SOLUZIONE GENERALE

DI UN PROBLEMA DI PROBABILITA'

Del Signor Giovanni Plana

Ricevuta li 17. *Luglio* 1815.

1. Dopo la altrettanto felice che importante scoperta del principio dei *minimi quadrati*, il celebre Geometra Signor Conte *Laplace* ha cercato per via di un' analisi molto ingegnosa l' espressione analitica dell' error medio da temersi sopra i risultati medii di un grandissimo numero di osservazioni ottenuti mediante l' applicazione del predetto principio. Rinvenne egli tosto, che questa espressione conteneva un rapporto, del quale è impossibile di calcolarne il valore *a priori* a meno che non si voglia aver per nota la legge di facilità di ciaschedun' errore, ed ognun sa, che una tale ipotesi è affatto inammissibile nelle principali quistioni di Astronomia e di Fisica, nelle quali si suole far uso di questo metodo. Fortunatamente questo medesimo rapporto ricomparisce nella soluzione di un altro problema, il quale dà un mezzo facile di determinarlo, se non esattamente, almeno con somma probabilità, ed ecco in qual modo.

Cercando la probabilità che si ha perchè la somma dei quadrati degli errori di un gran numero di osservazioni sia eguale ad una quantità data, il Signor Laplace osservò, che questa probabilità acquista il massimo del suo valore, quando la quantità data diventa eguale al prodotto del rapporto di cui si tratta per un numero per altra via noto; egli, in forza di questa conseguenza, conchiuse che si poteva supporre quest' ultima quantità eguale alla somma dei quadrati degli errori, quale si otteneva mediante la sostituzione dei risultati medii nelle equazioni di condizione, d' onde si ricava con tutta facilità il rapporto cercato.

Noi riassumiamo in questa memoria l' analisi del Signor

Laplace per far vedere, che essa si addatta ad una qualunque funzione degli errori. E considerando particolarmente il caso in cui questa funzione viene espressa per una potenza intera e positiva degli errori, presi tutti positivamente, ne ricaveremo un teorema degno di attenzione per la sua semplicità, il quale comprende siccome un caso particolare, quello trovato dal Signor Laplace.

2. Alla soluzione del problema, che abbiamo principalmente in vista, noi faremo precedere alcuni risultati, dei quali se ne vedrà l'uso in seguito.

È dimostrato in varie opere, che assumendo $x = -\infty$, e $x = +\infty$ per limiti dell'integrazione si ha,

$$\int dx.c^{-x^2} = \sqrt{\pi},$$

ove c rappresenta la base dei Logaritmi Iperbolici, e π la lunghezza della semi-periferia del circolo che ha l'unità per raggio. Di là ne deriva, che dentro gli stessi limiti si ha,

$$\int dx.c^{-x^2-2ax} = c.^{a^2}\sqrt{\pi}$$

qualunque sia il valore di a reale od imaginario. Infatti svolgendo c^{-2ax}, noi abbiamo,

$$\int dx.c^{-x^2-2ax} = \int dx.c^{-x^2}\left(1 - 2ax + \frac{\overline{2ax}^2}{1.2} - \frac{\overline{2ax}^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right):$$

Ma egli è provato (*V. Exercices de Calcul Intégral de Legendre*) che, integrando dall'infinito negativo fino all'infinito positivo si hanno le equazioni

$$\int dx.x^{2i+1}.c^{-x^2} = 0,$$

$$\int dx.x^{2i}.c^{-x2} = \frac{1.3.5.7.....2i-1}{2^i}.\sqrt{\pi}$$

per qualunque valore intero e positivo di i; dunque si avrà,

$$\int dx.c^{-x^2-2ax} = \sqrt{\pi}.\left(1 + \frac{\overline{2a}^2}{1.2}.\frac{1}{2} + \frac{\overline{2a}^4}{1.2.3.4}.\frac{1.3}{2^2} + \frac{\overline{2a}^6}{1.2.3.4.5.6}.\frac{1.3.5}{2^3} + \text{ec.}\right)$$

ossia

$$\int dx.c^{-x^2-2ax} = \sqrt{\pi}.\left(1 + a^2 + \frac{a^4}{1.2.} + \frac{a^6}{1.2.3.} + \text{ec.}\right) = c^{a^2}\sqrt{\pi}.$$

Ora, se noi facciamo $a = \beta \cdot \sqrt{-1}$, questa formola ci dà,

$$\int dx \cdot c^{-x^2-2\beta x\sqrt{-1}} = c^{-\beta^2}\sqrt{\pi}.$$

Avrei potuto stabilire immediatamente questa equazione facendo osservare, che

$$\int dx \cdot c^{-x^2-2ax} = c^{a^2} \cdot \int dx \cdot c^{-(x+a)^2}$$

ma sotto questa forma il risultato dell' integrazione cessa d' essere evidente per i valori immaginarii di a stante che gli stessi limiti diventano immaginarii. Per questo motivo ho creduto dover preferire la prima dimostrazione abbenchè più lunga.

Dai precedenti risultati ne emergono i due seguenti, i quali hanno luogo integrando da $x = -\infty$ fino ad $x = +\infty$;

$$\int dx \cdot x^{2i} \cdot c^{-x^2-2ax} =$$

$$\frac{1.3.5.7..(2i-1)}{2^i} \cdot c^{a^2}\sqrt{\pi} \cdot \left(1 + \frac{i}{1.2}.\overline{2a}^2 + \frac{i.(i-1)}{1.2.3.4}.\overline{2a}^4 + \frac{i.(i-1)(i-2)}{1.2.3.4.5.6} \cdot \overline{2a}^6 + \text{ec.}\right);$$

$$\int dx.x^{2i+1} \cdot c^{-x^2-2ax} =$$

$$-\frac{1.3.5.7..(2i+1)}{2^i}.ac^{a^2}\sqrt{\pi}.\left(1 + \frac{i}{1.2.3}.\overline{2a}^2 + \frac{i.(i-1)}{1.2.3.4.5}.\overline{2a}^4 + \frac{i.(i-1)(i-2)}{1.2.3.4.5.6.7.}.\overline{2a}^6 + \text{ec.}\right)$$

3. Ecco presentemente il problema generale, che si tratta di risolvere. Sia,

$$X^m = \left(B.x^0 + B_1x^{a_1} + B_2.x^{a_2} + B_3x^{a_3} + \ldots + B_nx^{a_n}\right)^m,$$

si domanda una serie convergente per determinare il coefficiente di una data potenza di x dello svolgimento di X^m supposto m numero intero positivo, e grandissimo. Il termine generale, tanto dei coefficienti B quanto degli esponenti a può essere una qualunque funzione dell' indice i. Si suppone soltanto, che tale sii la funzione relativa ai coefficienti, che abbia la proprietà di decrescere mentre crescono i valori di i.

La quantità cercata essendo per sua natura indipendente da x, egli è permesso di fare $x = c^{\varphi\sqrt{-1}}$, e per conseguenza,

$$X^m = \left(B + B_1 c^{a_1 \varpi\sqrt{-1}} + B_2 c^{a_2 \varpi\sqrt{-1}} + B_3 c^{a_3 \varpi\sqrt{-1}} \ldots + B_n c^{a_n \varpi\sqrt{-1}}\right)^m.$$

Ciò posto, chiamiamo x^ρ la potenza di x, di cui si domanda il coefficiente; egli è chiaro, che si avrà questo coefficiente prendendo il termine indipendente da ϖ, che si trova nello svolgimento della funzione

$$Y = c^{-\rho\varpi\sqrt{-1}} . X^m .$$

Sia Q questo termine: mediante il cambiamento delle funzioni esponenziali in funzioni circolari, il valore di Y diventerà della forma,

$Q + S.A_i \cos.i\varpi + \sqrt{-1}.\, S.A_i \operatorname{sen}.i\varpi$, e per conseguenza si avrà

$$Q = \frac{1}{2\pi}\int d\varpi . c^{-\rho\varpi\sqrt{-1}} . X^m ,$$

integrando da $\varpi = -\pi$ fino a $\varpi = +\pi$.

Ora, se si osserva, che $X^m = c^{m \log.X}$, ne seguirà

$$2\pi Q = \int d\varpi\, c^{-\rho\varpi\sqrt{-1} + m \log.X} .$$

Svolgendo log.X secondo le potenze di ϖ si ottiene una serie della forma,

$$\log.X = \log.F + (\alpha\varpi + \alpha'\varpi^3 + \alpha''\varpi^5 + \text{ec.})\sqrt{-1} - \beta\varpi^2 + \beta'\varpi^4 + \beta''\varpi^6 + \text{ec.}$$

dunque, fatto $u = m\varpi$, si avrà

$$2\pi m Q =$$

$$F^m . \int du . c^{\left[(\alpha - \frac{\rho}{m})u + \frac{\alpha'}{m^2}u^3 + \frac{\alpha''}{m^5}u^5 + \text{ec.}\right]\sqrt{-1} - \frac{\beta}{m}.u^2 + \frac{\beta'}{m^3}.u^4 + \frac{\beta''}{m^5}u^6 + \text{ec.}}$$

ossia,

$$2\pi m Q =$$

$$F^m . \int du . c^{-\frac{\beta}{m}u^2 + (\alpha - \frac{\rho}{m})u.\sqrt{-1}} \left[1 + \left(\frac{C}{m^2}u^3 + \frac{C'}{m^4}.u^5 + \text{ec.}\right)\sqrt{-1} + \left(\frac{H}{m^3}.u^4 + \frac{H'}{m^5}.u^6 + \text{ec.}\right)\right]$$

supponendo

$$c^{\left(\frac{\alpha'}{m^2}u^3 + \frac{\alpha''}{m^4}.u^5 + \text{ec.}\right)\sqrt{-1} + \frac{\beta'}{m^3}u^4 + \frac{\beta''}{m^5}u^6 + \text{ec.}}$$

$$= 1 + \left(\frac{C}{m^2}u^3 + \frac{C'}{m^4}.u^5 + \text{ec.}\right)\sqrt{-1} + \frac{H}{m^3}u^4 + \frac{H'}{m^5}u^6 + \text{ec.}$$

I limiti di u sono $-m\pi$ e $+\pi m$; ma stante la grandezza di m si può senza errore sensibile integrare da $u=-\infty$ fino ad $u=+\infty$: I termini componenti il valore di $2\pi m$Q si potranno in conseguenza integrare mediante le formole generali poste nel N.° 2. Per eseguire questa integrazione facciamo $u=z\sqrt{\frac{m}{b}}$, si avrà

$$2\pi Q\sqrt{m\beta}=F^m.\int dz.c^{-z^2-\sqrt{\frac{m}{b}}.(a-\frac{\rho}{m})z\sqrt{-1}}\left(1+\frac{Hz^4}{mb^2}+\frac{H'z^6}{m^2b^3}+\text{ec.}\right),$$

omettendo la parte moltiplicata per $\sqrt{-1}$, la quale deve necessariamente svanire per essere Q quantità reale, e β quantità reale positiva, siccome dimostreremo in seguito. Il risultato di questa integrazione darà una serie, che procede secondo le potenze negative di m, la quale sarà per conseguenza tanto più convergente quanto più grande sarà il numero m: ma in quasi tutti i casi si possono trascurare le quantità divise per $m\sqrt{m}$, ed allora si ha,

$$Q=\frac{F^m}{2\pi\sqrt{mb}}.\int dz.c^{-z^2-\sqrt{\frac{m}{b}}\left(a-\frac{\rho}{m}\right)z\sqrt{-1}}$$

ed integrando da $z=-\infty$ fino a $z=+\infty$,

$$Q=\frac{F^m}{2\sqrt{m\pi b}}.c^{-\frac{(am-\rho)^2}{4mb}} \quad \ldots\ldots \text{(I)}.$$

Cerchiamo presentemente i valori delle due costanti a e β, che entrano in questa formola.

Svolgendo il valore di X secondo le potenze di ϖ si trova.

$$X=B+S.B_i+\varpi\sqrt{-1}.S.B_i a_i-\frac{\varpi^2}{1.2}.SB_i a_i^2+\text{ec.},$$

ove la caratteristica S deve essere estesa a tutti i valori di i da $i=1$ fino ad $i=n$. Facciamo per maggior semplicità,

$$F=B+S.B_i;\ F'=S.B_i a_i;\ F''=S.B_i a_i^2;\ \text{ec.}$$

avremo,

$$\log.X=\log.F+\log.\left(1+\varpi\sqrt{-1}.\frac{F'}{F}-\frac{\varpi^2}{2}.\frac{F''}{F}+\text{ec.}\right),$$

e svolgendo,

$$\log.X = \log.F + \varpi\sqrt{-1}\,.\frac{F'}{F} - \frac{\varpi^2}{2}\,.\left(\frac{F''}{F} - \frac{F'^2}{F^2}\right) + \text{ec.}$$

Questa equazione ci dà,

$$a = \frac{F'}{F}$$

$$\beta = \frac{FF'' - F'^2}{2F^2}\,. \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

4. Applichiamo le formole trovate al caso in cui si ha,

$$B_i = \phi.\left(\frac{x}{n}\right),\ a_i = x^{\tau},$$

τ essendo un numero intero positivo, e $\phi\left(\frac{x}{n}\right)$ una qualunque funzione di x, la quale decresce a misura che aumenta x. Basterà di fare successivamente $x = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots n$ per avere tutti i valori di B_i ed a_i. Sia $\frac{x}{n} = x'$, $\frac{1}{n} = \Delta x'$, avremo,

$$F = B + n\,.S\,.\Delta x'\,\phi(x'),$$

$$F' = n^{\tau+1}\,.S.\Delta x'\,x'^{\tau}\,\phi(x');$$

$$F'' = n^{2\tau+1}\,.S.\Delta x'.\,x'^{2\tau}\,\phi(x').$$

Si potrà adunque trovare il valore di queste costanti, mediante le note formole sul Calcolo integrale delle differenze finite; ma supponendo n numero grandissimo, siccome ciò ha luogo nelle quistioni alle quali si applica questa teoria, si potrà cambiare $\Delta x'$ in dx', ed il segno S in quello degli integrali ordinarii, di modo che integrando da $x' = 0$ fino ad $x' = 1$ si avrà.

$$F = n.\int dx'.\phi(x'),$$

$$F' = n^{\tau+1}\int dx'.x'^{\tau}\,\phi(x'),$$

$$F'' = n^{2\tau+1}\int dx'.x'^{2\tau}\,\phi(x').$$

Ora se noi facciamo

$$h = \int dx'\,\phi(x'),\ h' = \int dx'.x'^{\tau}\,\phi(x'),\ h'' = \int dx'.x'^{2\tau}\,\phi(x')$$

ne risulterà,

$$a = n^{\tau}\cdot\frac{h'}{h},\ \beta = \frac{n^{2\tau}(hh'' - h'^2)}{2h^2}.$$

Sostituendo questi valori nella formola (I) si troverà, che fatto,

$$\rho = am + n^{\tau} q\sqrt{m} = n^{\tau} \cdot \frac{mh'}{h} + n^{\tau} q\sqrt{m}, \quad \ldots\ldots (a)$$

$$E = \frac{h}{\sqrt{hh'' - h'^2}},$$

si ha,

$$Q = \frac{(nh)^m . E}{n^{\tau}\sqrt{2m\pi}} . c^{-\frac{q^2 E^2}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots (b)$$

5. Questo valore di Q diventarebbe immaginario, ove la quantità $hh'' - h'^2$ acquistasse un valore negativo; ma senza conoscere la forma della funzione $\varphi(x')$ si può dimostrare, che questa costante rimane sempre positiva, purchè $\varphi(x')$ abbia la proprietà di diminuire a misura che x' aumenta. Osserviamo in primo luogo, che se noi prendiamo $\varphi(x') = 1$ si ottiene $h = 1$, $h' = \frac{1}{\tau+1}$, $h'' = \frac{1}{2\tau+1}$, e per conseguenza $\frac{h''}{h} = \frac{1}{2\tau+1}$. Nel caso generale dico, che noi abbiamo $\frac{h''}{h} < \frac{1}{2\tau+1}$, ossia $h''(2\tau+1) < h$.

Infatti, sostituendo in vece di h e h'' i loro valori si avrà,

$$\int dx' \varphi(x') > (2\tau+1) \int dx' . x'^{2\tau} \varphi(x');$$

e siccome i limiti dell' integrazione sono $x' = 0$, $x' = 1$, se noi dimostriamo che

$$x'^{2\tau} \int dx' \varphi(x') > (2\tau+1) \int dx' . x'^{2\tau} \varphi(x')$$

si dovrà *a fortiori* ammettere l' ineguaglianza precedente. Differenziando e dividendo da ambe le parti per $x'^{2\tau-1}$ si trova $x'\varphi(x') < \int dx' \varphi(x')$: differenziando di nuovo, questa ineguaglianza diventa $\frac{x' d.\varphi(x')}{dx'} < 0$; ciò che è effettivamente vero, giacchè $\varphi(x')$ decrescendo a misura che x' aumenta, $\frac{d.\varphi(x')}{dx'}$ deve essere negativo. Egli è adunque provato che $hh'' < \frac{h^2}{2\tau+1}$. Ciò posto sarà dimostrato che $hh'' > h'^2$, facendo

vedere, che si ha $\frac{h^2}{2\tau+1} > h'^2$, ossia $h > h'\sqrt{2\tau+1}$. A quest' oggetto rimettiamo in vece di h e di h' i loro valori, si avrà,

$$\int dx'\phi(x') > \sqrt{2\tau+1}\,.\int dx'.x'^{\tau}\phi(x').$$

Per mettere questa ineguaglianza fuori di dubbio basta provare che,

$$x'^{\tau}\int dx'\phi(x') > \sqrt{2\tau+1}\,.\int dx'.x'^{\tau}\phi(x'):$$

Infatti differenziando e dividendo da ambe le parti per $x'^{\tau-1}$ si trova,

$$\tau\int dx'\phi(x') > (\sqrt{2\tau+1}-1)\,x'\phi(x');$$

di quì mediante una nuova differenziazione si deduce

$$\left(\sqrt{2\tau+1}-\tau-1\right)\phi(x') + \left(\sqrt{2\tau+1}-1\right)x'\frac{d.\phi(x')}{dx'} < 0,$$

risultato incontestabile, giacchè $\tau+1 > \sqrt{2\tau+1}$, e $x'\frac{d\phi(x')}{dx'} < 0$.

6. La formola (b) trovata nel N.° precedente dà la probabilità che si ha perchè la somma delle potenze τ degli errori di un grandissimo numero m di osservazioni sia eguale ad una data quantità ρ, supponendo che $\Psi\left(\frac{x}{n}\right)$ rappresenta la legge di facilità di un errore x e prendendo

$$\phi\left(\frac{x}{n}\right) = \Psi\left(\frac{x}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{x}{n}\right).$$

Giusta la teoria delle combinazioni egli è chiaro, che la ricerca di questa probabilità si riduce a quella del coefficiente di x^{ρ} che si trova nello svolgimento della potenza m di un polinomio simile a quello, che noi abbiamo chiamato X al principio del N.° 3. (*)

(*) Questo teorema si dimostra facilmente considerando le combinazioni di m poliedri simili, i piani di ciascheduno de' quali sieno segnati coi numeri $0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ di maniera che $B, B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ rappresentino le probabilità corrispondenti per avere al primo colpo i numeri della prima serie. Del resto si può consultare a questo proposito l'eccellente opera di *Moivre* intitolata *Doctrine of chances*.

Siccome la facilità di un errore non è altra cosa, che il rapporto del numero dei casi in cui ha luogo al numero totale dei casi, ne segue che la somma intera di questi rapporti deve dare la certezza ossia l'unità; si avrà adunque $F = nh = 1$, e per conseguenza

$$Q = \frac{E}{n.\sqrt[\tau]{2m\pi}} \cdot c - \frac{q^2E^2}{2}.$$

Questa espressione acquista il massimo suo valore quando $q = 0$; ma in questo caso la formola (a) trovata nel numero precedente diventa, $\rho = \frac{n^\tau m h'}{h}$; dunque fatto $n = a$, la somma la più probabile delle potenze τ degli errori, presi tutti positivamente, sarà espressa dalla seguente semplicissima formola,

$$\frac{ma^\tau h'}{h} = \frac{ma^\tau . \int dx' . x'^\tau \phi(x')}{\int dx' . \phi(x')} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

Quì vuolsi osservare, che a rappresenta il massimo errore possibile misurato coll'unità della specie che gli conviene, e che tutti gli errori si dovranno per conseguenza valutare colla medesima unità. Era necessario per la soluzione del problema di immaginar diviso in un grandissimo numero n di parti l'intervallo compreso fra zero ed a, onde poter comprendere nel raziocinio tutti i numeri che trovansi in questo intervallo; ma ora possiamo fare astrazione dal numero n, il quale non entra nella formola (A).

Volendo supporre, siccome pare naturale, che la probabilità degli errori non cambia col cambiar di segno ai medesimi, ne seguirà che $\Psi\left(\frac{x}{n}\right) = \Psi\left(-\frac{x}{n}\right)$, e per conseguenza $\phi(x') = 2\Psi(x')$. Sostituendo questo valore nella formola (A), essa si trasformerà nella seguente,

$$\frac{ma^\tau . \int dx' . x'^\tau \Psi(x')}{\int dx' \Psi(x')} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (B),$$

ove i limiti dei due integrali sono $x' = 0$, $x' = 1$. Facendo $\tau = 2$, questo risultato si accorderà con quello ottenuto dal

Signor Laplace (*V. p.* 312. *Théorie Analytique des Probabilités*).

7. Cerchiamo presentemente la probabilità, che la somma delle potenze τ degli errori, presi tutti positivamente, si troverà compresa fra due dati limiti. Ad un tal fine riassumiamo le due equazioni

$$Q = \frac{E}{n^{\tau}\sqrt{2m\pi}} \cdot c^{-\frac{q^2E^2}{2}},$$

$$\rho = \frac{n^{\tau}mh'}{h} + q \cdot n^{\tau}\sqrt{m}$$

ed osserviamo, che dovendo ρ, sotto questa forma, essere numero intero si dovrà prendere per q un multiplo di $\frac{1}{n^{\tau}\sqrt{m}}$. È chiaro adunque, che se noi facciamo $\Delta q = \frac{1}{n^{\tau}\sqrt{m}}$ si avrà

$$\frac{2E}{\sqrt{2\pi}} \cdot S \cdot \Delta q \cdot c^{-\frac{q^2E^2}{2}}$$

per espressione della probabilità, che il valore di ρ si troverà compreso fra i limiti,

$$\frac{mn^{\tau}h'}{h} - qn^{\tau}\sqrt{m}, \quad \frac{mn^{\tau}h'}{h} + qn^{\tau}\sqrt{m}.$$

Siccome Δq è una frazione estremamente piccola ne viene in conseguenza, che

$$\frac{2E}{\sqrt{2\pi}} S.\Delta q \cdot c^{-\frac{q^2E^2}{2}} = \frac{2E}{\sqrt{2\pi}} \int dq \cdot c^{-\frac{q^2E^2}{2}} \quad \ldots (a),$$

ove l'integrazione deve estendersi da $q = 0$ fino a $q = q$. La formola (a) dà la probabilità, che il valore di ρ si troverà compreso fra i limiti.

$$\frac{ma^{\tau}h'}{h} - a^{\tau}q\sqrt{m}, \quad \frac{ma^{\tau}h'}{h} + a^{\tau}q\sqrt{m};$$

e dividendo questi limiti per m, la medesima formola (a) darà la probabilità, che il valore medio di ρ si troverà compreso fra i limiti

$$\frac{a^{\tau}h'}{h} - \frac{a^{\tau}q}{\sqrt{m}}, \quad \frac{a^{\tau}h'}{h} + \frac{a^{\tau}q}{\sqrt{m}}$$

ove a rappresenta il massimo errore possibile. Supposti invariabili questi limiti, il valore di q crescerà con quello di m, e per conseguenza il valore dato dalla formola (a) sarà sempre più prossimo alla certezza. Supposto inoltre, che $\frac{a^2 q}{\sqrt{m}}$ è una frazione piccolissima, si potrà, moltiplicando le osservazioni, ottenere quel grado di probabilità che si desidera, e $\frac{a^2 h'}{h}$ sarà prossimamente il valore medio di ρ.

Chiamando adunque $S.e^2$ la somma dei quadrati degli errori di un grandissimo numero di osservazioni egli è molto probabile, che questa somma sarà prossimamente eguale ad $\frac{ma^2 h'}{h}$, onde stabilita l' equazione

$$\frac{ma^2 h'}{h} = S \,.\, e^2$$

se ne ricaverà il valore di

$$\frac{\int dx' \, x'^2 \, \Psi(x')}{\int dx' \, \Psi(x')} = \frac{S \,.\, e^2}{ma^2}$$

senza conoscere la forma di $\Psi(x')$. Tale è il modo con cui il Signor *Laplace* ha determinato il rapporto di questi due integrali definiti. Conosciuta questa quantità non v' ha più difficoltà veruna per trovare il valore dell' error medio, siccome si vede nell' opera precitata (pag. 328-329).

8. Le formole dianzi esposte danno con tanta facilità la soluzione del problema che ha per oggetto la ricerca della *vita media* della specie umana, che io non posso astenermi dall' aggiunger quì una sì bella applicazione del calcolo delle probabilità.

In primo luogo egli è necessario di chiaramente spiegare ciò che noi intendiamo per vita media. Ad un tal fine, chiamiamo n la massima età a cui l' uomo può arrivare; x una qualunque altra età compresa fra zero, ed n; e $\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ una funzione di x, la quale rappresenta la probabilità che ha un fanciullo appena nato per vivere fino all' età espressa

per x. Ciò posto, la somma di tutte le età possibili moltiplicate per la probabilità corrispondente, ossia la quantità $S.x\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ sarà quella che noi chiameremo vita media. Se si osserva, che il prodotto $x\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$ è quella sola porzione della vita x a cui si ha diritto nascendo, ne verrà in conseguenza, che la somma di tutte queste porzioni costituisce l'età che si può accordare ad un fanciullo appena nato, volendo seguire le leggi della probabilità.

Supponiamo i numeri x ed n divisi in un grandissimo numero di parti, e facciamo $\frac{x}{n}=x'$, $\frac{1}{n}=dx'$; si avrà integrando da $x'=0$ fino ad $x'=1$

$$S\,x.\varphi\left(\frac{x}{n}\right)=n^2\int x'dx'.\varphi(x').$$

Vediamo ora in qual modo si può trovare il valore di questa quantità senza supporre nota la funzione $\varphi(x')$.

La probabilità, che la somma totale delle vite di un grandissimo numero m di fanciulli sia eguale ad una data quantità p si ottiene calcolando il coefficiente di x^p, che nasce dallo svolgimento del polinomio

$$\left[\varphi\left(\frac{0}{n}\right)+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)x+\varphi\left(\frac{2}{n}\right).x^2+\varphi\left(\frac{3}{n}\right).x^3\ldots+\varphi\left(\frac{n}{n}\right).x^n\right]^m.$$

Basterà adunque di supporre $\tau=1$ nelle formole del N.° 6. per farne l'applicazione al caso di cui si tratta. Di quì ne risulta, che se noi facciamo,

$$K=\int dx'\varphi(x'),\ K'=\int x'dx'\varphi(x'),\ K''=\int x'^2dx'\varphi(x')$$

$$\beta^2=\frac{K^2}{KK''-K'^2}$$

avremo

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\int\beta dq.c^{-\frac{q^2\beta^2}{2}}\ \ldots\ (\alpha')$$

per espressione della probabilità, che la somma delle vite di m fanciulli sarà compresa fra i limiti

$$\frac{nmK'}{K}-qn\sqrt{m},\quad \frac{nmK'}{K}+qn\sqrt{m}.$$

Dividendo questi due limiti per m, la medesima formola (α') dà le probabilità che la somma intera delle vite divisa per m sarà compresa fra i limiti

$$\frac{nK'}{K} - \frac{qn}{\sqrt{m}}, \quad \frac{nK'}{K} + \frac{qn}{\sqrt{m}}.$$

Chiamando a la massima età espressa in anni si potrà ora sostituire a in luogo di n in questi limiti, i quali diventeranno

$$a^2K' - \frac{qa}{\sqrt{m}}, \quad a^2K' + \frac{qa}{\sqrt{m}},$$

osservando che $nK = 1$, giusta quanto è stato detto nel N.° 6. Presentemente, se noi supponiamo a q un valore di mediocre grandezza, ne seguirà che la probabilità data dalla formola (α') (la quale deve essere integrata da $q = 0$ fino $q = q$,) sarà vicinissima alla certezza, e che $\frac{qa}{\sqrt{m}}$ non cesserà di rappresentare una frazione piccolissima stante la grandezza supposta del numero m: dunque chiamando T la somma osservata delle vite divisa per m, si potrà, senza grave errore, supporre $T = a^2 K'$, ossia,

$$T = a^2 \int x' \, dx' \varphi(x') = \text{vita media}.$$

Tanto più sarà esatto questo modo di determinare la vita media quanto più sarà grande il numero de' fanciulli, de' quali si sarà osservata l' epoca della nascita e della morte. Ma chi volesse avere una più precisa idea sull' errore da temersi in più o in meno in questa determinazione, potrà acquistarla agevolmente, riducendo in numeri la seguente formola del Signor Laplace,

$$\frac{\sqrt{H - T^2}}{\sqrt{2m\pi}},$$

nella quale H rappresenta la somma dei quadrati delle vite divisa per m. (*V. Théorie Analytique de Probabilités pag.* 411).

Nota sopra l' integrazione di un' Equazione differenziale data da Euler

Euler, nel Tomo secondo del suo Calcolo Integrale (pag. 458) asserisce che la formola,

$$y = A.e^{x.\cos.\theta}.\cos.(x\sin.\theta + \xi),$$

soddisfa, siccome valore particolare, all' equazione

$$0 = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots + \frac{d^\infty y}{dx^\infty}$$

di ordine infinito

Il seguente calcolo proverà, parmi, che questo teorema non può sussistere. Infatti, differenziando il supposto valore di y, e facendo per maggior semplicità,

$$p = \text{sen}(x.\sin.\theta + \xi),\ q = \cos.(x.\sin.\theta + \xi)$$

si ottiene,

$$\frac{dy}{dx} = A.e^{x\cos.\theta}.(q.\cos.\theta - p.\sin.\theta);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A.e^{x\cos.\theta}.(q\cos.^2\theta - 2p\sin.\theta.\cos.\theta - q\sin.^2\theta);$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = A.e^{x\cos.\theta}.(q\cos.^3\theta - 3p.\cos.^2\theta.\sin.\theta - 3q\cos.\theta.\sin.^2\theta + p\sin.^3\theta);$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = A.e^{x\cos.\theta}.\left\{\begin{array}{l} q.\cos.^n\theta - np.\cos.^{n-1}\theta.\sin.\theta - \frac{n.(n-1)}{1.2}q\cos.^{n-2}\theta.\sin.^2\theta \\ + \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}p\cos.^{n-3}\theta.\sin.^3\theta + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Ora da queste equazioni facilmente se ne deduce che,

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots + \frac{d^\infty y}{dx^\infty}$$

$$= A.e^{x\cos.\theta}.q(1 + \cos.\theta + \cos.2\theta + \cos.3\theta \ldots + \cos.\infty\theta)$$

$$- A.e^{x\cos.\theta}.p(\sin.\theta + \sin.2\theta + \sin.3\theta \ldots + \sin.\infty\theta):$$

Ma egli è dimostrato nell' Introduzione all' Analisi d' *Euler*, che si ha,

$$\cos.\theta + \cos.2\theta + \cos.3\theta \;.\;.\;.\;.\; + \cos.\infty\,\theta = -\tfrac{1}{2},$$

$$\sin.\theta + \sin.2\theta + \sin.3\theta \;.\;.\;.\;.\; + \sin.\infty\,\theta = \tfrac{1}{2}.\cot.\tfrac{1}{2}\theta,$$

dunque si avrà,

$$y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \frac{d^\infty y}{dx^\infty}$$

$$= \frac{A}{2}.e^{x\cos.\theta}.\Big[\cos.(x\sin.\theta + \xi) - \cot.\tfrac{1}{2}\theta.\sin.(x\sin.\theta + \xi)\Big]$$

$$= \frac{A}{2}.e^{x\cos.\theta}.\left[\frac{\cos.(x\sin.\theta+\xi) - \cos.\,x\sin\theta+\xi-\theta}{1-\cos.\theta}\right],$$

osservando che $\cot.\frac{1}{2}\theta = \frac{\sin.\theta}{1-\cos.\theta}$.

Presentemente è chiaro, che il secondo membro della precedente equazione non può diventar zero per qualsivoglia valore dato alle due costanti ξ, θ, siccome vorrebbe *Euler*, giusta quanto soggiunge nelle ultime linee della pag. 458. Vuolsi osservare, che facendo θ eguale ad un multiplo dell' intera periferia del circolo, la medesima espressione prende la forma $\frac{0}{0}$, e che nel caso attuale non è punto eguale a zero il suo valore.

Del resto non è difficile di dimostrare *a priori* l' impossibilità di soddisfare all' equazione di cui si tratta per via di un' espressione esponenziale. Ad un tal fine, osservisi, che posto, $y = e^{mx}$, si ha per determinare la costante m l' equazione

$$0 = 1 + m + m^2 + m^3 \;.\;.\;.\;.\; + m^\infty,$$

cui non può soddisfare verun valore finito di m nè reale, nè immaginario, stante che il secondo membro di essa non è altra cosa che lo svolgimento della frazione

$$\frac{1}{1-m}$$

Supposte giuste queste mie riflessioni converrà tirarne la conseguenza, che non può aversi per vera l' integrale dell' equazione

$$X = y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} \;.\;.\;.\;.\;.\; + \frac{d^\infty y}{dx^\infty},$$

che *Euler* dà alla pag. 460. del dianzi citato Libro.