MEMORIE
DI
MATEMATICA

SUL MOVIMENTO DI UN' ELICE ELASTICA CHE SI SCATTA

MEMORIA

Di Ottaviano Fabrizio Mossotti

Presentata dal Socio Cav. Brunacci

APPROVATA DAL SIG. PRESIDENTE RUFFINI

Ricevuta li 2. *Settembre* 1817.

1. In una Memoria, intitolata *Usage et Théorie d'une Machine qu'on peut nommer Instrument Ballistique*, inserita fra quelle dell' Accademia di Berlino dell' anno 1781. i due fratelli Giovanni e Giacomo Bernoulli hanno preso a determinare la velocità che un filo metallico piegato in forma d'elice può comunicare ad un corpo sovrapposto o contiguo. I tentativi di questi Geometri sono molto lodevoli, ma pei diffetti degli Istrumenti de' quali hanno dovuto servirsi in mancanza di migliori, e parmi anche per qualche errore sfuggito nella loro teorica, non riuscirono ad ottenere un soddisfaccente accordo tra i risultamenti del calcolo e quelli degli esperimenti. Procurerò in questo scritto di supplire all' imperfezione della teorica data dai Bernoulli, e mentre ver-

rò così ad eliminare alcuni elementi di discrepanza fra la teorica ed i loro esperimenti, preparerò delle formole che spero potranno essere utili a coloro i quali vorranno instituire dei nuovi esperimenti con migliori elastri, o far uso di questi in qualche macchina.

Per risolvere i problemi che mi sono proposti ho assunto due ipotesi, le quali sono però così da vicino verificate dagli sperimenti che, piuttosto che ipotesi, possono risguardarsi come regole di fatto La prima di queste ipotesi è riposta in ciò, che l'elice elastica debba in tutto il tempo dello scatto o dilatazione conservare la figura d'elice ed un egual numero di rivoluzioni, talmente che nell'allargarsi i passi delle spire, sia soltanto il diametro dell' elice che venga successivamente a diminuire. Colla seconda ipotesi stabilisco ad imitazione di Daniele e Giacomo Bernoulli che gli accorciamenti o costipazioni che possono farsi soffrire all' elice siano proporzionali alle forze o pesi comprimenti atti a produrle. Allorchè nella soluzione dei problemi mi occorrerà di assumere per la prima volta alcuna di queste ipotesi avrò cura di far conoscere gli esperimenti che mi hanno persuaso ad adottarla, acciò il lettore sia egualmente convinto della legittimità della medesima.

I Bernoulli ed altri autori, che hanno considerato il movimento degli elastri piegati in forma d'elice, hanno per semplicità supposto nei loro calcoli che il movimento oscillatorio di un' elice fissa in un estremo sia eguale a quello di una fibra rettilinea ed omogenea dotata d'una stessa massa e d' una pari elasticità, e la cui lunghezza fosse rappresentata dall' asse stesso dell' elice. Alla fine della presente Memoria farò vedere come questa supposizione è giusta, e come le equazioni che rappresentano il moto di una fibra rettilinea ed omogenea sono le stesse di quelle appartenenti alle oscillazioni di un' elice elastica. V' è però una notabile differenza fra i miei risultamenti e quelli degli autori che mi hanno preceduto. Secondo questi se si suppone che

la fibra elastica sia spogliata in tutta la lunghezza della sua massa, e si immagini che il terzo della medesima sia concentrato nell' estremità mobile, i moti di quest' elastro immaginario devono accompagnare esattamente quelli dell' elastro vero; secondo me non è il terzo della massa dell' elastro che deve supporsi concentrato nell' estremità mobile, ma la metà. La strada semplice e diretta colla quale ho risoluti i problemi parmi che basti a convincere dell' esattezza delle nuove formole a preferenza delle antiche, e non ho creduto opportuno entrare in disquisizioni particolari sull' erroneità di queste ultime, perchè ciò ci avrebbe condotti troppo lontani dall' oggetto di questa Memoria.

2. Per più chiara intelligenza premetterò quì le definizioni di alcuni termini che userò ad oggetto di evitare certe circonlocuzioni ed abbreviare così il discorso.

La curva che può immaginarsi descritta sulla superficie di un cilindro retto da un filo che si avvolge attorno allontanandosi dalla base con uniforme e regolare distanza sarà da noi detta *elice* ovvero *spirale*.

Una sola ma intiera rivoluzione di questo filo sarà chiamata *spira*, e la distanza fra i due punti estremi della spira si dirà *passo*, della spirale, o dell' elice.

La retta che può concepirsi in mezzo alla spirale egualmente lontana da tutti i suoi punti si chiamerà *asse* della spirale.

E finalmente nomineremo *circolo di projezione* il circolo che risulterebbe projettando tutti i punti della spirale su di un piano perpendicolare all' asse, ed il raggio di questo circolo lo diremo anche *raggio della spirale o dell' elice*.

PROBLEMA I.

3. „ Supposta un' elice elastica composta di un nume-
„ ro intiero di spire, non pesante, e posta perpendicolar-
„ mente su di un piano resistente, essendo prima ritenuta

„ compressa da un ostacolo, rimosso immediatamente l'osta-
„ colo, si dimandano le relazioni tra gli elementi del moto
„ nello scatto dell' elice che segue. „

Soluzione. Siccome nessuna forza esterna agisce sulla spirale per trasportarla, ed essendo supposta di un numero intiero di spire, la corrispondente disposizione delle sue parti fa che non vi sia ragione per cui essa si muova piuttosto da una banda che dall'altra, così è evidente che l'asse della medesima resterà immobile. Prendo quest' asse per l' asse delle z, e conduco al piede del medesimo nel piano su cui giace la spirale due altri assi delle x, e delle y ortogonali fra loro, ed in modo che quello delle x passi pel punto della spirale in contatto col piano. Ciò fatto

Sia Δ la densità della materia componente l' elice.

π il rapporto del diametro alla circonferenza.

r il raggio del filo dell'elice.

Siano x, y, z le coordinate di un punto qualunque corrispondente all' estremità dell' arco s alla fine di un tempo t contato dal principio del moto

f, f', f'' le somme delle forze acceleratrici secondo i rispettivi assi di tutti i punti del detto arco s.

È noto che saranno $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ le forze acceleratrici secondo i detti assi del punto corrispondente alla fine dell' arco s.

Considerando le tre quantità f, f', f'' funzioni di s, e facendo che s aumenti di una quantità ω, le tre serie

$$f + \omega\left(\frac{df}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right) + \omega^3 \mathrm{L}.$$

$$f' + \omega\left(\frac{df'}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f'}{ds^2}\right) + \omega^3 \mathrm{M}.$$

$$f'' + \omega\left(\frac{df''}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f''}{ds^2}\right) + \omega^3 \mathrm{N}.$$

esprimeranno le somme delle forze acceleratrici secondo i tre assi di tutto l' arco $s + \omega$, onde sottraendo le prime somme da queste rimarranno le serie

$$\omega\left(\frac{df}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)+\omega^3\ \mathrm{L}\,.$$

$$\text{(H)}\qquad \omega\left(\frac{df'}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f'}{ds^2}\right)+\omega^3\,\mathrm{M}\,.$$

$$\omega\left(\frac{df''}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f''}{ds^2}\right)+\omega^3\,\mathrm{N}\,.$$

le quali saranno le somme delle forze acceleratrici nella direzione dei tre assi, ossia le forze motrici dell' arco ω. Immaginiamo tre forze acceleratrici A, A', A'' secondo gli stessi assi delle x, y, z tali che tutto l'arco ω essendo animato da queste tre forze acceleratrici ne risultino tre forze rispettivamente eguali a quelle delle tre serie soprascritte. È evidente che queste tre forze dovranno essere della forma. (*)

$$\mathrm{A}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{X}\,,\quad \mathrm{A}'=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{Y}\,,\quad \mathrm{A}''=\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{Z}\,,$$

essendo X una funzione di t, x, ω; Y una funzione di t, y, ω, e parimenti Z una funzione di t, z, ω che non diventano infinite quando $\omega=0$. Infatti se noi supponiamo che ω diventi zero, le forze acceleratrici A, A', A'' devono ridursi a quelle del punto corrispondente alle coordinate x, y, z, come appunto addiviene poichè fatto $\omega=0$ si ha

$$\mathrm{A}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right),\quad \mathrm{A}'=\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right),\quad \mathrm{A}''=\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Moltiplichiamo ora quelle tre forze acceleratrici A, A', A'' per la massa dell' elastro ω, la quale è evidentemente espressa da $\Delta\pi r^2\omega$, per la supposizione fatta le tre forze motrici che ne risultano dovranno eguagliare quelle espresse dalle tre serie (H) ed avremo le equazioni

$$\Delta\pi r^2\omega\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)+\omega\,\mathrm{X}\right]=\omega\left(\frac{df}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)+\omega^3\mathrm{L}.$$

(*) Vedi una Memoria del Prof. Brunacci fra quelle dell' Istituto Nazionale Italiano, Tomo I, Parte II pag. 79, ove il principio di cui faccio uso per evitare la considerazione degli infinitamente piccoli fu per la prima volta messo in campo.

$$\Delta \pi r^2 \omega \left[\left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) + \omega \mathrm{Y} \right] = \omega \left(\frac{df}{ds} \right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2 f'}{ds^2} \right) + \omega^3 \mathrm{M} .$$

$$\Delta \pi r^2 \omega \left[\left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) + \omega \mathrm{Z} \right] = \omega \left(\frac{df''}{ds} \right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2 f''}{ds^2} \right) + \omega^3 \mathrm{N} .$$

dalle quali, paragonando i coefficienti delle prime potenze di ω, si dedurranno le seguenti.

$$(1) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \left(\frac{df}{ds} \right)$$

$$(2) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \left(\frac{df'}{ds} \right)$$

$$(3) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \left(\frac{df''}{ds} \right) .$$

4. Scolio I. Volendo risolvere rigorosamente il problema converrebbe ora avere le espressioni delle forze f, f', f'' in funzioni delle coordinate x, y, z, e dell' arco s o delle loro differenziali, e sostituire questi valori nelle ultime equazioni ottenute. Risulterebbero così delle equazioni a *differenziali parziali* dall' integrazione delle quali dipenderebbe la soluzione del problema, il cui sviluppo riuscirebbe perciò intralciato da tutte quelle difficoltà che sono proprie di questo ramo di calcolo integrale. Per evitare queste difficoltà, insuperabili nello stato attuale dell' analisi, ho assunta un' ipotesi che mi ha suggerito un esperimento instituito dal Sig. Francesconi, e da me.

Abbiamo presa una spirale nera di acciajo fissa con una delle sue estremità in un piano immobile, e l' abbiamo costipata sino al totale contatto delle sue spire, in modo che l' elice costituiva la superficie di un cilindro retto. Sulla superficie di questo cilindro con una riga abbiamo segnata una linea retta, bianca, parallela all' asse dell' elice, ed abbiamo così abbandonata l' elice a se stessa. Nelle oscillazioni che succeddettero si osservò che i punti bianchi di ciascuna spira che prima costituivano una linea retta continua, nell' allargarsi i passi delle spire si staccavano l' uno dall' altro, ma rimanevano costantemente sulla stessa retta o sul suo prolungamento. Le oscillazioni essendo molto rapide non permette-

vano che si distinguesse se le distanze fra questi punti erano per ciascun istante eguali su tutta la lunghezza dell' elice, ma moderando superiormente colla compressione di una mano la rapidità delle oscillazioni sino al punto che queste distanze si potevano ben percepire coll'occhio non si potè notare fra loro alcuna sensibile differenza. (*).

Le stesse prove ripetute su di un' altra spirale di ottone più sottile ma più lunga ci hanno somministrato gli stessi risultamenti. (**).

Da quest' esperimento se ne deduce un' importantissima conseguenza pel nostro oggetto. Poichè i punti bianchi segnati su ciascuna spira rimangono costantemente in linea retta ed a distanze eguali, forz'è che l'elastro conservi costantemente la figura d'elice, e sia composto di un egual numero di rivoluzioni, o spire. Sia adunque a il raggio del circolo di projezione dell' elice, ed e l'inclinazione della spirale, ossia l' angolo che farebbe la tangente ad un punto qualunque della medesima col piano delle x, y, le coordinate x, y, z dovranno soddisfare alle equazioni che rappresentano le projezioni dell'elice, che sono

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad z = a.\ \text{tan.}\ e.\ \text{arc. sin.}\ \frac{y}{a}.$$

Di più per le proprietà di questa curva si avranno le equazioni

$$(4) \quad z = s.\ \text{sin.}\ e \qquad a.\ \text{arc. sin.}\frac{y}{a} = s\ \text{cos.}e.$$

Denomino β l'angolo che ha per seno $\frac{y}{a}$, sarà

(*) Questo risultamento è un po' alterato se l'elice è posta verticalmente, perchè in tal caso il peso delle spire superiori che gravita sulle inferiori, fa che i passi dell'elice siano verso il basso successivamente un poco minori, ma la differenza di questi passi nelle spirali che abbiamo usato non era notabile che nelle due ultime spire.

(**) Per più precisa informazione di questi esperimenti devo avvertire che la prima spira superiore dell'elice era ridotta con una saldatura in una circonferenza piana.

$$(5) \qquad y = a \sin\text{-}\beta$$

onde sostituendo, le nostre equazioni diverranno

$$(6) \qquad x = a \cos.\beta \qquad\qquad a\beta = s.\cos.e.$$

Ciò posto osservo, 1.° che essendo la lunghezza del filo della spirale per la natura della materia di cui è composto immutabile, e variando nelle oscillazioni della medesima continuamente la sua inclinazione, ossia l' angolo e, l' elastro non potrà conservare la figura d' elice ed un numero eguale di spire, come mostrano gli esperimenti, senza che il raggio a del circolo di projezione venga successivamente a variare. 2.° Che invece, se si abbassa da un punto qualunque dell' elice una perpendicolare sul circolo di projezione, l' arco compreso tra il piede di questa perpendicolare ed il punto d' intersezione dell' asse delle x colla stessa circonferenza, ossia l'angolo β deve rimanere sempre di un egual numero di gradi.

Dunque nelle nostre equazioni, variando il tempo, l'arco s e l' angolo β rimangono costanti per uno stesso punto, e variano le sole quantità e ed a, ed è per se evidente che passando nello stesso istante da un punto all' altro della curva varieranno viceversa le quantità s e β, mentre le altre due e ed a rimarranno costanti.

Dividendo l' ultima equazione per as si hanno i due rapporti seguenti

$$\frac{\beta}{s} = \frac{\cos.e}{a}.$$

Il primo rapporto è composto di quantità che non variano col tempo, il secondo di quantità che non variano passando da un punto all' altro della curva, questi due rapporti essendo altresì eguali converrà che ciascheduno di loro sia costante per le due dette variazioni. Chiamo ρ questo rapporto costante, ed ho

$$\beta = \rho s \qquad\qquad a = \frac{1}{\rho} \cos.e$$

per la sostituzione di questi valori le equazioni (4), (5), (6), diverranno

$x = \frac{1}{\rho} \cos. e \cos. \rho s$, $y = \frac{1}{\rho} \cos. e \sin. \rho s$, $z = s \sin. e$

nelle quali ripeto, e varia soltanto col tempo, ed s passando da un punto all' altro della curva.

Differenziando queste equazioni due volte relativamente a t, si avrà.

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \cos. \rho s$$

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \sin. \rho s$$

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2\sin. e}{dt^2}\right) s$$

sostituendo questi valori nelle equazioni (1), (2), (3), avremo

$$\Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \cos. \rho s = \left(\frac{df}{ds}\right)$$

$$\Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \sin. \rho s = \left(\frac{df'}{ds}\right)$$

$$\Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2\sin. e}{dt^2}\right) \times s = \left(\frac{df''}{ds}\right)$$

integrando relativamente ad s si otterrà

$$\Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \sin \rho s = f + c$$

$$-\Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \cos. \rho s = f' + c'$$

$$\Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2\sin. e}{dt^2}\right) \frac{s^2}{2} = f'' + c''.$$

All' oggetto di determinare le costanti, osservo che essendo $\rho s = \beta$, al principio della spirale si ha $s = 0$, $\rho s = \beta = 0$, $f = f' = f'' = 0$, onde sarà

$$c = 0, \qquad c' = -\Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right), \qquad c'' = 0$$

dunque le nostre equazioni diverranno

$$(7) \qquad \Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \sin. \rho s = f$$

$$(8) \quad -\Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right) \cos. \rho s = f' - \Delta \pi r^2 \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{d^2\cos. e}{dt^2}\right)$$

$$(9) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2}\right) \frac{s^2}{2} = f''$$

estendendo ora questi integrali a tutta la lunghezza dell' arco dell' elice col fare $s = \sigma$ ed osservando che per esser la medesima composta di un numero intiero n di spire si ha $\beta = \rho\sigma = 2n\pi$, resteranno le equazioni

$$(10) \qquad 0 = f$$

$$(11) \qquad 0 = f'$$

$$(12) \qquad \Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2}\right) \frac{\sigma^2}{2} = f''.$$

5. Scolio II. Per proseguire nell' equazione (12) le integrazioni relativamente al tempo conviene prima conoscere la misura della forza f''. È evidente che, se supponiamo l'elastro costipato e posto verticalmente, sovrapponendo un peso che impedisca che più si allunghi, questo peso misurerà la somma delle forze acceleratrici verticali colle quali l' elastro si distenderebbe in quell' istante essendo in libertà, ossia la forza f''. Questa forza sarà poi diversa anche nello stesso elastro variando la sua lunghezza, ossia secondo i diversi stati di compressione, e la sola esperienza può somministrare la legge della variabilità della medesima. Per scoprire questa legge ricorrerò alle esperienze eseguite da qualche fisico, e darò principio col riferire quelle che trovansi nella Memoria citata nelle prime linee di questo scritto.

Il Sig. Giovanni Bernoulli situò verticalmente una spirale d' acciajo, ed osservò con esattezza sopra una scala posta di fianco il punto a cui corrispondeva l' estremità superiore dell' elastro, quindi esaminò di quanto questo punto discendeva sovrapponendo successivamente all' elice dei pesi multipli, e cominciando da un quarto di libbra, osservò le costipazioni contenute nella seguente tavola.

Pesi in $\frac{1^{ti}}{4}$ di libbra	Costipazioni in $\frac{1^{ti}}{4}$ di linea	Aumenti delle costipazioni
1	6	6
2	14	8
3	20	6
4	26	6
5	32	6
6	38	6
7	45	7
8	52	7
9	58	6
10	65	7
11	72	7
12	79	7
13	86	7
14	92	6
15	99	7
16	107	8
17	114	7
18	122	8
19	130	8
20	138	8
21	145	7
22	151	6
23	157	6
24	161	4

Si vede in questa tavola che la prima colonna indica i pesi, la seconda le costipazioni corrispondenti a ciascun peso, la terza gli aumenti delle costipazioni, o le differenze tra le costipazioni per ciascun aumento di peso. Queste differenze poco si scostano dal loro medio che è 6,7 di quarti di linea, coscchè le piccole differenze sembrano dovute agli errori inevitabili delle osservazioni. Si può adunque conchiudere che gli aumenti delle costipazioni crescono nella stessa ragione degli aumenti de' pesi, o ciò che torna lo stesso, che le costipazioni totali sono proporzionali ai pesi comprimenti.

Anche il Sig. Gravesande nella bella sua opera *Phyisices Elementa Mathematica* ec. al capo XIII del libro II accenna un esperimento, in cui avendo fatto sopportare ad un elastro

una mezza libbra di peso lo costipò di un mezzo pollice, poi aggiungendo un egual peso la discesa fu parimenti di un mezzo pollice, e così di seguito sin che l'elastro non si potè più comprimere.

Il Sig. Professore Francesconi ha voluto unitamente a me verificare il medesimo esperimento sulla spirale di ottone di cui ho fatto cenno nel numero precedente. Questa spirale che era del peso 731 grammi (*) portata dalla posizione orizzontale a quella verticale si accorciava di 23 millimetri. In questa situazione della spirale abbiamo sovrapposto alla spira superiore, la quale era ridotta mediante una saldatura in una circonferenza piana, un tampone dal cui centro pendeva un filo che passava per l'asse stesso dell'elice. Il peso del tampone e del filo era di 9 grammi, ed il filo sosteneva un secchio pesante 200 grammi nel quale si ponevano i pesi atti a produrre i varii gradi di costipazione come si trovano notati nella seguente tavola

Stati dell' elice	Pesi comprimenti	Costipazioni prodotte	Aumenti delle costipazioni
Spirale orizzontale	0	0	0
Spirale verticale	—	23	23
Spirale verticale con tampone, filo e secchio	209	36	13
	754	63	27
	1299	90	27
	1844	117	27
	2389	144	27
	2934	171	27
	3479	198	27

Da questa tavola si vede che posta la spirale verticalmente,

(*) I pesi e le misure sono secondo il nuovo sistema.

e poi aumentando i pesi comprimenti di 545 grammi per volta la spirale si costipa costantemente di 27 millimetri.

I risultamenti di tutti questi esperimenti ci autorizzano a stabilire per la variabilità della forza elastica delle spirali secondo le diverse loro lunghezze la legge seguente. Sia Λ l' altezza verticale della spirale non aggravata, e λ quella che riceve quando è aggravata da un peso rappresentato da gp (g dinota la gravità), avremo per determinare il peso o la forza elastica f'' corrispondente all' altezza z' la proporzione

$$\Lambda - \lambda : \Lambda - z' :: gp : f''$$

e quindi

$$f'' = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Sostituito questo valore nell' equazione (12) avremo

$$\Delta \pi r^2 \left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2}\right) \frac{\sigma^2}{2} = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Ora essendo per un arco qualunque $z = s \sin.e$, sarà z' che rappresenta la coordinata dell' ultimo punto della spirale eguale a $\sigma \sin.e$ per cui si avrà

$$\sin.e = \frac{z'}{\sigma}$$

e perciò

$$\left(\frac{d^2 \sin.e}{dt^2}\right) = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right).$$

Ponendo nella precedente equazione questo valore, risulterà

$$\frac{\Delta \pi r^2 \sigma}{2}\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right) = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}$$

ossia rappresentando con m la massa della spirale che è eguale a $\Delta \pi r^2 \sigma$

$$(13) \qquad \frac{m}{2}\left(\frac{d^2 z'}{dt^2}\right) = gp \frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Facciasi

$$\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda} = y \qquad \frac{2gp}{m(\Lambda - \lambda)} = \alpha^2$$

avremo

$$\alpha^2 y + \left(\frac{d^2 y}{dt^2}\right) = 0.$$

L' integrale di quest' equazione lineare di second' ordine è

$$y = \varepsilon' e^{at\sqrt{-1}} + \varepsilon'' e^{-at\sqrt{-1}}$$

essendo e la base dei logaritmi iperbolici, ed ε', ε'' due costanti arbitrarie. Per determinarle osservo che chiamata k la lunghezza della spirale al principio del moto, ossia quando $t = 0$ si avrà $z' = k$, e $\left(\frac{dz'}{dt}\right) = 0$, perchè la velocità in quest' istante è zero, avremo così le due equazioni

$$\frac{\Lambda - k}{\Lambda - \lambda} = \varepsilon' + \varepsilon''$$

$$0 = \varepsilon' a\sqrt{-1} - \varepsilon'' a\sqrt{-1}\,.$$

Dalla seconda di queste equazioni si ottiene $\varepsilon' = \varepsilon''$, onde dalla prima si dedurrà

$$\varepsilon' = \varepsilon'' = \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda - k}{\Lambda - \lambda}\,.$$

Sostituiti questi valori nella precedente espressione di y si ha

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{\Lambda - k}{\Lambda - \lambda}\left[e^{at\sqrt{-1}} + e^{-at\sqrt{-1}}\right]$$

o sia perchè è $e^{at\sqrt{-1}} + e^{-at\sqrt{-1}} = 2\cos.at$

$$y = \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - k}\cos.at\,.$$

La frazione $\frac{\rho}{\Lambda - \lambda}$ che rappresenta il rapporto del peso comprimente alla corrispondente costipazione è il coefficiente costante che moltiplicando il raccorciamento variabile dell' elice dà l' espressione della forza elastica. Rappresentando con ε questo rapporto che è porporzionale alla forza d' elaterio della diversa spirale, e ponendo per y, ed a i loro valori nella precedente equazione, risulta

$$(14) \qquad \Lambda - z' = \Lambda\, k \cos.t\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}$$

la quale equazione ci darà l' altezza della spirale in ogni istante.

Viceversa sarà

$$(15) \qquad t = \sqrt{\frac{m}{2g\varepsilon}}\,\text{arc. cos.}\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}$$

e con questa equazione conosceremo il valore del tempo che impiega l'elice ad arrivare ad una data altezza.

Per avere il valore della velocità $\left(\frac{dz'}{dt}\right)$ dell'ultimo punto dell'elice si differenzi l'equazione (14), avremo

$$(16) \qquad \left(\frac{dz'}{dt}\right) = (\Lambda - k)\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}\,\sin.t\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}$$

equazione che ci darà il valore della detta velocità pel tempo. Se si volesse il valore della medesima espresso per la lunghezza dell'elice, ricavando il valore di $\sin.t\sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}$ dall'equazione (14) e sostituendolo in questa, si troverà

$$(17) \qquad \left(\frac{dz'}{dt}\right) = \sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}\,[(\Lambda - k)^2 + (\Lambda - z)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

6. Corol. I. Se nell'equazione (13) si fa $z' = \Lambda$, rimane $\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = 0$, questo valore di z' che annulla la differenziale della velocità $\left(\frac{dz'}{dt}\right)$ è quello che nel nostro caso corrisponde alla velocità massima. La spirale adunque avrà acquistata la massima velocità quando sarà giunta a quell'altezza che ha naturalmente non essendo aggravata da alcun peso. Il valore di questa velocità massima ci sarà dato dall'equazione (17) facendo in essa $z' = \Lambda$, e chiamando v questa velocità, risulterà

$$(18) \qquad v = \sqrt{\frac{2g\varepsilon}{m}}\,.\,(\Lambda - k)$$

la quale equazione ci fa vedere che la massima velocità è proporzionale alla costipazione iniziale dell'elice.

Il tempo che impiegherà l'elice ad acquistare questa velocità massima si otterrà dall'equazione (15) ponendo in essa $z' = \Lambda$, e sarà, indicandolo con τ,

$$(19) \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{2g\varepsilon}}\,.\,\frac{\pi}{2}.$$

Questo valore del tempo essendo indipendente dalla quantità k, ne segue che, qualunque sia stata la lunghezza alla quale

colla compressione fu ridotta l' elice quando cominciò a scattare, riacquisterà la lunghezza Λ che ha nel suo stato naturale sempre nello stesso tempo, ossia l' elice sarà tantocrona nell' acquistare la sua lunghezza naturale. È un canone stabilito dal gran Newton che vi è tautocronismo ogni qualvolta la forza acceleratrice sia proporzionale allo spazio che rimane a percorrersi onde si annulli. Seguendo questo canone avressimo potuto riconoscere questa proprietà nella dilatazione della nostra spirale, perchè la forza acceleratrice del punto estremo e libero della medesima espressa da $\frac{2g\varepsilon}{m}(\Lambda - z')$ è veramente proporzionale allo spazio che gli rimane a descrivere per riacquistare il suo sito naturale: così quel principio serve di conferma all' enunciato risultamento.

7. Scolio. Non abbiamo considerato il movimento dell' elice che nel tempo del primo scatto, la minima riflessione però sulle equazioni (14), (15), (16) ci mostra che l' elice ad eguali intervalli di tempo pari a quello che quì sopra abbiamo indicato con τ, acquista successivamente le lunghezze.

$$\Lambda \quad , \quad 2\Lambda - k \quad , \quad \Lambda \quad , \quad k$$

e le velocità

$$v \quad , \quad 0 \quad , -v \quad , \quad 0$$

ossia l' elice fa una serie di oscillazioni isocrone a quelle di un pendolo cicloidale il cui circolo generatore abbia per raggio $\frac{m}{8\varepsilon}$.

8. Corol. II. Se invece, come nel risoluto problema abbiamo supposto che la spirale si dilatasse liberamente senza avere alcun corpo avanti a se, vi si ritrovasse un corpo della massa M, è facile il vedere come nell' estendere l' integrale (9) avrebbe dovuto aggiungersi al primo membro dell' equazione (12) il termine $M\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$; così pure, denominando ω il seno dell' angolo che l'asse dell' elice fa coll' orizzonte, dal secondo membro dell' equazione (13) avrebbe dovu-

to sottrarsi il termine $g\omega M$ che rappresenta il peso relativo del corpo M, onde quell' equazione avrebbe presa la forma

$$\left(M+\frac{m}{2}\right)\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=gp\frac{\Lambda-z'}{\Lambda-\lambda}-g\omega M.$$

Si faccia

$$M+\frac{m}{2}=\frac{\mu}{2},\ \frac{\omega}{\varepsilon}=\gamma,\ \Lambda-\gamma M=\Lambda',\ \lambda-\gamma M=\lambda'$$

la precedente equazione diverrà

$$\frac{\mu}{2}\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=gp\frac{\Lambda'-z'}{\Lambda'-\lambda'}$$

la quale è tutto simile alla (13), e va estesa nelle integrazioni fra i medesimi limiti. Cambiando perciò nelle equazioni (14), (15), (16) m in μ, Λ in Λ', λ in λ', e sostituendo $M+\frac{m}{2}$ a $\frac{\mu}{2}$, $\Lambda-\gamma M$ a Λ', $\lambda-\gamma M$ a λ', si avrà

$$(20)\quad \Lambda-\gamma M-z'=(\Lambda-\gamma M-k)\cos.t\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$(21)\quad t=\frac{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}}.\ \text{Arc. cos.}\frac{\Lambda-\gamma M-z'}{\Lambda-\gamma M-k}.$$

$$(22)\quad \left(\frac{dz'}{dt}\right)=(\Lambda-\gamma M-k)\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\sin.t\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$(23)\quad \left(\frac{dz'}{dt}\right)=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\left[(\Lambda-\gamma M-k)^2-(\Lambda-\gamma M-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Così pure la massima velocità dell' estremità libera dell' elice sarà data dall' equazione

$$(24)\quad v=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}(\Lambda-\gamma M-k)$$

il qual valore corrisponderà anche a quello della velocità colla quale verrà scagliato il corpo M se sarà posto semplicemente avanti all' elice senza esservi unito. Questa velocità sarà acquistata dall' elice nel momento che la sua lunghezza diverrà eguale a Λ', dal che si vede che, se la spirale ed il

corpo M saranno collocati in un cannone, la lunghezza più avvantaggiosa da darsi al cannone per scagliare il corpo M, deve esser tale, che quando l' elice ha la lunghezza Λ', il centro di gravità del corpo M si trovi alla bocca del medesimo.

Il tempo per acquistare la massima velocità, sarà

$$(25)\ \tau = \frac{\sqrt{M + \frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}} \cdot \frac{\pi}{2}$$

il quale trovasi indipendente dalle quantità k, e γ, ossia dallo stato iniziale dell' elice compressa, e dalla gravità relativa del corpo M, perciò i tempi per acquistare la velocità massima, o sia la lunghezza Λ', saranno sempre tautocroni, qualunque sia la lunghezza iniziale dell' elice, e l' inclinazione del suo asse.

9. Scolio II. Per dare un saggio dell' uso di queste formole le applicherò alla valutazione delle altezze alle quali il Sig. Giovanni Bernoulli lanciò una palla di rame per mezzo del suo *strumento ballistico* della cui teorica e pratica si è occupato nella precitata Memoria. Questo istromento consisteva principalmente in un cannone di rame in cui era collocata quella spirale che servì agli esperimenti riferiti al numero 5. Il peso della spirale era di $\frac{15}{512}$ di libbra; all' estremità libera della medesima era attaccato un tampone del peso di $\frac{3}{256}$ di libbra, e la palla di rame scagliata negli esperimenti pesava $\frac{5}{64}$ di libbra.

Sarà adunque $M = \frac{3}{256} + \frac{5}{64} = \frac{23}{256}$.

$m = \frac{15}{512}$;

e dai dati del numero 5. si ricaverà $\varepsilon = \frac{24}{161}$.

Quindi se la spirale sarà situata verticalmente si

avrà $\gamma = \frac{161}{24}$;

e se sarà inclinata all' orizzonte di 45 gradi, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{161}{24}$.

Sostituendo questi valori nell' equazione (24), che si può mettere sotto la forma

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{\frac{1}{2}s}{M + \frac{m}{2}} (\Lambda - \gamma M - k)^2$$

si ha per la spirale posta verticalmente.

$$\text{I} \quad \frac{v^2}{2g} = 0,7133036 (\Lambda - k - 0,60)^2$$

e per quando è inclinata di 45°.

$$\text{II} \quad \frac{v^2}{2g} = 0,7133036 (\Lambda - k - 0,43)^2.$$

Dai principii della teorica del moto accelerato dei gravi si sa, che il primo membro nella prima di queste equazioni rappresenta l' altezza a cui un grave dotato della velocità v può salire, e nella seconda la metà della distanza orizzontale a cui il grave può essere lanciato: dando perciò nel secondo membro a $\Lambda - k$ i particolari valori avremo le altezze, o le semi-amplitudini a cui giungerà la palla scagliata.

La prima colonna della tavola seguente rappresenta i valori di $\Lambda - k$, ossia le costipazioni date alla spirale, la seconda le corrispondenti altezze a cui deve giungere secondo la formola I, la terza le altezze che sono date dalla teorica di Giovanni Bernoulli (*), la quarta le altezze osservate cogli esperimenti. La 5,^{ta} 6ta, e 7ma colonna rappresentano nello stesso ordine le amplitudini, o distanze orizzontali a cui l' *istromento ballistico* dovrebbe lanciare, o ha lanciato la palla essendo inclinato all' orizzonte di 45°.

(*) Per un errore di calcolo numerico le altezze che trova quest' Autore secondo la sua teorica sono diverse dalle riferite; io le ho poste quì calcolate esattamente, perchè se ne possa instituire il confronto con quelle delle nuove formole.

Costipazioni iniziali in linee	Altezze secondo la formola I	Altezze secondo la teorica di Bernoulli	Altezze osservate negli esperimenti	Amplitudini secondo la formola II	Amplitudini secondo la teorica di Bernoulli	Amplitudini osservate negli esperimenti
6', 5	2.P 1'	3.P 3'	2.P 0'	4.P 4'	6P. 6'	4P
13,	9. 2	11. 9	7 6	18. 10	23. 6	15
19, 75	21 8	27. 2	16. 6	44. 4	54. 4	33
26, 75	40. 6	48. 6	26. 0	82. 4	97. 0	62
34, 50	68. 4	78. 7	45. 0	137. 10	157. 2	94
40, 25	93. 3	105. 5	60. 6	188. 7	210. 10	144

Il tempo che somministra la formola (25) per tutti questi scatti è 1''', 2, quindi appare la necessità di una somma prontezza nel porre in libertà la spirale perchè non venghi il suo moto nel principio ritardato o turbato.

La spirale del Sig. Bernoulli era fatta di più barre d'acciajo accoppiate insieme a quattro a quattro, e legate con un filo metallico; in seguito alla descrizione del suo elastro quest' autore soggiunge. *On sentira d' abord quelle différence il doit y avoir pour l' effet tant' d' intensité que d' uniformité entre un ressort fait d' une seule piéce et mince, et d'autres tels que ceux dont j' ai été obligé de me servir ici.* Pare appunto che si debba principalmente da ciò ripetere la maggiore aberrazione dei risultamenti del calcolo nelle ultime esperienze, perchè in queste più che nelle prime devono rendersi, per le forti costipazioni, sensibili i diffetti dell' elastro. D' altronde nel calcolo sono stati trascurati gli attriti, e la resistenza dell' aria che possono diminuire di qualche cosa la velocità della palla.

PROBLEMA II.

10. „ Una fibra diritta ed elastica fissa con un' estremità „ in un ostacolo immobile, essendo stata troppo stirata, si „ accorci o si ristringa in virtù del suo elaterio: cercansi, „ nella ipotesi che la fibra si costipi uniformemente, o sia „ che le velocità dei diversi punti siano proporzionali alle „ loro distanze dall' estremità fissa, le relazioni tra gli elemen- „ ti del moto in questa costipazione?

Sia a^2 l'area di una sezione normale alla lunghezza della fibra

Δ la densità della medesima alla fine di un tempo t.

z la distanza di un punto qualunque dall' estremità fissa nello stesso istante.

z' quella dell' estremità libera.

$\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sarà la velocità del primo punto z.

$\left(\frac{dz'}{dt}\right)$ quella del secondo punto o dell' estremità libera.

$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ sarà la forza acceleratrice del primo.

$\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$ quella del secondo dei detti punti.

Sia f la somma delle forze acceleratrici sollecitanti la porzione di elastro compresa tra l' estremità fissa, e l'ascissa z; la somma delle forze acceleratrici, dalle quali sarà animata la porzione di elastro $z+\omega$, si avrà considerando f funzione di z, e ponendo $z+\omega$ in luogo di z; sviluppando in seguito la funzione f col teorema di Taylor sarà

$$f+\omega\left(\frac{df}{dz}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)+\text{ec.}$$

onde la somma delle forze acceleratrici sollecitante la porzione di fibra corrispondente alla parte d' ascissa ω risulterà

$$(26)\qquad \omega\left(\frac{df}{dz}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2f}{dz^2}\right)+\text{ec}$$

S' immagini ora una forza acceleratrice media A dalla quale essendo animata tutta la porzione ω di elastro ne risulti una forza eguale alla somma delle forze acceleratrici della serie (26); è evidente che questa forza acceleratrice dovrà essere della forma $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \omega Z$ essendo Z una funzione di z, ω, e t tale che quando ω è eguale a zero non diventi infinita, perchè in tal caso la forza acceleratrice A deve diventare quella del punto dell' elastro corrispondente all' ascissa z, ossia $\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right)$: moltiplicando questa forza acceleratrice media per la massa corrispondente alla lunghezza ω, espressa da $\Delta a^2 \omega$, dovremo per la supposizione fatta avere l' equazione

$$\Delta a^2 \omega \left[\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) + \omega Z \right] = \omega \left(\frac{df}{ds}\right) + \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right) + \text{ec.}$$

la quale evidentemente non può sussistere per qualunque valore di ω se non è

$$(27) \qquad \Delta a^2 \left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = \left(\frac{df}{ds}\right).$$

Sia s la distanza del punto z dall' estremità fissa allorchè la fibra è nel suo stato naturale, per la supposizione che le velocità dei diversi punti della fibra siano in ragione delle distanze dall' estremità fissa, l' ascissa z d' un punto indeterminato della fibra potrà essere espressa dalla formola

$$(28) \qquad z = e\, s$$

ove la quantità e varia soltanto col tempo, ed s passando da un punto all' altro della fibra.

Parimenti indicando con Λ la lunghezza dell' elastro nel suo stato naturale, l' ascissa dell' ultimo punto, o dell' estremità libera sarà data dall' equazione

$$(29) \qquad z' = e\,\Lambda.$$

Quindi se si osserva che nella supposizione di a^2 costante le densità della fibra nei diversi istanti devono essere proporzionali alle rispettive lunghezze della medesima, detta D la densità della fibra nel suo stato naturale, sarà

$$D : \Delta :: \Lambda : z'$$

ossia

$$(30) \qquad \Delta = e\,D.$$

Poniamo ora nell' equazione (27) per z e Δ i valori testè dati, riflettendo che la differenziale di f è relativa soltanto alla variabilità di s, sì avrà

$$D\,a^2 s\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) = \left(\frac{df}{ds}\right).$$

Integrando quest' equazione relativamente ad s ed estendendo l' integrale da $s=0$ a $s=\Lambda$, si ottiene

$$(31) \qquad Da^2\,\frac{\Lambda^2}{2}\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) = f.$$

In quest' ultima equazione f rappresenta la somma di tutte le forze acceleratrici agenti sull' elastro, ossia il complesso delle forze dalle quali è accelerato il movimento di tutte le particelle dell' elastro. Da questo complesso di forze risulta la forza elastica colla quale la fibra tende a rimettersi nel suo stato: valutando quindi questa forza elastica cogli esperimenti riferiti al numero 5. e ritenendo le denominazioni in tal numero usate, avremo l' equazione

$$Da^2\,\frac{\Lambda^2}{2}\left(\frac{d^2e}{dt^2}\right) = gp\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Si elimini da quest' equazione la e per mezzo di quella segnata (29) osservando che la quantità $D\,a^2\,\Lambda$ esprime la massa dell' elastro la quale è costante, e che rappresenteremo con m si otterrà

$$(32) \qquad \frac{m}{2}\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right) = gp\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}.$$

Quest' equazione è la medesima che quella segnata (13), che al numero 5. abbiamo visto rappresentare il moto oscillatorio d' un' elice; quindi, dovendo anche nel presente caso estendersi nelle integrazioni fra i medesimi limiti, avremo per la soluzione completa del problema le stesse equazioni (14), (15), (16), (17) ec. che servono per la spirale. Se adunque immaginiamo che la massa della spirale sia uniformemente concentrata nell' asse così che quest' asse divenghi una fibra elastica della stessa lunghezza e della stessa forza dell' elice, è evidente

che potremo ridurre l' esame dei movimenti della spirale a quelli di questa fibra omogenea e continua, e saremo certi che i risultamenti che si deducono per questa fibra fittizia sostituita saranno egualmente applicabili alla spirale. Ho creduto bene di dimostrare con esattezza la legittimità di questa sostituzione nelle ipotesi adottate, perchè essa gratuitamente assunta servì già di fondamento ai calcoli dei Bernoulli e di altri.

11. Corol. I. Qualora la fibra avesse attaccato alla sua estremità libera un corpo di massa M non pesante, così che nell' accorciarsi dovesse strascinare seco questo corpo, è facile il vedere che il primo membro dell' equazione (31) avrebbe in questa circostanza richiesto l' aumento del termine $M\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)$ per cui anche l' equazione (32) diverrebbe

$$(33) \qquad \left(M+\frac{m}{2}\right)\left(\frac{d^2z'}{dt^2}\right)=gp\,\frac{\Lambda-z'}{\Lambda-\lambda}.$$

Quest' equazione in null' altro differisce da quella segnata (13) del numero 5. se non in ciò, che quì $M+\frac{m}{2}$ tien luogo di $\frac{m}{2}$.

Dunque sostituendo $M+\frac{m}{2}$ ad $\frac{m}{2}$ in tutte le equazioni (14), (15), (16), (17), (18) e (19), avremo per la risoluzione del problema nel presente caso le seguenti

$$\Lambda-z=(\Lambda-k)\cos.\frac{t\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$t=\frac{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}}\,\text{Arc. cos.}\,\frac{\Lambda-z'}{\Lambda-\lambda}.$$

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)=(\Lambda-k)\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\sin.\frac{t\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}.$$

$$\left(\frac{dz'}{dt}\right)=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}\left[(\Lambda-k)^2-(\Lambda-z)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

$$v=\frac{\sqrt{g\varepsilon}}{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}(\Lambda-k), \qquad T=\frac{\sqrt{M+\frac{m}{2}}}{\sqrt{g\varepsilon}}\,\frac{\pi}{2}.$$

12. Scolio. Dinotiamo più generalmente la forza di elasticità $gp\,\frac{\Lambda - z'}{\Lambda - \lambda}$ la quale in questo caso è negativa, colla lettera $-\rho$, e facciamo altresì $\Lambda - z' = x$, l'equazione precedente (33) diverrà

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \rho\,.$$

Quindi moltiplicando un membro e l'altro per $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ed integrando si avrà

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\int \rho\, dx\,.$$

Sia rappresentato l' elastro nel caso presente dalla retta AB, è sia Bb lo spazio in fine del quale la forza di elaterio è nulla. Rappresentando colla retta BF la forza ρ al principio del moto, e costruendo la curva bBF nella quale le coordinate CD, cd corrispondono alle forze di elaterio negli istanti ne' quali il punto B ritrovasi in C, c, sarà $\int \rho dx$ eguale all' area BFb, dunque scrivendo u per la velocità $\left(\frac{dx}{dt}\right)$, si avrà

$$(34) \qquad \left(M + \frac{m}{2}\right) u^2 = \mathrm{BF}b$$

dove quì l'eguaglianza è posta per la proporzionalità. Il Conte Giordano Riccati nel suo Trattato delle corde o fibre elastiche schediasma 1. numero VII. proponendosi lo stesso problema dopo aver fatta la medesima costruzione prosiegue così, *egli è facile a concepire che l' aja triangolare* bFB *pareggia l' intiera azione delle forze sollecitanti. Ora a quest' azione s' eguaglia l' aggregato delle forze vive acquistate e dal peso stirante* M *e dalle menome particelle che compongono la corda* „ Essendo la forza viva del corpo M eguale ad Mu^2 ed avendo trovata quella dell'elastro eguale ad $\frac{m}{3}u^2$, stabilisce perciò l' equazione

$$\left(M + \frac{m}{3}\right) u^2 = b\mathrm{BF}$$

colla quale al numero VIII conchiude che un elastro mate-

matico AB che avesse concentrato nell' estremità B un terzo della massa dell'elastro fisico e materiale AB, caricati amendue del corpo M, sarebbero dotati in luoghi analoghi della stessa velocità, percorrerebbero gli stessi spazii, e quindi sarebbero isocroni nelle loro oscillazioni. L' eguaglianza (*a*) che l'Autore ha posto venendo contraddetta e provata fallace dalla sovrascritta equazione (34), nella quale m è soltanto divisa per 2, ne risulta conseguentemente erroneo l' esposto teorema che Giovanni e Giacomo Bernoulli i giovani, Nicolai, ed altri hanno pure adottato in seguito. (*)

Se si volesse dedurre dall' equazione (34) un consimile teorema a quello del Riccati, si vedrà facilmente collo stesso ragionamento che l' elastro matematico avrà tutti i suoi movimenti eguali a quello del fisico, e sarà per conseguenza isocrono collo stesso, se nella sua estremità B avrà concentrato la metà della massa dell' elastro fisico e materiale AB.

(*) Anche il Prof. *Francesconi* in una sua Memoria sulla *Teoria della Resistenza de' corpi molli* ha fatto uso di questo teorema; all' oggetto però che se ne serve, deve essere per lui indifferente il sostituire la metà al terzo della massa risultandone in massima le stesse conseguenze.