SOPRA L'EQUAZIONI PRIMITIVE CHE SODDISFANNO ALL'EQUAZIONI DIFFERENZIALI TRA TRE O UN PIU' GRAN NUMERO DI VARIABILI.

RIFLESSIONI

Del Signor Pietro Paoli.

Ricevuta li 25 *Agosto* 1814.

I grandi geometri del nostro secolo hanno portata al più alto grado di perfezione la teoria delle soluzioni particolari dell' equazioni differenziali tra due variabili. Ma allorchè l'equazioni differenziali contengono tre o un maggior numero di variabili, s'ignorano in generale i mezzi di rintracciare le loro soluzioni particolari. Eppure sarebbe importantissimo di poterla scuoprire, perchè quando l'equazioni differenziali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, queste soluzioni particolari sono le sole che possano verificare l'equazioni date, se pure non si faccia qualche ipotesi per diminuire il numero delle variabili indipendenti. Si deve però osservare, che il Sig. Conte *Laplace* nelle sue eccellenti ricerche sopra le soluzioni particolari pubblicate nell'anno 1772 diede le regole necessarie per determinare in tutti i casi le soluzioni particolari dell'equazioni differenziali del prim'ordine tra tre variabili. A ciò si riduce tutto quello che fin qui si conosce, e niuno, ch'io sappia, ha procurato di estendere le medesime regole all'equazioni degli ordini superiori. Dopo molti inutili tentativi per vincere le difficoltà, che presenta la risoluzione del problema, son giunto finalmente a dedurre dai primi principj della teoria delle funzioni un metodo generale per trovar le soluzioni particolari dell'equazioni differenziali di tutti gli ordini tra un numero qualunque di variabili, o

più

più generalmente per determinare tutte l'equazioni primitive senza differenziali, non esclusa la primitiva completa quando può aver luogo, le quali soddisfanno all'equazioni differenziali date. Un tal metodo forma l'oggetto di questa memoria; ma prima di esporlo comincierò dal fare alcune riflessioni sopra l'equazioni differenziali del prim'ordine, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità, affine di ben distinguere la natura delle diverse specie di soluzioni, e la loro dipendenza da quel sistema composto di più equazioni simultanee, che dal Sig. Conte *Monge* vien chiamato l'integrale completo di questa sorta di equazioni differenziali.

1. È noto che l'equazione differenziale tra tre variabili

$$o = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x},$$

la quale non soddisfà alla condizione d'integrabilità, non ha equazione primitiva completa, finchè si riguardano le variabili x ed y come tra loro indipendenti, e la z come funzione di x ed y. Ma se si suppone una relazione qualunque tra x ed y, si potrà soddisfare alla proposta in infiniti modi, ed il sistema formato da due equazioni, che gli comprende tutti, si chiama il suo integrale completo. Il Sig. *Monge* ed io abbiamo dati varj metodi per la ricerca di questo integrale completo richiamandola all'integrazione dell'equazioni tra due sole variabili: tutti questi metodi possono ridursi al seguente. Supponghiamo y costante, e sia M il fattore che in questa ipotesi rende esatta la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x$, in modo che sia $\int M\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x = N$; ed avremo per una dell'equazioni integrali della proposta

$$o = N + F.y,$$

ove $F.y$ è una funzione arbitraria di y, perchè y è stata supposta costante. Per trovare la seconda equazione, che insieme con la prima soddisfà alla proposta, prendiamo il differenziale della prima facendo variare x ed y, ed avremo

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p + \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

la qual equazione paragonata con la proposta ci darà

$$0 = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} + Mq\,.$$

Dunque l'integrale cercato sarà rappresentato dalle due equazioni simultanee

$$0 = N + F\,.\,y$$

$$\text{(a)}\quad 0 = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial y} + Mq\,.$$

Se da queste due equazioni si elimina z, si otterrà una equazione tra x, y, $F\,.\,y$, e $\frac{\partial F}{\partial y}$, la quale si potrà prendere in luogo di una delle due equazioni integrali, per esempio della seconda. La variabile x non potrà mai mancare nella equazione proveniente dalla eliminazione, perchè altrimenti questa ci darebbe il valore di $F\,.\,y$, e questo valore essendo determinato da una equazione differenziale conterrebbe una costante arbitraria. Sostituendo il valore di $F\,.\,y$ la prima equazione sarebbe la primitiva completa della proposta, lo che è contro la nostra ipotesi, perchè abbiamo supposto che la condizione d'integrabilità non sia soddisfatta, e per conseguenza che la proposta non possa avere un integrale completo rappresentato da una sola equazione.

Invece di y si potrebbe egualmente supporre x costante, e P essendo il fattore che rende esatta la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial y} - q\right)\partial y$, e $Q = \int P\left(\frac{\partial z}{\partial y} - q\right)\partial y$, si avrebbe il medesimo integrale completo della proposta espresso sotto un'altra forma dal sistema delle due equazioni simultanee

$$0 = Q + f\,.\,x$$

$$\text{(b)}\quad 0 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial f}{\partial x} + Pp\,.$$

2. Quantunque l'equazione, che risulta dall'eliminazione di z dalle due equazioni (a), debba in generale contenere

x ed y, contuttociò può accadere che dandosi un valore conveniente alla funzione $F.y$ essa sia verificata indipendentemente da x, in modo che i termini che contengono x e quei che non la contengono si annullino separatamente. In questo caso sostituendo il valore trovato di $F.y$ le due equazioni (a) si ridurranno ad una sola, ed avremo un integrale della proposta espresso da una sola equazione, ma questa non conterrà costante arbitraria, perchè per ipotesi la proposta non ammette un integrale di questa forma.

Sia data per esempio l'equazione

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}-1-\sqrt{(z-x-y)}-(1+x-2y)\frac{\partial y}{\partial x}$$

la quale non soddisfà alla condizione d'integrabilità. Supposta y costante la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial x}-1-\sqrt{z-x-y}\right)\partial x$ diventa esatta essendo moltiplicata per $\frac{1}{\sqrt{(z-x-y)}}$, ed il suo integrale è $2\sqrt{(z-x-y)}-x$. Abbiamo adunque $M=\frac{1}{\sqrt{(z-x-y)}}$, $N=2\sqrt{(z-x-y)}-x$, e l'integrale completo è dato dalle due equazioni simultanee

$$0=2\sqrt{(z-x-y)}-x+F.y$$

$$0=\sqrt{(z-x-y)}.\frac{\partial F}{\partial y}-x+2y.$$

Eliminandone z avremo l'equazione

$$0=(x-F.y)\frac{\partial F}{\partial y}-2x+4y.$$

Se la ponghiamo sotto la forma

$$0=x\left(\frac{\partial F}{\partial y}-2\right)+4y-F.y\frac{\partial F}{\partial y},$$

è evidente che possiamo farne sparire la x ponendo $\frac{\partial F}{\partial y}=2$, cioè $F.y=2y+c$, e che il medesimo valore soddisfà al rimanente dell'equazione purchè si prenda la costante arbitraria $c=0$. Dunque facendo $F.y=2y$, le due equazioni integrali si riducono alla medesima equazione

$$0 = 2\sqrt{(z-x-y)} - x + 2y,$$

e perciò esiste un integrale particolare espresso da una sola equazione, il quale soddisfà alla proposta, e questo integrale particolare è compreso nell'integrale completo, e se ne deduce dando il valore determinato $2y$ alla funzione arbitraria $F.y$.

3. L'equazione differenziale

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial y}{\partial x}$$

non ha una equazione primitiva completa, quando la condizione

$$0 = p\left(\frac{\partial q}{\partial z}\right) - q\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

non è identica indipendentemente da una relazione qualunque tra le variabili x, y e z. Ma se non essendo identica, soddisfà però all'equazione differenziale, in questo caso ne è un integrale ma particolare, perchè non ha costante arbitraria, o piuttosto non ne è propriamente che una soluzione particolare, perchè la proposta non ha equazione primitiva completa. Nell'esempio precedente la condizione d'integrabilità diventa

$$0 = \frac{1}{2\sqrt{(z-x-y)}} \cdot [2\sqrt{(z-x-y)} - x + 2y],$$

e ci dà quella medesima relazione, che abbiamo trovato esser compresa nell'integrale completo formato da due equazioni. Lo stesso accade in molti altri casi, e ci fa conoscere l'origine di queste relazioni particolari, e la loro dipendenza dall'integrale completo. Perchè abbiamo veduto che esse hanno luogo, quando per un conveniente valor determinato della funzione arbitraria le due equazioni integrali si riducono ad una sola, cioè quando divengono affatto simili.

4. Accade contuttociò qualche volta, che la condizione d'integrabilità dia una relazione soddisfaciente all'equazione differenziale, che non sia compresa nel suo integrale completo. Così per l'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x + x\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}}{z} - \frac{z^2 - x^2}{yz} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

la condizione d'integrabilità

$$0 = \frac{x}{yz}\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}$$

ci dà la relazione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, la quale verifica la proposta. Se adesso cerchiamo l'integrale completo, lo troveremo espresso dalle due equazioni simultanee

$$0 = 3\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)^2} - x^2 + 2F \cdot y$$

$$\text{(a)} \quad 0 = z^2 - x^2 - y^2 + y\frac{\partial F}{\partial y}\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)},$$

e si vede facilmente che non è possibile di dare un valore determinato alla funzione $F \cdot y$, in modo che le due equazioni integrali si riducano ad una sola. Dunque la soluzione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ annunziata dalla condizione d'integrabilità non è compresa nell'integrale completo.

Se integrando la proposta in luogo di y si supponesse x costante, si avrebbe il medesimo integrale espresso in altro modo dalle due equazioni

$$0 = z^2 - x^2 + y^2 f \cdot x$$

$$\text{(b)} \quad 0 = y^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2x\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}$$

le quali posta $f \cdot x = -1$ si riducono all'equazione unica $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ annunziata dalla condizione d'integrabilità. Sembra dunque che l'integrale (b) sia più generale dell'integrale (a), in quanto il primo contiene la soluzione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$, che non è compresa nel secondo. Ma si potrà dedurre la medesima soluzione anche dall'integrale (a) col seguente ragionamento.

L'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{x[1 + \sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)}]}{z}$$

nella ipotesi di y costante ha per integrale completo

$$0 = 3\sqrt[3]{(z^2 - x^2 - y^2)^2} - x^2 + 2F \cdot y$$

ove $F \cdot y$ rappresenta la costante arbitraria. Siccome l'equa-

zione $z^2 - x^2 - y^2 = 0$ non è compresa nell'integrale completo, qualunque valore si dia a $F.y$, e contuttociò soddisfà all'equazione differenziale, converrà che ne sia una soluzione particolare, e questa si troverà, com'è noto, differenziando l'integrale per rapporto a z ed a $F.y$, ed eguagliando a zero il valore di $\frac{\partial z}{\partial F}$, che se ne ricava. Infatti abbiamo $\frac{\partial z}{\partial F} = \frac{\sqrt[4]{(z^2 - x^2 - y^2)}}{4z}$.

5. Può ancora succedere che la relazione data dalla condizione d'integrabilità non sia contenuta nè nell'una nè nell'altra forma dell'integrale completo. Sia data per esempio l'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - y\sqrt{(z - 2x + 3y)} + [3 - xy\sqrt[4]{(z - 2x + 3y)^3}].\frac{\partial y}{\partial x}$$

per la quale la condizione d'integrabilità annunzia la soluzione $z - 2x + 3y = 0$. L'integrale completo della proposta sarà rappresentato dal sistema dell'equazioni

$$0 = 2\sqrt{(z - 2x + 3y)} - xy + F.y$$

$$0 = \sqrt{(z - 2x + 3y)}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - x + xy\sqrt[4]{(z - 2x + 3y)}\right]$$

oppure da quello delle seguenti

$$0 = 8\sqrt[4]{(z - 2x + 3y)} - xy^2 + f.x$$

$$0 = \sqrt{(z - 2x + 3y)}\left[2y + \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y^2\right)\sqrt[4]{(z - 2x + 3y)}\right]$$

ma nè l'uno nè l'altro contiene l'equazione $z - 2x + 3y = 0$. Bisognerà dunque dedurla da ciascuno degl'integrali col metodo che *Lagrange* ha insegnato per trovare le soluzioni particolari; cioè eguagliare a zero il valore di $\frac{\partial z}{\partial F}$ ricavato dal primo, o quello di $\frac{\partial z}{\partial f}$ ricavato dal secondo.

6. *Euler* pensava che l'equazioni differenziali tra più variabili, le quali non hanno una equazione primitiva completa, non potessero esser verificate che dalle sole relazioni da-

te dalle condizioni d'integrabilità. Il Sig. *Laplace* nelle sue ricerche sulle soluzioni particolari pubblicate tra le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1772 dimostrò che questa regola non era generale coll'esempio dell'equazione

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}-1-\sqrt[3]{(z-x-y)}[y+a\sqrt[4]{(z-x-y)}-b\sqrt[3]{(z-x-y)}]-[1+x\sqrt[3]{(z-x-y)}].\frac{\partial y}{\partial x}$$

alla quale soddisfà l'equazione $z-x-y=0$, quantunque la condizione d'integrabilità non ne dia alcuno indizio. Quando questo caso ha luogo, ciascuna delle forme dell'integrale completo non conterrà la soluzione soddisfaciente, ma bisognerà dedurla da esse in forma di soluzione particolare, come dimostreremo in seguito. Intanto per darne un esempio ripigliamo l'equazione del Sig. *Laplace*

$$0=\frac{\partial \mu}{\partial x}-\sqrt[3]{\mu}(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu})-x\sqrt[3]{\mu}.\frac{\partial y}{\partial x}$$

ove per più semplicità ho posto μ in luogo di $z-x-y$. L'integrale completo di questa equazione sarà rappresentato dall'uno o dall'altro dei sistemi seguenti

$$\begin{cases} 0=\int\frac{\partial \mu}{\sqrt[3]{\mu}(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu})}-x+F.y \\ 0=\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\int\frac{\partial \mu}{\sqrt[3]{\mu}(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu})^2}\right)\sqrt[3]{\mu}(y+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu})+x\sqrt[3]{\mu} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0=\frac{3\sqrt[3]{\mu^2}}{2}-xy+f.x \\ 0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+a\sqrt[4]{\mu}-b\sqrt[3]{\mu}\right)\sqrt[3]{\mu}. \end{cases}$$

Niuno di questi sistemi comprende come integrale particolare l'equazione $\mu=0$, che si deduce però dal primo mediante l'equazione $\frac{\partial \mu}{\partial F}=0$, o dal secondo per mezzo della equazione $\frac{\partial \mu}{\partial f}=0$.

7. Vediamo adesso da che dipenda, che l'equazioni primitive soddisfacienti all'equazione differenziale $0=\frac{\partial z}{\partial x}-p-q\frac{\partial y}{\partial x}$

alcune volte siano comprese nell' integrale completo formato da due equazioni, e prendano perciò il carattere d' integrale particolare, altre volte non vi siano contenute e si presentino sotto l' aspetto di soluzioni particolari. Se $\mu = 0$ ove μ è una funzione data di x, y e z soddisfà all' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial y}{\partial x}$, soddisferà ancora all' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$ nella ipotesi di y costante. Ora in questo caso ha dimostrato il Sig. *Laplace* nella Memoria citata, che ponendo in luogo di z il suo valore in x, y e μ nell' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$ si può trasformar questa nella seguente $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n$, ove h è una funzione di x, y e μ che non diventa nè zero nè infinita quando vi si fa $\mu = 0$, n un numero positivo, e precisamente $n = 0 > 1$ se $\mu = 0$ è un integrale particolare dell' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $n < 1$ se n' è una soluzione particolare. L' equazione $\mu = 0$ soddisfarà ancora nella ipotesi di x costante all' equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, che potrà egualmente ridursi alla forma $0 = \frac{\partial \mu}{\partial y} - h'\mu^{n'}$, ove h' ed n' sono astrette alle medesime condizioni di h ed n. Pertanto riunendo le due equazioni parziali precedenti, quando si fa insieme variare x ed y, si potrà sempre trasformar la proposta $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial z}{\partial y}$ nella seguente $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n - h'\mu^{n'} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$.

Ora se ciascuno dei numeri n ed n' è uguale o maggiore dell' unità, l' equazione $\mu = 0$ sarà un integrale particolare dell' equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, e si potrà dedurre dalle loro equazioni primitive complete, quando si darà un valore determinato conveniente alle funzioni $F.y$ e $f.x$; dunque la soluzione $\mu = 0$ sarà compresa in ciascuna delle due

forme

forme (a) e (b) dell'integrale completo. Se n è uguale o maggior dell'unità, ma $n' < 1$, la soluzione $\mu = 0$ sarà un integrale particolare di $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, ed una soluzione particolare di $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$; perciò essa sarà contenuta nella forma (a) ma non nella forma (b). Finalmente se n ed n' sono ambedue < 1, $\mu = 0$ sarà soluzione particolare di $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, e $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, e non sarà compresa nè nell'una nè nell'altra forma dell'integrale completo. Quest'ultimo caso avrà sempre luogo, quando l'equazione $\mu = 0$ non è data dalla condizione d'integrabilità. Poichè il Sig. *Laplace* ha dimostrato che la condizione d'integrabilità comprenderà sempre la soluzione $\mu = 0$ quando ciascuno dei due numeri n ed n' è $= 0 > 1$; ma col medesimo ragionamento si può provare, che affinchè ciò succeda basta che la somma dei due numeri n ed n' sia maggiore dell'unità. Per conseguenza quando l'equazione $\mu = 0$ non sarà annunziata dalla condizione d'integrabilità, bisognerà che ciascuno dei due numeri n ed n' sia < 1, e saremo perciò nell'ultimo dei casi contemplati.

Non è però necessario che si conosca l'integrale completo composto di due equazioni per trovare le relazioni singolari, che sole soddisfanno alla proposta $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial y}{\partial x}$, poichè dalle riflessioni precedenti apparisce, che quest'equazioni singolari saranno per lo più comprese in quella, che rappresenta la condizione d'integrabilità, e se mai n'esiste alcuna che non vi sia contenuta, questa sarà soluzione particolare di ciascuna dell'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, ove y ed x sono respettivamente riguardate come costanti, e potremo ottenerla cercando con i metodi conosciuti le soluzioni particolari, che sono comuni a quelle due equazioni.

8. Passiamo all'equazione tra quattro variabili

$$o = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x} - r\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

la quale non soddisfaccia a tutte o ad alcuna delle tre note condizioni d'integrabilità. Supponendo y ed u costanti sia M il fattore che rende esatta la differenziale $\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x$, e sia $\int M\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right)\partial x = N$; avremo

$$o = N + F(y, u)$$

per una dell'equazioni integrali della proposta. Affine di trovar le altre che devono aver luogo insieme con essa, prendiamone il differenziale facendo variare x, y, ed u, ed otterremo

$$o = \frac{\partial z}{\partial x} - p + \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{M}\left[\left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

ed il paragone di questa con la proposta ci darà

$$o = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + Mq$$

$$o = \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + Mr.$$

Pertanto l'integrale completo della proposta sarà rappresentato dal sistema delle tre equazioni simultanee

$$o = N + F(y, u)$$

$$(c) \quad o = \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + Mq$$

$$o = \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + Mr.$$

Il Sig. *Monge* nel suo supplemento all'Analisi pubblicato tra le Memorie dell'accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1784 pensava, che ad eccezione di alcuni casi particolari tre equazioni fossero necessarie per rappresentare in generale l'integrale completo dell'equazione tra quattro variabili $o = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\,\frac{\partial y}{\partial x} - r\,\frac{\partial u}{\partial x}$. Io osservai nel sesto volume delle Memorie della Società Italiana delle Scienze, che

si poteva in tutti i casi ridurre l'equazioni (c) a due sole limitando convenientemente la generalità della funzione $F(y,u)$. Infatti se si eliminano dall'equazioni (c) le variabili x e z, si giungerà ad una equazione a differenze parziali tra y, u e $F(y,u)$, la quale potrà tener luogo di una qualunque dell' equazioni (c). Integrando questa equazione a differenze parziali avremo il valore di $F(y,u)$, il quale sostituito nell'equazioni (c) le ridurrà a due sole, perchè due di esse comporteranno la terza, o sia la terza non sarà che una combinazione delle altre due.

Sia data per esempio l'equazione

$$0=\frac{\partial z}{\partial x}-1-z+x+2y+3u-[2+x(z-x-2y-3u)^2].\frac{\partial y}{\partial x}-[3+y(z-x-2y-3u)].\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Integrandola nella ipotesi di y ed u costanti abbiamo

$$0=e^{-x}(z-x-2y-3u)+F(y,u),$$

e essendo il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità. Prendiamo il differenziale dell' equazione trovata facendo variar tutto, e paragonandolo con la proposta avremo le altre due equazioni

$$0=e^{x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)+x(z-x-2y-3u)^2$$

$$0=e^{x}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)+y(z-x-2y-3u).$$

Per diminuirne il numero eliminiamo z dalla prima e dalla terza, con che sparirà anche la x, e giungeremo all'equazione a differenze parziali $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)-yF(y,u)=0$, la quale integrata ci dà $F(y,u)=e^{yu}\phi.y$. Dopo la sostituzione di questo valore l'integrale completo della proposta sarà rappresentato dalle due equazioni simultanee

$$0=z-x-2y-3u+e^{x+yu}.\phi.y$$

$$0=x(z-x-2y-3u)^2+e^{x+yu}\left(u\phi y+\frac{\partial\phi}{\partial y}\right).$$

In luogo di una di esse si può prendere la seguente

$$0=xe^{x+yu}.\overline{\phi.y}^2+u\phi y+\frac{\partial\phi}{\partial y},$$

e questa diventa identica se si fa $\phi . y = 0$; dunque la sola equazione $0 = z - x - 2y - 3u$ soddisfà alla proposta, e ne è integrale particolare.

9. Potremmo con un ragionamento simile a quello usato al n.° 7 distinguere i diversi casi, nei quali queste speciali relazioni contenute in una sola equazione e soddisfacienti alla proposta sono comprese nell'integrale completo composto di due equazioni, come integrali particolari, o se ne deducono a guisa di soluzioni particolari. Piuttosto indicheremo il modo di ritrovare tali singolari relazioni, quando l'integrale completo non è conosciuto, lo che forma l'oggetto principale di queste ricerche. Sia dunque $\mu = 0$ una speciale relazione, che soddisfaccia all'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial y}{\partial x} - r\frac{\partial u}{\partial x}$, essa soddisfarà ancora all'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$ allorchè y ed u si riguarderanno come costanti, e perciò questa equazione sostituitovi il valore di z in x, y, u e μ si ridurrà alla forma $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n$, ove n è un numero positivo, ed h una tal funzione di x, y, u e μ, che non divenga nè zero nè infinita quando $\mu = 0$. Così l'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, $0 = \frac{\partial z}{\partial u} - r$, ove si suppongono respettivamente x ed u, x ed y costanti, ed alle quali in queste ipotesi soddisfà l'equazione $\mu = 0$, si cangeranno nelle seguenti $0 = \frac{\partial \mu}{\partial y} - h'\mu^{n'}$, $0 = \frac{\partial \mu}{\partial u} - h''\mu^{n''}$. Dunque riunendo queste parziali equazioni potremo mettere la proposta sotto la forma $0 = \frac{\partial \mu}{\partial x} - h\mu^n - h'\mu^{n'} . \frac{\partial y}{\partial x} - h''\mu^{n''} . \frac{\partial u}{\partial x}$.

Le condizioni d'integrabilità per questa equazione o sia per la proposta sono, com'è noto, le seguenti:

$$0 = (n'-n)hh'\mu^{n+n'-1} + \mu^{n+n'}\left[h\left(\frac{\partial h'}{\partial \mu}\right) - h'\left(\frac{\partial h}{\partial \mu}\right)\right] + \mu^{n'}\left(\frac{\partial h'}{\partial x}\right) - \mu^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)$$

$$0 = (n'-n'')h'h''\mu^{n'+n''-1} + \mu^{n'+n''}\left[h''\left(\frac{\partial h'}{\partial \mu}\right) - h'\left(\frac{\partial h''}{\partial \mu}\right)\right] + \mu^{n'}\left(\frac{\partial h'}{\partial u}\right) - \mu^{n''}\left(\frac{\partial h''}{\partial y}\right)$$

$$0=(n''-n)hh''\mu^{n+n''-1}+\mu^{n+n''}\left[h\left(\frac{\partial h''}{\partial\mu}\right)-h''\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)\right]+\mu^{n''}\left(\frac{\partial h''}{\partial x}\right)-\mu^{n}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right).$$

Ora se la somma di due qualunque dei numeri n, n', n'' sarà maggiore dell'unità, queste tre equazioni saranno soddisfatte da $\mu=0$. Infatti le quantità h, h', h'' svolte in una serie ascendente per le potenze di μ avranno la forma

$$h=\mathrm{H}+\mathrm{H}'\mu^{i}+\mathrm{H}''\mu^{i'}+\text{ec.}$$

ove H, H', ec. sono funzioni di x, y ed u, e gli esponenti i, i', ec. tutti positivi e crescenti. Onde apparisce che tanto le quantità h, h', h'', quanto i loro differenziali presi per rapporto ad x, y ed u non diventano infiniti quando $\mu=0$, e quindi i termini $hh'\mu^{n+n'-1}$, $\left(\frac{\partial h'}{\partial x}\right)\mu^{n'}$, $\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mu^{n}$, ed i corrispondenti nelle altre equazioni si annulleranno allorchè $\mu=0$. Ma il termine per esempio $\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)$ potrà nel medesimo caso divenire infinito se $i<1$, perchè riescirà moltiplicato per μ^{i-1}, ove l'esponente $i-1$ è negativo; contuttociò il prodotto di $\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)$ per $\mu^{n+n'}$ conterrà la potenza $\mu^{n+n'+i-1}$, ove l'esponente sarà positivo a motivo di $n+n'>1$. Pertanto anche il termine $\mu^{n+n'}\left[h\left(\frac{\partial h'}{\partial\mu}\right)-h'\left(\frac{\partial h}{\partial\mu}\right)\right]$, ed i corrispondenti nelle altre equazioni svaniranno nel caso di $\mu=0$, e le tre condizioni d'integrabilità si uniranno tutte ad indicarci la soluzione $\mu=0$.

Quando adunque la proposta ammetterà una soluzione particolare $\mu=0$, la quale non venga indicata dalle condizioni d'integrabilità, bisognerà che la somma di due dei numeri n, n', n'' sia eguale o minore dell'unità, e tanto più ciascuno di essi <1. Perciò l'equazione $\mu=0$ sarà una soluzione particolare di due dell'equazioni $0=\frac{\partial z}{\partial x}-p$, $0=\frac{\partial z}{\partial y}-q$, $0=\frac{\partial z}{\partial u}-r$, e questa si troverà se con i metodi conosciuti

si ricercheranno le soluzioni particolari, che sono comuni a due di tali equazioni, e soddisfanno alla terza.

10. In generale data l'equazione tra un numero qualunque di variabili

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - A - B\frac{\partial y}{\partial x} - C\frac{\partial u}{\partial x} - D\frac{\partial t}{\partial x} - \text{ec.}$$

la quale non ammetta una equazione primitiva completa, siccome l'equazioni esprimenti le condizioni d'integrabilità mantengono sempre una forma simile a quelle contemplate nel numero antecedente, se ne potranno dedurre conseguenze analoghe. Quindi le soluzioni particolari o ci verranno indicate dalle condizioni tutte d'integrabilità, o potranno ritrovarsi tra le soluzioni particolari di due dell'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - A$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - B$, $0 = \frac{\partial z}{\partial u} - C$, $0 = \frac{\partial z}{\partial t} - D$, ec.; in modo che la loro ricerca si ridurrà sempre a quella delle soluzioni particolari dell'equazioni tra due sole variabili.

11. Fin qui abbiamo parlato dell'equazioni, le quali non soddisfanno alle condizioni d'integrabilità; diciamo ancora una parola di quelle, che ammettono una equazione primitiva completa. Sia

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q\frac{\partial y}{\partial x}$$

una tale equazione: io comincio dall'osservare che si può giungere alla di lei primitiva completa nel modo seguente. S'integri l'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, ove y è supposta costante; l'integrale conterrà una funzione arbitraria di y, e potrà esser rappresentato dall'equazione $F(x, y, z, \phi . y) = 0$: s'integri pure l'equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, ove x si suppone costante, e l'integrale ne sia espresso da $f(x, y, z, \psi . x) = 0$: adesso si diano i valori i più generali alle funzioni $\phi . y$ e $\psi . x$, con i quali le due equazioni trovate si riducono alla mede-

sima, e questa equazione unica sarà la primitiva completa della proposta. Ciò posto se $\mu = 0$ è un integrale particolare di ambedue l'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, e $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, dando dei valori determinati alle funzioni $\phi . y$ e ψx le due equazioni $F(x, y, z, \phi . y) = 0$, $f(x, y, z, \psi . x) = 0$ si ridurranno alla medesima $\mu = 0$, e perciò questi valori determinati saranno compresi in quei più generali, i quali somministrano la primitiva completa. Dunque $\mu = 0$ sarà un caso particolare dell'equazione primitiva completa, cioè sarà un integrale particolare della proposta. Viceversa se $\mu = 0$ è una soluzione particolare della proposta, non potrà essere integrale particolare di ambedue l'equazioni $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p$, $0 = \frac{\partial z}{\partial y} - q$, ma dovrà essere soluzione particolare di una almeno di esse. Dunque cercando con le regole note le soluzioni particolari di queste, che sono tra due sole variabili, troveremo le soluzioni particolari della proposta. È facile estendere il medesimo ragionamento all'equazioni del prim'ordine tra un numero qualunque di variabili.

Le riflessioni precedenti mentre rendono evidente la connessione e dipendenza, che esiste tra l'equazioni primitive singolari dell'equazioni differenziali del prim'ordine non soddisfacienti alle condizioni d'integrabilità, ed il loro integrale completo espresso in due o più equazioni, nel medesimo tempo ci somministrano il modo di ritrovare tutte quest' equazioni singolari. Sotto questo punto di vista esse non presentano nulla di nuovo, poichè il Sig. *Laplace* ha già insegnato a trovare in qualunque caso le soluzioni particolari della equazione $0 = \frac{\partial z}{\partial x} - p - q \frac{\partial y}{\partial x}$. E quantunque egli non abbia estesi i suoi ragionamenti all'equazioni, che contengono più di tre variabili, l'applicazione n'è così ovvia, che a lui deve attribuirsi tutto il merito di questa ricerca. Ma quando si passa a cercare le soluzioni particolari dell' equazioni

del second'ordine, sulle quali fino ad ora non è stato scritto da alcuno, il problema diventa assai più difficile a motivo del numero e della forma differente delle condizioni d'integrabilità, che bisogna discutere nel caso in cui la proposta non ammette una primitiva completa. Affine di non smarrirmi in mezzo a queste difficoltà, prenderò un'altra strada, la quale si applica ancora al ritrovamento della equazione primitiva completa, qualora essa può aver luogo. Intraprendo tanto più volentieri a far qualche tentativo in questa nuova carriera, in quanto che nei differenti trattati di calcolo integrale non si trova alcuna regola per l'integrazione dell'equazioni differenziali tra tre o più variabili al di là del prim' ordine. Del resto io devo avvertire che riguardo in ogni caso il problema come risoluto, quando è ridotto alle sole difficolta, che sono proprie dell'equazioni tra due sole variabili. Ma prima di entrare in materia conviene che io rammenti alcuni principj della teorìa delle funzioni.

12. Data tra le variabili x, y e z una equazione qualunque $F(x, y, z) = 0$, segue dalla teoria delle funzioni, che avranno luogo insieme con essa l'equazioni derivate del prim' ordine

$$(a)\quad \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

e qualunque combinazione, che si faccia di esse e della proposta.

Dall'equazioni derivate del prim'ordine si deducono le seguenti del secondo

$$(b)\quad \begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \\ 0 &= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \end{aligned}$$

le

le quali sussisteranno insieme con la proposta, come pure avrà luogo qualunque combinazione, che si formi della proposta e dell'equazioni (a) e (b). E così in seguito.

13. Se nel prendere le funzioni derivate dai termini della equazione data non si riguardano le variabili x ed y come indipendenti, ma si suppone che y sia funzione di x, si giungerà in questa ipotesi all'equazione derivata

$$(a') \quad 0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Questa è ciò che si chiama una equazione differenziale ordinaria o totale, mentre quelle, che abbiamo considerate nel numero precedente, sono equazioni a differenze parziali. Ora io dico che questa equazione (a') sussisterà anch'essa nel medesimo tempo che la proposta, qualunque sia il valore della funzione $\frac{\partial y}{\partial x}$, cioè qualunque funzione di x si supponga la y. Infatti, poichè z è funzione di x ed y, ed y è riguardata come funzione di x, abbiamo $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$; sostituito il qual valore l'equazione (a') diventa

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial x},$$

e si vede chiaramente che a motivo dell'equazioni (a) essa ha luogo indipendentemente dal valore della funzione $\frac{\partial y}{\partial x}$. Sarà lo stesso di una combinazione qualunque, che si formasse della proposta e dell'equazione (a').

Dalla equazione (a') si passa nella medesima ipotesi all'equazione differenziale del second'ordine

$$(b') \quad \begin{aligned} 0 = {} & \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y^2}{\partial x^2} \\ & + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\frac{\partial z^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \end{aligned}$$

la quale ha egualmente la proprietà di sussistere nel medesimo tempo che la proposta. Poichè $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$

$\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, e sostituendo questo valore e quello di $\frac{\partial z}{\partial x}$ l'equazione (b') si cangia in

$$0 = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$$
$$+ 2\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right] \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2}$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ed è visibile che a motivo dell'equazioni (a) e (b) essa ha luogo indipendentemente dai valori delle funzioni $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Lo stesso accaderà di una combinazione qualunque, che si formasse della proposta e dell'equazioni (a') e (b'). E si potrà applicare un ragionamento simile all'equazioni differenziali del terz'ordine e dei seguenti.

14. Dal modo, con cui abbiamo dimostrate le proposizioni enunziate nel numero precedente, si deducono conseguenze importantissime per l'oggetto, che abbiamo in vista. Data una equazione differenziale del prim'ordine tra le variabili x, y, z, se esiste una equazione primitiva che gli soddisfaccia, cioè se z è realmente funzione delle variabili indipendenti x ed y, la proposta dopo la sostituzione di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ sussisterà indipendentemente dal valore della funzione $\frac{\partial y}{\partial x}$: per conseguenza ordinati i suoi termini per le potenze di $\frac{\partial y}{\partial x}$ i coefficienti di ciascuna potenza eguagliati a zero daranno altrettante equazioni, ciascuna delle quali dovrà aver luogo separatamente. Se l'equazione differenziale proposta sarà del second'ordine, dopo la sostituzio-

ne dei valori precedenti di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ sussisterà indipendentemente dai valori delle funzioni $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; pertanto se dopo di averla ordinata secondo le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ eguagliamo a zero i coefficienti di ciascun termine, avremo altrettante equazioni, che dovranno tutte aver luogo nel medesimo tempo. E così in seguito per l'equazioni differenziali degli ordini superiori. Una parte di quest'equazioni separate, alle quali giungeremo in ciascun caso, ci darà delle condizioni tra i coefficienti, le altre serviranno alla ricerca dell'equazione primitiva della proposta, e queste ultime saranno sempre tra due sole variabili, e si potranno ad esse applicare le regole conosciute.

Si vede facilmente che si può usare il medesimo metodo per l'equazioni differenziali tra un maggior numero di variabili, se non che bisogna aggiungere ai valori di $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ec. i termini, che vi sono introdotti dalle nuove variabili.

15. Facciamo l'applicazione dei principj esposti alla ricerca dell'equazioni primitive, che soddisfanno all'equazioni differenziali di tutti gli ordini; e quantunque sia noto tutto ciò che appartiene al prim'ordine pure per meglio illustrare il nostro metodo consideriamo in primo luogo l'equazione

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + A + B\frac{\partial y}{\partial x}$$

ove i coefficienti A e B sono funzioni date di x, y e z. Ponendovi in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ il suo valore $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) . \frac{\partial y}{\partial x}$ essa diventa

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B\right] . \frac{\partial y}{\partial x},$$

e se esiste una relazione tra z e le due variabili indipendenti x ed y, che gli soddisfaccia, dovranno aver luogo separata-

mente le due equazioni

$$o = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$$

$$o = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B.$$

Sia M il fattore che rende la funzione $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$ una derivata esatta, in modo che N ne sia la funzione primitiva, $N = \psi . y$ sarà l'integrale completo della prima equazione. Esso ci dà $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial y}$, e quindi $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}$, sostituito il qual valore la seconda equazione diventa

$$o = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right),$$

e da questa dobbiamo dedurre il valore della funzione $\psi . y$.

Ora se la proposta ammette una equazione primitiva completa con una costante arbitraria, sarà questa contenuta nel valore di $\psi . y$, che risulterà dalla integrazione dell'equazione precedente. Ma affinchè essa possa integrarsi, bisogna che sostituitovi il valore di z dedotto dalla equazione $N = \psi . y$ sparisca anche la x, e non vi rimangano che le due variabili y e $\psi . y$. Converrà dunque che sia

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) - B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = \phi(N, y);$$

e questa è la condizione necessaria, perchè la proposta ammetta un integrale completo.

La condizione trovata si può anch'esprimere indipendentemente dalla cognizione della funzione N. Infatti se prendiamo la funzione derivata da $\phi(N, y)$ per rapporto ad x, ricordandoci che z è una funzione di x ed y data dall'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A = o$ troveremo

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial N}\right)\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right] = \left(\frac{\partial \phi}{\partial N}\right)\left[\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\right].$$

Ora siccome l'equazione $N = \psi . y$ è l'integrale di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A = 0$ abbiamo $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$, e quindi $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ dev' essere $= 0$. Dunque ponendo in luogo di $\phi(N, y)$ il suo valore $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) - B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$ otterremo

$$0 = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - B\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) + AB\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) + A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

L'equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$ essendo differenziata per rapporto alle variabili y e z riguardate come indipendenti ci dà

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

e sostituendo questi valori nella equazione precedente si trova finalmente

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial B}{\partial x}\right) + A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) - B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right).$$

Questa condizione d'integrabilità è nota da lungo tempo, e vi si giunge in una maniera molto più semplice; ma quella che abbiamo usata ha il vantaggio di far conoscere più chiaramente la necessità della condizione, perchè si possa eseguire l'integrazione della proposta.

Se l'equazione di condizione non è identica, la proposta non potrà avere una equazione primitiva, la quale contenga una costante arbitraria. Poichè se non si può ridurre l'equazione

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

a non contenere altre variabili che y e $\psi . y$, non si potrà in generale integrarla. Contuttociò vi sono alcuni casi, nei quali un valore conveniente della funzione $\psi . y$ può soddisfargli, in quanto renda nulli separatamente i termini che con-

tengono la variabile x e quei che non la contengono. In questi casi, poichè esiste un valore di $\psi . y$, il quale soddisfà all'equazione

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

indipendentemente da x, l'equazione derivata da questa per rapporto ad x sarà soddisfatta dal medesimo valore di $\psi . y$. Ma questa equazione derivata non è che la condizione d'integrabilità; dunque la condizione deve dare il valore di $\psi . y$ dopo la sostituzione di quello di z, o sia prima della sostituzione deve avere per fattore l'equazione $N - \psi . y = 0$. Intendo generalmente per fattore di una equazione ogni funzione eguale a zero che la rende identica.

La proposta adunque, sebbene priva di equazione primitiva completa, può avere altre soluzioni meno generali comprese nell'integrale completo $N = \psi y$, e queste, allorchè hanno luogo, devono esser sempre indicate dalla condizione d'integrabilità. Ma l'integrale $N = \psi . y$ non dà tutte l'equazioni primitive, che possono soddisfare all'equazione $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$: per conoscerle tutte bisogna aggiungervi quelle che non sono comprese nel medesimo integrale completo, cioè le soluzioni particolari. Trovate con le note regole le soluzioni particolari dell'equazione $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$, quelle tra esse, che soddisfanno all'equazione $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B$, daranno altre equazioni primitive della proposta. È evidente che il discorso fatto relativamente all'equazione $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$ può applicarsi egualmente all'equazione $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B$, di cui le soluzioni particolari daranno nuove soluzioni della proposta, purchè soddisfacciano all'altra equazione $0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$.

16. Se fosse proposta l'equazione

$$0 = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + A\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + B - 2C\frac{\partial y}{\partial x} - 2D\frac{\partial z}{\partial x} - 2E\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial z}$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y e z, ponendo in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ il suo valore $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x}$, ed ordinando i termini per le potenze di $\frac{\partial y}{\partial x}$ avremmo

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + B - 2D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \\ &+ 2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - C - D\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - E\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right]\cdot\frac{\partial y}{\partial x} \\ &+ \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + A - 2E\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right]\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Dunque se esiste una equazione primitiva, che soddisfaccia alla proposta, le tre equazioni

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B$$

$$(2)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2E\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + A$$

$$(3)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - D\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - E\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - C$$

dovranno aver luogo nel medesimo tempo. Eliminandone $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ avremo l'equazione di condizione

$$0 = BE^2 - AB + C^2 + 2CDE + AD^2,$$

la quale posta sotto la forma

$$(D^2 - B)(E^2 - A) = (DE + C)^2$$

ci avverte che, quando essa ha luogo, la proposta è risolubile in fattori del primo grado.

Se l'equazione di condizione non è identica, è evidente che la proposta non può avere altre soluzioni, che quelle, le quali sono fattori della medesima condizione, perchè qualunque altra relazione non può insieme soddisfare alle tre equa-

zioni (1), (2), e (3). Se è identica, basta soddisfare alle due equazioni (1) e (2), le quali risolute diventano

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = D \pm \sqrt{(D^2 - B)}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = E \pm \sqrt{(E^2 - A)} = E \pm \frac{DE + C}{\sqrt{(D^2 - B}},$$

e la questione rientra in quella del numero precedente.

Prendiamo per esempio l'equazione

$$0 = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} - az^{2m} \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} - bz^{2n} - 2cz^{m+n} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

ove a, b, c sono quantità costanti, m ed n numeri positivi. È chiaro che ad essa soddisfà $z = 0$; vediamo come nei differenti casi si troverebbe questa soluzione, se non fosse stata avvertita. L'equazione di condizione diventa $(c^2 - ab)z^{2m+2n} = 0$, e non è identica se c^2 non è $= ab$, ma il fattore z^{2m+2n} ci avverte allora della soluzione $z = 0$. Se $c^2 = ab$, bisogna considerare le due equazioni $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \mp z^m \sqrt{a} = 0$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \mp z^n \sqrt{b} = 0$. La condizione necessaria, perchè esse somministrino una equazione primitiva completa, diventa $\sqrt{ab} \cdot (m - n) z^{m+n-1} = 0$. Questa non è identica se il numero m è diverso da n, ma il fattore z^{m+n-1} annunzia la soluzione $z = 0$, purchè sia $m + n > 1$. Se $m = n$, la proposta ha l'integrale completo $\frac{1}{(m-1)z^{m-1}} \pm x\sqrt{a} \pm y\sqrt{b} = \text{cost.}$, il quale posta la costante infinita ci dà la soluzione $z = 0$ quando $m > 1$: se poi $m < 1$ la soluzione $z = 0$ non è compresa nell'integrale completo, ma si trova cercando le soluzioni particolari dell'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \pm z^m \sqrt{a}$, o dell'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \pm z^m \sqrt{b}$. Finalmente allorchè m è diversa da n, ed $m + n < 1$, l'equazione $z = 0$ è soluzione particolare di ambedue l'equazioni $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \pm z^m \sqrt{a}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \pm z^n \sqrt{b}$.

17. Pas-

17. Passiamo all'equazioni tra quattro variabili

$$0 = \frac{\partial z}{\partial x} + A + B\frac{\partial y}{\partial x} + C\frac{\partial u}{\partial x},$$

ove A, B, C sono funzioni date di x, y, u e z. Sostituendovi il valore di $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$ essa si cangia in

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B\right] \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + C\right] \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Dunque se la proposta ha una equazione primitiva in x, y, u e z, questa equazione primitiva deve soddisfare alle tre equazioni

$$(1) \quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + A$$

$$(2) \quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + B$$

$$(3) \quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + C.$$

Sia $N = \psi(y, u)$ l'integrale completo della prima; avremo

$$\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

e sostituendo nell'equazioni (2) e (3) i valori di $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ dati dalle precedenti otterremo

$$(2') \quad 0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$(3') \quad 0 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial N}{\partial u}\right) + C\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Perchè queste due equazioni ci diano il valore di $\psi(y, u)$ con una costante arbitraria, cioè perchè la proposta abbia una primitiva completa, bisogna che la sostituzione del valore di

z dedotto dalla equazione $N=\psi(y,u)$ faccia da esse sparire anche la x. Dovrà dunque in primo luogo essere

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=F(N,y,u);$$

e poichè $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=0$ a motivo della equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)$ $-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$, sarà nulla la differenziale della funzione $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)$ $-B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$ presa relativamente ad x, cioè

$$0=\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)+AB\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right].\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Ma l'equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$ ci dà

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right);$$

dunque sostituendo questi valori nella equazione precedente, giungeremo all'equazione di condizione

$$\text{(a)}\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial B}{\partial x}\right)+A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

la quale dovrà essere identica, perchè la proposta ammetta una primitiva completa.

Nel caso, in cui la condizione trovata è identica, sia $f(y,u,\psi)=\phi.u$ l'integrale completo della equazione (2'). Ponendovi N in luogo di ψ, e facendo $f(y,u,N)=P$ per più semplicità, $P=\phi.u$ soddisfarà nel modo il più generale alle due equazioni (1) e (2); onde avremo

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=\frac{\partial\phi}{\partial u}$$

e l'equazione (3) diventerà

$$(3'')\quad o=\frac{\partial\phi}{\partial u}-\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)+C\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right),$$

dalla quale convien dedurre il valore della funzione $\phi\,.\,u$. Ma affinchè questo contenga una costante arbitraria, è necessario che dopo la sostituzione del valore di z ricavato da $P=\phi.u$ l'equazione (3'') non contenga altre variabili che u e $\phi\,.\,u$, e ciò non può accadere che quando $\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)-C\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=F'(P,u)$.

Ora poichè $\left(\frac{\partial F'}{\partial x}\right)=o$ e $\left(\frac{\partial F'}{\partial y}\right)=o$ a motivo dell'equazioni identiche $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=o$, $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)=o$, avremo in questo caso

$$o=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial u}\right)-A\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u\partial z}\right)-C\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}\right)+AC\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)-A\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$o=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial u}\right)-B\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u\partial z}\right)-C\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}\right)+BC\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)-\left[\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)-B\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right]\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Le medesime equazioni identiche ci danno

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial u}\right)-A\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial u}\right)-B\left(\frac{\partial^2 P}{\partial u\partial z}\right)=\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right);$$

dunque combinando quest' equazioni con le due precedenti troveremo altre due condizioni

$$(b)\quad o=\left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)+A\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)-C\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$(c)\quad o=\left(\frac{\partial B}{\partial u}\right)-\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)+B\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)-C\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right).$$

Le tre condizioni trovate devono essere identiche, perchè una medesima equazione primitiva contenente una costante indeterminata soddisfaccia insieme alle tre equazioni (1), (2) e (3),

e per conseguenza alla proposta, e la ricerca di tale equazione primitiva dipenderà, come abbiamo veduto, dalla integrazione di equazioni tra due sole variabili.

Ma quantunque la proposta non ammetta una primitiva completa, potrà però esser soddisfatta da altre relazioni meno generali. Supponghiamo che le condizioni (b) e (c) o una di esse non siano identiche. Nella equazione (3″) dopo l'eliminazione di z rimarrà tuttavia quella tra le variabili x o y, che corrisponde alla condizione non identica. Quindi l'equazione (3″) non ci darà il valore di $\phi . u$ con una costante arbitraria, ma alcune volte potrà soddisfarvi un valore meno generale di $\phi . u$ indipendentemente da x o da y. In questo caso il medesimo valore di $\phi . u$ soddisfarà ancora alla derivata della equazione (3″) presa relativamente ad x o ad y. Ma una tal derivata è la stessa che la condizione non identica; dunque la condizione non identica ci darà il valore particolare di $\phi . u$ dopo l'eliminazione di z, e prima della eliminazione avrà per fattore l'equazione $P - \phi . u = 0$.

In questo medesimo caso si deduca dalla soluzione particolare $P - \phi . u = 0$ il valore corrispondente di $\psi(y, u)$; esso soddisfarà all'equazione (2′) quando la condizione (a) è identica, perchè è compreso nell'integrale completo della medesima equazione (2′). Ma se la condizione (a) non è identica, la x rimarrà nella equazione (2′) dopo l'eliminazione di z, ed il valore trovato di $\psi(y, u)$ non potrà verificarla che indipendentemente da x. Dunque in vigore del solito ragionamento la soluzione particolare $N - \psi(y, u) = 0$ equivalente a $P - \phi . u = 0$ sarà fattore della condizione (a).

Dalle precedenti riflessioni si può concludere in generale, che tali relazioni singolari soddisfacienti alla proposta mancante della primitiva completa saranno sempre comprese in tutte le condizioni non identiche, ed al loro ritrovamento basterà la discussione dei fattori comuni alle condizioni non identiche, i quali soddisfanno alle tre equazioni (1), (2), e (3).

Le soluzioni della proposta, che abbiamo fin qui considerate, sono tutte comprese nell'integrale completo dell'equazione (1). Ma questa può esser soddisfatta indipendentemente dall'integrale completo anche per mezzo delle sue soluzioni particolari. E poichè i medesimi ragionamenti si applicano egualmente alle altr'equazioni (2) e (3), ne segue che per render completa la ricerca di tutte l'equazioni primitive della proposta bisogna aver riguardo anche alle soluzioni particolari di ciascuna dell'equazioni (1), (2) e (3), ed ammetter quelle che soddisfanno alle altre due. È facile il vedere che il metodo stesso si applicherà con un andamento sempre uniforme all'equazioni differenziali del prim'ordine tra un numero qualunque di variabili, qualora siano lineari per rapporto alle funzioni derivate.

18. Consideriamo adesso l'equazione

$$0 = \frac{\partial z^2}{\partial x^2} + A\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + B\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + C - 2D\frac{\partial y}{\partial x} - 2E\frac{\partial u}{\partial x} - 2F\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$- 2G\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - 2H\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} - 2I\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y, u, e z. Mettendovi in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ il suo valore $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$, ordinando i termini per le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$ e di $\frac{\partial u}{\partial x}$, ed eguagliando a zero il coefficiente di ciascun prodotto avremo le sei equazioni seguenti

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2F\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + C$$

$$(2)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2H\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + A$$

$$(3)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 - 2I\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + B$$

$$(4)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - F\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - H\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - D$$

$$(5)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - F\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - I\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - E$$

$$(6)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - H\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - I\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - G.$$

Eliminandone $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ giungeremo alle tre equazioni di condizione

$$0 = CH^2 - AC + D^2 + 2DFH + AF^2$$
$$0 = CI^2 - BC + E^2 + 2EFI + BF^2$$
$$0 = AI^2 - AB + G^2 + 2GHI + BH^2.$$

Quest' equazioni sono quelle stesse, che devono aver luogo, perchè la proposta sia risolubile in fattori del primo grado. Se esse non sono identiche, la proposta non potrà avere altre soluzioni, che quelle, le quali sono fattori comuni alle medesime condizioni.

Se sono identiche, la ricerca dell' equazione primitiva della proposta dipende da quella della primitiva, che soddisfà all' equazioni (1), (2), (3), perchè le tre condizioni tengon luogo dell' equazioni (4), (5), e (6). L' equazioni (1), (2), e (3) risolute diventano

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = F + \sqrt{(F^2 - C)}$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = H + \sqrt{(H^2 - A)}$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = I + \sqrt{(I^2 - B)}$$

e tutto si riduce al caso contemplato nell' articolo precedente.

19. Passiamo all' equazione del second' ordine

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + C\frac{\partial y}{\partial x} + D$$

lineare per rapporto alle funzioni derivate, ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y e z. Ponendovi $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$, e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ in luogo di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ essa diventerà

$$0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+D+\left[2\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+C\right]\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$
$$+\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)\cdot\frac{\delta y^2}{\delta x^2}+\left[\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+A\right]\cdot\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}.$$

Eguagliando a zero i coefficienti delle funzioni $\frac{\delta y}{\delta x}$, $\frac{\delta y^2}{\delta x^2}$, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ avremo quattro equazioni

$$(1)\quad 0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x^2}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+D$$
$$(2)\quad 0=2\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)+B\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+C$$
$$(3)\quad 0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)$$
$$(4)\quad 0=\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)+A.$$

Siccome due equazioni bastano per giungere all'equazione primitiva della proposta, avremo due equazioni di condizione, che troveremo col mezzo dell'eliminazione nel modo seguente. Prendiamo nell'equazione (4) le funzioni derivate relativamente ad y, ed avremo $0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$ $=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)-A\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$, e sostituendo il valore di $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta y^2}\right)$ nella (3) troveremo la prima condizione

$$(a)\quad 0=\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)-A\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right).$$

Prendendo nella medesima equazione (4) le funzioni derivate relativamente ad x avremo $0=\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)+\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$, e sostituendo i valori di $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x\delta y}\right)$ e $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$ nella (2) otterremo

$$(2')\quad 0=2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)+AB-C.$$

E poichè questa equazione dev'esser d'accordo con l'equazione (1), se sostituiamo nella seconda il valore di $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$ pre-

so dalla prima, avremo un'altra equazione di condizione. Facendo per più semplicità $\frac{C-AB-2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)}{2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)}=P$, questa equazione di condizione sarà

$$(b)\quad 0=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)+P\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+BP+D.$$

Se le due condizioni (a) e (b) non sono ambedue identiche, bisognerà cercarne i fattori, e quei tra loro che soddisfanno all'equazioni (1) e (4) ci daranno altrettante soluzioni della proposta, e le sole che possa ammettere, se si prescinde da quelle, le quali sono soluzioni particolari dell'equazioni (4) e (2'). Per comprendere la ragione di questa distinzione basta riflettere, che siamo giunti alle condizioni (a) e (b) prendendo le funzioni derivate dall'equazioni (4) e (2'). Ora sappiamo che ogni integrale particolare di queste soddisfà a tutte le loro equazioni derivate, ma non è lo stesso delle soluzioni particolari, le quali in generale non soddisfanno alle loro equazioni derivate del second'ordine. Quindi ogni integrale particolare dell'equazioni (4) e (2'), che soddisfà all'equazioni (1), (2) e (3), dovrà ancora soddisfare alle condizioni (a) e (b). Ma una soluzione particolare di una delle due equazioni (4) e (2'), quantunque soddisfaccia all'equazioni (1), (2) e (3), potrà non verificare le condizioni (a) e (b). Per darne un esempio supponghiamo che A sia $=y\sqrt{z}$, che B non diventi infinita quando $z=0$, e C e D siano nulle nel medesimo caso: l'equazione (4) avrà la soluzione particolare $z=0$, ed è evidente che $z=0$ soddisfà alle tre equazioni (1), (2) e (3), e per conseguenza alla proposta, ma non verifica la condizione (a). Pertanto dopo di avere esaminati i fattori di quelle tra le condizioni (a) e (b) che non sono identiche fa d'uopo tentare ancora le soluzioni particolari dell'equazioni (4) e (2'), la ricerca delle quali soluzioni particolari non presenta alcuna difficoltà.

Allorchè le condizioni (a) e (b) sono identiche, si cercherà

cherà l'equazione primitiva della (4), e siccome x vi è riguardata come costante, l'equazione primitiva, di cui si tratta, conterrà una funzione arbitraria di x che chiameremo $\psi . x$. Sostituendo il valore, che ci dà la predetta primitiva, nella (2') ne dedurremo il valore di $\psi . x$, il qual essendo determinato da una equazione differenziale del prim'ordine non potrà contenere che una costante arbitraria. Se adunque la proposta ammette una primitiva completa, si dovrà determinare il valore di $\psi . x$ dalla equazione (1), che essendo differenziale del second'ordine potrà darcelo con due costanti indeterminate. Ma questo valore di $\psi . x$ non potendo nella sua generalità soddisfare all'equazione (2'), la quale deve pure aver luogo, bisognerà che in questo caso l'equazione (2') sussista indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Avremo dunque le nuove condizioni

$$(c) \quad 0 = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right), \qquad (d) \quad 0 = C - AB - 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right).$$

La seconda determina il coefficiente C, la prima paragonata con la condizione (a) ci dà $0 = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$, e per conseguenza ci avverte che A non deve contenere nè y nè z, ma esser semplicemente funzione di x.

20. Ciò posto l'equazione primitiva della (4) sarà

$$z + Ay = \psi . x.$$

Se ne deduce $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x} - y\frac{\partial A}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$, e dopo la sostituzione di questi valori l'equazione (1) diventa

$$(1') \quad 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial \psi}{\partial x} + D - y\left(B\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right).$$

Acciò questa equazione possa essere completamente integrata, bisogna che la sostituzione di $\psi . x - Ay$ in luogo di z ne faccia sparire la y, in modo che non vi rimangano altre variabili che x e $\psi . x$. È dunque necessario che sia in tal caso

$$B = F(x, z + Ay)$$

$$D - y\left(B\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) = f(x, z + Ay).$$

Potremo esprimere queste condizioni nel modo ordinario per mezzo delle differenze parziali dei coefficienti; poichè le funzioni derivate dai loro secondi membri relativamente ad y dovendo svanire a motivo dell'equazione (4), dovranno ancora esser nulle le medesime funzioni derivate dai primi membri, e quindi

$$\text{(e)} \quad 0 = \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

$$\text{(f)} \quad 0 = \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Bisogna che quest'equazioni siano ambedue identiche, perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa.

21. Se la sostituzione di $\psi . x - Ay$ in luogo di z nell'equazione (1') non ne fa sparire la variabile y, cioè se le condizioni (e) ed (f) non sono identiche, può accadere che divisa l'equazione (1') in due parti, una delle quali contenga ψ ed x, e l'altra ψ, x ed y, un medesimo valor di ψ renda nulla l'una e l'altra parte: ma questo valore e per conseguenza l'equazione primitiva della proposta, che se ne ricava, non potrà avere che una costante arbitraria. In questo caso poichè l'equazione (1') è soddisfatta qualunque sia y, se ne prendiamo le funzioni derivate per rapporto ad y avremo

$$\text{(1'')} \quad 0 = \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right] . \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$
$$- y\frac{\partial A}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right]$$

e questa equazione (1'') dovrà sussistere nel medesimo tempo che l'altra (1'). Ma affinchè il valore di ψ contenga una costante arbitraria, conviene che dopo la sostituzione del valore di z l'equazione (1'') non comprenda altre variabili che x e ψ. Dunque dovrà essere

$$\frac{\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - y\frac{\partial A}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right]}{\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)} = F'(x, z + Ay)$$

oppure sotto un'altra forma chiamando M il numeratore ed N il denominatore della frazione precedente

$$(g)\quad 0 = N\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) - AN\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right) - M\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) + AM\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

22. Se la funzione $\frac{M}{N}$ dopo la sostituzione del valore di z contiene tuttavia y, cioè se l'equazione (g) non è identica, succede alcune volte che si possa soddisfare all'equazione $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{M}{N} = 0$ con un valore di ψ, il quale renda nulli separatamente i termini che contengono y, e quei che non la contengono. In questo caso l'equazione che si ottiene col prender le funzioni derivate dall'equazione $\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{M}{N} = 0$ relativamente ad y, cioè l'equazione (g) deve aver luogo. Se il valore di ψ, che ci dà, soddisfà ancora all'equazione (1'); ci somministrerà una soluzione della proposta ma molto particolare, perchè non conterrà alcuna costante arbitraria. È evidente che questa soluzione sarà fattore della condizione (g).

Per illustrare con esempj questi differenti casi consideriamo in primo luogo l'equazione

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + 3x\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{z + x^2 y}{x^2}.$$

Le condizioni (a), (c), (d), (e), (f) sono tutte identiche; dunque la proposta ha l'equazione primitiva completa $z + x^2 y = \psi . x$, e $\psi . x$ è determinata dall'equazione

$$0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\psi,$$

la quale ci dà $\psi = x(c + c' \log . x)$, c e c' essendo due costanti indeterminate; e quindi $z + x^2 y = x(c + c' \log . x)$.

Sia data in secondo luogo l'equazione

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (y^3 - 2)\frac{\partial z}{\partial x} + x(xy^3 - 2x + 4)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ (2x - 3x^2)y^4 - 3y^3 z + (2 - 4x - 3x^2)y - 3z.$$

L'equazioni (a), (c) e (d) sono identiche, ma le (e) ed (f) non

lo sono; dunque la proposta non ha una equazione primitiva completa. Ma poichè la condizione (g) è identica, la proposta può avere una soluzione, che contenga una costante indeterminata. Per trovarla qualora esista, esaminiamo l'equazioni

$$(1')\quad 0=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+(y^3-2)\frac{\partial\psi}{\partial x}-3(x^2y^4+2y^3+x^2y+z)$$

$$(1'')\quad 0=3y^2\frac{\partial\psi}{\partial x}-9y^2(z+x^2y),$$

ove la seconda è la differenziale della prima relativamente ad y. Sostituito il valore di z l'equazione (1'') ci dà $\frac{\partial\psi}{\partial x}=3\psi$, onde si deduce $\psi=ce^{3x}$, e rappresentando il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità e c una costante indeterminata. E siccome questo valore di ψ soddisfà all'equazione (1'), ne segue che la proposta ha l'equazione primitiva $z+x^2y=ce^{3x}$.

Sia proposta finalmente l'equazione

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{y^2-2}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x(y^3+2)\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{2z}{x^2}-2y^3$$
$$+(z-x^2+2)y^4+x^2y^5.$$

Le condizioni (a), (c) e (d) sono identiche, ma le condizioni (e), (f) e (g) non lo sono; dunque la proposta non ha equazione primitiva, che contenga due costanti indeterminate, o una solamente. Restano a considerarsi l'equazioni (1') e (g), che in questo caso sono

$$(1')\quad 0=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{y^2-2}{x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{2z}{x^2}+2y-2y^3+(z-x^2)y^4+x^2y^5.$$

$$(g)\quad 0=\frac{12y^4}{x}(z+x^2y-x^2).$$

La seconda ci dà $\psi=x^2$, e siccome questo valore soddisfà anche alla prima, la proposta ha la soluzione $z+x^2y=x^2$.

23. Ritornando all'equazione generale supponghiamo che le condizioni (a) e (b) essendo identiche le condizioni (c) e (d) non siano tali, in modo che l'equazione (2') non sia soddisfatta indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$: in questo caso

la proposta non avrà una equazione primitiva completa, ma potrà avere altre soluzioni meno generali, che si troveranno nel modo seguente. A motivo della condizione (a) la funzione $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A$ essendo moltiplicata per $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$ diventa una funzione derivata esatta, perchè $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$ è la funzione derivata da A relativamente ad y: pertanto $A=\psi.x$ è l'equazione primitiva completa dell'equazione (4). Se ne deduce $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)=\frac{\partial \psi}{\partial x}$, e sostituito il valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ l'equazione (2') diventa

$$(2'')\quad 0=2\frac{\partial \psi}{\partial x}+AB-C.$$

Ora acciò questa ci dia il valore di ψ con una costante arbitraria, bisogna che la sostituzione del valore di z ricavato dall'equazione $A=\psi.x$ faccia sparire y dalla quantità $AB-C$, in modo che questa quantità si riduca a non esser funzione che di x e ψ. È dunque necessario che sia $AB-C=f(x,A)$, e quindi prendendo le funzioni derivate relativamente ad y giungeremo all'equazione identica

$$(h)\quad 0=A\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)-A^2\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right).$$

24. Quantunque la sostituzione del valore di z non faccia sparire y dalla quantità $AB-C$, può accadere però che si soddisfaccia all'equazione (2'') con un valore conveniente di ψ, in quanto renda nulli separatamente i termini indipendenti da y, e quei che contengono questa variabile. In tal caso l'equazione (2'') avendo luogo qualunque sia y, l'equazione che se ne forma con prender le funzioni derivate relativamente ad y, cioè l'equazione (h), dovrà egualmente sussistere. Pertanto la soluzione ci sarà data da quel fattore della condizione (h), il quale soddisfà all'equazione (2'').

Nel percorrere questi differenti casi non abbiamo ancora ottenute tutte le soluzioni, che può aver la proposta. Restano a considerarsi quelle, che sono soluzioni particolari dell' equazione (4) ed insieme soddisfanno alle altre tre equazioni, oppure sono soluzioni particolari dell' equazioni (1), o (2') e nel medesimo tempo verificano le altr' equazioni (1), (2), (3) e (4). Ma la ricerca di queste soluzioni particolari non presenta alcuna difficoltà, e dipende dai metodi conosciuti, perchè l'equazioni (1), (2') e (4) sono equazioni derivate tra due sole variabili.

Segue dall' analisi precedente che, quando alla proposta corrisponde una equazione primitiva completa, si trovano facilmente l' equazioni primitive singolari, poichè tutto si riduce a cercare le soluzioni particolari dell' equazioni (1) e (4): ma allorchè la proposta non ha una primitiva completa, conviene esaminar molti casi per trovare l' equazioni primitive singolari, che essa può avere. Questa differenza ha luogo in generale, ma la stessa analisi, come negli esempj precedenti, ci somministrerà sempre con un andamento uniforme le condizioni d' integrabilità, che converrà discutere in ciascun caso, senza che siamo obbligati di cercarle altrove.

25. Il medesimo metodo applicato all' equazioni lineari del second' ordine tra un numero qualunque di variabili non ci presenterà alcuna nuova difficoltà. Consideriamo l' equazione tra quattro variabili

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial z}{\partial x} + C\frac{\partial y}{\partial x} + F\frac{\partial u}{\partial x} + D.$$

Sostituendovi il valore di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ che in questo caso è $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ $+ 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right).\frac{\partial y}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u}\right).\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial u}\right).\frac{\partial y}{\partial x}.$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e quello di $\frac{\partial z}{\partial x}$ $= \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).\frac{\partial u}{\partial x}$, ordinando i termini per

le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, ed eguagliando a zero il coefficiente di ciascun prodotto troveremo l'equazioni

$$(1)\quad 0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + D$$

$$(2)\quad 0 = 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C$$

$$(3)\quad 0 = 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial u}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + F$$

$$(4)\quad 0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$(5)\quad 0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial u}\right)$$

$$(6)\quad 0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$$

$$(7)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + A$$

$$(8)\quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + E$$

le quali tutte devono insieme sussistere.

Se dall' equazioni (7) e (8) prendiamo i valori di $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)$, e li sostituiamo nelle (4), (5) e (6) avremo l'equazioni di condizione

$$(a)\quad 0 = \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) \qquad (b)\quad 0 = \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) - E\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$(c)\quad 0 = \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) \qquad (d)\quad 0 = \left(\frac{\partial E}{\partial u}\right) - E\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right).$$

Di queste la terza è compresa nelle due prime: infatti l'equazioni identiche (a) e (b) ci danno

$$0 = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial u}\right) - A\left(\frac{\partial^2 A}{\partial u \partial z}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2$$

$$0=\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y \delta u}\right)-E\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y \delta z}\right)-\left(\frac{\delta E}{\delta y}\right)\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

$$0=\left(\frac{\delta^2 A}{\delta u \delta z}\right)-E\left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)-\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$

ed eliminate da queste le funzioni derivate seconde

$$0=\left(\frac{\delta A}{\delta u}\right)-E\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)-\left(\frac{\delta E}{\delta y}\right)+A\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right);$$

pertanto la condizione (c) è una conseguenza delle condizioni (a) e (b).

Prendiamo adesso i valori di $\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta z}{\delta u}\right)$, $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta y}\right)$, $\left(\frac{\delta^2 z}{\delta x \delta u}\right)$ dalle medesime equazioni (7) e (8), e sostituiamoli nelle (2) e (3); queste si cangeranno nelle seguenti

$$(2')\quad 0=2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)+AB-C$$

$$(3')\quad 0=2\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right)\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)+2\left(\frac{\delta E}{\delta x}\right)+BE-F.$$

E poichè quest'equazioni devono esser d'accordo tra loro e con l'equazione (1), eliminandone $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$ otterremo due nuove condizioni

$$(e)\quad 0=P\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right)+2\left(\frac{\delta E}{\delta x}\right)+BE-F$$

$$(f)\quad 0=\left(\frac{\delta P}{\delta x}\right)+P\left(\frac{\delta P}{\delta z}\right)+BP+D,$$

ove $P=\dfrac{C-AB-2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)}{2\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)}$.

26. Supponghiamo in primo luogo che la proposta abbia una equazione primitiva completa. Con un ragionamento simile a quello del n.° 19 si dimostrerà, che in questo caso l'equazioni (2') e (3') devono aver luogo indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)$, e per conseguenza è necessario che sia

$$0=\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right),\ 0=\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right),\ 0=C-AB-2\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right),\ 0=F-BE-2\left(\frac{\delta E}{\delta x}\right).$$

Le due ultime condizioni determinano li coefficienti C ed F, le due prime paragonate con le precedenti (a), (b), (c), (d) ci avvertono che A ed E sono semplici funzioni di x. Ciò posto l' equazione (7) integrata ci dà $z + Ay = \phi(x, u)$, e sostituito il valore di z la (8) diventa $\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\right) + E = 0$, onde si deduce $\phi + Eu = \psi . x$; pertanto l'equazione

$$z + Ay + Eu = \psi . x$$

soddisfà nel modo il più generale all'equazioni (7) e (8). Se ne ricava $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial\psi}{\partial x} - y\frac{\partial A}{\partial x} - u\frac{\partial E}{\partial x}$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$, e sostituiti questi valori la (1) si cangia in

$$(1') \quad 0 = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial\psi}{\partial x} + D - y\left(B\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - u\left(B\frac{\partial E}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right)\right).$$

Affinchè questa possa avere una equazione primitiva con due costanti indeterminate, è necessario che la sostituzione di $\psi . x - Ay - Eu$ in luogo di z ne faccia sparire le variabili y ed u. Bisognerà dunque che sia

$$B = F(x, z + Ay + Eu)$$

$$D - y\left(B\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - u\left(B\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}\right) = f(x, z + Ay + Eu).$$

E poichè le funzioni derivate dai secondi membri relativamente ad y ed u svaniscono a motivo dell'equazioni (7) e (8), le medesime condizioni si potranno esprimere nel modo seguente

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial u}\right) - E\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)$$

$$0 = \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B\frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$0 = \left(\frac{\partial D}{\partial u}\right) - E\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) - B\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}.$$

Quando queste condizioni sono identiche, l'equazione (1') sarà integrabile completamente, ed il valore di $\psi . x$, che ci

darà, posto nell'equazione $z + Ay + Eu = \psi . x$ fornirà l'equazione primitiva completa della proposta.

Ma se la sostituzione del valore di z non fa sparire le variabili y ed u dall'equazione (1'), può avvenire che si soddisfaccia alla medesima con un valore meno generale di $\psi . x$, il quale renda nulli separatamente i termini indipendenti da y e da u, e quei che contengono y ed u. In questi casi l'equazioni, che si formeranno con prendere dall'equazione (1) le funzioni derivate prime o seconde relativamente ad y o ad u, dovranno aver luogo nel medesimo tempo che l'equazione (1'); e col loro mezzo si troverà l'equazione primitiva con una sola costante indeterminata o senza costante, che soddisfà alla proposta nel modo stesso praticato per l'equazione tra tre variabili (num.^{i} 21 e 22).

27. Ponghiamo adesso che, le condizioni (a), (b), (c), (d), (e) ed (f) avendo luogo, le due equazioni (2'), (3'), o una di esse non siano soddisfatte indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Moltiplicando l'equazione (7) per $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$ abbiamo $0 = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial A}{\partial y}$ a motivo della condizione (a), e quindi $A = \phi(x, u)$. Se ne deduce $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)$, e l'equazione (8) diventa $0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial u}\right) + E\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$ cioè $0 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)$ a motivo della condizione (b); perciò $\phi(x, u) = \psi . x$. Pertanto $A = \psi . x$ è l'equazione primitiva la più generale, che soddisfaccia all'equazioni (7) e (8). Se ne prendiamo il valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, e lo sostituiamo nella (2'), essa diventerà

$$(2'') \quad 0 = 2\frac{\partial \psi}{\partial x} + AB - C,$$

e sopra questa faremo ragionamenti analoghi a quelli dell'articolo 23; avendo riguardo alla nuova variabile u.

28. Proponghiamoci adesso di trovare l'equazioni primitive di una equazione differenziale del second'ordine, in cui le funzioni derivate non siano lineari, considerando la seguente

$$0=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+B\frac{\partial z^2}{\partial x^2}+C\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+D\frac{\partial y^2}{\partial x^2}+E\frac{\partial z}{\partial x}+F\frac{\partial y}{\partial x}+G$$

ove i coefficienti A, B, ec. sono funzioni date di x, y e z.

Sostituendo in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e di $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i loro valori, ed eguagliando a zero i coefficienti di $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ avremo le quattro equazioni

$$(1)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+E\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+G$$

$$(2)\quad 0=2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)+2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+C\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+E\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+F$$

$$(3)\quad 0=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+D$$

$$(4)\quad 0=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+A$$

ciascuna delle quali deve sussistere.

L'ultima differenziata relativamente ad y ci dà $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$ $=-\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$, e sostituendo questo valore come pure quello di $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ nella (3) avremo l'equazione di condizione

$$(a)\quad 0=\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-A^2B+AC-D.$$

Dalla medesima equazione (4) differenziata relativamente ad x si deduce $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, e l'equazione (2) dopo la sostituzione dei valori di $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ diventa

$$(2')\quad 0=\left[2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)+2AB-C\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)+AE-F.$$

E poichè questa equazione dev'esser d'accordo con l'equazione (1), se eliminiamo da esse $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, avremo una nuova equazione di condizione. Facendo per più semplicità $\frac{F-AE-2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)}{2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)+2AB-C}=P$, questa equazione di condizione sarà

$$(b)\quad 0=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)+P\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)+BP^2+EP+G.$$

Se ambedue l'equazioni (a) e (b) non sono identiche, bisognerà cercare i loro fattori, e quei che soddisfanno all'equazioni (4) e (2') ci daranno altrettante equazioni primitive della proposta, e le sole che la proposta possa ammettere, se si prescinda da quelle, le quali sono soluzioni particolari dell'equazioni (4) e (2'). (Si veda il n.° 19).

29. Ponghiamo adesso che le condizioni (a) e (b) siano identiche, e di più che l'equazione (2') sia soddisfatta indipendentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, lo che è necessario perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa. In questo caso avremo due nuove condizioni

$$(c)\quad 0=2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)+2AB-C,\qquad (d)\quad 0=2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)+AE-F,$$

e poichè le tre condizioni (a), (c), (d) tengon luogo dell'equazioni (2) e (3), non rimarrà che a soddisfare alle altre (1) e (4). Sia $N=\psi.x$ l'equazione primitiva completa dell'ultima; avremo

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Prendendo da questa i valori di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, e sostituen-

doli nella equazione (1) otterremo

$$(1') \quad 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + P \frac{\partial \psi^2}{\partial x^2} + Q \frac{\partial \psi}{\partial x} + R,$$

ove sarà

$$P = \frac{B}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2}$$

$$Q = E - 2P\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - 2\frac{\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}$$

$$R = G\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) - Q\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - P\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}\right).$$

Affinchè l'equazione (1') possa darci il valore della funzione $\psi . x$ con due costanti arbitrarie, bisogna che la sostituzione del valore di z preso dall'equazione $N = \psi . x$ ne faccia sparire anche la y, e questo non può accadere che quando le quantità P, Q ed R sono ciascuna funzioni di x e di N. Tali sono le condizioni necessarie, perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa.

30. Tali condizioni si possono esprimere anche senza conoscere la funzione N. Infatti la differenziale presa per rapporto ad y di ogni funzione di x e di N essendo eguale a zero a motivo della equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right) = 0$, la stessa differenziale relativa ad y di ciascuna delle quantità P, Q ed R dovrà essere nulla. Pertanto, se ci rammentiamo che z è una funzione di x ed y data dall'equazione $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -A$, avremo l'equazioni identiche

$$0 = \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)\right] + \left[2\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right) - B\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]$$
$$- \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial^3 N}{\partial y \partial z^2}\right) - A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial z^3}\right)\right]$$

$$0 = \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) - 2P\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) + 2AP\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right)\right]$$

Fig. 1

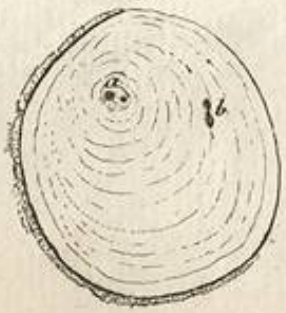


Fig. 2

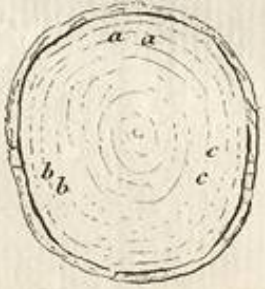


Fig. 3.

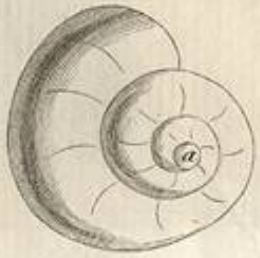


Fig. 4.

Fig. 5.

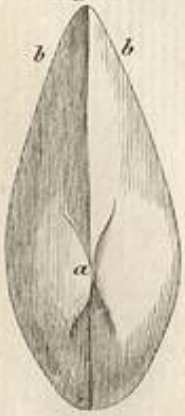
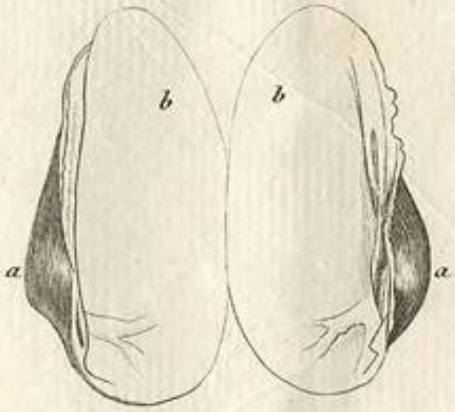


Fig. 6.



$$-2\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial z^2}\right)\right]+2\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]$$

$$0=\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)\right]+G\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]$$

$$-\left[Q+2P\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)\right]-\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial y}\right)+A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial z}\right).$$

Se adesso differenziamo l' equazione identica $\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)=0$ per rapporto alle variabili x, y, e z riguardandole come indipendenti tra loro, avremo

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x^2\partial z}\right)=2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial y\partial z}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial z^2}\right)=\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^3 N}{\partial y\partial z^2}\right)-A\left(\frac{\partial^3 N}{\partial z^3}\right)=2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right).$$

Sostituendo questi valori e quei di P e Q nell' equazioni precedenti avremo le tre condizioni cercate

$$\text{(e)}\quad 0=\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)-B\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right)$$

$$\text{(f)}\quad 0=\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)-2B\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)-2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x\partial z}\right)$$

$$\text{(g)}\quad 0=\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)-A\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)+G\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-E\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right).$$

31. Per confermare i resultati ottenuti applicherò alla ricerca delle medesime condizioni il bel metodo proposto da *Lagrange* nelle sue lezioni sul calcolo delle funzioni. Coerentemente ai principj di questo metodo, se facciamo

$$f(x,y,z,y',z',y'',z'')=z''+Ay''+Bz'^2+Cy'z'+Dy'^2+Ez'+Fy'+G$$

ove secondo la notazione di *Lagrange* $z'=\frac{\partial z}{\partial x}$, $z''=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ec.,

otterremo le condizioni necessarie perchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa eliminando M dalle tre equazioni

$$0 = f'(y) + Mf'(z) + M'f'(z') + M''f''(z'')$$
$$0 = f'(y') + Mf'(z') + 2M'f'(z'')$$
$$0 = f'(y'') + Mf'(z'').$$

Secondo la medesima notazione

$$f'(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = y''\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) + z'^2\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) + y'z'\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right) + y'^2\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right) + z'\left(\frac{\partial E}{\partial y}\right) + y'\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)$$

$$f'(z) = y''\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) + z'^2\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) + y'z'\left(\frac{\partial C}{\partial z}\right) + y'^2\left(\frac{\partial D}{\partial z}\right) + z'\left(\frac{\partial E}{\partial z}\right) + y'\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

$$f'(y') = Cz' + 2Dy' + F, \qquad f'(y'') = A,$$
$$f'(z') = 2Bz' + Cy' + E, \qquad f'(z'') = 1.$$

Ciò posto la terza equazione ci dà $M = -A$, e quindi

$$M' = -\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) - y'\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) - z'\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right), \quad M'' = -\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - 2y'\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}\right)$$
$$-2z'\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}\right) - y'^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\right) - 2y'z'\left(\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial z}\right) - z'^2\left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right) - y''\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right) - z''\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right).$$

Sostituiti i valori di M e di M' nella seconda equazione, essa diventa

$$0 = F - AE - 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + \left[C - 2AB - 2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\right]z' + \left[2D - AC - 2\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)\right]y'.$$

Ora affinchè la proposta possa avere una equazione primitiva completa, quella che abbiamo trovata dev' essere identica indipendentemente da una relazione qualunque tra x, y, z, y' e z'; dunque essa ci dà le condizioni seguenti

$$(a') \quad 0 = F - AE - 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$$

$$(b') \quad 0 = C - 2AB - 2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$(c') \quad 0 = 2D - AC - 2\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)$$

le quali sono d' accordo con le nostre condizioni (a), (c) e (d).

Sostituendo nella prima dell' equazioni di *Lagrange* i valori trovati di N, N', N'', e ponendovi in luogo di z'' il suo valore preso dalla proposta otterremo la seguente

$$0 = z'^2\left[\left(\frac{\delta B}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta B}{\delta z}\right) - B\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)\right]$$
$$+ y'z\left[\left(\frac{\delta C}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta C}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y \delta z}\right)\right]$$
$$+ y'^2\left[\left(\frac{\delta D}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta D}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta y^2}\right) + D\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\right]$$
$$+ z'\left[\left(\frac{\delta E}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta z}\right)\right]$$
$$+ y'\left[\left(\frac{\delta F}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta F}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta y}\right) + F\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)\right]$$
$$+ \left(\frac{\delta G}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta G}{\delta z}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta x^2}\right) + G\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right).$$

E poichè questa equazione dev' essere identica indipendentemente da una relazione qualunque tra x, y, z, y' e z', ci darà le sei condizioni

$$(d') \quad 0 = \left(\frac{\delta B}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta B}{\delta z}\right) - B\frac{\delta A}{\delta z} - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta z^2}\right)$$
$$(e') \quad 0 = \left(\frac{\delta C}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta C}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta y \delta z}\right)$$
$$(f') \quad 0 = \left(\frac{\delta D}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta D}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta y^2}\right) + D\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$
$$(g') \quad 0 = \left(\frac{\delta E}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta E}{\delta z}\right) - 2B\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta z}\right)$$
$$(h') \quad 0 = \left(\frac{\delta F}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta F}{\delta z}\right) - C\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right) - 2\left(\frac{\delta^2 A}{\delta x \delta y}\right) + F\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right)$$
$$(i') \quad 0 = \left(\frac{\delta G}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta G}{\delta z}\right) - E\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right) - \left(\frac{\delta^2 A}{\delta x^2}\right) + G\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right).$$

Di queste la prima, la quarta, e l'ultima sono le stesse che le nostre condizioni (e), (f), e (g); le altre tre sono sovrabbondanti, ed è facile provare che son comprese nelle precedenti. Infatti

$$(e') = \left(\frac{\delta (b')}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta (b')}{\delta z}\right) + 2A(d')$$
$$2(f') = \left(\frac{\delta (c')}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta (c')}{\delta z}\right) + A(e') + (c')\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right) - (b')\left(\frac{\delta A}{\delta y}\right)$$
$$(h') = \left(\frac{\delta (a')}{\delta y}\right) - A\left(\frac{\delta (a')}{\delta z}\right) + A(g') + (a')\left(\frac{\delta A}{\delta z}\right) - (b')\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right).$$

32. Se

32. Se le condizioni trovate non sono identiche, l'equazione (1) non potrà darci per mezzo dell' integrazione un valore di ψ, il quale contenga due costanti arbitrarie, e per conseguenza la proposta non avrà una equazione primitiva completa. Contuttociò potrà accadere che un valore meno generale di ψ soddisfaccia all'equazione (1') rendendo nulli separatamente i termini, che dopo l'eliminazione di z contengono la variabile y, e quei che non la contengono. In questo caso nella equazione (1') non avremo riguardo che ai termini indipendenti da y trascurando gli altri che contengono questa variabile, ed integrando questa equazione parziale otterremo il valore di ψ con due costanti arbitrarie; dopo di che determineremo le due costanti o una di esse in modo che svaniscano ancora nella equazione (1) i termini che abbiamo trascurati. Così troveremo una equazione primitiva della proposta o con una sola costante, o senza costante arbitraria.

Ma potremo rendere questa ricerca più facile se riflettiamo, che quando esiste un valore di ψ, il quale soddisfà all'equazione (1') indipendentemente da y, l'equazioni derivate da questa per rapporto ad y dovranno esser soddisfatte dal medesimo valore di ψ. Dunque prevalendoci di quest' equazioni derivate piuttosto che della equazione (1') otterremo il valore di ψ mediante l'integrazione di una equazione del prim' ordine, e qualche volta ancora senza integrazione. Da ciò apparisce, perchè le due costanti, che troveremmo non considerando nell'equazione (1') che i termini indipendenti da y, non possano restare ambedue indeterminate.

Per trovare tutte l'equazioni primitive della proposta nel caso che abbiamo fin qui esaminato, restano a considerarsi le soluzioni particolari dell'equazioni (1) e (4), la ricerca delle quali non presenta alcuna difficoltà. Quelle tra tali soluzioni, che soddisfaranno al rimanente dell'equazioni (1), (2), (3) e (4), daranno altre equazioni primitive della proposta.

33. Supponghiamo adesso che le condizioni (a) e (b) essendo identiche l'equazione (2') non sia soddisfatta indipen-

dentemente dal valore di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$. Quando ciò accade convien dedurre il valore della funzione $\psi . x$ dall'equazione (2'). Sostituendovi in luogo di $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ il suo valore $\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}$, e facendo come sopra $\frac{F - AE - 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)}{2\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) + 2AB - C} = P$, l'equazione (2') diventa

$$(2'') \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) - P\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right),$$

ed acciò possa darci il valore di ψ con una costante arbitraria, è necessario che la sostituzione del valore di z preso dall'equazione $N = \psi . x$ faccia sparire y dalla quantità $\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$. Dovrà dunque questa quantità essere una funzione di x e di N, e per conseguenza la sua differenziale presa relativamente ad y dovrà esser nulla. Pertanto avremo

$$0 = \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right) + P\left[\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right] + \left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)\left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)\right],$$

e sostituendo in luogo di $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x \partial z}\right)$ e $\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y \partial z}\right) - A\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)$ i loro valori $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$ e $\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)$

$$(h) \quad 0 = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial A}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) - A\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right).$$

Questa è la condizione necessaria perchè la proposta abbia una equazione primitiva con una costante indeterminata, e quando essa è identica si trova l'equazione primitiva mediante l'integrazione dell'equazioni del prim'ordine (4) e (2'').

34. Quantunque la sostituzione del valore di z non faccia sparire y dall'equazione (2''), può accadere però che essa sia soddisfatta da un valore meno generale di ψ, in quanto renda nulli separatamente i termini indipendenti da y e quei che ne dipendono. In questo caso poichè l'equazione (2'') è

verificata qualunque sia y, la sua equazione derivata relativa ad y sarà soddisfatta dal medesimo valore di ψ. Ma è evidente che questa equazione derivata non è che la stessa condizione (h); dunque la condizione (h) ci darà il valore di ψ dopo l'eliminazione di z, e prima dell'eliminazione avrà per fattore l'equazione cercata $N - \psi . x = 0$, in modo che si avrà in tal caso l'equazione primitiva della proposta senza alcuna integrazione.

Anche rapporto al caso esaminato nei due precedenti articoli si deve osservare, che non abbiamo fin qui trovate tutte l'equazioni primitive, dalle quali la proposta può esser soddisfatta. Per averle tutte bisogna aggiungervi quelle, che sono soluzioni particolari dell'equazioni (4) o (2'), e verificano le altr'equazioni, le quali devono sussistere insieme con esse.

35. Negli esempj generali che abbiamo dati, e che potremmo facilmente moltiplicare, abbiamo procurato di mostrare il modo, con cui dobbiamo condurci nei diversi casi. Ma in ciascun caso particolare tornerà meglio applicare le operazioni ed i ragionamenti all'equazione data che riportarla ad un caso più generale, perchè le condizioni identiche spariranno dal calcolo, e così ci risparmieremo molte discussioni inutili. Porremo fine a queste ricerche con l'esempio di una particolare equazione del second'ordine, che abbiamo scelto espressamente per prevenire una objezione, la quale potrebbe esserci fatta relativamente alle soluzioni particolari. Sia dunque proposta l'equazione

$$0 = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + 1 .$$

Dopo aver posti in luogo di $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i loro valori $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$, e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$, e dopo avere ordinato il primo membro per le potenze ed i prodotti di $\frac{\partial y}{\partial x}$ e $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ otterremo molt'equazioni, delle quali la prima è

$$(1)\quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 1 = 0$$

l'ultima è

$$(2)\quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 1 = 0$$

e tutte l'equazioni intermedie son tali che diventano identiche, quando l'ultima è soddisfatta da un integrale particolare (n.° 19). Questa integrata ci dà $z - y = \psi . x$, onde si deduce $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, e sostituito questo valore la (1) diventa

$$(1')\quad \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2}{x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + 1 = 0.$$

E poichè non contiene altre variabili che x e ψ, essa ha un integrale completo, che si trova essere $\psi = cx + \frac{x^3}{12c} + c'$, essendo c e c' le due costanti indeterminate. Pertanto la proposta ha l'equazione primitiva completa

$$z = y + cx + \frac{x^3}{12c} + c'.$$

Per vedere se ha qualch'equazione primitiva singolare, bisogna cercare le soluzioni particolari dell'equazioni (1) e (2). La seconda non ne ha, la prima ha la soluzione particolare $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \pm x$ (si veda la lezione XV di *Lagrange*). Se ne deduce $z = \pm\frac{x^2}{2} + \phi . y$, ma quest'equazione non può nella sua generalità convenire alla proposta. Resta a vedere se dando un valore determinato alla funzione arbitraria $\phi . y$ l'equazione $z = \pm\frac{x^2}{2} + \phi . y$ può soddisfare all'equazione (2). Ciò si ottiene se si fa $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 1$, cioè $\phi . y = y + \text{cost.}$, dunque la proposta ha l'equazione primitiva singolare

$$z = \pm\frac{x^2}{2} + y + \text{cost.}$$

L'avremmo subito trovata, se avessimo cercate le soluzioni particolari dell'equazione (1').