SOPRA LA DIPENDENZA TRA I DIFFERENZIALI DELLE FUNZIONI E GLI INTEGRALI DEFINITI

MEMORIA

DI GIULIANO FRULLANI
P. PROF. DELLE MATEMATICHE SUPERIORI
NELL' UNIVERSITÀ DI PISA

Ricevuta li 4. Febbrajo 1818.

PRESENTATA
DAL SOCIO SIG. PROFESSOR PIETRO PAOLI
E RIVEDUTA
DAL SIG. PRESIDENTE RUFFINI

Ho esposti altrove alcuni nuovi e generali Teoremi sopra la maniera di ridurre i differenziali delle funzioni a dipendere da integrali presi tra certi limiti; ritornando inseguito sopra queste idee medesime mi si sono affacciate alla mente variè riflessioni, che mi sono sembrate poter riescire ai Geometri di qualche interesse. Le ho pertanto destinate ad essere il soggetto di questa Memoria. E per facilitarne ai miei lettori l'intelligenza credo opportuno il cominciare con una succinta esposizione di quei Teoremi medesimi, tanto più che ad alcuni di questi darò in tale occasione una generalità anche maggiore.

I.

Sia primieramente proposto di ridurre in una serie ordinata per i coseni degli archi moltiplici di φ la funzione qualunque $F\varphi$ in modo che si abbia

$F\phi = A + A_1 \cos.\phi + A_2 \cos.2\phi + A_3 \cos.3\phi + ec... + A_h \cos.h\phi + ec... + A_n \cos.n\phi + ec.$ Se moltiplicheremo ciascun membro di questa Equazione per $\cos.n\phi.d\phi$, e prenderemo quindi da ambe le parti l'integrale tra i limiti $\phi = o$, $\phi = \pi$, π denotando la mezza periferìa circolare, avremo

$\int F\phi.\cos.n\phi.d\phi = A\int \cos.n\phi.d\phi + A_1 \int \cos.n\phi.\cos.\phi.d\phi + A_2 \int \cos.n\phi.\cos.2\phi.d\phi + ec..... + A_h \int \cos.n\phi.\cos.h\phi.d\phi + ec... + A_n \int \overline{\cos.n\phi}^2.d\phi + ec.$ E dopo questa operazione, il coefficiente del termine qualunque A_h sarà

$$\int \cos.n\phi.\cos.h\phi.d\phi.$$

Ma qualunque numero intero esprimano n, ed h, abbiamo

$$\int \cos.n\phi.\cos.h\phi.d\phi = \frac{1}{2(n+h)} \text{sen.}(n+h)\phi + \frac{1}{2(n-h)} \text{sen.}(n-h)\phi + \text{cost.}$$

quantità che si annulla tra i limiti stabiliti. Conviene per altro eccettuare il solo caso di $n = h$; cercando infatti il valore del termine

$$\frac{1}{2(n-h)} . \text{sen.}(n-h)\phi$$

allorchè $n = h$, con la regola dataci dal Calcolo Differenziale lo troveremo essere $= \frac{\phi}{2}$. Sarà dunque in questo caso

$$\int \overline{\cos.n\phi}^2 d\phi = \frac{1}{4n} \text{sen.}2n\phi + \frac{\phi}{2} + \text{cost.}$$

Ed avremo tra i limiti $\phi = o$, $\phi = \pi$

$$\int \overline{\cos.n\phi}^2.d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

Questo pertanto sarà il solo coefficiente che dopo la prescritta operazione non anderà a zero nel secondo membro della equazione

$\int F\phi.\cos.n\phi.d\phi = A\int \cos.n\phi.d\phi + A_1 \int \cos.n\phi.\cos.\phi.d\phi + A_2 \int \cos.n\phi.\cos.2\phi.d\phi + ec.... + A_h \int \cos.n\phi.\cos.h\phi.d\phi + ec... +$

$$+A_n\int\overline{\cos.n\phi}^{\,2}\,d\phi+\text{ec.}$$

la quale si ridurrà per conseguenza qualunque sia n alla più semplice forma

$$\int F\phi.\cos.n\phi.\,d\phi=\frac{\pi}{2}A_n$$

dalla quale si avrà

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int F\phi.\cos.n\phi.\,d\phi.$$

E facilmente vedremo anche che il primo termine A sarà dato dall'altra equazione

$$A=\frac{1}{\pi}\int F\phi.\,d\phi.$$

sempre integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Con questo metodo pertanto si potranno conoscere i coefficienti dei diversi coseni nella serie

$$F\phi=A+A_1\cos.\phi+A_2\cos.2\phi+\text{ec.}\ldots+A_n\cos.n\phi+\text{ec.}$$

2.

Ciò premesso, proponghiamoci di ridurre in una serie ordinata per le potenze intere, e positive di x la funzione qualunque fx in modo che sia

$$fx=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{ec.}\ldots+a_nx^n+\text{ec.}$$

Noi avremo dal Calcolo Differenziale

$$a_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nfx}{dx^n}$$

facendo $x=0$ dopo le differenziazioni. Se adesso nella funzione fx sostituiremo in luogo di x la quantità $e^{\phi\sqrt{-1}}$, si avrà

$$fe^{\phi\sqrt{-1}}=a+a_1e^{\phi\sqrt{-1}}+a_2e^{2\phi\sqrt{-1}}+a_3e^{3\phi\sqrt{-1}}+\text{ec.}\ldots+a_ne^{n\phi\sqrt{-1}}+\text{ec.}$$

e sostituendo nella stessa funzione fx in luogo di x la quantità $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, avremo anche

$$fe^{-\phi\sqrt{-1}}=a+a_1e^{-\phi\sqrt{-1}}+a_2e^{-2\phi\sqrt{-1}}+a_3e^{-3\phi\sqrt{-1}}+\text{ec.}\ldots+a_ne^{-n\phi\sqrt{-1}}+\text{ec.}$$

Aggiungendo queste due Equazioni, ed osservando che

$$e^{h\phi\sqrt{-1}}+e^{-h\phi\sqrt{-1}}=2\cos.h\phi$$

otterremo

$$\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}=a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec.}\ldots+$$

$$a_n\cos.n\phi+\text{ec.}$$

Moltiplicando ora per $\cos.n\phi.\,d\phi$ da ambe le parti, ed integrando quindi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, sarà per l'articolo 1.

$$a=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}\right]d\phi.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\left[fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}\right]\cos.n\phi.\,d\phi.$$

Ma si ha, facendo $x=0$ dopo le differenziazioni

$$a=fx,$$

$$a_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nfx}{dx^n}.$$

Onde nelle stesse supposizioni avremo

$$fx=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2}\right]d\phi,$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^nfx}{dx^n}=\frac{1}{\pi}\int\left[fe^{\phi\sqrt{-1}}+fe^{-\phi\sqrt{-1}}\right]\cos.n\phi.\,d\phi$$

purchè la integrazione sia eseguita tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$.

3.

Molte sono le conseguenze che da questo Teorema discendono. Noi possiamo primieramente estenderlo ad un numero qualunque di variabili, prevalendoci dell' artifizio medesimo usato nel precedente caso più particolare. Prendiamo infatti a considerare una funzione qualunque z di x, ed y, e supponghiamo che riducendola in serie per le potenze di x si abbia

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_n x^n + \text{ec.}$$

noi avremo dal Calcolo differenziale

$$a_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)$$

facendo $x = 0$ dopo le differenziazioni. Allorchè vorremo la funzione z svolta in serie per le potenze, e per i prodotti delle variabili x, ed y, sarà d'uopo svolgere in serie per le potenze di y tutte le quantità a, a_1, a_2, a_3, ... a_n, ec. ossia le quantità z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$, $\frac{1}{2.3.}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}\right)$, ec..... $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)$ ec. ove dopo le differenziazioni è stato fatto $x = 0$.

Pertanto nella evoluzione della funzione z il coefficiente di $x^n y^m$ sarà

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots m}\left(\frac{d^{n+m} z}{dx^n dy^m}\right)$$

facendo $x = y = 0$ dopo le differenziazioni.

Se dunque nella funzione proposta z sostituiremo in luogo di x prima $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, e chiameremo u, u' i resultati di queste sostituzioni, noi avremo per il Teorema del numero precedente

$$z = \frac{1}{\pi}\int \frac{(u+u')}{2}\, d\phi.$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) = \frac{1}{\pi}\int (u+u')\cos.n\phi.\, d\phi,$$

integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, e facendo $x = 0$ dopo aver differenziato; e se supporremo

$$S = \frac{1}{\pi}\int \frac{(u+u')}{2}\, d\phi.$$

$$T = \frac{1}{\pi}\int (u+u')\cos.n\phi.\, d\phi.$$

Sarà più semplicemente

$$z = S.$$

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) = T.$$

Ove le quantità S, T dipendono da y soltanto.

Facciamo ora in ciascuna di queste Equazioni prima $y=e^{\psi\sqrt{-1}}$, quindi $y=e^{-\psi\sqrt{-1}}$, e chiamando h, h', quello che S diverrà per queste sostituzioni, e k, k', quello che diverrà T, noi avremo, per lo stesso Teorema del precedente articolo, integrando tra i limiti $\psi=0$, $\psi=\pi$, e facendo $y=0$ dopo le differenziazioni,

$$\left.\begin{aligned} z &= \frac{1}{\pi}\int\frac{(h+h')}{2}\,d\psi\,. \\ \frac{1}{1.2.3\ldots m}\left(\frac{d^m z}{dy^m}\right) &= \frac{1}{\pi}\int(h+h')\cos.m\psi\,d\psi\,. \\ \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right) &= \frac{1}{\pi}\int\frac{(k+k')}{2}\,d\psi \quad \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n}z}{dy^m dx^n}\right) &= \frac{1}{\pi}\int(k+k')\cos.m\psi\,d\psi\,. \end{aligned}\right\}\ (N)$$

Supponendo ora $z=F(x,y)$ sarà per le convenzioni stabilite,

$$u=F(e^{\phi\sqrt{-1}},y)\,.$$

$$u'=F(e^{-\phi\sqrt{-1}},y)\,.$$

Ed avremo anche

$$S=\frac{1}{\pi}\int\frac{(u+u')}{2}\,d\phi=\frac{1}{\pi}\int\left[\frac{F(e^{\phi\sqrt{-1}},y)+F(e^{-\phi\sqrt{-1}},y)}{2}\right]d\phi\,.$$

$$T=\frac{1}{\pi}\int(u+u')\cos.n\phi.d\phi=\frac{1}{\pi}\int(F(e^{\phi\sqrt{-1}},y)+F(e^{-\phi\sqrt{-1}},y))\cos.n\phi d\phi.$$

estendendo gli integrali da $\phi=0$ a $\phi=\pi$.

Rammentandoci adesso che h, h', sono quel che S diviene per la successiva sostituzione di $y=e^{\psi\sqrt{-1}}$, ed $y=e^{-\psi\sqrt{-1}}$; e che k, k' si deducono da T nel modo stesso, facilmente vedremo che facendo

$$\Sigma=F(e^{\phi\sqrt{-1}},e^{\psi\sqrt{-1}})+F(e^{-\phi\sqrt{-1}},e^{\psi\sqrt{-1}})+F(e^{\phi\sqrt{-1}},e^{-\psi\sqrt{-1}})$$
$$+F(e^{-\phi\sqrt{-1}},e^{-\psi\sqrt{-1}})$$ si avrà

$$h+h'=\frac{1}{\pi}\int\frac{\Sigma}{2}\,.\,d\phi\,;\quad k+k'=\frac{1}{\pi}\int\Sigma.\cos.n\phi.d\phi\,;$$

sostituendo ora questi valori nelle Equazioni (N), otterremo immediatamente per l'indipendenza delle variabili

$$z=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{\Sigma}{4}^{2}\,d\phi.d\psi.$$

$$\frac{1}{1.2.3....m}\left(\frac{d^m z}{dy^m}\right)=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{\Sigma}{2}^{2}\cos.m\psi.\,d\phi.\,d\psi.$$

$$\frac{1}{1\,2.3...n}\left(\frac{d^n z}{dx^n}\right)=\frac{1}{\pi^2}\int\frac{\Sigma}{2}^{2}\cos.n\phi.d\phi.d\psi.$$

$$\frac{1}{1.2.3..n.1.2.3...m}\left(\frac{d^{n+m}z}{dx^n dy^m}\right)=\frac{1}{\pi^2}\int\Sigma^{2}.\cos.n\phi.\cos.m\psi.\,d\phi.\,d\psi.$$

Integrando da $\phi=0$ sino a $\phi=\pi$, e da $\psi=0$ sino a $\psi=\pi$, e facendo inoltre $x=y=0$ dopo le differenziazioni.

Quindi facilmente apparisce come dovremo contenerci se il numero delle variabili sarà anco maggiore di due. Data la funzione $z=F(x, y, u, t, \text{ec.})$, noi aggiungeremo insieme altrettante funzioni della forma

$$F(e^{\pm\phi\sqrt{-1}}, e^{\pm\Psi\sqrt{-1}}, e^{\pm\delta\sqrt{-1}}, \text{ec.})$$

in quanti modi è possibile il permutare tra di loro i segni delle quantità

$$\pm\phi\sqrt{-1},\ \pm\psi\sqrt{-1},\ \pm\delta\sqrt{-1},\ \text{ec.}$$

e chiamata Σ questa somma, avremo

$$\frac{\left(\frac{d^{n+m+p+\cdots}z}{dx^n.dy^m.du^p....}\right)}{1.2.3..m.1.2.3...n.1.2.3...p....}=\frac{1}{\pi^k}\int\Sigma^{k}.\cos.n\phi.\cos.m\psi.\cos.p\delta....\,.d\phi.d\psi.d\delta.....$$

ove $k=$ al numero delle variabili, e dove le integrazioni devono estendersi da $\phi=\psi=\delta=.....=0$ sino a $\phi=\psi=\delta=...=\pi$, purchè dopo le differenziazioni facciasi $x=y=u=....=0$. E dalle cose precedenti facilmente apparirà ancora che quando una delle quantità n, m, p, ec. sarà $=0$, converrà dividere il secondo membro per 2; se due di esse saranno $=0$, dovremo dividere per 2^2; e generalmente se r di quelle quantità mancheranno, dovrà il secondo membro esser diviso per 2^r.

4.

Consideriamo attualmente le due serie infinite

$$z = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + A_n x^n + \text{ec.}$$

$$z' = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_n x^n + \text{ec.}$$

e proponghiamoci di trovar la somma della serie

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \text{ec.} \ldots + A_n a_n + \text{ec.}$$

chiamando u, u' quello che diviene z facendovi successivamente $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\phi\sqrt{-1}}$, e chiamando inoltre k, k' quello che diviene z' in virtù delle stesse sostituzioni, le due serie proposte si trasformeranno facilmente nelle due seguenti

$$(1) \ldots\ldots \frac{u+u'}{2} = A + A_1 \cos.\phi + A_2 \cos.2\phi + A_3 \cos.3\phi + \text{ec} \cdots + A_n \cos.n\phi + \text{ec.}$$

$$(2) \ldots\ldots \frac{k+k'}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec} \ldots + a_n \cos.n\phi + \text{ec.}$$

Moltiplicando adesso la prima di queste per $(k+k')d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, otterremo dividendo per π

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')d\phi = \frac{A}{\pi}\int(k+k')d\phi + \frac{A_1}{\pi}\int(k+k')\cos.\phi.d\phi +$$

$$\frac{A_2}{\pi}\int(k+k')\cos.2\phi.d\phi. + \text{ec} \cdots\cdots + \frac{A_n}{\pi}\int(k+k')\cos.n\phi.d\phi + \text{ec.}$$

Ma applicando alla serie (2) il Teorema dell'articolo (1), abbiamo, tra i limiti stabiliti

$$a = \frac{1}{\pi}\int\frac{(k+k')}{2}\,d\phi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int(k+k')\cos.n\phi.\,d\phi.$$

Quindi sarà, sostituendo,

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')d\phi - Aa = Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \text{ec} \ldots + A_n a_n + \text{ec.}$$

5.

Il problema quì sopra risoluto fu primieramente trattato da Parceval, il quale, per una strada diversa dalla nostra

giunse ad un resultato in apparenza molto dissimile dal precedente. Con facilità per altro possono l' uno all' altro ridursi, e per convincerne credo utile quì riportare come Parceval risolvè questo problema, tanto più che nel seguito di questa Memoria avremo occasione di fare alcune riflessioni sopra la di lui soluzione.

Siano date le due serie

$$Fx = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \text{ec.}$$

$$f\frac{1}{x} = a + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + a_3 \frac{1}{x^3} + \text{ec.}$$

Se noi ne faremo il prodotto, troveremo in esso tre specie distinte di termini. vi saranno quelli che non contengono la x; e questi otterremo moltiplicando i termini corrispondenti delle due serie; vi saranno inoltre i termini che contengono le potenze positive di x, e finalmente i termini che comprendono le potenze negative. Il nostro prodotto sarà pertanto della forma

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.....} + [\alpha x^m] + [\beta \frac{1}{x^m}] = Fx.f\frac{1}{x}$$

indicando col segno $[\alpha x^m]$ tutti i termini che contengono potenze positive di x, e col segno $[\beta \frac{1}{x^m}]$ quelli che contengono le potenze negative. Se ora in questa Equazione faremo successivamente $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x = e^{-\phi\sqrt{-1}}$, otterremo a cagione della nota relazione $e^{\pm\phi\sqrt{-1}} = \cos.\phi \pm \text{sen.}\phi\sqrt{-1}$, i due resultati seguenti:

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.....} + [\alpha(\cos.m\phi + \sqrt{-1}\,\text{sen.}m\phi)]$$
$$+ [\beta(\cos.m\phi - \sqrt{-1}\,\text{sen.}\,m\phi)] = Fe^{\phi\sqrt{-1}}.fe^{-\phi\sqrt{-1}},$$

$$Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.....} + [\alpha(\cos.m\phi - \sqrt{-1}\,\text{sen.}m\phi)]$$
$$+ [\beta(\cos.m\phi + \sqrt{-1}.\text{sen.}m\phi)] = Fe^{-\phi\sqrt{-1}}.fe^{\phi\sqrt{-1}},$$

ed aggiungendo queste due Equazioni, avremo

$$2(Aa + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \text{ec.}) + 2(\alpha\cos.m\phi) + 2(\beta\cos.m\phi) = \text{.....}$$

$$= Fe^{\phi\sqrt{-1}}\, fe^{-\phi\sqrt{-1}} + Fe^{-\phi\sqrt{-1}}\, fe^{\phi\sqrt{-1}}.$$

Per fare sparire i termini che comprendono la quantità $\cos.m\phi$ basterà moltiplicare da ambe le parti per $d\phi$, ed integrare tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, avremo quindi, dividendo per 2π,

$$A\,a + A_1\,a_1 + A_2\,a_2 + A_3\,a_3 + \text{ec.} =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int [Fe^{\phi\sqrt{-1}}\, fe^{-\phi\sqrt{-1}} + Fe^{-\phi\sqrt{-1}}\, fe^{\phi\sqrt{-1}}]\, d\phi$$

6.

Così presso a poco dimostrò Parceval questo Teorema analitico. La formula che noi abbiamo trovata nell'articolo 4.

$$\text{(R)}\quad \frac{1}{2\pi}\int (u+u')\,(k+k')\,d\phi - Aa = Aa + A_1\,a_1 + A_2\,a_2 + A_3\,a_3 + \text{ec.}$$

vi si riduce per altro assai facilmente. Rammentandoci infatti del significato che nel citato articolo hanno le quantità u, u', k, k', troveremo che nel prodotto $(u+u')(k+k')$ la somma dei termini uk, $u'k'$ è rappresentata come segue:

$$uk + u'k' = (A + A_1\, e^{\phi\sqrt{-1}} + A_2\, e^{2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

$$(a + a_1\, e^{\phi\sqrt{-1}} + a_2\, e^{2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

$$+ (A + A_1\, e^{-\phi\sqrt{-1}} + A_2\, e^{-2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

$$(a + a_1\, e^{-\phi\sqrt{-1}} + a_2\, e^{-2\phi\sqrt{-1}} + \text{ec.})$$

eseguite le moltiplicazioni, un termine qualunque sarà espresso dalla formula

$$A_m\, a_n\, (e^{(m+n)\phi\sqrt{-1}} + e^{-(m+n)\phi\sqrt{-1}})$$

cioè dalla sua equivalente

$$2A_m\, a_n \cos.(m+n)\phi$$

ed il solo termine indipendente da $\cos.\phi$ sarà $2Aa$. Moltipli-

cando dunque per $d\phi$ la quantità $uk+u'k'$, e la sua equivalente quì sopra assegnata, è chiaro che estendendo gli integrali da $\phi=0$ sino a $\phi=\pi$, noi avremo solamente

$$\frac{1}{2\pi}\int(uk+u'k')\,d\phi=\mathrm{A}a$$

quindi la quantità

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')\,d\phi-\mathrm{A}a$$

si ridurrà alla forma più semplice

$$\frac{1}{2\pi}\int(uk'+u'k)\,d\phi$$

e la nostra Equazione (R) diverrà

$$\frac{1}{2\pi}\int(uk'+u'k)\,d\phi=\mathrm{A}a+\mathrm{A}_1 a_1+\mathrm{A}_2 a_2+\text{ec.}$$

formula identica con quella dell' Articolo precedente, come è facile persuadersene, ricordandosi che u, u' sono quello che diviene la funzione qualunque $z=\mathrm{F}x$, ove in luogo di x è stato posto prima $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$; e che lo stesso si è fatto per ottenere k, k' dall' altra funzione $z'=fx$.

7.

La nostra analisi ci offre anche il modo di generalizzare quanto è possibile questo Teorema, applicandolo al caso in cui le serie proposte contengano più variabili, ed al caso ancora in cui le serie siano in un numero qualunque. Ma prima di mostrare come ciò possa eseguirsi, credo opportuno quì indicare un nuovo Teorema molto generale da cui come caso particolare quello del numero 4. discende.

Date le due serie qualunque

$$fx=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{ec.}\ldots+a_nx^n+\text{ec.}$$

$$\mathrm{F}x=b+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\text{ec.}\ldots+b_nx^n+\text{ec.}$$

proponghiamoci di trovar la somma della serie il di cui termine generale sia della forma $a_p b_q$, essendo p, q due nu-

meri interi comunque, ma tali che variando da un termine all' altro, pure indipendentemente dal segno, la loro differenza $p-q$ si conservi costante. Dalle cose precedenti troveremo facilmente le due trasformate

$$\frac{u+u'}{2}=a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec}....+a_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.$$

$$\frac{k+k'}{2}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec}.....+b_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.$$

essendo al solito u, u' quello che fx diviene per le successive sostituzioni di $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x=e^{-\phi\sqrt{-1}}$, e lo stesso dicasi per le quantità k, k' riferite alla funzione Fx.

Da quelle due Equazioni ne dedurremo quest' altra:

$$\frac{(u+u')\ (k+k')}{4}=(a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec}....+a_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.)$$

$$\text{(S)}\qquad .....\times(b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec}....+b_\delta\cos.\delta\phi+\text{ec}.),$$

ed effettuando la operazione indicata nel secondo membro, troveremo che un termine qualunque di questo prodotto sarà della forma $a_p\ b_q\cos.p\phi.\cos.q\phi.$, cioè della forma

$$\text{(V)}\qquad .....\tfrac{1}{2}a_p\ b_q\cos.(p-q)\phi+\tfrac{1}{2}a_p\ b_q\cos.(p+q)\phi.$$

Proponghiamoci adesso di trovare in quel prodotto il coefficiente di $\cos.\delta\phi$. Prima di tutto in questo coefficiente vi saranno come è chiaro i due termini

$$a\ b_\delta+a_\delta b,$$

vi saranno poi tutti i termini dati dal primo termine della riduzione (V), ove $p-q=\delta$, e ciò indipendentemente dal segno, ed esclusi i casi di $p=0$, o di $q=0$, essendo questi già considerati; e tutti questi termini gli rappresenteremo col segno

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\ a_p\ b_q$$

essendo $\Sigma\ a_p\ b_q$ la somma di tutti i termini della forma $a_p\ b_q$, ove dall' un termine all' altro la quantità $p-q$ è costante ed $=\delta$ indipendentemente dal segno.

E finalmente vi saranno anco tutti i termini dati dal secondo termine della riduzione (V), ove $p+q$ sia $=\delta$, e questi tutti presi insieme gli chiameremo

$$\frac{1}{2}\Sigma' a_p b_q$$

$\Sigma' a_p b_q$ indicando la somma dei termini della forma $a_p b_q$, ove in ognuno di essi $p+q=\delta$.

Riunendo queste tre distinte specie di termini vedremo che il coefficiente di $\cos.\delta\varphi$ nel secondo membro della Equazione (S) sarà

$$ab_\delta + a_\delta b + \frac{1}{2}\Sigma a_p b_q + \frac{1}{2}\Sigma' a_p b_q .$$

Ma questo stesso coefficiente sarà dato nel primo membro della stessa Equazione (S) dalla formula

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')\cos.\delta\varphi . d\varphi$$

integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, come abbiamo già dimostrato nell' articolo 1. Quindi eguagliando questi due coefficienti, si avrà

$$\frac{1}{2\pi}\int (u+u')(k+k')\cos.\delta\varphi . d\varphi =$$

$$ab_\delta + a_\delta b + \frac{1}{2}\Sigma a_p b_q + \frac{1}{2}\Sigma' a_p b_q .$$

Onde ne trarremo

$$ab_\delta + a_\delta b + \Sigma a_p b_q =$$

$$\frac{1}{\pi}\int (u+u')(k+k')\cos.\delta\varphi\, d\varphi - ab_\delta - a_\delta b - \Sigma' a_p b_q$$

indicando col segno $\Sigma' a_p b_q$ la somma dei termini della forma $a_p b_q$, ove $p+q=\delta$, e denotando col segno $\Sigma a_p b_q$ la serie infinita dei termini, ove fatta astrazione dal segno, si ha $p-q=\delta$, escludendo per altro in ambedue queste formule il caso di $p=0$, o di $q=0$. E se vorremo più semplicemente la espressione precedente, potremo dargli la forma

$$\text{(H)} \qquad \frac{1}{\pi}\int (u+u')(k+k')\cos.\delta\varphi . d\varphi - \Sigma' a_p b_q = \Sigma a_p b_q ,$$

ove adesso nei segni $\Sigma' a_p b_q$, $\Sigma a_p b_q$ sono compresi i casi di $p=0$, e di $q=0$. Il nostro problema è pertanto completamente risoluto.

Il Teorema del numero 4. è compreso in questa soluzione, e ne discende supponendo $p-q=\delta=0$. In questo caso non si può sodisfare alla condizione $p+q=\delta=0$ se non chè supponendo $p=0$, $q=0$. Quindi il segno $\Sigma' a_p b_q$ esprimerà semplicemente il solo termine $2ab$, ed il segno $\Sigma a_p b_q$ rappresenterà la serie

$$2\,(ab+a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3+\text{ec.})$$

poichè nelle due formule $\Sigma' a_p b_q$, $\Sigma a_p b_q$ se vi è il termine $a_m b_n$ vi è ancora l' altro $a_n b_m$; sostituendo ora questi valori nella Equazione (H) troveremo, dividendo per 2

$$\frac{1}{2\pi}\int(u+u')(k+k')d\varphi-ab=ab+a_1 b_1+a_2 b_2+a_3 b_3+\text{ec.}$$

come già nel numero 4. trovammo.

8.

Passiamo ora a vedere come il Teorema del numero 4. reso nel precedente articolo più generale, possa estendersi al caso di più variabili. Proponghiamoci pertanto di trovar la somma della serie

$$a_{0,0}\,b_{0,0}+a_{1,0}\,b_{1,0}+a_{0,1}\,b_{0,1}+a_{2,0}\,b_{2,0}+a_{1,1}\,b_{1,1}+a_{0,2}\,b_{0,2}+\text{ec.}$$

formata dalla addizione dei prodotti dei termini corrispondenti nelle due serie conosciute

$$z_{x,y}=a_{0,0}+a_{1,0}\,y+a_{0,1}\,x+a_{2,0}\,y^2+a_{1,1}\,xy+a_{0,2}\,x^2+\text{ec.}$$

$$z'_{x,y}=b_{0,0}+b_{1,0}\,y+b_{0,1}\,x+b_{2,0}\,y^2+b_{1,1}\,xy+b_{0,2}\,x^2+\text{ec.}$$

ove sarà

$$a_{m,n}=\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n}z_{x,y}}{dy^m.dx^n}\right)$$

$$b_{m,n}=\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots n}\left(\frac{d^{m+n}z'_{x,y}}{dy^m.dx^n}\right)$$

facendo $x=0$, $y=0$ dopo le differenziazioni.

Ciò posto, facciamo prima $y=e^{\psi\sqrt{-1}}$, quindi $y=e^{-\psi\sqrt{-1}}$ e chiamando P, P' quello che diviene $z_{x,y}$ per tali sostituzioni; e Q, Q' quello parimente che diviene $z'_{x,y}$, noi avremo facilmente

$$\frac{P+P'}{2}=a_{0,0}+a_{1,0}\cos.\psi+a_{0,1}x+a_{2,0}\cos.2\psi+a_{1,1}x\cos.\psi+a_{0,2}x^2+\text{ec.}$$

$$\frac{Q+Q'}{2}=b_{0,0}+b_{1,0}\cos.\psi+b_{0,1}x+b_{2,0}\cos.2\psi+b_{1,1}x\cos.\psi+b_{0,2}x^2+\text{ec.}$$

Parimente in queste equazioni facendo successivamente $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, $x=e^{-\phi\sqrt{-1}}$, avremo, chiamando Σ, Σ' le respettive somme dei parziali resultati che con tali sostituzioni otterremo per le quantità P+P', Q+Q',

$$\frac{\Sigma}{4}=a_{0,0}+a_{1,0}\cos.\psi+a_{0,1}\cos.\phi+a_{2,0}\cos.2\psi+$$
$$a_{1,1}\cos.\psi\cos.\phi+a_{0,2}\cos.2\phi+\text{ec.}$$

$$\frac{\Sigma'}{4}=b_{0,0}+b_{1,0}\cos.\psi+b_{0,1}\cos.\phi+b_{2,0}\cos.2\psi+$$
$$b_{1,1}\cos.\psi\cos.\phi+b_{0,2}\cos.2\phi+\text{ec.}$$

E sarà, come nell' articolo 3. abbiamo dimostrato

$$\left.\begin{aligned}
a_{0,0}&=\frac{\int^2\Sigma.d\phi.d\Psi}{4\pi^2}\\
a_{m,0}&=\frac{\int^2\Sigma.\cos.m\psi.d\phi.d\psi}{2\pi^2}\\
a_{0,n}&=\frac{\int^2\Sigma.\cos.n\phi.d\phi.d\psi}{2\pi^2}\\
a_{m,n}&=\frac{\int^2\Sigma.\cos.m\psi\cos.n\phi.d\phi.d\psi}{\pi^2}
\end{aligned}\right\}\text{(A)}$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, $\psi=0$, $\psi=\pi$. Analoghi saranno i valori di $b_{0,0}$, $b_{m,0}$ ec. e si otterranno da quelli di $a_{0,0}$, $a_{m,0}$ ec. cambiandovi solamente Σ in Σ'.

Riprendiamo adesso la Equazione

$$\frac{\Sigma'}{4} = b_{0,0} + b_{1,0} \cos.\psi + b_{0,1} \cos.\phi + b_{2,0} \cos.2\psi +$$

$$b_{1,1} \cos.\phi.\cos.\psi + b_{0,2} \cos.2\phi + \text{ec.}$$

moltiplicandola da ambe le parti per $\frac{\Sigma.d\phi.d\psi}{\pi^2}$ ed integrando prima rapporto a ψ, quindi rapporto a ϕ tra i limiti $\psi = 0$, $\psi = \pi$, $\phi = 0$, $\phi = \pi$, noi avremo

$$\frac{\int^2 \Sigma.\Sigma' d\phi.d\psi}{4\pi^2} = b_{0,0} \frac{\int^2 \Sigma d\phi.d\psi}{\pi^2} + b_{1,0} \frac{\int^2 \Sigma \cos.\psi d\phi.d\psi}{\pi^2} + b_{0,1} \frac{\int^2 \Sigma \cos.\phi.d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$+ b_{2,0} \frac{\int^2 \Sigma \cos.2\psi.d\phi.d\psi}{\pi^2} + b_{1,1} \frac{\int^2 \Sigma.\cos.\psi \cos.\phi\, d\phi.d\psi}{\pi^2} + b_{0,2} \frac{\int^2 \Sigma \cos.2\phi.d\phi.d\psi}{\pi^2} + \text{ec.}$$

ma tra i medesimi limiti abbiamo dalle Equazioni (A), comunque siano m, ed n

$$4\, a_{0,0} = \frac{\int^2 \Sigma.d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$2\, a_{m,0} = \frac{\int^2 \Sigma \cos.m\psi d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$2\, a_{0,n} = \frac{\int^2 \Sigma \cos.n\phi\, d\phi.d\psi}{\pi^2}$$

$$a_{m,n} = \frac{\int^2 \Sigma.\cos.m\psi.\cos.n\phi.d\phi\, d\psi}{\pi^2}$$

quindi, sostituendo, la nostra trasformata diverrà

$$\frac{\int^2 \Sigma.\Sigma' d\phi.d\psi}{4\pi^2} - a_{0,0}\, b_{0,0} = a_{0,0}\, b_{0,0} + a_{1,0}\, b_{1,0} + a_{0,1}\, b_{0,1} +$$

$$a_{2,0}\, b_{2,0} + a_{1,1}\, b_{1,1} + a_{0,2}\, b_{0,2} + \text{ec.}$$

$$+ a_{0,0}\, b_{0,0} + a_{1,0}\, b_{1,0} + a_{2,0}\, b_{2,0} + a_{3,0}\, b_{3,0} + \text{ec.} \qquad \text{(U)}$$

$$+ a_{0,0}\, b_{0,0} + a_{0,1}\, b_{0,1} + a_{0,2}\, b_{0,2} + a_{0,3}\, b_{0,3} + \text{ec.}$$

Le due ultime file di questo secondo membro possono agevolmente conoscersi, riprendendo le serie proposte

$$z_{x,y} = a_{0,0} + a_{1,0}\,y + a_{0,1}\,x + a_{2,0}\,y^2 + a_{1,1}\,xy + a_{0,2}\,x^2 + \text{ec.}$$

$$z'_{x,y} = b_{0,0} + b_{1,0}\,y + b_{0,1}\,x + b_{2,0}\,y^2 + b_{1,1}\,xy + b_{0,2}\,x^2 + \text{ec.}$$

Se infatti faremo $x=0$ in queste espressioni, si troverà

$$z_{0,y} = a_{0,0} + a_{1,0}\,y + a_{2,0}\,y^2 + a_{3,0}\,y^3 + \text{ec.}$$

$$z'_{0,y} = b_{0,0} + b_{1,0}\,y + b_{2,0}\,y^2 + b_{3,0}\,y^3 + \text{ec.}$$

alle quali potremo applicare il Teorema del numero 4. perchè dipendono da una sola variabile, e dedurne la somma μ della serie

$$\mu = a_{0,0}\,b_{0,0} + a_{1,0}\,b_{1,0} + a_{2,0}\,b_{2,0} + a_{3,0}\,b_{3,0} + \text{ec.}$$

similmente dalle stesse serie proposte, facendovi $y=0$, facilmente vedremo che con lo stesso Teorema del numero 4 si otterrà la somma μ' della serie

$$\mu' = a_{0,0}\,b_{0,0} + a_{0,1}\,b_{0,1} + a_{0,2}\,b_{0,2} + a_{0,3}\,b_{0,3} + \text{ec.}$$

sostituendo dunque questi valori nella Equazione (U) avremo

$$\frac{1}{4}\frac{\int^2 \Sigma.\Sigma' d\phi.d\psi}{\pi^2} - (\mu + \mu' + a_{0,0}\,b_{0,0}) = a_{0,0}\,b_{0,0} + a_{1,0}\,b_{1,0} + a_{0,1}\,b_{0,1}$$
$$+ a_{2,0}\,b_{2,0} + a_{1,1}\,b_{1,1} + a_{0,2}\,b_{0,2} + \text{ec.}$$

La quale Equazione risolve il problema proposto. È inutile l'avvertire che lo stesso metodo serve ad estendere questo Teorema al caso in cui le serie proposte dipendessero da un numero di variabili maggiore di due.

9.

Abbiamo veduto nell' articolo 4 come, date le due serie ordinate per le potenze ascendenti della variabile x

$$(1) \qquad z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(2) \qquad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

è sempre possibile di ottenere la somma della serie che nasce dalla addizione dei prodotti ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, ec. ogni volta che siano conosciute z, z'. Questo Teorema è utile quando vogliasi ottenere sotto forma finita l' integrale di una Equazione a differenze parziali, che sia espresso in una serie infinita, ed in una serie tale che si possa decomporre in altre due di cui sia nota la somma, e che moltiplicate termine per termine la riproducano, appunto nella maniera con cui la serie

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \text{ec.}$$

dipende dalle serie (1), (2). Ma può spesso succedere che la serie proposta non possa decomporsi in altre due conosciute, e che per altro si possa risolvere in un numero maggiore di due. Date pertanto le serie in un numero qualunque

$$z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \text{ec.}$$

ec.

conviene esaminare se sia possibile di ritrovar la somma della serie.

$$abc \ldots + a_1 b_1 c_1 \ldots + a_2 b_2 c_2 \ldots + a_3 b_3 c_3 \ldots + \text{ec.}$$

Brevemente adesso vedremo che questo caso ancora è suscettibile di una generale evoluzione.

Supponghiamo che le serie conosciute siano tre, e da questo caso particolare vedremo come dobbiamo regolarci essendo il numero di esse qualunque. Sia pertanto

$$(m) \qquad z = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(m') \qquad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(m'') \qquad z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \text{ec.}$$

Si sostituisca nella serie (m) in luogo di x la quantità $e^{(\phi+k)\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-(\phi+k)\sqrt{-1}}$; avremo, chiamando R, R′ i resultati, ed aggiungendoli

$$\frac{R+R'}{2} = a + a_1 \cos.(\phi+k) + a_2 \cos.2(\phi+k) + a_3 \cos.3(\phi+k) + \text{ec.}$$

parimente nella stessa serie (m) in luogo di x prima si ponga $e^{(\phi-k)\sqrt{-1}}$, e quindi $e^{-(\phi-k)\sqrt{-1}}$, chiamando R″, R‴ i resultati di queste sostituzioni nella funzione z, avremo, aggiungendoli

$$\frac{R''+R'''}{2} = a + a_1 \cos.(\phi-k) + a_2 \cos.2(\phi-k) + a_3 \cos.3(\phi-k) + \text{ec.}$$

E sommando questo valore di $\frac{R''+R'''}{2}$ con l' altro di $\frac{R+R'}{2}$, avremo

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{2} = 2\left(a + a_1\left(\frac{\cos.(\phi+k)+\cos.(\phi-k)}{2}\right)\right.$$
$$\left. + a_2\left(\frac{\cos.2(\phi+k)+\cos.2(\phi-k)}{2}\right) + a_3\left(\frac{\cos.3(\phi+k)+\cos.3(\phi-k)}{2}\right) + \text{ec.}\right)$$

Ma avendosi

$$\frac{\cos.p(\phi+k)+\cos.p(\phi-k)}{2} = \cos.p\phi.\cos.pk.$$

sarà ancora, sostituendo

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{4} = a + a_1 \cos.\phi.\cos.k + a_2 \cos.2\phi.\cos.2k$$
$$+ a_3 \cos.3\phi.\cos.3k + \text{ec.}$$

Ottenuto questo resultato, riprendiamo le altre due serie

$$(m') \qquad z' = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{ec.}$$

$$(m'') \qquad z'' = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \text{ec.}$$

Nella serie (m') facciasi $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$, e quindi $x = e^{-\phi\sqrt{-1}}$; aggiungendo i resultati, e facendo questa somma $= H$, si avrà

$$\frac{H}{2} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.}$$

Parimente nella serie (m'') ponghiamo $x=e^{k\sqrt{-1}}$, e quindi $x=e^{-k\sqrt{-1}}$, e si aggiunga; facendo il resultato di questa addizione $=$ H', si avrà

$$\frac{H'}{2}=c+c_1\cos.k+c_2\cos.2k+c_3\cos.3k+\text{ec.}$$

Ed avremo dalle cose precedenti (1)

$$b_s=\frac{1}{\pi}\int H.\cos.s\phi.d\phi.$$

$$c_s=\frac{1}{\pi}\int H'.\cos.sk.dk$$

purchè gli integrali siano presi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$; e sarà ancora tra i limiti stessi

$$b_s=\frac{1}{\pi}\int\frac{H}{2}\,d\phi$$

$$c=\frac{1}{\pi}\int\frac{H'}{2}\,dk.$$

Riprendiamo adesso la Equazione sopra ottenuta

$$\frac{R+R'+R''+R'''}{4}=a+a_1\cos.\phi.\cos.k+a_2\cos.2\phi.\cos.2k$$
$$+a_3\cos.3\phi.\cos.3k+\text{ec.}$$

Moltiplicando da ambe le parti per $\frac{H}{\pi}\,d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, si avrà

$$\int\frac{R+R'+R''+R'''}{4\pi}.H.d\phi=\frac{a}{\pi}\int Hd\phi+\frac{a_1}{\pi}\cos.k.\int H\,d\phi.\cos.\phi$$
$$+\frac{a_2}{\pi}\cos.2k\int Hd\phi.\cos.2\phi+\frac{a_3}{\pi}\cos.3k\int Hd\phi.\cos.3\phi$$
$$+\text{ec}\ldots+\frac{a_s}{\pi}\cos.sk\int H\,d\phi.\cos.s\phi+\text{ec.}$$

Ed essendo

$$\frac{1}{\pi}\int H\,d\phi=2b$$

$$\frac{1}{\pi}\int Hd\phi.\cos.s\phi=b_s$$

otterremo, sostituendo,

$$\int \frac{R+R'+R''+R'''}{4\pi} H d\phi = 2ab + a_1 b_1 \cos.k + a_2 b_2 \cos.2k$$
$$+ a_3 b_3 \cos.3k + \text{ec.}$$

Se moltiplicheremo adesso da ambe le parti per $\frac{H'}{\pi} dk$, avremo, integrando tra i limiti $k=0$, $k=\pi$,

$$\int\int \frac{(R+R'+R''+R''')}{4\pi^2} H.H'.d\phi.dk = \frac{2ab}{\pi}\int H'dk + \frac{a_1 b_1}{\pi}\int H'dk.\cos.k$$
$$+ \frac{a_2 b_2}{\pi}\int H'\cos.2k\, dk + \frac{a_3 b_3}{\pi}\int H'\cos.3k dk + \text{ec.}$$

Ma abbiamo veduto essere tra quei limiti

$$2c = \frac{1}{\pi}\int H' dk$$

$$c_s = \frac{1}{\pi}\int H'.dk.\cos.sk.$$

Quindi avrassi, sostituendo,

$$\int\int \frac{(R+R'+R''+R''')}{4\pi^2} H.H'.d\phi.dk = 4abc + a_1 b_1 c_1 + a_2 b_2 c_2$$
$$+ a_3 b_3 c_3 + \text{ec.} \ldots + a_s b_s c_s + \text{ec.}$$

La qual formula ci dà la completa evoluzione del nostro problema. Le cose precedenti danno tutta la possibile estensione al Teorema enunciato nell'articolo 4. sopra di cui sembrami nulla aver lasciato da desiderare.

10.

Tutti questi resultati discendono dal Teorema dimostrato nell'articolo 2. mediante il quale, data una funzione qualunque fx di x, che vogliasi in serie per le potenze di x, in modo che sia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + \text{ec.}$$

si ha, per determinare il termine generale a_m la Equazione

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int (fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}) \cos.m\phi.\, d\phi.$$

purchè la integrazione sia eseguita da $\phi = 0$ sino a $\phi = \pi$. Per darne un esempio semplicissimo, proponghiamoci di svolgere in serie la funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$. Avremo primieramente

$$fx = \frac{2x}{nx^2+2x+n}.$$

E quindi

$$fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}} = \frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n} + \frac{2e^{-\phi\sqrt{-1}}}{ne^{-2\phi\sqrt{-1}}+2e^{-\phi\sqrt{-1}}+n}.$$

Ciò è riducendo allo stesso denominatore, ed osservando che $e^{\phi\sqrt{-1}} + e^{-\phi\sqrt{-1}} = 2\cos.\phi$, si avrà

$$fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}} = \frac{2}{1+n\cos.\phi}.$$

Quindi sarà

$$a = \frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi}{1+n\cos.\phi}$$

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int\frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi}$$

purchè si estendano le integrazioni da $\phi = 0$ a $\phi = \pi$.

È noto adesso che si ha tra i limiti stabiliti

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi}{1+n\cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^m.$$

Sarà dunque ancora sostituendo $a = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$

$$a_m = \pm\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left[\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right]^m.$$

Ove il segno superiore conviene al caso di m pari, e l'inferiore al caso di m dispari.

Se dunque sostituiremo questi valori nella espressione

$$\frac{2x}{nx^2+2x+n} = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{ec.}$$

noi avremo

$$\frac{2x}{nx^2+2x+n}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[1-2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)x+2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^2x^2\right.$$
$$\left.-2\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^3x^3+\text{ec.}\right]$$

II.

Proponghiamoci adesso di svolgere la stessa funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ col metodo ordinario, e per tale oggetto facendo

$$\frac{2x}{nx^2+2x+n}=a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{ec.}\ldots+a_mx^m+\text{ec.}$$

e moltiplicando per nx^2+2x+n avremo

$$2x=na+na_1x+na_2x^2+na_3x^3+na_4x^4+\text{ec.}\ldots+na_m\ x^m+\text{ec.}$$
$$+2ax+2a_1x^2+2a_2x^3+2a_3x^4+\text{ec.}\ldots+2a_{m-1}x^m+\text{ec.}$$
$$+nax^2+na_1x^3+na_2x^4+\text{ec.}\ldots+na_{m-2}x^4+\text{ec.}$$

E dal paragone delle simili potenze di x otterremo $a=0$, $2a+na_1=2$, e generalmente poi $na_m+2a_{m-1}+na_{m-2}=0$ alla quale Equazione a differenze finite sodisfa, come è noto, la formula

$$a_m=\pm C\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m\pm C'\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m$$

prendendo il segno superiore se m è pari, e l'inferiore se è dispari. Per determinar le arbitrarie C, C' facciamo $m=0$, ed avremo $a=C+C'=0$, onde $C=-C'$. Sia inoltre $m=1$, ed avendosi $a_1=C'\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}-\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)=\frac{2}{n}$

sarà $C'=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$. Quindi generalmente

$$a_m=\pm\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m-\left(\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m\right].$$

Questo valore di a_m è differentissimo da quello che ci vien dato dall' analisi del numero precedente, ed è il vero

chè conviene alla proposta evoluzione rappresentando esso solo il differenziale m^{esimo} della funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ diviso per $1.2.3....m$, e fattovi dopo $x=0$, come è facile il convincersene differenziando. Vedesi dunque che esistono alcuni casi nei quali il Teorema del numero 1. è erroneo, e siccome da questo Teorema stesso discendono tutti i resultati che precedentemente abbiamo esposti, così questi ancora qualche volta anderanno soggetti ad errore. Convien dunque che per quel Teorema siavi qualche caso di eccezione, appunto come in quello di Taylor; prima per altro di rintracciarlo, sarà utile il fare qualche riflessione sopra l' esempio precedentemente trattato, e che ci ha offerto questo paradosso.

12.

Allorchè ci siamo proposti di svolgere in serie per le potenze di x la funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ noi vi abbiamo prima sostituito in luogo di x $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, ed aggiungendo i due resultati, abbiamo ottenuta la quantità

$$\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n}+\frac{2e^{-\phi\sqrt{-1}}}{ne^{-2\phi\sqrt{-1}}+2e^{-\phi\sqrt{-1}}+n}=\frac{2}{1+n\cos.\phi}.$$

Il primo membro di questa Equazione rappresenta una serie ordinata per i coseni degli archi multipli di ϕ, ed è osservabile che i due termini di questo primo membro sono identicamente eguali; infatti la funzione proposta può mettersi sotto la forma $\frac{1}{1+\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$ la quale non varia facendovi le due indicate sostituzioni differenti, e ci dà in ambi i casi $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$; adesso la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ può ridursi in serie per coseni degli archi multipli in

due maniere differenti. Se infatti svolgeremo per le potenze di $e^{\phi\sqrt{-1}}$ la di lei equivalente $\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}}+2e^{\phi\sqrt{-1}}+n}$ avremo, per l'articolo precedente, e facendo per semplicità maggiore $p=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$, $p'=\frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\Big[(p-p')\,e^{\phi\sqrt{-1}}-(p^2-p'^2)\,e^{2\phi\sqrt{-1}}$$
$$+(p^3-p'^3)\,e^{3\phi\sqrt{-1}}-\text{ec.}\Big].$$

Se in questa equazione cambieremo ϕ in $-\phi$, ed aggiungeremo, sarà, dividendo per 2

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi}=-\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\Big[(p-p')\cos.\phi-(p^2-p'^2)\cos.2\phi$$
$$+(p^3-p'^3)\cos.3\phi-\text{ec.}\Big] \tag{A}$$

Ma la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ può ridursi in serie anche in un altro modo, poichè facendo

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi}=A+A_1\cos.\phi+A_2\cos.2\phi+A_3\cos.3\phi$$
$$+\text{ec.}\ldots+A_m\cos.m\phi+\text{ec.}$$

si avrà (1) tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$A=\frac{1}{\pi}\int\frac{d\phi}{1+n\cos.\phi},\quad A_m=\frac{2}{\pi}\int\frac{\cos.m\phi.d\phi}{1+n\cos.\phi}$$

ossia $A=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}$; $A_m=\pm\frac{2}{\sqrt{1-n^2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}\right)^m$.

Cioè, adottando le denominazioni superiori

$$A_m=\pm\frac{2p^m}{\sqrt{1-n^2}}$$

prendendo il segno superiore, se m è pari, e l'inferiore se è dispari. Quindi sostituendo avremo

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi}=\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left(1-2p\cos.\phi+2p^2\cos.2\phi-2p^3\cos.3\phi+\text{ec.}\right) \tag{B}$$

13.

Le due evoluzioni differentissime per i coseni dei multipli di φ che abbiamo veduto convenire egualmente alla funzione $\frac{1}{1+n\cos.\varphi}$ ci additano la strada per rinvenire la sorgente dell' errore in cui il Teorema del numero 1. ci ha condotti. Ai termini infatti di questo Teorema, data la funzione fx da svolgersi per le potenze di x in guisa che sia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots\ldots + a_m x^m + \text{ec.}$$

conviene prima in luogo di x sostituire $e^{\varphi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, ed aggiungendo, dobbiamo passare al resultato

$$\text{(M)} \quad \frac{fe^{\varphi\sqrt{-1}} + fe^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2} = a + a_1 \cos.\varphi + a_2 \cos.2\varphi + a_3 \cos.3\varphi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\varphi + \text{ec.}$$

ed inferirne quindi tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$

$$a_m = \int \frac{[fe^{\varphi\sqrt{-1}} + fe^{-\varphi\sqrt{-1}}]}{\pi} \cos.m\varphi . d\varphi .$$

Allorchè $fx = \frac{2x}{nx^2+2x+n}$ si ha $\frac{fe^{\varphi\sqrt{-1}} + fe^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2} = \frac{1}{1+n\cos.\varphi}$; quindi per questo caso particolare la Equazione (M) diverrà

$$\frac{1}{1+n\cos.\varphi} = a + a_1 \cos.\varphi + a_2 \cos.2\varphi + a_3 \cos.3\varphi + \text{ec.} \ldots\ldots + a_m \cos.m\varphi + \text{ec.}$$

Scordandoci adesso che i coefficienti a, a_1, a_2, a_3, ec. appartengono anche allo sviluppo della funzione $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ per le potenze di x, ma considerandoli come unicamente dipendenti dalla evoluzione della formula $\frac{1}{1+n\cos.\varphi}$ per i coseni dei multipli di φ, è chiaro che essi potranno avere due valori differenti, perchè in due diversi modi può svolgersi la stessa funzione $\frac{1}{1+n\cos.\varphi}$ nella forma richiesta.

Una di queste evoluzioni sarà data dal supporre tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int [fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}] \cos.m\phi.\, d\phi = \frac{2}{\pi}\int \frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi}$$

ed avremo così come vedemmo la serie (B)

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[1 - 2p\cos.\phi + 2p^2\cos.2\phi - 2p^3\cos.3\phi + \text{ec.}] \quad \text{(B)}$$

Otterremo l' altra evoluzione sviluppando per le potenze di $e^{\phi\sqrt{-1}}$ la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$, o la sua equivalente $\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}} + 2e^{\phi\sqrt{-1}} + n}$, e cambiando quindi ϕ in $-\phi$ ed aggiungendo; e dopo questa operazione caderemo sopra la serie (A)

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[(p-p')\cos.\phi - (p^2-p'^2)\cos.2\phi + (p^3-p'^3)\cos.3\phi - \text{ec.}]. \quad \text{(A)}$$

Ma il coefficiente di $e^{m\phi\sqrt{-1}}$ nello sviluppo della funzione $\frac{2e^{\phi\sqrt{-1}}}{ne^{2\phi\sqrt{-1}} + 2e^{\phi\sqrt{-1}} + n}$ è lo stesso manifestamente che il coefficiente di x^m nello sviluppo di $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$; quindi è chiaro che i coefficienti dei diversi coseni nella serie (A) equivarranno ai coefficienti delle potenze corrispondenti nello sviluppo della formula $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$.

Per altro il Teorema del numero 1. esige che il coefficiente di x^m sia dato dalla formula

$$\frac{1}{\pi}\int [e^{\phi\sqrt{-1}} + e^{-\phi\sqrt{-1}}] \cos.m\phi.\, d\phi = \frac{2}{\pi}\int \frac{d\phi.\cos.m\phi}{1+n\cos.\phi}.$$

Ma ciò è impossibile, perchè questo appunto è il coefficiente generale della serie (B), che è diverso dalla analoga quantità nella serie (A), ossia dal coefficiente di x^m.

14.

Apparisce pertanto dall' Analisi superiore che riducendo il coefficiente di x^m nella evoluzione della formula $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ a dipendere dallo sviluppo della funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ per i coseni dei multipli di ϕ, non facciamo altro che richiamare un problema di soluzione unica a dipendere da un altro problema che ne ammette infinite; poichè la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ può svolgersi per i coseni multipli di ϕ in quanti modi possibili potranno tra di loro combinarsi le due serie (A), e (B), ed in questa moltiplicità di soluzioni quella sola che sodisfa al nostro quesito è la soluzione (A) nella quale il coefficiente di $\cos.m\phi$ equivale al coefficiente di x^m nello sviluppo di $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ per le potenze di x.

Così il problema di ridurre in serie per i coseni dei multipli di ϕ la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ è realmente indeterminato, e con infinite forme differenti potremo risolverlo. Discende questa particolarità dalla forma stessa prescritta allo sviluppo, nel quale non sono i termini necessariamente l' uno dall' altro indipendenti; a differenza delle serie ordinate per le potenze di una variabile, ove questa indipendenza sempre ha luogo, poichè tra le successive potenze di una variabile non può ammettersi nessuna relazione. Al contrario tra i coseni dei successivi multipli di ϕ questa relazione sussiste, e sappiamo che ha luogo per esempio la eguaglianza

$$-\frac{1}{2} = \cos.\phi + \cos.2\phi + \cos.3\phi + \cos.4\phi + \text{ec.} \qquad (1)$$

Quindi se con un metodo qualunque si svilupperà per i coseni dei multipli di ϕ la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ in modo che abbiasi

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec.} \quad (\tau)$$

è chiaro che con la relazione sopra riportata potremo variare questo sviluppo secondo le infinite analitiche combinazioni che tra le serie (1), (2) possono farsi.

15.

L'errore dunque in cui il Teorema del numero 1. ci ha condotti, quando ne abbiamo nel numero 10. fatta un' applicazione alla formula $\frac{2x}{nx^2+2x+n}$ è derivato dall'aver supposto che la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ potesse svolgersi in una unica maniera per i coseni degli archi moltiplici di ϕ, mentre invece essa è suscettibile di due differentissime evoluzioni date dalle serie (A), (B)

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[(p-p')\cos.\phi - (p^2-p'^2)\cos.2\phi + (p^3-p'^3)\cos.3\phi - \text{ec.}\right] \quad (A)$$

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = \frac{1}{\sqrt{1-n^2}}\left[1-2p\cos.\phi+2p^2\cos.2\phi-2p^3\cos.3\phi+\text{ec.}\right] \quad (B)$$

ove $p = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$, $p' = \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$

Queste due serie, quantunque tanto in apparenza diverse, pure possono agevolmeute in questo caso particolare ridursi alla forma medesima. Consideriamo infatti la serie

$$p\cos.\phi - p^2\cos.2\phi + p^3\cos.3\phi - p^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

Facilmente troveremo la somma esserne espressa dalla funzione

$$\frac{1}{2}\left[\frac{pe^{\phi\sqrt{-1}}}{1+pe^{\phi\sqrt{-1}}} + \frac{pe^{-\phi\sqrt{-1}}}{1+pe^{-\phi\sqrt{-1}}}\right] = \frac{p^2+p\cos.\phi}{1+2p\cos\phi+p^2}.$$

Parimente la serie

$$p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

sarà espressa dalla formula $\frac{p'^2+p'\cos.\phi}{1+2p'\cos.\phi+p'^2}$

Ma avendosi $p = \frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}$, $p' = \frac{1+\sqrt{1-n^2}}{n}$, sarà $p = \frac{1}{p'}$, quindi, mediante questa relazione troveremo

$$\frac{p^2+p\cos.\phi}{1+2p\cos.\phi+p^2} + \frac{p'^2+p'\cos.\phi}{1+2p'\cos.\phi+p'^2} = 1 .$$

Questa equazione medesima passerà tra le serie

$$p\cos.\phi - p^2\cos.2\phi + p^3\cos.3\phi - p^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$
$$p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

E quindi in luogo della seconda di queste potremo prendere l' unità diminuita della prima.

Ora la serie (A) può mettersi sotto la forma

$$\frac{1}{1+n\cos.\phi} = -\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[p\cos.\phi - p^2\cos.2\phi + p^3\cos.3\phi - p^4\cos.4\phi + \text{ec.}]$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-n^2}}[p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}] \qquad \text{(A)}$$

E se in questa invece di

$$p'\cos.\phi - p'^2\cos.2\phi + p'^3\cos.3\phi - p'^4\cos.4\phi + \text{ec.}$$

faremo la sostituzione sopra indicata, ricaderemo sopra la serie (B)

16.

Quello stesso metodo col quale nel numero 12. abbiamo per la funzione $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ ottenute due differenti evoluzioni può ancora generalmente parlando applicarsi a tutte le funzioni di $\cos.\phi$. Ciò dipende dal potere eseguire lo sviluppo della formula proposta per due quantità differenti, e quindi secondochè si adotterà l' una, o l' altra per ordinarne lo sviluppo, si giungerà a' resultati differentissimi. Così se per ottenere lo sviluppo di $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ si incomincierà con eguagliare la proposta funzione ad una serie ordinata per i coseni degli archi multipli di ϕ, e quindi, tolto il denominatore dal primo membro, ridurremo nel secondo i prodotti dei coseni a coseni di

archi multipli, dal confronto dei coefficienti dei coseni diversi determinando i coefficienti dello sviluppo primitivo, si caderà sopra la serie (B); mentre invece, come vedemmo, se nella evoluzione della formula $\frac{1}{1+n\cos.\phi}$ si ordinerà per le diverse potenze di $e^{\phi\sqrt{-1}}$, riducendo poi i diversi termini che si otterranno a dipendere dai coseni mediante la relazione

$$e^{m\phi\sqrt{-1}}+e^{-m\phi\sqrt{-1}}=2\cos.m\phi$$

si caderà sopra la serie (A) diversissima dalla serie (B).

17.

Per mettere in maggior luce queste generali riflessioni, applicandole nel tempo stesso ad un caso meno particolare, consideriamo la funzione qualunque $Fn\cos.\phi$, la quale, fattovi $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, si ridurrà alla forma $F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$. Riducendo questa funzione in serie per le potenze di $x+\frac{1}{x}$, ed ordinando quindi il resultato per le quantità $x+\frac{1}{x}$, $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, ec. si avrà

$$F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)=A+\frac{A_1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{A_2}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$
$$+\frac{A_3}{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\text{ec}\ldots+\frac{A_m}{2}\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+\text{ec.}$$

Se eseguiremo le riduzioni indicate, si troverà, come altrove ho dimostrato, che il termine generale A_m è dato dalla serie

$$A_m=\frac{1}{2^{m-1}.1.2.3\ldots.m}\left[n^m\frac{d^mFh}{dh^m}+\frac{n^{m+2}}{2(2+2m)}\frac{d^{m+2}Fh}{dh^{m+2}}+\frac{n^{m+4}}{2.4.(2+2m)(4+2m)}\frac{d^{m+4}Fh}{dh^{m+4}}+\text{ec}\right]$$

purchè si supponga $h=0$ dopo le differenziazioni. Ed ivi parimente dimostrammo, (ed avremo inseguito di questa Memoria occasione di farlo vedere per un'altra strada) che la serie su-

periore è rappresentata dalla formula $\frac{2}{\pi}\int Fn\cos.\phi\cos.m\phi.d\phi$, purchè la integrazione si faccia tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$. Dunque adottando questo metodo per svolgere la funzione $Fn\cos.\phi$, il termine generale A_m sarà dato dalla Equazione

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int Fn\cos.\phi.\cos.m\phi.d\phi\ .$$

Ove è da notarsi che la funzione $Fn\cos.\phi$ deve sempre potersi ridurre in serie per le potenze intiere, e positive di n, poichè il metodo precedente esige che la funzione $F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ possa esser ridotta in serie per le potenze intere, e positive di $x+\frac{1}{x}$. Avremo dunque con quelle determinazioni, ponendo in luogo di x il suo valore $e^{\phi\sqrt{-1}}$,

$$Fn\cos.\phi = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + A_3\cos.3\phi + \text{ec.} \qquad \text{(B)}$$

18.

Riprendiamo ora la funzione $F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$, e riduciamola in serie quando ciò sia possibile, per le potenze di x in guisa che si abbia

$$F\frac{n}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) = a + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{ec.}\ldots + a_mx^m + \text{ec.}$$

Per determinare i coefficienti a, a_1, a_2 ... a_m ec. differenziamo prima rapporto ad n, quindi rapporto ad x, e ne avremo, chiamando per semplicità F' il differenziale di Fn preso rapporto ad n

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)F' = \frac{da}{dn} + \frac{da_1}{dn}x + \frac{da_2}{dn}x^2 + \frac{da_3}{dn}x^3 + \text{ec.}$$

$$\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)F' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \text{ec.}$$

Se tra queste due Equazioni elimineremo la quantità comune F', si avrà, ordinando per le potenze di x

$$0 = -n\frac{da}{dn} - \left(n\frac{da_1}{dn} + a_1\right)x - \left(n\frac{da_2}{dn} - n\frac{da}{dn} + 2a_2\right)x^2$$
$$-\left(n\frac{da_3}{dn} - n\frac{da_1}{dn} + a_1 + 3a_3\right)x^3 - \text{ec.}$$

ove avremo

$$\frac{da}{dn} = 0$$
$$n\frac{da_1}{dn} + a_1 = 0$$
$$n\frac{da_2}{dn} - n\frac{da}{dn} + 2a_2 = 0$$
$$n\frac{da_3}{dn} - n\frac{da_1}{dn} + a_1 + 3a_3 = 0.$$

ec.

E da queste equazioni si trarrà

$$a = c$$
$$a_1 = \frac{c_1}{n}$$
$$a_2 = \frac{c_2}{n^2}$$
$$a_3 = -\frac{c_1}{n} + \frac{c_3}{n_3}$$

ec.

ove c, c_1, c_2, c_3, ec. sono costanti indipendenti da n.

Determinati così i coefficienti a, a_1, a_2, ... a_m, ec. si avrà

$$F\frac{n}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.}$$

Ed in questa variando x in $\frac{1}{x}$, quindi aggiungendo, otterremo, rammentandoci che $x = e^{\phi\sqrt{-1}}$

(A) $$Fn\cos\phi = a + a_1\cos.\phi + a_2\cos.2\phi + a_3\cos.3\phi + \text{ec.}$$

Abbiamo trovato ancora nel numero precedente

$$Fn\cos.\phi = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + A_3\cos.3\phi + \text{ec.} \qquad (B)$$

Ma queste serie non saranno mai identiche, perchè differentissimi sono i coefficienti A, a; A_1, a_1; ec.

Così, per esempio, si ha

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int Fn\cos.\phi\, d\phi.\cos.\phi\,.$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\int Fn\cos.\phi.d\phi.\cos.2\phi\,,$$

integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$; ossia 17.

$$A_1 = n\frac{dFh}{dh} + \frac{n^3}{2(2+2)}\frac{d^3Fh}{dh^3} + \frac{n^5}{2.4.(2+2)(4+2)}\frac{d^5Fh}{dh^5} + \text{ec.}$$

$$A_2 = \frac{1}{2.2}\left[n^2\frac{d^2Fh}{dh^2} + \frac{n^4}{2(2+2.2)}\frac{d^4Fh}{dh^4} + \text{ec.}\right]$$

facendo $h = 0$ dopo le differenziazioni, mentre poi abbiamo $a_1 = \frac{c_1}{n}$, $a_2 = \frac{c_2}{n^2}$, essendo c_1, c_2, indipendenti da n; quindi è chiaro che mai potrà essere, perchè n è indeterminato

$$a_1 = A_1\,,\ a_2 = A_2$$

a meno che non succeda che sia $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, e che ciò pure accada alle quantità a_1, a_2. Ma è visibile che acciò abbiasi $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ indipendentemente da n, conviene che la funzione Fh sia tale che tutti i suoi differenziali all' infinito si annullino, facendovi $h = 0$ dopo le differenziazioni; e ciò non può mai verificarsi se non quando Fh non contenga h, ossia quando la funzione proposta $F\frac{n}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ sarà una costante indipendente da $\frac{n}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

19.

Senza entrare nella discussione dei casi particolari in cui potesse avvenire che qualche determinato valore di n inducesse eguaglianza tra i coefficienti delle serie (A), (B), potremo dall'analisi superiore, e dalle considerazioni dell'articolo 14. inferirne che se sia data una funzione qualunque $F\cos.\phi$. già sviluppata per i coseni dei multipli di ϕ in guisa che sia

$$F\cos.\phi = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.}$$

generalmente parlando i coefficienti a, a_1, a_2, ec. potranno essere stati determinati in una infinità di maniere diverse, e per pronunziare sopra la loro formazione converrà prima conoscere per quali strade lo sviluppo è stato fatto.

Quindi se in quella equazione moltiplicheremo da ambe le parti per $\cos.m\phi.\,d\phi$, ed inseguito si integrerà tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, non potremo concluderne che si abbia tra quei limiti

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int F\cos.\phi.\cos.m\phi.\,d\phi$$

sino a che non siamo assicurati che lo sviluppo è stato in realità eseguito con questo metodo, che è lo stesso di quello riportato nell'articolo 17. di questa Memoria.

Il supporre, o il non ammettere che lo sviluppo per i coseni dei multipli di ϕ di una funzione qualunque $F\cos.\phi$ sia stato eseguito col metodo del numero 17. ha relazione con un' altra circostanza che sarà opportuno l'esaminare. È noto che in una serie di qualunque forma che rappresenti una funzione, sempre esiste un residuo, il quale esprime la serie stessa, presa da un suo termine qualunque in poi; se dovrà pertanto svilupparsi la funzione $F\cos.\phi$ per i coseni degli archi multipli di ϕ, noi avremo, chiamando in tal caso $P^{(m)}$ questo residuo, che succede al termine $A_m \cos.m\phi$,

$$F\cos.\phi = A + A_1 \cos.\phi + A_2 \cos.2\phi + \text{ec.} \ldots + A_m \cos.m\phi + P^{(m)}.$$

Se moltiplicheremo da ambe le parti per $\cos.m\phi.d\phi$, ed integreremo rapporto a ϕ tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, facilmente vedremo essere

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int F\cos.\phi.d\phi.\cos.m\phi - \frac{2}{\pi}\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi.$$

Allorchè la evoluzione è stata fatta col metodo del numero 17. abbiamo, come in quell' articolo si è veduto.

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int F\cos.\phi.d\phi.\cos.m\phi.$$

E pertanto questa supposizione comporta seco l' altra

$$\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi = 0$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Quindi se il residuo della serie proposta non sodisfarà a questa condizione, ne inferiremo che i coefficienti A, A_1, A_2, A_3, ec. non sono stati determinati col metodo del numero 17. e tutte le volte poi che l' applicazione di questo metodo allo sviluppo della funzione $F\cos.\phi$ dasse resultati assurdi, imaginarj cioè, o infiniti, ciò indicherà che la proposta funzione è tale che qualunque metodo si adopri per svilupparla secondo i coseni dei multipli di ϕ, mai può essere, tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi = 0.$$

Per maggior chiarezza applicheremo queste riflessioni ad un esempio.

Sia proposto di svolgere per i coseni degli archi multipli di ϕ la funzione $\frac{1}{1-\cos.\phi}$, in modo che sia

$$\frac{1}{1-\cos.\phi} = A + A_1 \cos.\phi + A_2 \cos.2\phi + A_3 \cos.3\phi + \text{ec.}$$

Prevalendoci del metodo del numero 17. il quale come quì sopra si è veduto, esige che il residuo $P^{(m)}$ sia tale che abbiasi tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$

$$\int P^{(m)} d\phi.\cos.m\phi. = 0,$$

noi avremo, per determinare il coefficiente qualunque A_m la equazione

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int \frac{d\phi.\cos.m\phi}{1-\cos.\phi},$$

ed il primo termine A sarà dato dalla Equazione

$$A = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\phi}{1-\cos.\phi}$$

integrando per tutto tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Abbiamo ora, integrando indefinitamente

$$\frac{1}{\pi}\int \frac{d\phi}{1-\cos.\phi} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{1+\cos.\phi}{\text{sen}.\phi} + \text{cost. ec.}$$

e prendendo quest'integrale tra i limiti assegnati e sostituendolo poi nel valore di A, noi avremo $A = \frac{2}{0}$.

Ne concluderemo quindi che la funzione $\frac{1}{1-\cos.\phi}$ non può svolgersi in una tal serie ordinata per i coseni multipli di ϕ in modo che il di lei residuo soddisfaccia alla proposta condizione.

Con tutto ciò abbiamo, applicando alla funzione $\frac{1}{1-\cos.\phi}$ il metodo del numero 18.

$$\frac{1}{1-\cos.\phi} = -2(\cos.\phi + 2\cos.2\phi + 3\cos.3\phi + 4\cos.4\phi + \text{ec.})$$

Facendo infatti $x=e^{\phi\sqrt{-1}}$, la funzione proposta diverrà $\frac{2x}{2x-x^2-1}$, la quale, svolta per le potenze di x, diviene

$$\frac{2x}{2x-x^2-1} = -2(x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \text{ec.})$$

ed in qnesta variando x in $\frac{1}{x}$, ed aggiungendo, e risostituendo poi in luogo di x il suo valore $e^{\phi\sqrt{-1}}$, ricaderemo sopra lo sviluppo quì sopra indicato.

20.

Se dunque sarà ora proposta una funzione qualunque fx, la quale svolta in serie per le potenze di x ci dia

$$fx = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + P_x^{(m)}$$

se in luogo di x porremo $e^{\phi\sqrt{-1}}$, quindi $e^{-\phi\sqrt{-1}}$, noi avremo aggiungendo

$$\frac{fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi$$

$$+ \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \frac{P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}}{2}.$$

Moltiplicando adesso da ambe le parti per $\cos.m\phi.d\phi$, ed integrando quindi tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, si avrà

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int [fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}]\, d\phi.\cos.m\phi -$$

$$\frac{1}{\pi}\int [P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}] \cos.m\phi.d\phi.$$

Acciocchè dunque sia come nel numero 1. abbiamo supposto

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int [fe^{\phi\sqrt{-1}} + fe^{-\phi\sqrt{-1}}]\, d\phi.\cos.m\phi,$$

conviene che abbiasi tra i limiti assegnati

$$\frac{1}{\pi}\int [P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}]\, d\phi.\cos.m\phi = 0.$$

Quando poi questa condizione non sarà verificata, i Teoremi tutti che dal Teorema del numero 1. abbiamo dedotti, saranno erronei, e converrà sempre aver moltissima attenzione alle condizioni superiori, le quali non essendo verificate, il Teorema del numero 4. e tutte le nuove formule da noi date nei numeri a quello precedenti, e successivi, non avranno più luogo.

21.

In proposito anzi del Teorema dimostrato con la nostra analisi nel numero 4. giova quì osservare che quando si giunge col metodo di Parceval da noi riportato nel numero 5. alla Equazione

$$2(Aa+A_1 a_1+A_2 a_2+A_3 a_3+\text{ec.})+2(\alpha\cos.m\phi)+2(\beta\cos.m\phi)$$
$$= Fe^{\phi\sqrt{-1}} fe^{-\phi\sqrt{-1}} + Fe^{-\phi\sqrt{-1}} fe^{\phi\sqrt{-1}},$$

moltiplicando da ambe le parti per $d\phi$, ed eseguendo la integrazione tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, non si può supporre che tutti i termini moltiplicati per i coseni dei multipli di ϕ si annullino, fondandosi sopra la identità $\int\cos.m\phi.d\phi=0$, ove l'integrale è preso tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$. Una simile conclusione è vera quando si sia certi che la somma degli infiniti termini che comprendono i coseni rappresenti una tal funzione di $\cos.\phi$, che svolta in quella forma, sodisfaccia alle condizioni imposte dal numero 19, mediante le quali il residuo che succede al coseno del multiplo m di ϕ sia tale, che chiamandolo $P^{(m)}$, abbiasi tra i dati limiti

$$\int P^{(m)}\cos.m\phi.d\phi=0.$$

Ma quando questa certezza mancherà, dovremo sempre dubitare della verità del Teorema. Se per esempio la serie dei termini che comprendono i coseni fosse la seguente

$$\cos.\phi+2\cos.2\phi+3\cos.3\phi+4\cos.4\phi+\text{ec.}$$

moltiplicando per $d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, si crederebbe di giungere ad un resultato identicamente $=0$, ma d'altronde sappiamo che la serie superiore è rappresentata 19. dalla funzione $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\cos.\phi}$,

e sappiamo ancora che tra i soliti limiti si ha

$$-\frac{1}{2}\int\frac{d\phi}{1-\cos.\phi}=\infty$$

e non già $$-\frac{1}{2}\int\frac{d\phi}{1-\cos\phi}=0$$

come, ingannati dalla forma della serie, si potrebbe a prima vista supporre. Ma senza punto entrare in questo esame, spesso impraticabile, quando il Teorema del numero 4. si faccia discendere dalla nostra analisi, le condizioni esposte nel precedente articolo determineranno la confidenza che dobbiamo avere in quel Teorema medesimo, e nelle numerose estensioni di cui abbiamo dimostrato essere esso suscettibile.

22.

L' esempio quì sopra trattato conferma le riflessioni del numero 19. dalle quali abbiamo già inferito che offrendosi una serie qualunque H tale che sia

$$H=a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec}\ldots+a_m\cos.m\phi+\text{ec}.$$

non se ne potrà mai concludere $a_m=\frac{2}{\pi}\int H\cos.m\phi.d\phi$, tra i soliti limiti, se pur non siano verificati i criterj che esige una tal determinazione del coefficiente generale. È dunque manifesto che se in una formula analitica si presenteranno una, o più serie infinite di quella forma in qualunque modo combinate, prima di operarvi con la integrazione tra i limiti, converrà accuratamente distinguerle tutte, e per ciascuna di esse non ignorar la indole dei respettivi residui, se non vorremo cadere in errore. Questa cognizione infatti ci garantirà dalle illusioni in cui ci trarrebbe la forma

$$a+a_1\cos.\phi+a_2\cos.2\phi+a_3\cos.3\phi+\text{ec}.$$

che può essere all' infinito variata in altre analoghe, senza che si muti perciò il valore della funzione che quella serie rappresenta, ed è manifesto che tutte queste forme non porteranno errore, ove pur si conosca il residuo che a ciascuna conviene, poichè in tal modo sarà lo stesso che operare sopra la funzione non sviluppata ancora.

23.

Per mostrare sempre più quanto siano queste precauzioni indispensabili, e come in simili casi è necessario comportarsi, prendiamo a risolvere di nuovo il problema del numero 4. nel quale, date le due serie

$$z_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + \text{ec.}$$

$$z'_x = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + b_m x^m + P^{(m)}_x$$

ove $P^{(m)}_x$ è il residuo, si chiede la somma della serie infinita

$$ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \text{ec.}$$

Dalle serie proposte si avrà con le solite sostituzioni facendo

$$H = z_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + z_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}\,; \quad H' = z'_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + z'_{e^{-\phi\sqrt{-1}}},$$

$$K^{(m)} = P^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}},$$

$$\frac{H}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.} \quad (1)$$

$$\frac{H'}{2} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + b_m \cos.m\phi + \frac{K^{(m)}}{2} \quad (2)$$

Incominceremo con verificare se tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$ abbiasi

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int H' \cos.m\phi . d\phi,$$

e questa Equazione avrà luogo se tra quei limiti sia, denotando m qualunque numero intero

$$\int K^{(m)} \cos.m\phi . d\phi = 0 .$$

Se una tal condizione non è smentita, moltiplicheremo la serie (1) per $\frac{1}{\pi} H' d\phi$, ed integrando poi tra i soliti limiti, troveremo che il coefficiente del termine qualunque a_s sarà

$$\frac{1}{\pi} \int H' \cos.s\phi . d\phi = b_s .$$

Sembrerebbe in questa maniera il nostro problema risoluto, ammessa che sia nella serie (2) la condizione

$$\int K^{(m)} \cos. m\phi \, d\phi = 0$$

che deve aver luogo qualunque numero intero sia m e dove $\frac{K^{(m)}}{2}$ denota nella serie medesima il residuo che succede al termine qualsivoglia $b_m \cos. m\phi$. Ma quella sola condizione non basta, ed un' altra analoga ne bisogna per la serie (1).

Riprendiamo infatti le due serie (1), (2),

$$\frac{H}{2} = a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos. m\phi + \text{ec.} \qquad (1)$$

$$\frac{H'}{2} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + b_m \cos. m\phi + \frac{K^{(m)}}{2} \qquad (2)$$

Moltiplicandole l' una per l' altra a tenore del metodo ora posto in uso, avremo

$$\frac{HH'}{2} = 2a\left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos. m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (1)$$

$$+ 2a_1 \cos.\phi \left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos. m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (2)$$

$$+ 2a_2 \cos.2\phi \left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos. m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (3)$$

$$\vdots$$

$$+ 2a_s \cos. s\phi \left(b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_m \cos. m\phi + \frac{K^{(m)}}{2}\right) \qquad (s+1)$$

$$\vdots$$

ec.

Moltiplicando ora per $d\phi$, ed integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, è manifesto che il coefficiente di $2a_s$ nella fila qualunque $(s+1)^{esima}$ orizzontale darà dopo questa operazione per resultato $\frac{1}{2} b_s$, poichè per le condizioni precedenti si ha

$$\int \cos. s\phi . K^{(s)} \, d\phi = 0 .$$

Ma per esser sicuri che il resultato finale non sia erroneo,

convien pure esser certi (22) che tra le file verticali non passino tali relazioni da rendere illegittima quella integrazione eseguita termine per termine orizzontale. Scriviamo dunque l' Equazione precedente rendendo verticali le file orizzontali, poichè sopra di queste l' integrazione prescritta non può indurre in errore, verificata che sia la condizione

$$\int \cos.m\phi\, K^{(m)}\, d\phi = 0.$$

Facendo dunque la riduzione indicata, si avrà

$$\frac{H.H'}{2} = 2b(a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos\phi .2 + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (1)$$

$$+2b_1 \cos.\phi\ (a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (2)$$

$$+2b_2 \cos.2\phi (a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$+2b_s \cos.s\phi (a + a_1 \cos.\phi + a_2 \cos.2\phi + a_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \text{ec.}) \quad (s+1)$$

$$\vdots$$

ec.

Moltiplicando per $d\phi$, ed integrando tra i prescritti limiti ciascuna fila orizzontale, acciocchè questo resultato non differisca da quello che con altra disposizione di termini si è ottenuto, conviene che il coefficiente di $2b_s$ nella fila orizzontale $(s+1)^{esima}$ dia per resultato $\frac{1}{2} a_s$.

Se dunque sarà $Q_x^{(m)}$ il residuo della serie

$$z_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + Q_x^{(m)}$$

si avrà, facendo $L^{(m)} = Q^{(m)}_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + Q^{(m)}_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$, ed essendo come sopra $H = z_{e^{\phi\sqrt{-1}}} + z_{e^{-\phi\sqrt{-1}}}$,

$$\frac{H}{2} = a + a_1 \text{oos.}\phi + a_2 \cos.2\phi + \text{ec.} \ldots + a_m \cos.m\phi + \frac{L^{(m)}}{2}.$$

Quindi moltiplicando per $\cos.s\phi.\, d\phi$, acciò il coefficiente di

$2b_s$ nella fila orizzontale $(s+1)^{esima}$ dia dopo la integrazione per resultato il termine unico $\frac{1}{2}\, a_s$, dovrà essere ancora tra i limiti $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$

$$\frac{1}{2}\int L^{(s)} \cos. s\varphi . d\varphi = 0 .$$

Apparisce dunque che in ciascuna delle serie proposte

$$z_x = a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + a_m x^m + Q_x^{(m)}$$

$$z'_x = b + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \text{ec.} \ldots + b_m x^m + P_x^{(m)}$$

sono indispensabili le condizioni

$$\int (P^{(m)}_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + P^{(m)}_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}) \cos. m\varphi . d\varphi = 0$$

$$\int (Q^{(m)}_{e^{\varphi\sqrt{-1}}} + Q^{(m)}_{e^{-\varphi\sqrt{-1}}}) \cos. m\varphi . d\varphi = 0 .$$

Ciò è in virtù delle denominazioni adottate

$$\int K^{(m)} \cos. m\varphi . d\varphi = 0$$

$$\int L^{(m)} \cos. m\varphi . d\varphi = 0$$

essendo m un numero intero qualunque. Se alcuna di queste condizioni non avrà luogo, il metodo precedente ci condurrà senza dubbio in errore.

Sembrami superfluo l' aggiungere altri esempj, poichè parmi che le considerazioni dei numeri 14. 19, ed i criterj assegnati in quest' ultimo articolo additino abbastanza come generalmente nei casi analoghi converrà comportarsi. Piuttosto, offrendosene quì l' occasione, aggiungerò alcune riflessioni sopra quella particolare specie di integrali definiti, che abbiamo così spesso incontrati nel corso di questa Memoria.

24.

Si è veduto nel numero 17. che una delle maniere per

ridurre la funzione qualunque $F\cos.\phi$ in una serie ordinata per i coseni dei multipli di ϕ è la ricerca dell' integrale $\frac{2}{\pi}\int F\cos.\phi.\cos.m\phi.d\phi$ tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$, essendo m un numero qualunque intero, e la evoluzione sempre potrà così eseguirsi, finchè (19) quell' integrale non abbia un valore assurdo, come imaginario, o infinito. Tante sono per altro le difficoltà che quella integrazione presenta, che sovente conviene appigliarsi al metodo delle serie, e la induzione facilmente ne offre il modo, conducendoci alla serie assegnata nel numero 17. E giacchè la occasione se ne offre, ci sia permesso di trattare questo problema con una analisi differentissima da quella di semplice induzione da noi adoprata nelle *Ricerche sopra le serie*, tanto più che vedremo discenderne anche qualche non ovvio Teorema di Calcolo integrale.

25.

Sia pertanto proposta la funzione $F(m+\cos.\phi)$ da svolgersi in serie della forma indicata, in modo che si abbia

$$F(m+\cos.\phi)=A+A_1\cos.\phi+A_2\cos.2\phi+\text{ec}...+A_x\cos.x\phi+\text{ec}.$$

Ed il termine generale A_x sarà determinato dalla Equazione

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\phi)\cos.x\phi.\,d\phi$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$.

Per mezzo dei noti Teoremi che fanno dipendere le differenze finite di una funzione dai suoi differenziali, noi abbiamo, come è noto

$$F(m+\cos.\phi)=Fm-1+e^{\cos.\phi\,\frac{dFm}{dm}}$$

purchè sviluppando l' esponenziale nel secondo membro di questa Equazione, in luogo delle potenze di $\frac{dFm}{dm}$ si sostituiscano i differenziali dello stesso ordine presi rapporto ad m,

ossia purchè in luogo di $\left(\frac{dFm}{dm}\right)^n$ si ponga $\frac{d^nFm}{dm^n}$.

Potremo dunque invèce della funzione $F(m+\cos.\phi)$ considerare la quantità equivalente

$$Fm - 1 + e^{\cos.\phi \frac{dFm}{dm}}$$

e tutto per conseguenza si ridurrà a svolgere in serie la funzione $e^{\cos.\phi \frac{dFm}{dm}}$ per i coseni degli archi moltiplici di ϕ, avvertendo dopo la evoluzione di eseguire gli indicati cambiamenti sopra le potenze di $\frac{dFm}{dm}$. Facciamo dunque per semplicità maggiore $\frac{dFm}{dm} = a$, e proponghiamoci di svolgere la funzione $e^{a\cos.\phi}$ in modo che sia

$$e^{a\cos.\phi} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \text{ec.} \ldots + b_x \cos.x\phi + \text{ec.}$$

Noi avremo al solito, integrando tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$

$$b_x = \frac{2}{\pi} \int e^{a\cos.\phi} d\phi \cos.x\phi.$$

Abbiamo ora, integrando per parti

$$\int e^{a\cos.\phi} \cos.x\phi.d\phi = \frac{1}{x} \text{sen}.x\phi.\, e^{a\cos.\phi} - \frac{a}{x^2} \cos.x\phi.\text{sen}.\,\phi.e^{a\cos.\phi}$$

$$+ \frac{a}{x} \int \cos.x\phi.\cos.\phi.e^{a\cos.\phi} d\phi - \frac{a^2}{x^2} \int \cos.x\phi.\overline{\text{sen}.\phi}^2 e^{a\cos.\phi} d\phi,$$

se prenderemo quest' integrale tra i limiti $\phi = 0$, $\phi = \pi$, si avrà più semplicemente, moltiplicando tutti i termini per $\frac{2}{\pi}$, ed osservando che $\overline{\text{sen}.\phi}^2 = 1 - \overline{\cos.\phi}^2$

$$\frac{2}{\pi} \int e^{a\cos\phi} \cos.x\phi.d\phi = \frac{2}{\pi} \frac{a}{x^2} \int \cos.x\phi.\cos.\phi\, e^{a\cos.\phi} d\phi$$

$$- \frac{2}{\pi} \frac{a^2}{x^2} \int \cos.x\phi.e^{a\cos\phi} d\phi + \frac{a^2}{x^2} \frac{2}{\pi} \int \cos.x\phi.\overline{\cos.\phi}^2 e^{a\cos.\phi} d\phi$$

onde ricaveremo

$$\frac{(a^2+x^2)}{x^2}\,\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi=\frac{a}{x^2}\,\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\cos.\phi.d\phi$$

$$+\frac{a^2}{x^2}\,\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\overline{\cos.\phi}^{\,2}d\phi\,.$$

Ma abbiamo adesso

$$b_x=\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\,d\phi$$

e sarà ancora

$$\frac{db_x}{da}=\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\cos.\phi.\,d\phi$$

$$\frac{d^2b_x}{da^2}=\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\overline{\cos.\phi}^{\,2}.\,d\phi.$$

Sostituendo quindi questi valori nella Equazione precedente avremo per determinare b_x la Equazione lineare del second' ordine

$$\frac{d^2b_x}{da^2}+\frac{1}{a}\,\frac{db_x}{da}-\frac{(x^2+a^2)}{a^2}\,b_x=0$$

dalla quale dipende il coefficiente generale nella serie

$$e^{a\cos.\phi}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec.}\ldots+b_x\cos.x\phi+\text{ec.}$$

Ed il primo termine b sarà dato dalla Equazione

$$\frac{d^2b}{da^2}+\frac{1}{a}\,\frac{db}{da}-b=0.$$

26.

Tutto pertanto dipenderà dalla integrazione della Equazione

$$\frac{d^2b_x}{da^2}+\frac{1}{a}\,\frac{db_x}{da}-\frac{(x^2+a^2)}{a^2}\,b_x=0$$

per la quale non è da tentarsi altra via che quella delle serie. Per riescirvi con maggior facilità facciamovi

$$b_x=q^x\,p_x$$

essendo q funzione di a, e p_x funzione di a, e di x. Noi avremo, sostituendo

$$x^2\left(\frac{dq^2}{da^2}-\frac{1}{a^2}q^2\right)p_x+x\left[2q\frac{dq}{da}\frac{dp_x}{da}+qp_x\frac{d^2q}{da^2}+\frac{qp_x}{a}\frac{dq}{da}-p_x\frac{dq^2}{da^2}\right]$$
$$+q^2\left[\frac{d^2p_x}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dp_x}{da}-p_x\right]=0\,.$$

Facciamovi, per semplicizzarla

$$\frac{dq^2}{da^2}-\frac{1}{a^2}q^2=0$$

di cui un integrale particolare è $q=a$. Questo essendo al nostro oggetto sufficiente, avremo primieramente

$$b_x=a^x p_x$$

e sostituendo, otterremo anche la Equazione assai semplice per determinare p_x

$$\frac{d^2p_x}{da^2}+\frac{2x+1}{a}\frac{dp_x}{da}-p_x=0\,.$$

Se ora in luogo di p_x sostituiremo una serie ordinata per le potenze ascendenti di a, troveremo facilmeute dal confronto dei termini che tutte le potenze dispari mancheranno, e che se chiameremo h_{2n} il coefficiente della potenza a^{2n}, avremo per il termine generale della serie la espressione

$$h_{2n}a^{2n}=\frac{h_x}{2.4.6\ldots 2n(2+2x)(4+2x)(6+2x)\ldots(2n+2x)}a^{2n}$$

essendo h_x una costante arbitraria dipendente da x. Sarà dunque

$$p_x=h_x\left(1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}+\text{ec.}\right)$$

Ma abbiamo $\qquad b_x=a^x p_x,$

e pertanto sostituendovi il valore di p_x, avremo

$$b_x=h_x a^x\left(1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}+\text{ec.}\right)$$

ciò è

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi=h_x a^x\left(1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}+\text{ec.}\right)$$

integrando tra i limiti $\phi=0$, $\phi=\pi$.

Il valore di p_x quì sopra assegnato non è per altro completo, dovendo per esserlo, contenere due costanti arbitrarie, perchè è dedotto da una Equazione differenziale del second' ordine; ma un poco di attenzione basterà per assicurarci che l' integrale particolare trovato è per il nostro oggetto sufficiente. Se infatti considereremo la funzione $e^{a\cos.\phi}$ svolgendola in serie per le potenze di a troveremo

$$e^{a\cos.\phi} = 1 + a\cos.\phi + \frac{a^2\cos.^2\phi}{2} + \frac{a^3\cos.^3\phi}{2.3} + \ldots + \frac{a^x\cos.^x\phi}{2.3\ldots x} + \text{ec.}$$

Moltiplicando ora per $\frac{2}{\pi}\cos.x\phi.d\phi$, e prendendo l' integrale da $\phi = 0$ a $\phi = \pi$, vedremo che la quantità

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi$$

ci vien data da una serie della forma stessa che quella già trovata, poichè quando $n < x$, si ha sempre tra i limiti stessi

$$\frac{2}{\pi}\int \overline{\cos.\phi}^{n}.\cos.x\phi.d\phi = 0$$

onde sarà superfluo il completare il valore di p_x poichè così si indurrebbe nella espressione di b_x un' altra serie di forma assai diversa da quella trovata, e complicata ancora con la trascendente log. a. (si veda il calcolo integrale di Euler). Per tanto la costante che moltiplicherà questa nuova serie dovrà trovarsi $= 0$.

Riprendiamo dunque la espressione

$$b_x = \frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.d\phi = h_x a^x\left[1 + \frac{a^2}{2(2+2x)} + \frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)} + \text{ec.}\right]$$

Resta a determinarsi l' arbitraria h_x, ed a tale oggetto osserveremo che differenziando rapporto ad a il primo membro di questa Equazione, si ha per resultato

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.\phi.\cos.x\phi.\,d\phi$$

che si riduce alla forma

$$\frac{1}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.(x-1)\phi.\,d\phi+\frac{1}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.(x+1)\phi.\,d\phi$$

ed in conseguenza tanto varrà differenziare il secondo membro rapporto ad a, che variarvi prima x in $x-1$; quindi x in $x+1$, ed aggiungere i resultati, dividendone la somma per 2, e fatta questa operazione dal confronto delle simili potenze di a otterremo la equazione

$$xh_x=\frac{1}{2}h_x-1$$

dalla quale avrassi $\quad h_x=\frac{1}{2^x}\frac{c}{1.2.3\ldots x}$

essendo c una arbitraria, alla quale si ridurrà il valore di h_x quando sia $x=0$. Sostituendo sarà

$$\frac{2}{\pi}\int e^{a\cos.\phi}\cos.x\phi.\,d\phi=\frac{1}{2^x}\frac{c}{1.2.3\ldots x}a^x\left[1+\frac{a^2}{2.(2+2x)}+\text{ec.}\right]$$

nella quale facendo $x=0$, $a=0$, troveremo $c=2$.

Sarà dunque finalmente

$$b_x=\frac{a^x}{2^{x-1}1.2.3\ldots x}\left[1+\frac{a^2}{2(2+2x)}+\frac{a^4}{2.4.(2+2x)(4+2x)}\right.$$
$$\left.+\frac{a^6}{2.4.6.(2+2x)(4+2x)(6+2x)}+\text{ec.}\right].$$

E pertanto avremo così ottenuto il termine generale b_x nella serie

$$e^{a\cos.\phi}=b+b_1\cos.\phi+b_2\cos.2\phi+b_3\cos.3\phi+\text{ec.}\ldots+b_x\cos x\phi+\text{ec.}$$

27.

Abbiamo veduto (25) che dallo sviluppo della funzione $e^{a\cos\phi}$ dipende quello della funzione più generale $F(m+\cos.\phi)$ e che il termine generale di questa discende dal termine ge-

nerale di quella variandovi a in $\frac{dFm}{dm}$, e quindi ponendo in luogo di $\left(\frac{dFm}{dm}\right)^n$ il differenziale $\frac{d^nFm}{dm^n}$. Fatte dunque queste mutazioni si troverà che il termine generale dello sviluppo di $F(m+\cos.\phi)$ è dato dalla serie

$$A_x = \frac{1}{2^{x-1}1.2.3...x}\left[\frac{d^xFm}{dm^x} + \frac{1}{2(2+2x)}\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}} + \frac{1}{2.4.(2+2x)(4+2x)}\frac{d^{x+4}Fm}{dm^{x+4}} + \text{ec.}\right].$$

ed otterremo il primo termine A aggiungendo al primo termine b dello sviluppo di $e^{a\cos.\phi}$ (dopo avervi fatte le prescritte mutazioni) la quantità $Fm-1$, poichè si ha (25)

$$F(m+\cos.\phi) = Fm - 1 + e^{\cos.\phi\frac{dFm}{dm}}.$$

28.

Ci presentano le cose precedenti una particolarità assai degna di osservazione. Il termine generale nello sviluppo della funzione $F(m+\cos.\phi)$ è identico con la analoga quantità nella evoluzione della formula $e^{a\cos.\phi}$ purchè in questa si facciano le indicate variazioni. Abbiamo veduto adesso che il termine generale b_x della serie

$$e^{a\cos.\phi} = b + b_1\cos.\phi + b_2\cos.2\phi + b_3\cos.3\phi + \text{ec.}... + b_x\cos.x\phi + \text{ec.}$$

dipende dalla Equazione

$$\frac{d^2b_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{db_x}{da} - \frac{(x^2+a^2)}{a^2}b_x = 0.$$

E pertanto il termine generale A_x della serie

$$F(m+\cos.\phi) = A + A_1\cos.\phi + A_2\cos.2\phi + \text{ec.}... + A_x\cos.x\phi + \text{ec.}$$

dipenderà ancor esso dalla Equazione

$$\frac{d^2A_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dA_x}{da} - \frac{(x^2+a^2)}{a^2}A_x = 0.$$

purchè, ordinando l' integrale di questa per le potenze di a in luogo di a^n si ponga $\frac{d^n Fm}{dm^n}$; e quindi apparisce che dopo una simile convenzione sempre la quantità

$$A_x = \frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi.d\varphi$$

integrando tra i soliti limiti, sodisfarà ad una Equazione del second' ordine, e lineare, che è sempre la stessa, comunque sia Fm.

29.

Prescindiamo adesso dalla convenzione sopra stabilita, e proponghiamoci di determinare in quali casi la quantità $A_x = \frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi).\cos.x\varphi.d\varphi$ potrà sodisfare ad una Equazione differenziale lineare del second' ordine della forma

$$P\frac{d^2A_x}{dm^2} + Q\frac{dA_x}{dm} + (R-x^2)A_x = 0.$$

Supponghiamo a tale oggetto

$$z = F(m+\cos.\varphi), \qquad (1)$$

ed avremo differenziando, e per semplicità facendo $\frac{d^h Fm}{dm^h} = F^{(h)}_m$.

$$(2)\quad \left(\frac{dz}{dm}\right) = F'(m+\cos.\varphi)$$

$$(3)\quad \left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) = F''(m+\cos.\varphi)$$

$$(4)\quad \left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) = (1-\overline{\cos.\varphi}^2)F''(m+\cos.\varphi) - \cos.\varphi F'(m+\cos.\varphi).$$

Moltiplicando adesso la Equazione (3) per P, la (2) per Q, la prima per R, essendo P, Q, R funzioni di m indeterminate, ed aggiungendo la loro somma alla (4), avremo

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right) + P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dm}\right) + Rz = \qquad (K)$$

$$(1+P-\overline{\cos.\varphi}^2)F''(m+\cos.\varphi) + (Q-\cos.\varphi)F'(m+\cos.\varphi) + RF(m+\cos.\varphi)$$

abbiamo adesso per il Teorema di Taylor

$$F(m+\cos.\phi)=Fm+\cos.\phi\,\frac{dFm}{dm}+\frac{\overset{-2}{\cos.\phi}}{2}\,\frac{d^2Fm}{dm^2}+\text{ec.}$$

Sostituendo questo valore di $F(m+\cos.\phi)$ nel secondo membro della Equazione (K) troveremo che il coefficiente della potenza qualunque x^{esima} di $\cos.\phi$ è il seguente.

$$(P+1)\,\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\,\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\,\frac{d^xFm}{dm^x}.$$

Se dunque faremo qualunque sia x,

$$(P+1)\,\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\,\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

svanirà il secondo membro dell' Equazione (K) e resterà

$$\left(\frac{d^2z}{d\phi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0$$

alla quale Equazione a differenze parziali sodisfarà

$$z=F(m+\cos.\phi)$$

purche sia Fm in modo determinato che qualunque sia x abbiasi

(H) $$(P+1)\,\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\,\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\,\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

Facendo quivi $y=\frac{d^xFm}{dm^x}$, sarà $Fm=\int^x y\,dm^x$, ed y dipenderà dalla Equazione

$$(P+1)\,\frac{d^2y}{dm^2}+Q\,\frac{dy}{dm}+(R-x^2)y=0.$$

Integrando questa Equazione, avremo il valore di y, che sostituito nella formula $Fm=\int^x y\,dm^x$ ci darà Fm con $x+2$ costanti arbitrarie. E quì conviene avvertire che il valore così ottenuto conterrà nella sua espressione la costante x; ma dovendo esserne Fm indipendente, converrà determinare le costanti in modo che la x non vi apparisca.

30.

Le cose precedenti danno la soluzione del nostro quesito. Data la funzione $F(m+\cos.\phi)$, se dovrà essa sodisfare ad una Equazione a differenze parziali della forma

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0,$$

conviene che la funzione Fm sodisfaccia indipendentemente da x alla Equazione (H)

$$(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0. \qquad (H)$$

E se potremo determinare P, Q, R in modo che una tal condizione sia verificata, facendo

$$z=F(m+\cos.\varphi)=A+A_1\cos.\varphi+A_2\cos.2\varphi+ec....+A_x\cos.x\varphi+ec.$$

ove sia tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, $A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi d\varphi$, potremo sostituire quel valore di z nella Equazione

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0,$$

ed eseguita la operazione, troveremo che acciò questa Equazione sia sodisfatta indipendentemente dai differenti coseni multipli, dovrà aver luogo, qualunque sia x la Equazione (S)

$$P\frac{d^2A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0. \qquad (S)$$

E viceversa poi, data la funzione

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi.d\varphi$$

integrando tra i soliti limiti, se essa dovrà sodisfare ad una equazione della forma (S), converrà che la funzione $F(m+\cos.\varphi)$ sodisfaccia alla Equazione a differenze parziali

$$\left(\frac{d^2z}{d\varphi^2}\right)+P\left(\frac{d^2z}{dm^2}\right)+Q\left(\frac{dz}{dm}\right)+Rz=0.$$

Ma acciò il valore di $z=F(m+\cos.\varphi)$ verifichi questa Equazione, sappiamo (29) essere indispensabile la condizione (H)

$$(P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0 \qquad (H)$$

alla quale Fm deve indipendentemente da x sodisfare; quindi pure sarà indispensabile questa condizione acciò la formula

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi).\cos.x\varphi.d\varphi.$$

sia rappresentata da una Equazione della forma

$$\text{(S)} \qquad P\frac{d^2A_x}{dm^2}+Q\frac{dA_x}{dm}+(R-x^2)A_x=0\,.$$

31.

Si è per altro veduto nel numero 28 che qualunque sia Fm, la formula

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi)\cos.x\varphi.d\varphi$$

ove l' integrale è preso tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ è sempre rappresentata, qualunque sia Fm, dalla semplicissima equazione del second' ordine

$$\frac{d^2A_x}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dA_x}{da}-\frac{(a^2+x^2)}{a^2}A_x=0$$

purchè, svolto l' integrale per le potenze di a in luogo di a^n si ponga $\frac{d^nFm}{dm^n}$.

La introduzione pertanto di questo nuovo segno rende superflua la condizione (H) nel precedente articolo riportata, poichè sempre la funzione

$$\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi).\cos.x\varphi.d\varphi$$

dipenderà, qualunque sia Fm, da una semplicissima Equazione lineare del second' ordine della forma richiesta.

Quando poi la condizione (H)

$$\text{(H)} \qquad (P+1)\frac{d^{x+2}Fm}{dm^{x+2}}+Q\frac{d^{x+1}Fm}{dm^{x+1}}+(R-x^2)\frac{d^xFm}{dm^x}=0$$

sarà sodisfatta per i valori di Fm, e di P, Q, R, noi abbiamo dimostrato che alla Equazione (S)

$$\text{(S)} \qquad \frac{d^2A_x}{dm^2}+\frac{Q}{P}\frac{dA_x}{dm}+\frac{(R-x^2)}{P}A_x=0$$

sodisfarà sempre, integrando tra i soliti limiti

$$A_x=\frac{2}{\pi}\int F(m+\cos.\varphi).\cos.x\varphi.d\varphi.$$

Ma questo valore di A_x dipende qualunque sia Fm dalla Equazione assai semplice

$$\frac{d^2A_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dA_x}{da} - \frac{(a^2+x^2)}{a^2} A_x = 0$$

purchè nella evoluzione rapporto ad a si facciano i soliti cambiamenti: quindi apparisce che prevalendosi di questo algoritmo, la classe estesissima delle Equazioni (S), ove la condizione (H) è verificata, deve potersi ridurre a dipendere dalla unica Equazione

$$\frac{d^2A_x}{da^2} + \frac{1}{a}\frac{dA_x}{da} - \frac{(x^2+a^2)}{a^2} A_x = 0 .$$

Ho riportate le precedenti particolari riflessioni per mostrare di quanta utilità può essere il variar l'algoritmo, ed i segni per i progressi del Calcolo integrale, e per la trasformazione delle Equazioni differenziali, delle quali abbiamo ora veduta una classe estesissima ridotta a dipendere da una sola e semplicissima. Il rapporto che abbiamo osservato esistere tra questa, e quelle, per cui vi è una comune soluzione, deve potersi mettere in evidenza, operando direttamente con la trasformazione della variabile rapporto a cui la differenziazione è eseguita; e sembrami che questa ricerca per la sua nuovità ed importanza meriti tutta l'attenzione dei Geometri.

32.

Darò fine a questa Memoria con fare osservare che il metodo stesso di cui nel numero 25. ci siamo prevalsi per la evoluzione della funzione $F(m + \cos.\phi)$ può servire ancora per ridurre sotto una forma analoga la funzione qualunque $F(m+\phi)$. Abbiamo infatti, facendo per semplicità $\frac{dFm}{dm} = a$

$$F(m+\phi) = Fm - 1 + e^{a\phi}$$

purchè nella evoluzione dell' esponenziale $e^{a\phi}$ in luogo di a^n

pongasi $\frac{d^n Fm}{dm^n}$. Se dunque vorremo svolta in serie per i coseni degli archi multipli di φ la funzione $F(m+\varphi)$, tutto si ridurrà a sviluppare nello stesso modo l' esponenziale $e^{a\varphi}$, facendo dopo lo sviluppo le mutazioni prescritte.

Prendiamo dunque a considerare la funzione $e^{a\varphi}$ e facciamo

$$e^{a\varphi}=b+b_1\cos.\varphi+b_2\cos.2\varphi+b_3\cos.3\varphi+\text{ec}...+b_x\cos.x\varphi+\text{ec}.$$

e sarà integrando tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$

$$b_x=\frac{2}{\pi}\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi\,.$$

Noi abbiamo adesso, integrando per parti

$$\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi=\frac{\text{sen}.x\varphi}{x}\,e^{a\varphi}-\frac{a}{x}\int e^{a\varphi}\,\text{sen}.x\varphi.\,d\varphi.$$

Ed abbiamo ancora

$$\int e^{a\varphi}\,\text{sen}.x\varphi\,d\varphi=-\frac{\cos x\varphi}{x}\,e^{a\varphi}+\frac{a}{x}\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi.$$

Quindi otterremo, sostituendo,

$$\int e^{a\varphi}\cos x\varphi.\,d\varphi=\frac{\text{sen}.x\varphi}{x}\,e^{a\varphi}+\frac{a}{x^2}\cos.x\varphi.\,e^{a\varphi}-\frac{a^2}{x^2}\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi$$

onde facilmente si avrà

$$\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi=\frac{x\,\text{sen}.x\varphi}{x^2+a^2}\,e^{a\varphi}+\frac{a\cos.x\varphi}{x^2+a^2}\,e^{a\varphi}\,.$$

Se prenderemo quest' integrale tra i limiti $\varphi=0$, $\varphi=\pi$, si avrà nel caso di x pari

$$\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi=\frac{a}{x^2+a^2}\left(e^{a\pi}-1\right)$$

e se x è dispari

$$\int e^{a\varphi}\cos.x\varphi.\,d\varphi=-\frac{a}{x^2+a^2}\left(e^{a\pi}+1\right).$$

Sarà dunque ancora, essendo x pari

$$b_x=\frac{2a}{\pi}\,\frac{(e^{a\pi}-1)}{x^2+a^2}$$

e se x impari

$$b_x = -\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{x^2+a^2},$$

nel caso poi di $x=0$, essendo nella serie

$$e^{a\phi} = b + b_1 \cos.\phi + b_2 \cos.2\phi + b_3 \cos.3\phi + \ldots + b_x \cos.x\phi + \text{ec.}$$

il valore di b dato dalla Equazione

$$b = \frac{1}{\pi}\int e^{a\phi}\, d\phi$$

integrando tra i soliti limiti, troveremo

$$b = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}.$$

Quindi, sostituendo questi valori, sarà

$$e^{a\phi} = \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi + \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi -$$

$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{3^2+a^2}\cos.3\phi + \ldots + \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2n^2+a^2}\cos.2n\phi -$$

$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{(2n+1)^2+a^2}\cos.(2n+1)\phi + \text{ec.}$$

Ottenuto così lo sviluppo dell'esponenziale $e^{a\phi}$, riprendiamo la Equazione stabilita sul principio di quest' articolo

$$F(m+\phi) = Fm - 1 + e^{a\phi}$$

la quale solamente ha luogo, quando svolto l' esponenziale per le potenze di a in luogo di a^n si sostituirà $\frac{d^n Fm}{dm^n}$.

Potremo dunque in quella Equazione in luogo di $e^{a\phi}$ sostituire il suo sviluppo quì sopra assegnato, tenendo ferme le condizioni stesse; quindi sarà

$$F(m+\phi) = Fm - 1 + \frac{e^{a\pi}-1}{a\pi} - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi +$$

$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{3^2+a^2}\cos.3\phi + \ldots +$$

$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2n^2+a^2}\cos.2n\phi - \frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{(2n+1)^2+a^2}\cos.(2n+1)\phi + \text{ec.}$$

La quale espressione è una trasformata assai curiosa del teorema di Taylor.

Per darne un esempio semplicissimo, supponghiamo $Fm = m$; sarà quindi $F(m + \varphi) = m + \varphi$. Cerchiamo adesso il valore della quantità

$$\frac{2a}{\pi} \frac{(e^{a\pi} + 1)}{(2n+1)^2 + a^2}$$

che è il coefficiente generale dei coseni multipli dispari di φ. Noi possiamo metterlo sotto la forma

$$\frac{1}{\pi(2n+1)^2} \cdot 2a(e^{a\pi} + 1) \cdot \frac{1}{1 + \frac{a^2}{(2n+1)^2}}.$$

Cioè riducendo in serie per le potenze di a

$$\frac{1}{\pi(2n+1)^2}\left[4a + 2a^2\pi + 2a^3\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{2}{(2n+1)^2}\right) + \text{ec.}\right].$$

Ora per le condizioni stabilite abbiamo primieramente $a = \frac{dFm}{dm} = 1 = Fm = m$; ed in vece della potenza qualunque a^n dobbiamo sostituire $\frac{d^nFm}{dm^n}$. Pertanto la espressione superiore si ridurrà al termine unico $\frac{4}{\pi(2n+1)^2}$, e questo sarà il coefficiente di $\cos.(2n+1)\varphi$.

Consideriamo ora il coefficiente generale dei coseni multipli pari di φ che abbiamo veduto essere

$$\frac{2a}{\pi} \frac{(e^{a\pi} - 1)}{2n^2 + a^2}.$$

Operando in questa formula come abbiamo fatto nella superiore, vedremo immediatamente che il suo valore è sempre $= 0$.

Resta ad esaminarsi il solo primo termine $\frac{e^{a\pi} - 1}{a\pi}$, il quale, ridotto in serie per le potenze di a diviene

$$1 + \frac{a\pi}{2} + \frac{a^2\pi^2}{2.3} + \text{ec.}$$

che si riduce ad essere in virtù delle convenzioni stabilite

$$1 + \frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo ora questi valori nella serie precedentemente assegnata

$$F(m+\phi)=Fm-1+\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}-\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}+1)}{1+a^2}\cos.\phi+$$
$$\frac{2a}{\pi}\frac{(e^{a\pi}-1)}{2^2+a^2}\cos.2\phi-\text{ec.}$$

troveremo immediatamente a cagione di $Fm=m$; e togliendo il termine comune m

$$\phi=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\cos.\phi+\frac{\cos.3\phi}{3^2}+\frac{\cos 5\phi}{5^2}+\frac{\cos.7\phi}{7^2}+\text{ec.}\right]$$

serie che con altro metodo ho il primo esposta altrove.