$+\frac{.00016657}{12}-\frac{.00003907}{14}+\frac{.00000916}{16}-f=-.11728404+.01375554$$

$-.00215107+.00037843-.00007101+.00001388-.00000279+.00000057-f=-.10536050$. Rimane a conoscere come, anche nella supposizione di z non maggiore di 45°, i due valori di

$$z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\right) \text{ e } z=\frac{1}{\sqrt{-1}}L(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$$

(8), o anche gli altri due $z=-\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}+i\right)$

e $z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(-i\,L.\,(\cos.\,z-\text{sen}.\,z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}\right)$ (9) possano dare un valore immaginario, come si è dimostrato nel caso di $z=45^{\circ}$, $\cos.\,z=\cos.\,45^{\circ}=\sqrt{\frac{1}{2}}$ (10). Si rifletta dunque essere $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i\,(\cos.\,z+\text{sen}.\,z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(i(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}\times\cos.z^{\frac{1}{i}}\right)-i\Big)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{i}\right.$$

$+\frac{\tan.z^2}{2}-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}-\frac{\tan.z^4}{4}+f(4)\Big)\times\cos.z^{\frac{1}{i}}$. Questa quantità è sempre immaginaria, qualunque sia il valore di $\cos.z^{\frac{1}{i}}$. Quando però $\cos.z$ porti un valore finito rispetto al raggio 1, potrà sempre esprimersi $\cos.z=\frac{1}{1+m}$; divenendo m un valore anche finito rispetto al raggio 1. Così per esempio se z fosse uguale a 65° sarebbe $\cos.z=.4227183=\frac{1}{1+1.3656414}$. Dunque $\cos.z^{\frac{1}{i}}=\left(\frac{1}{1+m}\right)^{\frac{1}{i}}=1:\left(1+\frac{m}{i}-\frac{m^2}{2i}+\frac{m^3}{3i}-\frac{m^4}{4i}+f\right)=1$. Se quindi $\cos.z$ porti un valore finito rispetto al raggio, può generalmente dirsi con somma approssimazione $\cos.z^{\frac{1}{i}}=1$, e questa quanto mai prossima uguaglianza può anche rilevarsi dall' essere $(1+m)^{\frac{1}{i}}$ maggiore di 1, ma minore di $1+\frac{m}{i}$, poichè $\left(1+\frac{m}{i}\right)^i$ supera $1+m$. Ciò premesso venendo al secondo valore si trova $z=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,i\mathrm{L}.(\cos.z+\mathrm{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,i\left(\mathrm{L}.\left(1+\tan.z\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{i}}+\mathrm{L}.\cos.z^{\frac{1}{i}}\right)=$$

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\,i\left(\mathrm{L}.\left(1+\tan.z\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{i}}+\mathrm{L}.1\right)=\mathrm{L}.\left(1+\tan.z\sqrt{-1}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{\tan.z\sqrt{-1}}{1}+\frac{\tan.z^2}{2}-\frac{\tan.z^3\sqrt{-1}}{3}+\frac{\tan.z^4}{4}+f(4)\right);$$

valore uguale all' immaginario ora trovato. Benchè però quan-

to mai prossimamente sia $\cos. z^{\frac{1}{i}} = 1$, quindi $L.\cos.z^{\frac{1}{i}} = L.1$; non con esattezza può dirsi $iL.\cos. z^{\frac{1}{i}} = iL.1 = 0$, ma bensì $iL.\cos. z^{\frac{1}{i}} = L.\cos.z$. Calcolando dunque su di questo principio sarà $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, iL.(\cos. z + \text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} =$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}(iL.(1+\tan.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} \times \cos. z^{\frac{1}{i}}) =$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}(i\,L.(1+\tan. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + L.\cos.z)^{\frac{1}{i}}) =$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}\, i\,(L.(1+\tan. z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}} + i\,L.\cos.z)^{\frac{1}{i}} =$

$\frac{1}{\sqrt{-1}}(L.(1+\tan. z\sqrt{-1}) + L.\cos. z)$; quantità dimostrata ora vera e reale. Quanto si è detto rispetto i due valori riferiti (8), lo stesso può dirsi degli altri due (9).

12. Date l' equazioni $2.45^\circ\sqrt{-1} = L.\sqrt{-1} = \frac{2\sqrt{-1}}{1} - \frac{2\sqrt{-1}}{3} + \frac{2\sqrt{-1}}{5} - \frac{2\sqrt{-1}}{7} + \frac{2\sqrt{-1}}{9} - \frac{2\sqrt{-1}}{11} + f$, sarà ancora (I) $90^\circ\sqrt{-1} = L.\sqrt{-1}$, e quindi $90^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, L.\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{2\sqrt{-1}}{1} - \frac{2\sqrt{-1}}{3} + \frac{2\sqrt{-1}}{5} + f\right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - f$, serie esprimente la lunghezza dell' arco di 90° doppio di 45°. Dalla medesima equazione $90^\circ\sqrt{-1} = L.\sqrt{-1}$ può dedursi $2.90\sqrt{-1} = 2L.\sqrt{-1}$, onde (II) $L.-1 = \frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f$, e quindi anche (III)

$90^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L. $-1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \left(\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f \right) = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - f$, serie, come sopra, doppia di 45°. Per m rappresentando un numero intero qualunque dispari positivo, o negativo, sarà sempre (IV) $\pm m.90^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\pm m \text{L.} -1) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L. $-1 = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \left(\pm \frac{m.4\sqrt{-1}}{1} \mp \frac{m.4\sqrt{-1}}{3} \pm \frac{m.4\sqrt{-1}}{5} \mp \frac{m.4\sqrt{-1}}{7} \pm f \right)$. Essendo $2.90^\circ\sqrt{-1} = 180^\circ\sqrt{-1} = 2$ L. $\sqrt{-1}$, ne viene anche (V) $180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ L. $-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f \right) = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - f$, serie esprimente la lunghezza vera e reale dell'arco di 180°, quadruplo di 45°, e doppio di 90°. Essendo ora dimostrato $180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ L. -1, ovvero $180^\circ\sqrt{-1} =$ L. -1, sarà (VI) la lunghezza dell'arco di 180° al raggio 1, ossia la circonferenza al diametro come L. $-1 : \sqrt{-1}$; come $\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + \frac{4\sqrt{-1}}{9} - \frac{4\sqrt{-1}}{11} + f$ a $\sqrt{-1}$; come $4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \frac{4}{11} + f : 1$. Questo è il teorema già proposto dal Bernoulli, il quale ha eccitate tante questioni tra i più profondi analisti, perchè mai proposto con questa evidenza, e precisione. Dalla dimostrata equazione $180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ L. $-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{4\sqrt{-1}}{1} - \frac{4\sqrt{-1}}{3} + \frac{4\sqrt{-1}}{5} - \frac{4\sqrt{-1}}{7} + f \right)$ può anche dedursi $2.\ 180^\circ = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ 2.L. $-1 = \frac{1}{\sqrt{-1}}$ L. $1 = \frac{1}{\sqrt{-1}} \left(\frac{8\sqrt{-1}}{1} - \frac{8\sqrt{-1}}{3} + \frac{8\sqrt{-1}}{5} - \frac{8\sqrt{-1}}{7} + f \right)$ onde (VII) $180^\circ = \frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L. $1 =$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{8\sqrt{-1}}{1}-\frac{8\sqrt{-1}}{3}+\frac{8\sqrt{-1}}{5}-\frac{8\sqrt{-1}}{7}+f\right)$. Avendo in vista l'equazione $180^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}$ L. -1, e prendendo un numero qualunque intero disparo positivo, o negativo, come $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 7; \pm f$, e generalmente $\pm p$, ne verrà sempre (VIII) $\pm p.180^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}(\mp p\text{L.}-1)=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L.}-1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{p.4\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{p.4\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{p.4\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{p.4\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{p.4\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$. Prendendo poi l'equazione $180^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L.1, e posto che q rappresenti ± 0; $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm f$, o generalmente zero, o qualunque numero intero positivo o negativo, paro o disparo, sarà sempre (IX) $\pm q.\,180^\circ=\frac{2}{2\sqrt{-1}}(\pm q\text{L.}1)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L.}1=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{q.8\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{q.8\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$. Tornando alla prima equazione $2.45^\circ\sqrt{-1}=\text{L.}\sqrt{-1}=\frac{2\sqrt{-1}}{1}-\frac{2\sqrt{-1}}{3}+\frac{2\sqrt{-1}}{5}-\frac{2\sqrt{-1}}{7}+\frac{2\sqrt{-1}}{9}-f$, potrà anche dedursi $4.2.45^\circ\sqrt{-1}=4\text{L.}\sqrt{-1}=\frac{8\sqrt{-1}}{1}-\frac{8\sqrt{-1}}{3}+\frac{8\sqrt{-1}}{5}-\frac{8\sqrt{-1}}{7}+\frac{8\sqrt{-1}}{9}-f$, onde $360^\circ\sqrt{-1}=4\text{L.}\sqrt{-1}$, $=\text{L.}1$ e quindi (X) $360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}$ L. $1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{8\sqrt{-1}}{1}-\frac{8\sqrt{-1}}{3}+\frac{8\sqrt{-1}}{5}-\frac{8\sqrt{-1}}{7}+\frac{8\sqrt{-1}}{9}-f\right)=8-\frac{8}{3}+\frac{8}{5}-\frac{8}{7}+\frac{8}{9}-f$; serie rappresentante la vera, e reale lunghezza dell'intera circonferenza 360°, ottupla di 45°, quadrupla di 90°, e dupla di 180°. Ma 2. $360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}2\text{L.}1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L.}1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\frac{16\sqrt{-1}}{1}-\frac{16\sqrt{-1}}{3}+\frac{16\sqrt{-1}}{5}-\frac{16\sqrt{-1}}{7}+\frac{16\sqrt{-1}}{9}-f\right)$. Dunque si potrà dire ancora (XI) $360^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ L. $1=$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{16\sqrt{-1}}{1}-\frac{16\sqrt{-1}}{3}+\frac{16\sqrt{-1}}{5}-\frac{16\sqrt{-1}}{7}+\frac{16\sqrt{-1}}{9}-f\right)$ $=8-\frac{8}{3}+\frac{8}{5}-\frac{8}{7}+\frac{8}{9}-f$. Anche in questo caso dell' intera circonferenza, o di 360°, prendendo $\pm q$ nel senso già indicato, sempre si rileverà (XII) $\pm q.360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}(\pm q\text{L}.1)$ $=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L}.1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{q8\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{q.8\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{q8\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{q.8\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$, o anche (XIII) $\pm q.360^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}(\pm q\text{L}.1)=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L}.1=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\pm\frac{q.16\sqrt{-1}}{1}\mp\frac{q.16\sqrt{-1}}{3}\pm\frac{q.16\sqrt{-1}}{5}\mp\frac{q.16\sqrt{-1}}{7}\pm\frac{q.16\sqrt{-1}}{9}\mp f\right)$.

13. Sono state dedotte tutte queste verità dalle formole generali dell'arco z applicate all'arco di 45.° Possono però le medesime formole generali dell'arco z applicarsi all'arco di 90°; 180°; 360°, e così determinare la misura, o lunghezza de' medesimi archi. Sia dunque $z=90^\circ$, onde $\cos.z=\cos.90^\circ=0$, e $\text{sen}.z=\text{sen}.90^\circ=1$. Dalle formole generali dell'arco z (9) sarà $2.90^\circ\sqrt{-1}=i(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$ $=i\text{L}.(\cos.z+\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(\cos.z-\text{sen}.z\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=$ $i\text{L}.(\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\,\text{L}.(-\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=\text{L}.\frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}$. Dunque $90^\circ=$ $\frac{1}{2\sqrt{-1}}\text{L}.-1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L}.(-1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\text{L}.\sqrt{-1}$; equazioni già dimostrate (12. III.) (12. I.). Sia ora l' arco di 180°, onde $\cos.180^\circ=-1$, e $\text{sen}.180^\circ=-0$. Sarà dunque dalle medesime formole generali per l' arco z (9), $2.180^\circ\sqrt{-1}=$ $i(\cos.180^\circ+\text{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i(\cos.180^\circ-\text{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$=i\mathrm{L}.(\cos.180^\circ+\mathrm{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}-i\mathrm{L}.(\cos.180^\circ-\mathrm{sen}.180^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$=i\,\mathrm{L}.(-1)^{\frac{1}{i}}-i\mathrm{L}.(-1)^{\frac{1}{i}}=\mathrm{L}\frac{-1}{-1}=\mathrm{L}.\,1$. Dunque $180^\circ=$

$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathrm{L}.1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.(1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.-1$; equazioni dimostrate (12. VII.) (12. V.). Sia finalmente l'intera circonferenza 360°, e perciò $\cos.360^\circ=1$, e $\mathrm{sen}.360^\circ=0$. Insistendo dunque sempre sulle formole generali per l'arco z (9), si rileverà $2.360^\circ\sqrt{-1}=i\,(\cos.\,360^\circ+\mathrm{sen}.\,360^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$-i(\cos.360^\circ-\mathrm{sen}.360\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=i\,\mathrm{L}.(\cos.360^\circ+\mathrm{sen}.360^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}$

$-i\mathrm{L}.(\cos.360^\circ-\mathrm{sen}.360^\circ\sqrt{-1})^{\frac{1}{i}}=i\mathrm{L}.\,1^{\frac{1}{i}}-i\mathrm{L}.\,1^{\frac{1}{i}}=\mathrm{L}.1$. Dunque $360^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathrm{L}.1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.(1)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.\,1$; equazioni già dimostrate (12. XI.) (12. X.) Tutte queste equazioni $45^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathrm{L}.\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\mathrm{L}.\sqrt{-1}$; $2.45^\circ=90^\circ=\frac{1}{2\sqrt{-1}}2\,\mathrm{L}.\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.\sqrt{-1}$; $2.90^\circ=180^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}2\mathrm{L}.\sqrt{-1}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.-1$; $2.180^\circ=360^\circ=\frac{1}{\sqrt{-1}}2\mathrm{L}.-1=\frac{1}{\sqrt{-1}}\mathrm{L}.1$, si conoscevano già; ma ricoperte da una misteriosa oscurità hanno dato luogo a tante questioni. Io mi lusingo, che sì fatte questioni debbano terminare, poichè la verità delle medesime equazioni non rimane più occulta, ma bensì evidentemente dimostrata.