CONSIDERAZIONI

GEOMETRICHE E PRATICHE

SOPRA LE MACCHINE AEREOSTATICHE

A GAS IDROGENO

DEL SIG. PROF. GIO. BATTISTA MAGISTRINI

Ricevute a dì 9. *Luglio* 1823.

1. Aprire la via più breve delle comunicazioni terrestri, sottrarre l' uomo all' impero delle procelle, elevarlo alla prospettiva di fatto del pianeta, che abita, compiere la terza dimensione dello studio della natura è l' incredibile assunto di quell' arte novella, onde i moderni han preso a emulare l' impresa d' Argo famosa; e il volo sublime della ministra di Giove. Ma se della temerità di chi primo osò solcare l' Oceano, hanno cessata l' accusa le ricchezze, e le cognizioni, che ne derivarono, di gran lunga più degni di compatimento, e soccorso hanno a riguardarsi gli sforzi di quelli Artisti, che moltiplicando applicazioni di meccanici stratagemmi, e cimentando la propria vita s' affrettano a realizzare la tanto più importante non ancora smentita destinazione dell'Aereonautica; e meritevoli piuttosto sono di riprensione la maggior parte dei Fisici e Geometri più distinti, i quali dopo d' aver promossa a' nostri giorni l' ordinaria navigazione a tale precisione, e coltura da potersi giustamente chiamare la più dotta di tutte le arti, se ne stanno oziosi spettatori dei precoci tentativi dell' arte sorella della navigazione atmosferica, e punto non si curano di liberarla dal funesto suo lungo tirocinio, o di trarre d' inganno tanti, che fidanza han preso della possibilità di una compiuta, e stabile sua riuscita. Il giusto rim-

provero però di sì perniciosa non curanza per questo scientifico provvedimento, che ormai l' umanità stessa reclama, non può farsi alla Patria del Conte Zambeccari, di quel generoso sperimentatore dell' atmosfera, per opera del quale promossa vedremmo la difficile quistione a bel segno di scioglimento, se tempo avesse avuto di tanto coltivarla coi lumi delle proprie sperienze, e coll' uso tranquillo del suo pronto ingegno, quanto è stato facile a consacrarvi dell' ardente suo zelo, e dell' impaziente suo coraggio. Perciocchè le ardite imprese della pratica eran quivi precedute dall' illustre mio Antecessore Canonico Saladini colla calma e col valido sempre, ma non sempre abbastanza apprezzato soccorso della Geometria; e mentre il celebre Eulero terminava la sua gloriosa carriera sopra il nuovo arduo problema, il Professore di Bologna vi contribuiva le dotte sue riflessioni, che si leggono negli atti della Società Italiana, e della Reale Accademia di Napoli.

2. Dopo l' ultima forse non vana mia cura intorno all' Ariete Idraulico osai sollevare anch' io il pensiere all' idea sublime del nostro P. Lana richiamata in tanto onore dai progressi posteriori della fisica, e dall' industria singolare dello stesso Inventore dell' Ariete; e ripigliando sulle traccie dei nominati chiari Maestri il problema del moto verticale di un pallone a semplice gas idrogeno di sferico involucro perfettamente cedevole, e inestendibile al di là del diametro di sua primitiva costruzione, e impermeabile al sottil fluido che contiene, tentai primieramente di appianare le difficoltà del calcolo, che ancora vi rimanevano; e procurai sopra tutto di avvicinarlo a più esteso, più determinato e fedele contatto colle più essenziali circostanze, e condizioni del metodo, e dell' apparecchio finora usato, e coi bisogni più pressanti dell' una, e dell' altra manovra verticale, la prima, che convenga liberare da incertezze, e pienamente rassicurare. Esaminai con particolare attenzione alcune delle più salutari modificazioni, che gioverebbe sperimentare, atte a frenare all' uopo la forza elevatrice, e procura-

re a piacimento, e dominare la discesa allontanando il gravissimo inconveniente di dover comprare ciascun ritorno in terra con perdita indeterminata del più necessario e prezioso elemento della macchina. Ho mostrato infine la struttura, e l'applicazione, e sottoposi a calcolo diligentemente il giuoco, e l'effetto di quello, che mi parve più semplice, e più opportuno fra i mezzi, che la meccanica può somministrare pel delicato intento della direzione, e del moto orizzontale dell'aereostato, sia semplice di traslazione, o di conversione sopra se stesso, sia composto d'entrambi.

3. Saranno strumento, e soggetto principale di queste ricerche le quantità, che passo a dichiarare conservando il metrico, e il bolognese sistema nei pesi, e nelle misure di unico prescritto valore, e attenendomi alle ipotesi d'Eulero, e Saladini circa agli elementi atmosferici. Quella dell'uniforme temperatura in tutte le altezze, la meno prossima al vero, non sarà tuttavia cagione di notabile, nè pericoloso errore nel calcolo delle mediocri ordinarie elevazioni. Ma la correzione di questo, e di altri piccoli errori dei dati fisici meno conformi alle più esatte recenti osservazioni e scoperte, si potrà in gran parte supplire nelle formole stesse generali, che verrò esponendo; ed ho fede ancora, che non sarà senza frutto questa Memoria, se altro non lascierà desiderare fuorchè quest'ultimo compimento delle approssimazioni de' suoi risultati.

Rapporto del diametro alla periferia nel circolo $= 3,1415926$ . . . . . „ π

Base dei Logaritmi naturali $= 2,7182818$ . . „ e

Gravità terrestre = metri $9,8087952$, = piedi di Bologna $25,8059433$ . . . . . „ g

Diametro del globo . . . . . „ $2r$

Peso di un volume d'aria terrestre pari al volume del globo . . . . . „ N

Denominatore della porzione della capacità del globo occupata dall'idrogeno, o altro leggier

fluido qualunque . . . . . „ n

Peso invariabile di tutta la macchina, e dell'equipaggio costantemente necessario, non compreso il fluido del globo . . . . . „ P

Peso totale atto a equilibrare in terra la forza elevatrice della macchina allestita alla partenza „ P+M

Altezza verticale, alla quale dopo un numero di minuti secondi contati dall' istante della partenza la macchina sarà pervenuta . . . „ t

x

Velocità, di cui sarà dotata in tale istante . . „ u

Forza elevatrice assoluta nell'istante medesimo „ ϕ

Porzione del sopra carico disponibile M, colla sottrazione della quale viene rotto l'equilibrio della macchina nell' atto di sua partenza „ m

Densità media dell' aria vicino a terra . . . „ 1

. . . . . nell'altezza x . . . . . „ $e^{-\frac{x}{k}}$

Densità del fluido del globo in terra . . . . „ D

. . . . . nell' altezza x . . . . . „ δ

Peso medio di un piede cubico di Bologna d'aria terrestre = lib. di Bolog. . . . . „ 0,1869084

Rapporto di questo peso alla gravità naturale „ 2γ

Peso di un piede cubico di gas idrogeno presso a terra = lib. . . . . „ 0,012854

Densità media terrestre dello stesso gas = D = „ 0,0687723

Altezza equivalente dell' atmosfera nell' assunta formola delle Densità $e^{-\frac{x}{k}}$ = piedi di Bologna . . . . . „ 22206,20329

I.

Calcolo della manovra verticale giusta il metodo presentemente praticato.

4. Salita della macchina. L'indole del gas idrogeno richiede, che solo venga rinchiuso nel globo, e senza mescolanza, nè contatto d'aria comune. La pratica riconosce l'importanza di questa condizione, sebbene non sempre usi tutta la necessaria diligenza per adempierla, e sia poi costretta di smentirla nel più pericoloso modo, allorchè trattasi della discesa. Con tale precauzione tuttavia supporrò amministrata la carica dell'aria infiammabile, e supporrò inoltre l'involucro così cedevole e obbediente alla prevalente pressione o dell'interno fluido, o dell'aria esterna, che trascurare si possa la renitenza, che frammette all'azione mutua dei due fluidi, e a corrugarsi, o distendersi fino al massimo naturale suo diametro. Ciò premesso, dalla figura del pallone, dalla condizione di suo preparatorio equilibrio, e dall'ammessa proprietà dell'idrogeno di seguire nelle sue espansioni la stessa legge dell'aria comune, avremo tra le quantità proposte queste prime formole

$$N = \frac{4g\pi r^3}{3}$$

$$P + M = \frac{N}{n}(1 - D)$$

$$\delta = D\, e^{-\frac{x}{k}}$$

avvertendo, che qui g tien luogo del peso specifico dell'aria terrestre. In oltre la terza formola avrà luogo soltanto fino a quell'altezza della corsa del globo, dove l'idrogeno successivamente spandendosi col decrescere della pressione atmosferica arriva ad occuparne l'intera capacità.

5. Notando con X quest'altezza si ha

$$X = k \log. n \qquad (a)$$

valore indipendente da tutte le quantità P, M, m, r. La quantità del gas sempre la stessa riceve colassù l' espressione $\frac{4\pi r^3 D e^{-\frac{X}{k}}}{3}$, ed è in principio rappresentata da $\frac{4\pi r^3 D}{3n}$. Dal confronto delle due espressioni risulta il valore assegnato dell' altezza X.

6. Avendo fine in quest' altezza le dilatazioni del gas, poichè supponiamo l'involucro costantemente chiuso, e inestendibile, dovrem fare per tutta l' ulteriore salita

$$\delta = D\, e^{-\frac{x}{k}}.$$

7. Al limite X arriva sempre la macchina, qualunque sia stata la sottrazione del peso, che ne determinò la partenza. Perciò il denominatore n della carica non potrà essere che di ben poco maggiore dell' unità, affinchè la prima elevazione inevitabile non ecceda i bisogni, e le intenzioni del volatore, e non lo ponga nella necessità di dar di piglio alla valvola di soccorso prima ancora del totale distendimento del globo. Quindi è che di tante ascensioni intraprese con dosi d'idrogeno notabilmente minori della capacità del globo, molte finirono innanzi tempo, altre restituirono il volatore malconcio nelle estremità, e negli organi della respirazione, e il buon esito di poche altre non può ascriversi per avventura che a imperfezioni massime dell' involucro del globo.

8. A maggiore utilità, e riprova insieme dei risultati generali di questo scritto verrò ponendone sott' occhio la numerica applicazione a quelli fra i pratici quesiti, che più dovranno impegnare l' attenzione e diligenza dell' artista nel predisporre, ed eseguire l' aereo viaggio, tralasciando però il minuto processo delle intermedie riduzioni di calcolo, che il lettore avrà norma bastante di verificare da se stesso. Incominciamo fin d' ora a praticare questo buon metodo sulle precedenti prime formole quanto semplici, altrettanto importanti.

Esempio I. Voglionsi costruire due globi atti ad equilibrare in terra con $\frac{5}{8}$ o con $\frac{6}{8}$, oppure $\frac{7}{8}$ del loro volume d' aria infiammabile, il primo il peso totale di libre di Bologna 2000. = Kilog. 723,7; il secondo il peso di libre 1200. Si domanda il diametro $2r$ dell' uno e dell' altro globo nei tre casi proposti.

Risposta. Globo maggiore. La carica di gas essendo a $\frac{5}{8}$, sarà $2r = 32,745262$ piedi = metri 12,446418.

essendo la carica a $\frac{6}{8}$,

$2r =$ pie. 30,814369.

essendo a $\frac{7}{8}$

$2r =$ pie. 29,2761873.

Globo minore. Con $\frac{5}{8}$ di gas sarà

$2r = 27,6188735$ piedi;

Con $\frac{6}{8}$

$2r = 25,99034$;

e con $\frac{7}{8}$

$2r =$ pie. 24,6886215. formole 1.ª e 2.ª del num. 4.

II. Due globi, uno di piedi 30 di diametro, l' altro di piedi 25 riempiti di gas idrogeno a $\frac{7}{8}$ della loro capacità, domandasi quanto potranno equilibrare in terra di carico totale, e quale sarà l' altezza del punto di loro intero distendimento.

Risp. Globo maggiore

$P + M =$ lib. 2153,055068. Num. 4.

$X =$ pie. 2949,039314. form. (*a*)

Globo minore

$P + M =$ lib. 1245,989087.

$X =$ pie. 2949,039314, come pel globo maggiore.

9. Nel primo, e principal tratto X di salita, che diremo a globo variabile, viene trasportato, e insieme resiste al moto direttamente il peso $P + M - m + \frac{4g\pi r^3 D}{3n}$ del carico estrinseco, e del fluido disequilibrante. Resiste inoltre l' aria ambiente tormentando in più modi non ancora ben conosciuti il gonfio segmento del globo, che l'attraversa, il quale per ciò, che abbiam detto poc' anzi, sarà fin da principio notabilmente maggiore dell' emisfero. Di queste resistenze dell' aria però basterà tener conto della principale dell' urto diretto, che secondo la regola di Newton assai conforme all' esperienza nei casi analoghi al presente equivale al peso di un cilindro dell' aria urtante, cui sia base la metà del circolo massimo del globo, e altezza quella, che è dovuta alla velocità attuale del globo, espressa perciò nella distanza x da terra da $\frac{3Nn^2}{10gr} e^{-\frac{x}{k}}$. Tende infine a innalzare la macchina il peso di un volume d' aria del luogo stesso uguale rigorosamente al volume della macchina intera, ma che può ritenersi uguale semplicemente al volume principale della parte distesa del globo. La quale primaria forza immediata rimane costante fino all' altezza X, e $= \frac{N}{n}$; poichè detto n_x il denominatore del volume successivo del gas, mentre nell' altezza x la forza è $= \frac{N}{n_x} e^{-\frac{x}{k}}$ abbiamo per l' invariabilità della massa, dello stesso gas, l' equivalenza $\frac{1}{n_x} e^{-\frac{x}{k}} = \frac{1}{n}$. Detratte adunque le resistenze, rimarrà la forza motrice assoluta

$\frac{N}{n} - P - M + m - \frac{4g\pi r^2 D}{3n} - \frac{3Nu^2}{16gr} e^{-\frac{x}{k}}$. Attesi pertanto i valori di $P+M$, e di N, e semprecchè altro scarico di zavorra non sia fatto durante il tragitto oltre il primitivo di peso m, sarà per tutti i valori di x da $x=0$ ad $x=X=k \log. n$

$$\phi = m - \frac{3Nu^2}{16gr} e^{-\frac{x}{k}}.$$

Posto in fine questo valore, e quello della massa elevata nelle note formole del moto variato, ne trarremo fra le altezze percorse, e le velocità rispettive ascensionali l' equazione differenziale

$$\left\{ m - \frac{3Nu^2}{16gr} e^{-\frac{x}{k}} \right\} gndx = (N - mn)\, udu.$$

10. Agevole sarebbe quì la separazione delle variabili; ma non si ponno evitare colle note trasformazioni quelle funzioni trascendenti da Mascheroni chiamate iperlogaritmiche, il calcolo delle quali è stato, ed è tuttora lo scoglio inevitabile così del presente, come d' infiniti altri importanti problemi dello stesso genere. Facciasi per esempio nella precedente equazione

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{8r}{g}(1-y)$$

$$x = k \log. \frac{\log. A}{\log. (1-\varpi)}$$

posto

$$A = e^{-\frac{3knN}{8r(N-mn)}}$$

verrà la trasformata ben anche differenziale esatta

$$\frac{N}{m \log. A} d(1-\varpi)(1-y) = -\frac{d\varpi}{\log. (1-\varpi)}.$$

Rimessa la variabile x nel secondo membro, che poscia sviluppato diviene

$$\frac{1}{k}\,dx\mathrm{A}^{e^{-\frac{x}{k}}}=\frac{dx}{k}\left\{1+e^{-\frac{x}{k}}\log.\mathrm{A}+\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^2}{2}e^{-\frac{2x}{k}}+\right.$$

$$\left.\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^3}{2.3}e^{-\frac{3x}{k}}+\ldots\ldots+\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^2}{1.2.3\ldots h}e^{-\frac{hx}{k}}+\text{ec.}\right\}$$

si ha integrando da $\mathrm{X}=0$, $\omega=0$, e risolvendo

$$\frac{u^2}{2g}=-\frac{kmn}{\mathrm{N}-mn}\mathrm{A}^{-e^{-\frac{x}{k}}}\left\{\frac{x}{k}-e^{-\frac{x}{k}}\log.\mathrm{A}-\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^2}{1.2.2}e^{-\frac{2x}{k}}\right.$$

$$-\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^3}{1.2.3.3}e^{-\frac{3x}{k}}\ldots\ldots-\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^h}{1.2.3\ldots h.h}e^{-\frac{hx}{k}}-\text{ec.}+\log.\mathrm{A}$$

$$\left.+\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^2}{1.2.2.}+\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^3}{1.2.3.3.}+\ldots\ldots+\frac{\overline{\log.\mathrm{A}}^h}{1.2.3\ldots h.h}+\text{ec.}\right\}.$$

L' una e l' altra di queste serie non comincia a farsi convergente che a grandissima distanza dal suo principio, massime la seconda, atteso il valore assai grande di log. $A=-\frac{3knN}{8r(N-mn)}$; e si commetterebbe notabile errore, se almeno alcuni termini non si conservassero oltre tutti quei primi, che corrispondono al valore dell'indice h più prossimo al numero $\frac{3knN}{8r(N-mn)}+3$, riduzione insopportabile, e mal sicura di un numero sì grande di termini destituita d' ogni soccorso di algebrico preparatorio compendio. Miglior partito di gran lunga a me sembra questo di suddividere il calcolo stesso generale della salita sopra un numero indeterminato di strati parziali atmosferici, e assumere costante in ciascuno di questi la densità dell'aria, e variabile soltanto da uno strato all' altro nel valutare la resistenza, che l' aria oppone al moto della macchina.

11. Dicasi h il numero degli intervalli componenti in tal

guisa la prima corsa, o altezza X; i una parte qualunque delle unità del numero stesso h; V_i la velocità del globo alla fine dell' intervallo (i)*esimo*; x, l' altezza costante, o anche, se piacerà, variabile degli intervalli, e z una porzione qualunque dell' intervallo $(i+1)$*esimo* nel caso di x_1 costante, cosicchè l' altezza variabile notata di sopra con x sia $= ix_1+z$ nel calcolo del moto attraverso allo strato $(i+1)$*esimo*. Pongasi in fine D_i in luogo di $e^{-\frac{ix}{k}}$. L' equazione generale superiore, toltavi la parte variabile del termine dovuto alla resistenza dell' aria, prende la forma

$$\left(m-\frac{3Nu^2}{16gr}D_i\right)gndz=(N-mn)\,udu$$

e se ne ricava la primitiva riportata ai valori iniziali dell' intervallo $z=0$, $u=V_i$

$$\frac{u^2}{2g}=\frac{8mr}{3ND_i}+\left(\frac{V_i^2}{2g}-\frac{8mr}{3ND_i}\right)e^{-\frac{3NnzD_i}{8r(N-mn)}}.$$

Surrogando quì in luogo di u l'espressione equivalente $\frac{dz}{dt}$, e facendo

$$a=\frac{3Nn}{8r(N-mn)}$$

$$b=\frac{16gmr}{3N}$$

e riducendo, se ne ha quest' altra equazione

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\left[\frac{b}{D_i}-\left(\frac{b}{D_i}-V_i^2\right)e^{-azD_i}\right]}.$$

D' onde, posto $=T_i$ il tempo delle parziali salite antecedenti viene integrando come sopra

$$t=T_i+\frac{1}{a\sqrt{bD_i}}\log.\frac{(V_i\sqrt{D_i}-\sqrt{b})[\sqrt{(b-(b-D_iV_i^2)e^{-azD_i})}+\sqrt{b}]}{(V_i\sqrt{D_i}+\sqrt{b})[\sqrt{(b-(b-D_iV_i^2)e^{-azD_i})}-\sqrt{b}]}.$$

Questi due integrali, che hanno per secondo limite il valore di $z=x_1$ e dei quali ciascun valore di nuovo si estende

da $i = 0$ ad $i = h = \frac{X}{x'} = \frac{k}{x'} \log. n$, se tutti gli intervalli sono uguali, comprendono le proprietà di tutto il primo periodo d' elevazione da terra fino all' altezza x con quel grado di esattezza, che piacerà, poichè rimane a nostro arbitrio la grandezza x degli intervalli, dalla quale interamente dipende l' approssimazione del calcolo.

12. Portando i due integrali all' altro limite dell' intervallo, cui appartengono, si ridurranno alle due formole

$$\frac{V^2_{i+1}}{2g} = \frac{8mr}{3N} e^{\frac{ix_1}{k}} + \left(\frac{V_i^2}{2g} - \frac{8mr}{3N} e^{\frac{ix_1}{k}}\right) e^{-\frac{3Nnx_1}{8r(N-mn)}} e^{-\frac{ix_1}{k}} \qquad (b)$$

$$T_{i+1} = T_i + \frac{1}{a\sqrt{bD_i}} \log. \frac{(V_i\sqrt{D_i} - \sqrt{b})[\sqrt{(b-(b-D_i V_i^2)e^{-ax_1 D_i}})+\sqrt{b}]}{(V_i\sqrt{D_i} + \sqrt{b})[\sqrt{(b-(b-D_i V_i^2)e^{-ax_1 D_i}})-\sqrt{b}]} \qquad (c)$$

Il metodo finalmente delle successive sostituzioni, l' unico, col quale ponno ulteriormente integrarsi queste equazioni, ci farà conoscere i valori di V, T corrispondenti alle altezze x_1, $2x_1$, $3x_1$, . . . $hx_1 = X$.

Qualunque sia il numero di queste residue operazioni, che certamente non sarà molto grande, giacchè, tranne pochi dei primi strati, che converrà prendere alquanto ristretti, per gli altri potrà bastare l' altezza x_1 tutt' al più di 100 piedi, è preferibile la presente soluzione all' ordinaria premessa di sopra per questi due vantaggi ben rilevanti, che i risultati della prima sono sempre in istato di approssimazione, e che il numero delle operazioni di calcolo di differenze finite da ultimarsi è minore per le minori elevazioni, mentre nell' altro metodo la lunghezza del calcolo è sempre circa la stessa. Ho eccettuato poc' anzi alcuni dei primi strati, perchè rapidissima essendo sul principio l' accelerazione della macchina, come apparisce dall' equazione (b), è quivi da curarsi più che altrove l' approssimazione.

13. Col mezzo indicato delle sostituzioni l'altezza dovuta alla velocità ascensionale può ridursi alla forma

$$\frac{V_i^2}{2g} = P_{i-1} + P_{i-2}.Q_{i-1} + P_{i-3}.Q_{i-1}.Q_{i-2} + P_{i-4}.Q_{i-1}.Q_{i-2}\,Q_{i-3} + \ldots$$
$$\ldots + P_{i-i}\,Q_{i-1}\,Q_{i-2}\ldots\ldots Q_{i-i+1} + \ldots + P_1\,Q_{i-1}\,Q_{i-2}.Q_{i-3}\ldots Q_2$$
$$+ P_0\,Q_{i-1}\,Q_{i-2}\,Q_{i-3}\ldots\ldots Q_1$$

e il tempo della salita alla forma

$$T_i = \frac{1}{aNb}\log.\left\{\Sigma_i^{D_i}\,\Sigma_{i-1}^{D_{i-1}}\,\Sigma_{i-2}^{D_{i-2}}\,\Sigma_{i-3}^{D_{i-3}}\ldots\ldots\Sigma_2^{D_2}\,\Sigma_1^{D_1}\right\}$$

essendo

$$\Sigma_i = \frac{(\sqrt{b} - V_i\sqrt{D_i})[\sqrt{b} + \sqrt{(b-(b-V_i^2D_i)\,e^{-ax_iD_i})}]}{(\sqrt{b} + V_i\sqrt{D_i})[\sqrt{b} - \sqrt{(b-(b-V_i^2D_i)\,e^{-ax_iD_i})}]}$$

$$P_i = \frac{3mr}{3N}\,e^{\frac{ix_i}{k}}\left[1 - e^{-\frac{3Nnx_i}{8r(N-mn)}}\,e^{-\frac{ix_i}{k}}\right]$$

$$Q_i = e^{-\frac{3Nnx_i}{8r(N-mn)}}\,e^{-\frac{ix_i}{k}}.$$

Dove si scorge, che il globo in questo primo periodo è bensì sempre accelerato, ma di meno in meno, più che s'avanza nell'atmosfera, e che il volatore, comunque sia piccolo il peso m di zavorra, colla sottrazione del quale rompe l'equilibrio primitivo, non può evitare, come abbiamo premesso, di toccare, e oltrepassare ancora l'altezza $X = k\log.n$ senza mettere in giuoco la valvola di soccorso, o lacerare il globo.

Negli esempi seguenti farò uso delle formole (b), (c) immediatamente, e in vece dell'espressione $D_i = e^{-\frac{ix_i}{k}}$ adopererò quest'altra

$$D_i = e^{-\frac{2i+1}{2k}x_i}$$

il che dimezzerà in qualche modo, e scemerà vieppiù il tenue errore dell' approssimazione, e farà luogo ad una più moderata suddivisione ausiliaria dell' altezza X nel nostro calcolo interpolato della salita.

14. III. Un globo del diametro di piedi 30 parte da terra colla sottrazione di libbre 10 di suo carico equilibrante, e con $\frac{15}{16}$ del suo volume di gas idrogeno. In quanto tempo arriverà all' altezza X del suo totale distendimento, e di quanta velocità sarà dotato all' arrivo in questo punto?

Risp.ª $X =$ pie. 1432, 177978 circa; Form. (*a*)

Spazj percorsi $\frac{2X}{8}$, $\frac{3X}{8}$, $\frac{4X}{8}$ . . . . X.

Velocità finali

$V_2 = 2{,}806363$; $V_3 = 2{,}82324$; $V_4 = 2{,}832036$;...; $V_8 = 2{,}880896$. pie.

per secondi

Tempi impiegati

$T_2 = 146{,}570416$; $T_3 = 210{,}055503$; $T_4 = 273{,}2165207$;... $T_8 = 523{,}311881$

minuti secondi

Form. (*b*), (*c*).

15. Toccato il punto dell' intero dilatamento del globo, il fluido interno cessa di variare in densità, e si mantiene in tutto il consecutivo periodo d' elevazione quale si trova in quell' istante, alla densità $De^{-\frac{X}{k}}$. Perciò ad un'altezza $x > X$ la forza assoluta del globo sarà un peso d' aria di densità $e^{-\frac{x}{k}}$ uguale in volume al globo intero, diminuito della resistenza del peso del sistema, e di quella che l' aria seguita a fare contro l' emisfero superiore. Onde per questo secondo

periodo osservando, che $\mathrm{ND}e^{-\frac{\mathrm{X}}{k}}=\frac{\mathrm{DN}}{n}$ avremo

$$\varphi=m-\frac{\mathrm{N}}{n}\left(1-ne^{-\frac{x}{k}}\right)-\frac{3\mathrm{N}u^2}{16gr}e^{-\frac{x}{k}}$$

quindi l' equazione

$$\left[mn-\mathrm{N}\left(1-ne^{-\frac{x}{k}}\right)-\frac{3n\mathrm{N}u^2}{16gr}e^{-\frac{x}{k}}\right]gdx=(\mathrm{N}-mn)udu$$

che si dovrà integrare dal limite dei valori antecedenti $x=k\log.n$, $u=\mathrm{U}$, così notando la velocità ultima V_h del primo periodo.

16. La presenza dell' esponenziale variabile $e^{-\frac{x}{k}}$ affetta ora non il solo termine derivante dalla resistenza dell' aria, ma quello ancora dell' intrinseca forza motrice. Basterà nulladimeno applicare di nuovo l' artifizio della densità discontinua al primo di questi due termini per evitare le difficoltà dell' integrazione iperlogaritmica, e conseguire anche quì l' intento della precedente approssimazione.

Denominando h' un numero di intervalli uguali componenti la residua elevazione, x_2 ciascun d' essi; ω una parte qualunque delle unità di h', e ponendo

$$\mathrm{D}'=e^{-\frac{\mathrm{X}}{k}}e^{-\frac{2\omega+1}{2k}x_2}$$

la densità dello strato $(\omega+1)$*esimo;* $\mathrm{X}+\omega x_2+z$ l'altezza di un qualunque suo punto; V'_ω la velocità della macchina, e T'_ω il tempo trascorso al primo ingresso in questo strato, daremo alla nuova equazione la forma quanto vorremo equivalente

$$\left[mn - \mathrm{N}\left(1 - n\mathrm{D}'_{\varpi} e^{-\frac{z}{k}}\right) - \frac{3n\mathrm{N}u^2}{16gr}\,\mathrm{D}'_{\varpi} \right] g dz = (\mathrm{N} - mn)\, u du$$

che moltiplicata per $e^{\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} z}{8r(\mathrm{N}-mn)}}$ si converte nella differenziale esatta

$$\left[mn - \mathrm{N}\left(1 - n\mathrm{D}'_{\varpi} e^{-\frac{z}{k}}\right)\right] dz\, e^{\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} z}{8r(\mathrm{N}-mn)}}$$

$$= \left(\mathrm{N} - mn\right) d\left(\frac{u^2}{2g}\, e^{\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} z}{8r(\mathrm{N}-mn)}}\right)$$

e ne otterremo integrando fra i limiti dell'intervallo $(\varpi+1)$*esimo*

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{\mathrm{V}'^2_{\varpi}}{2g}\, e^{-\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} z}{8r(\mathrm{N}-mn)}} + \frac{8r(\mathrm{N}-mn)}{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi}}\left(e^{-\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} z}{8r(\mathrm{N}-mn)}} - 1\right)$$

$$+ \frac{8k\mathrm{N}nr\mathrm{D}'_{\varpi}}{3k\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} - 8r(\mathrm{N}-mn)} \times \left(e^{-\frac{z}{k}} - e^{-\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} z}{8r(\mathrm{N}-mn)}}\right) \qquad (b')$$

17. L'equazione, che ora avremo ponendo quì $\frac{dz}{dt}$ in luogo di u per la determinazione del tempo, non ammette integrazione esatta, come l' analoga del primo periodo. È però convergentissima la serie, in che si può ordinare l'espressione di $\frac{u^2}{2g}$; e basterà conservarne le seconde potenze di z. Fatto pertanto

$$\mathrm{B} = 1 - \frac{\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi}}{8r(\mathrm{N}-mn)}\left(1 - \frac{3\mathrm{V}'^2}{16gr}\right)$$

$$\mathrm{C} = \left(\frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi}}{8r(\mathrm{N}-mn)}\right)^2 \left(\frac{8r(3k\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi} + 8r(\mathrm{N}-mn))}{gk\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi}}\,\frac{\mathrm{V}'^2_{\varpi}}{2g}\right) - \frac{3\mathrm{N}n\mathrm{D}'_{\varpi}}{8r(\mathrm{N}-mn)}$$

sarà

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{g\mathrm{C}}\sqrt{\left[\frac{\mathrm{V}'^2_{\varpi}}{g\mathrm{C}} + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2} - \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{C}} + z\right)^2\right]}$$

e integrando tra i limiti del parziale intervallo, che si considera, si avrà

$$t = T'_{\omega} + \frac{1}{\sqrt{gC}} \left\{ \text{arc. tang.} \frac{V'_{\omega}\sqrt{C}}{B\sqrt{g}} \right.$$

$$\left. - \text{arc. tang.} \frac{\sqrt{\left(\frac{V'_{\omega}}{gC} + \frac{B^2}{C^2} - \left(\frac{B}{C} + z\right)^2\right)}}{\frac{B}{C} + z} \right\} \qquad (c'),$$

18. Nel secondo limite delle nuove integrazioni u, t divengono $V'_{\omega+1}$, $T'_{\omega+1}$. Resteranno a dedursi i valori di V'_{ω}, T'_{ω} integrando per rapporto alle differenze finite da $\omega = 0$, dove si ha $V'_0 = V_h = U$, $T'_0 = T_h$, valori estremi del periodo antecedente, fino ad $\omega = h'$, numero delle divisioni dell' altezza $X' - X$ residua, che termina l' intera corsa del globo. Ma rimane appunto a conoscersi quest' altezza residua, onde assegnare il limite h' dei valori di ω.

Quando la macchina arriva al termine del primo periodo, è ancora animata dalla forza $N + m - \frac{N}{n}\left(1 + \frac{3u^2}{16gr}\right)$ come si ha dalla superiore espressione di ϕ ponendovi $x = X$, $u = U$. Vi debb' essere perciò nell' ulteriore salita un punto, e un istante di velocità massima, siccome uno ve ne debb' essere di velocità minima. Per questi punti essendo $du = 0$, vi si dovrà adempiere la condizione

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{8r}{3}\left(1 - \frac{N - mn}{Nn}\, e^{\frac{x}{k}}\right)$$

in che trasmutasi l' equazione stessa generale fatto $du = 0$, e separato $\frac{u^2}{2g}$. Ora sapendo inoltre, che il minimo non può essere che $u = 0$, con queste due condizioni troviamo l' altezza, che diremo X', in cui s' estingue insieme e moto, e forza motrice, che sarà appunto il termine cercato della presente corsa residua.

$$X' = k \log. \frac{Nn}{N-mn} \qquad (d).$$

L'altezza pertanto di ciascuno degli strati parziali, sui quali resta da ultimarsi la precedente integrazione, sarà

$$x_2 = \frac{X'-X}{h'} = \frac{k}{h'} \log. \frac{N}{N-mn} \qquad (e)$$

e si determinerà h' secondo quell'ausiliario riparto dell'altezza $X'-X$ il più opportuno al grado di esattezza, che ameremo dare ai risultati di questa seconda parte del problema generale.

La velocità al di sopra dell' altezza X, è facile riconoscere, che arriva al massimo dopo un assai breve tratto di salita. Onde basterà per una buona approssimazione in luogo dell' equazione precedente sostituire quest' altra

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{8mnr}{3N} \qquad (b'')$$

19. Un solo punto abbiamo indicato di velocità massima ascensionale, e quel solo di velocità minima in cui rimane spenta col moto anche la forza motrice. Non è però da conchiudersi, che la macchina corra direttamente a questo centro di suo permanente equilibrio, e quivi si fermi al primo arrivo immediatamente. Altri punti di massima, altri di minima velocità vi debbon essere d' intorno a questo centro, cui la stessa migliorata approssimazione del problema non basta a determinare forse per l' impossibilità d' una compiuta integrazione delle ultime equazioni a differenze finite, o forse perchè l' errore, comechè tenuissimo, dell' assunta discontinuità degli strati atmosferici, e per tutti gli altri oggetti assolutamente innocuo, offende essenzialmente questa sottile ricerca estrema, o fors'anche perchè la legge dei quadrati delle velocità nella resistenza dell' aria non ha più luogo nel languido attual moto evanescente, di cui si tratta. Se osserviamo i corpi galleggianti nei liquidi, e nell'aria stessa vicino a terra, cui passaggero impulso distolga dall' equilibrio,

vediamo, che non ripigliano questa situazione che dopo varie lente reciproche oscillazioni. Non altrimente dee succedere della nostra macchina, che va perdendo il suo moto nella più grande analogia di condizioni, e circostanze con siffatti corpi. Anche l'equazione del tempo anderà perdendo di sua sufficiente precisione quanto più ci accostiamo al declinare del moto in quest'ultimo tratto di salita. Ma basta per la pratica il poter conoscere la principale delle massime, e minime velocità ascensionali. Di questa imperfezione residua del calcolo nell'ultimo limite di sua applicazione poco avrà a dolersi il volatore, cui ben altro assai resterà da fare in tal' epoca del suo viaggio, che divertirsi contemplando la danza finale della sua macchina.

20. L'involucro del globo, che supponiamo di un massimo diametro costante $2r$, e impermeabile al sottil fluido in esso rinchiuso sotto tutti i decrementi della pressione atmosferica, ai quali viene esposto durante l'ascensione, potrà tuttavia rompersi nell'ultimo periodo, qualora non sia la carica del gas opportunamente regolata in principio, o frenata in progresso la forza elevatrice, atteso l'eccesso della interna pressione sopra l'esterna. Gioverà perciò avere in pronto una misura dell'eccesso di pressione interna, cui la tenacità dell'involucro è atta a sostenere, onde possa l'aereonauta premunirsi con anticipati esperimenti contro il massimo di tutti i pericoli, e ben assicurarsi del limite dell' innocua elevazione.

Se la carica del globo fu tale dapprima, come d'ordinario si pratica, che soltanto ad una certa altezza X incominci il contrasto di equilibrio tra la forza di resistenza dell'involucro, e l'eccesso della pressione del gas sopra quella dell' atmosfera, tale si rimarrà durante il tragitto ulteriore la totale pressione interna, se cangiamento massime di temperatura straordinario non sopravvenga. Alla quale eccezione dovrà ben aversi ponderato riguardo per le funeste conseguenze che ne ponno derivare nel mobilissimo idrogeno. Nell'ipotesi fin quì seguita della costante temperatura in tutta l'altezza da

percorrersi, detta F la forza distendente sostenuta da ciascuna unità di superficie interna del globo ad un'altezza $X+z$, sarà

$$F = 2g\gamma k e^{-\frac{X}{k}}\left(1 - e^{-\frac{z}{k}}\right)$$

la quale espressione portata al termine della salita, dove si ha

$$z = X' - X = k \log.\left(\frac{N}{N-mn}\right), \text{ diviene}$$

$$F = \frac{2gkm\gamma}{N} \qquad (g).$$

Nell' altezza X la pressione atmosferica, e l'interna pressione, che l' equilibra sono $= 2g\gamma k\left(e^{-\frac{X}{k}} - \frac{1}{e}\right)$, come si ha integrando da $y = X$ ad $y = k$ la differenziale $2g\gamma dy e^{-\frac{y}{k}}$ del peso della colonna atmosferica. Nell' altezza finalmente $X+z$ quella pressione si trova $= 2gk\gamma\left(e^{-\frac{X+z}{k}} - \frac{1}{e}\right)$. Sottraendo questa dall' antecedente, si ottiene l' espressione assegnata della forza distendente; quindi la misura del minimo grado di tenacità, di cui dovrà essere dotato il tessuto del globo.

Si confronterà pertanto la forza effettiva del globo, che diligenti sperienze avranno fatto conoscere, col valore richiesto dalla formola (*g*), e se ne dedurrà il valore di quello dei due elementi *m*, N, ossia *m*, ed *r*, che vorrà farsi dipendere da questa condizione di sicurezza, praticandovi inoltre la conveniente modificazione, affinchè il valore di F dato dalla esperienza riesca abbondante sopra quello del calcolo.

21. Per le cautele necessarie a prendersi a questo riguardo gioverà predisporre in guisa l' aereo viaggio, che modera-

ta riesca l'altezza X del periodo a globo variabile; e nel tempo stesso il bisogno di un più esteso dominio della salita, e la comodità ancora di atmosferiche osservazioni richiederanno, che salva la precedente condizione, l'altezza del secondo periodo sia la più grande possibile; giacchè la bella proprietà del globo invariabile notata di sopra di moderare da se stesso la propria forza motrice, e di prendere stabile situazione di equilibrio offre il vantaggio di poter ripartire in quante si vogliono stazioni questa seconda parte del viaggio dall'altezza X a quella massima, cui la sperimentata, e ben conosciuta robustezza del globo permetterà di toccare senza pericolo.

Giunto il volatore all'altezza $X = k \log. n$ dell'intera dilatazione del suo pallone, e vi giungerà qualunque sia il peso m, che determina la partenza, più lentamente se piccolo, ma con maggiore sicurezza, proseguirà ulteriormente fino all'altezza di sopra assegnata $X' = k \log. \frac{Nn}{N-mn}$ tanto minore, o tanto più prossima all'altezza X, quanto minore sarà in principio il denominatore n della carica, e il peso disequilibrante m. Supponiamo, che il globo possa resistere più oltre fino ad un'altezza X'', e cerchiamo la nuova quantità m' di zavorra da dimettersi dall'altezza X' della prima stazione, perchè la macchina prosiegua ad elevarsi, e si venga a equilibrare di nuovo nell'altezza X''. È palese da ciò, che già abbiam detto, che dovrà essere pel nuovo equilibrio, e termine di salita $Ne^{-\frac{X''}{k}} - P - M + m + m' - \frac{DN}{n} = 0$. D'onde risulta il peso di zavorra di secondo scarico

$$m' = N\left(e^{-\frac{X}{k}} - e^{-\frac{X''}{k}}\right) - m, \qquad (d)$$

l'equazione poi del moto dalla prima alla seconda stazione riesce

$$\left\{ n(m+m') - N\left(1 - ne^{-\frac{X'+z}{k}}\right) - \frac{3Nnu^2}{16gr}\, e^{-\frac{X'+z}{k}} \right\} gdz$$
$$= (N - n(m+m'))\, udu$$

di forma identica a quella del num. 15., da integrarsi tra i valori

$$u=0,\ z=0,\ \text{e}\ u=0,\ z=X''-X'.$$

22. Se da questa seconda stazione vorrassi progredire ad una terza d'altezza X''', potendolo comportare la fermezza del globo, non si avrà che da aggiungere quì innanzi alla somma $m+m'$ il nuovo peso m'' di zavorra da sottrarsi alla macchina calcolato sulla formola

$$m'' = N\left(e^{-\frac{X}{k}} - e^{-\frac{X''}{k}}\right) - m - m'$$

cangiare X' in X'', e prendere per limiti dell'integrazione i valori $z=0$, $u=0$; $z=X'''-X''$, $u=0$. Così si procederà fino all'ultima stazione, se altre piacerà, e il globo permetterà di raggiugnerne.

La velocità massima del tragitto dalla penultima all'ultima stazione d'equilibrio, per la quale si fa lo scarico parziale $m^{(\lambda}$ può aversi per un'approssimazione simile a quella del num. 18. dalla formola

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{8nrm^{(\lambda)}}{3(N - n(m+m'+m''+\ldots\ldots+m^{(\lambda-1)}))} \qquad (b''').$$

23. IV. Quale sarà l'altezza della prima stazione d'equilibrio del globo del quesito III? Dove, e quando avrà fine la sua forza acceleratrice? Quale dovrà essere la forza del suo tessuto, onde possa compiere senza pericolo l'intero viaggio?

Risp.ª $\left.\begin{array}{l} X' = 1522{,}979143 \text{ piedi} \\ X'-X = \text{pie. } 90{,}801165 \end{array}\right\}$ form. (a), (d)

$u = 2{,}886464$ piedi per ogni minuto secondo, velocità massima form. (b'')

Altezza del punto di massima velocità, poco $>$ X.

Durata dell'accelerazione, poco maggiore di quella della corsa già assegnata col quesito III.

F = lib. 15,707676. form. (*g*).

V. Il globo stesso soggettato coi noti mezzi ad una forte condensazione d'aria teneva il mercurio nel cannello di annestato barometro più alto di un decimo dell'ordinaria sua libera sospensione senza che nell'involto apparisse verun pericolo di vicina rottura. Cercasi quale altezza di viaggio atmosferico potrebbesi intraprendere senza timore con siffatto globo nei due casi, 1.° che la carica di gas sia come sopra a $\frac{15}{16}$ della sua capacità, 2.° che la carica sia a capacità intera.

Risp.ª In ambi i casi m=lib. 167,028689. form. (*g*)

1.° Caso X'= pie. 2976,6469526. form. (*d*)

X'—X=1544,4689745

2.° Caso X'=1450,08061918.

VI. Ben s'intende nei due casi ora considerati, che il volatore si asterrà dal toccare i due limiti trovati di elevazione, o almeno si guarderà dal dimettere tutta intera in una sola volta la quantità assegnata di zavorra. Quale sarebbe sotto lo scarico primitivo di tutto questo peso la velocità massima di salita nelli stessi due casi? Volendosi per lo contrario limitare nel secondo caso la salita a 1200 piedi per maggiore sicurezza, e ripartirla in oltre in quattro stazioni equidistanti, quale sarebbe il peso da scaricarsi in ciascuna corsa parziale, e quale in ciascuna la velocità massima?

Risposta. Nel primo caso velocità massima

u = 11,798292 piedi per secondo.

Nel secondo caso

u = 11,423482

velocità insopportabile pel volatore, e nel primo caso pericolosa per l'involucro stesso del globo.

Stazioni domandate a globo invariabile.

1.ª $m =$ lib. 35,4512643
$u =$ pie. 5,2628969
2.ª $m' = 34,9792076$.
$u = 5,2631688$
3.ª $m'' = 34,4171522$
$u = 5,2560948$
4.ª $m''' = 34,1509431$
$u = 5,256$
form. (d), (b''')

24. Discesa. La dispersione di una parte dell'aria infiammabile per un foro posto nella sommità del globo mediante una valvola interna obbligata a lunga funicella, che mette capo nella galleria, è l'unico mezzo nel sistema, che andiamo analizzando, col quale si ha fiducia di ridonare alla macchina l'opportuna prevalenza di gravità specifica, e procurarne da qualunque altezza una blanda innocua discesa, mezzo fallace e pieno di pericoli. Ammettiamo però tutte possibili le condizioni di questa terribile manovra, e supponiamo pienamente sicuro l'aereonauta; che l'incostanza, la rigidità, e l'obbliquità del lungo cordone, la gagliarda resistenza della valvola inaccessibile, il riscaldamento prodotto da' suoi attriti, il conflitto dell'aria esterna col gas fuggitivo non possano tradire i voti di lui, e sia in arbitrio suo il sottrarre a qualunque epoca della salita la porzione di gas più conveniente al gravissimo intento. Trovisi la macchina in situazione d'equilibrio, e di quì debba incominciare la discesa mediante la riduzione della carica primitiva $\frac{DN}{n}$ del fluido del globo alla sola parte $\frac{DNp}{n}$. Al principiare di siffatta riduzione, attesa la piccola perdita corrispondente di peso, verrà prodotto alcun moto leggerissimo in elevazione, cui succederà immediatamente il discensionale al primo allentarsi del globo. Che se la quantità residuata $\frac{DNp}{n}$ d'idrogeno non per-

metterà ancora tale cangiamento di volume, la macchina si rimarrà pensile di nuovo in un punto alquanto più elevato, come se un semplice scarico di zavorra fosse avvenuto. Onde realmente siegua la discesa, troveremo che debb' essere

$$p < 1 - \frac{mn}{N(1-D)}$$

e perchè la discesa sia la più moderata possibile, converrà che sia pressochè insensibile questa differenza, delicatissima condizione, che il volatore non potrà giammai col presente metodo garantire.

25. Così essendo tuttavia, e non fatto caso del moto insensibile in elevazione, che ha luogo al primo sbocco dell' idrogeno, dicasi z lo spazio descritto in un tempo t, $n' = \frac{n}{p}$ denominatore della quantità residua di questo gas, n_z il denominatore del volume teso del globo nell' altezza $X' - z$. Sarà

$$n_z = \frac{n'(N-mn)}{Nn} e^{\frac{z}{k}}$$

e perciò l' attual peso d' aria esterna, che rappresenta l' atmosferica pressione, che contrasta la discesa, $= \frac{N}{n'}$; giacchè da una parte il peso del fluido del globo è espresso per $\frac{DN}{n_z} e^{-\frac{X'-z}{k}}$, e dall' altra l' abbiamo posto $= \frac{DNp}{n} = \frac{DN}{n'}$. La pressione dunque elevatrice riesce costante per tutto il nuovo periodo; il che avviene in virtù di compenso reciproco tra gli allungamenti successivi della colonna atmosferica premente, e la diminuzione di volume nel globo premuto. Sottraendo questa resistenza dal peso totale della macchina, e la resistenza dell'aria circostante $= \frac{3Nu^2}{16gr} e^{-\frac{X'-z}{k}} =$

$\frac{3(N-mn)u^2}{16gnr} e^{\frac{z}{k}}$ nella quale espressione è ritenuta sferica la parte del globo occupata dal gas, e perciò s'intende

$$p > \frac{n}{2}$$

affinchè la discesa non divenga un precipizio; avremo la corrispondente equazione della solita forma

$$\left(N(1-D)(n'-n) - mnn' - \frac{3n'(N-nn)u^2}{16gr} e^{\frac{z}{k}} \right) gdz =$$
$$(N(n'-D(n'-n)) - mnn')\, udu$$

da integrarsi da $z = 0$, $u = 0$.

26. Ripigliando a tal fine l'artifizio della superiore differenziale interpolazione divido l'altezza X' da percorrersi in h parti ciascuna $= x$, e considero il tratto descritto in un tempo t ponendolo uguale ad un multiplo ωx di tali parti più una frazione y della parte consecutiva $(\omega+1)$esima. Chiamisi $_{\omega}V$ la velocità discensionale al principio, quindi $1+{}_{\omega}V$ la velocità alla fine dello strato $(\omega+1)$esimo, ${}_{\omega}T$, ${}_{1+\omega}T$ il tempo contato dall' altezza X' del punto di partenza. In fine ritengo costante la densità in ciascuno strato cosicchè sia per lo strato $(\omega+1)$esimo

$$D_{\omega} = e^{-\frac{X'}{k}} e^{\frac{2\omega+1}{2k}} x$$

facendo inoltre

$$N' = N(1-D)(n'-n) - mnn'$$
$$M' = N(n'-D(n'-n)) - mnn'$$

trasformeremo la precedente equazione in quest'altra semplicissima

$$\left(N' - \frac{3Nnn'u^2}{16gr} D_{\omega} \right) gdy = M' udu$$

di cui l'integrale risulta

$$\frac{u^2}{2g} = \frac{8N'r}{3Nn'n'D_o} - \left(\frac{8N'r}{3Nn'n'D_o} - \frac{{}_oV^2}{2g}\right) e^{-\frac{3Nn'n'D_o}{8M'r}y}$$

e al termine del parziale intervallo

$$1 + \frac{{}_oV^2}{2g} = \frac{8N'r}{3Nn'n'D_o} - \left(\frac{8N'r}{3Nn'n'D_o} - \frac{{}_oV^2}{2g}\right) e^{-\frac{3Nn'n'D_o}{8M'r}x} \qquad (h')$$

e integrando di nuovo

$$\frac{{}_oV^2}{2g} = P_{o-1} + P_{o-2}\,Q_{o-1} + P_{o-3}\,Q_{o-1}\,Q_{o-2} + \ldots\ldots$$
$$+ P_o\,Q_{o-1}\,Q_{o-2}\ldots\ldots Q_1$$

essendo

$$P_o = \frac{8N'r}{3Nn'n'D_o}\left(1 - e^{-\frac{3Nn'n'D_o}{8M'r}x}\right).$$

$$Q_o = e^{-\frac{3Nn'n'D_o}{8M'r}}.$$

Sostituendo in fine udt quì sopra in luogo di dy, e facendo

$$A = \frac{8N'r}{3Nn'n'D_o}$$

se ne ricava integrando fra gli stessi limiti

$$1 + {}_oT = {}_oT + \frac{8M'r}{3Nn'n'D_o\sqrt{2Ag}} \log.\frac{(\sqrt{2Ag} + {}_{1+o}V)(\sqrt{2Ag} - {}_oV)}{(\sqrt{2Ag} - {}_{1+o}V)(\sqrt{2Ag} + {}_oV)} \qquad (k').$$

Quì la velocità può divenir massima prima che il globo arrivi in terra. In una ben regolata discesa non si scosterà molto dalla giusta misura di tale velocità la formola

$$u = 4\sqrt{\left[\frac{gN'r}{3n'(N-mn)}\right]} \qquad (b)$$

27. Esaminate le principali proprietà e circostanze dell' una e dell' altra corsa verticale secondo il metodo finora usato, e preparate le formole abbastanza semplici ed esatte, colle quali possa l' aereonauta anticipatamente calcolare il ser-

vigio della sua macchina, e le vicende del suo viaggio nel metodo finora comunemente ricevuto; vediamo d'appresso, se è possibile, come il fluido del globo si presterà a quella misurata dispersione, da cui dipende principalmente il felice ritorno in terra, calcolando la fuga al medesimo procurata nell' altezza d' equilibrio X' per un' apertura media i^2 durante un tempo θ.

Sia v la velocità, colla quale il fluido sbocca al finire di una parte t del proposto tempo θ, Δ la densità sua in tale istante, ossia il rapporto della sua densità a quella dell' aria libera terrestre. Si avrà per la nota proporzione fra le densità e le masse successive del fluido rimanente questa prima equazione

$$\Delta = De^{-\frac{X}{k}}\left(1 - \frac{2g\gamma ni^2}{DN}\int v\Delta dt\right).$$

La forza di elasticità, quella stessa che di sopra abbiamo denominata F, colla quale l' idrogeno distende, e sforza l' involucro del globo, diviene ora per tutti i punti della luce i^2 in virtù del cangiamento di densità $= \frac{\Delta F i^2}{D} e^{\frac{X}{k}}$, e tale è la forza, che sospinge l' idrogeno alla fuga per la luce i^2 alla fine del tempo t. Ma di questa forza motrice abbiamo altresì giusta le formole assegnate dal Sig. Mossotti pel movimento dei fluidi elastici nel tomo XVII. degli atti della Società Italiana l' espressione $\frac{\Delta i^2}{4(3r-l)}\left[v^2(8r-3l)+\frac{l}{3}(4r-l)\frac{dv}{dt}\right]$, essendo l la saetta del segmento maggiore del globo terminato alla luce i^2. Paragonando i due valori, e sostituendo quello di F della formola (g), toltovi il coefficiente 2γ, si ha la seconda equazione

$$\frac{4gkmn(3r-l)}{DN(8r-3l)} - v^2 = \frac{l(4r-l)}{3(8r-3l)}\frac{dv}{dt}$$

e facendo

$$A^2 = \frac{4gkmn(3r-l)}{DN(8r-3l)}$$

$$B = \frac{6(8r-3l)}{l(4r-l)}$$

e integrando da $t=0$, $v=0$ si trova

$$v = \frac{A(e^{ABt}-1)}{e^{ABt}+1} \qquad (i).$$

Tornando adesso alla prima equazione, che differenziata, attesi i valori di X, e di v, prende la forma

$$\frac{d\Delta}{\Delta} = -\frac{2Agyi^2}{N}\,\frac{dt(e^{ABt}-1)}{e^{ABt}+1}$$

ne dedurremo integrandola così che a $t=0$ corrisponda

$$\Delta = De^{-\frac{X}{k}} = \frac{D}{n}$$

$$\Delta = \frac{D}{n}A^{\frac{2gyi^2}{BN}}\left(\frac{e^{ABt}}{(e^{ABt}+1)^2}\right)^{\frac{2gyi^2}{BN}}.$$

Chiamisi finalmente q la quantità di gas sortita nel tempo t, la quale è quì espressa da $i^2\int\Delta v dt$. Si avrà pei valori trovati di Δ, e v la sufficiente approssimazione

$$q = \frac{Di^2}{Bn}.A^{\frac{2gyi^2}{BN}}\left[\frac{BN}{2gyi^2}\left(1-e^{-\frac{2Agyi^2\theta}{N}}\right)-2\right] \qquad (m)$$

28. VII. Un globo del diametro di 30 piedi partito da terra a tutta capacità di carica, e stazionario nell' altezza di piedi 500 incomincia di lassù il ritorno in terra mediante la dispersione di un ventesimo della sua carica. Si domanda il tenore di moto discensionale, che questo globo prenderà, dove, e quando sarà massima la sua velocità; e quando, e con quale velocità arriverà in terra.

Risp. Divisa l' altezza da percorrersi in sette intervalli, i primi due di 25 piedi ciascuno, il 3.° di 50, e gli altri

quattro ciascuno di 100 piedi, le formole (h'), (k') ci danno i risultati di questa tavola.

Spazii percorsi	Tempi impiegati	Velocità acquistate
Piedi	Minuti secondi	Piedi per secondo
25	8, 0608047	4, 93031367
50	12, 6675279	6, 15311937
100	20, 1084989	7, 04167239
200	33, 8074625	7, 36167126
300	47, 2528137	7, 37650758
400	60, 4906256	7, 3628962
500	74, 008413	7, 354116116

Dove si vede, che la sottrazione di un ventesimo della carica procurerebbe nel presente caso una troppo rapida discesa; che la velocità si rende massima a circa 300 piedi di discesa, e nel breve tempo di circa 47 secondi. Appresso, il moto si rallenta alcun poco, e devia alquanto dall' uniformità in che deve stabilirsi. Questa leggiera aberrazione tiene senza dubbio all' errore della discontinuità degli strati atmosferici assunta nel calcolo. Prendendo dalla formola (b') la velocità massima si trova

$$u = 7,16141952$$

valore più piccolo di quello della tavola.

VIII. Può stimarsi un circolo di un' oncia di diametro l' apertura media procurata dalla valvola al fluido del globo,

allorchè il volatore intraprende il ritorno in terra dai due viaggi del quesito precedente, e del quesito IV. Cercasi la durata, e la quantità dell' efflusso dell' idrogeno necessaria, perchè nel caso del quesito precedente la velocità massima discensionale sia di mezzo piede per minuto secondo, e nel caso del quesito IV. la dispersione del gas sia la sola richiesta a ridurre il globo al principio del suo allentamento.

Risp. Primo caso

$$\left.\begin{array}{l} n' = \frac{1}{p} = 1{,}04588424 \\ q = \frac{DN}{2g\gamma}(1-p) = D.\ 620{,}21504375 \\ \theta = \text{min. secondi } 190{,}9185255 \end{array}\right\} \text{form. } (b),\ (m)$$

Secondo caso

$q = D.\ 360{,}53722118$

$\theta = \text{Min. sec. } 113{,}648449846.$

II.

Miglioramenti del metodo precedente.

29. L' idrogeno per molte eccellenti proprietà sembra l' unico trai fluidi aereiformi atto a somministrare alla novella navigazione l' elemento fondamentale della specifica leggerezza. Se però la chimica cogli straordinarii progressi, che fa tuttora nell' analisi di questi fluidi, e nell' arte di prepararli, arrivasse a sostituire all' idrogeno un altro gas, anche meno leggero, ma più pacifico nel contatto dell' aria comune, e del fluido elettrico, salve tutte le altre condizioni, ne ridonderebbe all' arte non lieve giovamento. Non minore studio meriterebbe l' articolo importantissimo della scelta, e composizione della vernice indispensabile per l' involucro del globo.

Questo suol farsi di seta; e veramente non potrebbe forse

impiegarsi materia più opportuna per ogni riguardo. Bensì converrebbe che tessuto fosse senza giunture, e tutto d' un sol pezzo. A tal fine potrebbe lavorarsi sopra un sufficiente numero di solide zone sferiche, o conico-convesse crescenti nella debita proporzione, onde poco si allontanasse dalla sferica o conoidale figura il sacco risultante. Tessuta in tal guisa da zona a zona maggiore continuatamente la metà del pallone, si proseguirebbe l'altra metà inversamente dall' equatore all' altro polo senza interruzione rimettendo in opra gli stessi telai antecedenti.

Abbandonare poi l'uso dei palloni cedevoli, e di un fluido elastico in essi rinchiuso, che insieme dia loro la necessaria leggerezza, e tenendoli in istato di espansione promuova sovr' essi la pressione elevatrice dell' atmosfera, e far ritorno ai globi rigidi vuoti del P. Lana, sembra ormai vano, e disperato progetto, sia per gli inconvenienti, che seco porterebbe la stessa rigidità, sia per la mancanza di un metallo atto a quest' uso. Dalle sperienze di Mariotte sulla resistenza dei tubi di rame si raccoglie, che un pallone costrutto con lamina di questo metallo della grossezza richiesta per sostenere la pressione atmosferica, appena basterebbe ad equilibrare il proprio peso benchè vuoto d' aria perfettamente. Nè essendo insufficiente la tenacità per se stessa del metallo, resterebbe verun conto da farsi del contrasto mutuo tangenziale delle parti del globo, a sostegno della pressione, che quì a differenza delle sperienze di Mariotte si farebbe dall' infuori all' indentro, e dalla parte della convessità; giacchè sarebbe assolutamente impossibile il lavorare la sottile vastissima lamina metallica con quella perfezione di figura e di taglio e di uniforme grossezza e densità, che ad avvalorare siffatto principio richiederebbesi. Non si può dunque abbandonare il semplice metodo di Charles, nè la forma e costruzione presente delle macchine aereostatiche. Resta solamente da perfezionarne il servigio, e da supplire coi mezzi che già in se stesse contengono, e col minimo soccorso pos-

sibile di altri accessorj ed estrinseci la parte ancora intatta della piena loro destinazione.

30. Non sembra sperabile questo compimento dell' arte; finchè non si trovi il modo di conservare invariabile in tutto l' aereo viaggio il peso assoluto della macchina, finchè una manovra obbligherà a distruggere senza misura materiali, che un' altra richiede essenzialmente, finchè in somma d' altronde avransi a ripetere i mezzi di movimento e direzione della macchina fuorchè dalla specifica sua gravità, dalla configurazione e disposizione delle sue parti, dall' inerzia, ed elasticità del fluido inesausto, che la circonda, e dalla forza perenne, e destrezza dell' aereonauta. Sarebbe adunque necessario innanzi a tutto, che nè l' usato sopracarico di estranea zavorra più si dovesse aggiugnere nella salita, nè più metter mano ciecamente alla massa del fluido del globo per discendere. Il Sig. Donnini ha tentato ingegnosamente di togliere l' uno e l' altro di questi due difetti della manovra verticale col suo condensatore, pel quale si varierebbe a piacimento la forza elevatrice colla semplice alterna sottrazione, e restituzione dell' aria infiammabile. Gioverebbe sperimentare, e ciò potrebbe praticarsi senza bisogno di elevazione da terra, se bastasse a frenare il sottil fluido quel massimo grado di perfezione, che finora potè darsi agli strumenti pneumatici necessarj per tale intento, e fino a qual segno sarebbe permesso di accrescere impunemente la densità del fluido stesso.

Una interessante combinazione dei mezzi inerenti alle macchine aereostatiche poc' anzi accennati fu recentemente pubblicata in Milano dal Sig. Corti all' oggetto di sottoporle ad una manovra orizzontale. L'uso, che egli propose del moto stesso di salita e discesa, della figura e inclinazione dell' aereostato, e della resistenza dell' aria circostante, fu dimostrato dal Sig. Mossotti consentaneo alle leggi della meccanica. Non altrettanto conciliabili colle limitazioni e imperfezioni della pratica possibile esecuzione sembrano i notabili cangiamenti dell' usato apparecchio, e le aggiunte moltiplici

di continuo servizio difficilissimo, che l'autore suggerì nel suo primo saggio; nel quale però si riserva egli stesso altre costruzioni e modificazioni del suo sistema più atte a condurlo alla necessaria semplicità, e sicurezza.

31. A conseguire però direttamente la traslazione, e ogn' altro moto orizzontale d'un aereostato, sono d'avviso, che tutti i tentativi sempre verranno ricondotti al mezzo semplicissimo già proposto da lungo tempo, ma non ancora abbastanza esaminato dell'urto diretto dell'aria ambiente, a somiglianza del problema del modo migliore di supplire alla mancanza del vento nell'ordinaria navigazione, tra i varj ingegnosi ritrovati del quale la pratica ha costantemente preferito l'unico del remo. Vidi in casa Bentivoglio un' esperienza del Sig. Spiga di una imitazione di questo istrumento sopra una specie di bilancia aereostatica. Due erano i remi, o piuttosto larghi ventagli, che egli sospeso con essi teneva in agitazione. Trapezia n'era la figura; e snodati nel mezzo longitudinalmente aprivansi nell'andata, e chiudevansi nel ritorno; riducendo così l'agitazione ad un sol piano. L'effetto, che se ne aveva, misurato da un peso addizionale, che restava equilibrato dall' altra estremità della bilancia, non era in vero trascurabile, ma troppa sembrava l'attenzione, la fatica, e lo scuotimento, che l'operatore era costretto d'impiegare per poterne sperare vantaggio reale nell' atmosfera, dove tanta è la necessità d'invariabile atteggiamento d'ogni parte della macchina, e di risparmio dell'opera, e distrazione del volatore. D. Ermenegildo Monti s'avvisò di moltiplicare nelle mani del volatore questi ventagli piantandone buon numero di meno ampj sulla lunghezza di un torno da impernarsi orizzontalmente nella galleria armato di due manubri, pei quali il volatore seduto girando il torno in un senso e urtando l'aria, i ventagli tosto si aprono, e danno spinta di reazione all' aereostato, e girando il torno di altrettanto in senso contrario, si chiudono i ventagli per aprirsi di nuovo, e così alternativamente. Un nuovo elegante e ingegnoso sperimento

del principio medesimo sta facendo il Sig. Vittorio Sarti sopra una combinazione di cervi volanti da lui immaginata. Dirò anch' io fra poco, come e quanto potrebbe l'aereonauta giovarsi per l' intento medesimo del principio della reazione dell' aria.

32. La somiglianza di questo artifizio col remo ordinario, e qualche altro punto di contatto dell' atmosferica coll' idraulica navigazione diedero occasione a troppa fidanza sull' analogìa della prima colla seconda, e da lungo tempo molti allettarono ad una precoce e troppo assoluta imitazione di questa, mentre v' era maggior bisogno di lungo studio, e ponderato esame delle essenziali ben più istruttive differenze loro. Per esempio nella navigazione ordinaria si può profittare del vento per accelerare il corso del galeggiante col mezzo di un semplice addattamento di vele, o modificazione di figura, e senza laboriosa continua operazione del piloto; laddove un aereostato è per se e sotto qualunque sua figura affatto in balìa della corrente, e soggetto alla direzione e velocità medesima; e al volatore non resta che il compenso di potervisi sottrarre senza propria fatica sortendo colla sua macchina dallo strato atmosferico agitato, quando l' altezza di questo non è eccessiva.

Lo studio delle correnti periodiche atmosferiche di ciascuna stagione dell' anno nei varj climi, e nelle varie direzioni delle prominenze terrestri, sarà una delle prime cure nei perfezionamenti ulteriori di quest'Arte nascente. Si conoscerà allora l' epoca più opportuna, e il mezzo più possente e spedito per intraprendere come in mare lunghe corse orizzontali. Ma le sperienze stesse, che dovranno condurre, se fia possibile, a questo grandioso risultato, hanno d' uopo di stromenti nell' ordinaria navigazione inusitati. Quì un pigro fluido, che sempre rimane indietro al corso del galeggiante accelerato dal vento, il lido, da cui questo partì, tuttora visibile, o quello, cui s'avvicina, le isole, e gli scogli sparsi nell' Oceano porgono ogni maniera di facile e pronta misura e ri-

conoscimento del moto vero della nave, e della quantità di suo viaggio. Tutti questi mezzi mancano interamente all' aereonauta, cui tutto è silenzio d' intorno, tutto è dello stesso colore, e tutto appare immobile, sia stazionaria la sua macchina nell' alta atmosfera, sia rapita dalla più veloce corrente. Con quali mezzi potrebbe l' aereonauta nelle grandi altezze accertare speditamente la sua situazione, e il tenore del suo movimento orizzontale, è problema di assai difficile scioglimento, almeno per tutti quei casi, che saranno senza dubbio i più frequenti, nei quali mancherà il tempo di far uso di osservazioni, e tavole astronomiche; e forse il ritorno frequente alla vista della terra sarà lo spediente più sicuro di tutti pel rilevante oggetto, di cui trattiamo. Ma queste considerazioni già forse trascorsero più innanzi che l' arte stessa non oserà progredire. Limitiamci all' assunto primitivo di togliere, o almeno moderare l' uso imperfetto di estranea irrecuperabile zavorra, di preservare intatta la carica del globo, e di rintracciare una orizzontale manovra atta a supplire alla mancanza di favorevole corrente, e scevra dagli inconvenienti di sopra accennati. Il che io tenterò di fare attenendomi, come fin quì ho praticato, ai più semplici e noti principii di calcolo e di meccanica, senza pretensione di novità, e lasciando la sua parte a chiunque potesse avermi preceduto nelle ricerche medesime, colla riserva sopra tutto, che le mie proposte, se alcuna attenzione meriteranno, debban prima d' essere messe in opra nell' atmosfera, soggettarsi ad ogni possibile confronto, e verificazione di replicate e diligenti sperienze.

33. L' aggiunta di un minor pallone nel luogo dell' antica Mongolfiera, che ripieno dapprima d' aria condensata se ne vada scaricando nella salita per annessa tromba pneumatica inferiore, e la ripigli poi similmente nella discesa, è il primo e più ovvio mezzo che si presenta per conseguire il primario intento di supplire all'usato sopracarico di zavorra, e di risparmiare il fluido del globo, e dominare a piacimento così la salita come la discesa. Dovrebb' esso avere particola-

re immediata applicazione al polo inferiore della rete del sovrastante globo principale, e anch' esso tuttavia dovrebbe essere legato alla galleria con distinta serie di proprii cordoni collegati fra loro, e con quelli del maggior globo. Se la figura sferica non si addattasse a siffatto collocamento, nulla osterebbe alla scelta d' altra figura conoidale, che lasciasse godere in maggiore altezza lo spazio piramidale costituito dai cordoni esteriori principali. Altra capacità, e altra fermezza non bisognerebbe di quest' otre sussidiaria se non quanta occorresse per l' introduzione d' una massa d' aria equivalente in peso o poco più alle poche libre di zavorra necessarie per toccare il segno prefisso di elevazione.

Chiamando $2r'$ il diametro di questo serbatojo d' aria supposto sferico, D' la densità dell' aria in esso accumulata nell' atto dell' equilibrio preparatorio di partenza, m come sopra il peso da levarsi per effettuare l'ascensione convenuta, si trova tra queste quantità, e gli altri elementi della macchina oltre l' equazione superiore (d) quest' altra

$$m = \frac{8g\gamma\pi r'^3}{3}(D' - 1) \qquad (n).$$

Il diametro $2r'$ dovrà essere il minimo compatibile segnatamente colla resistenza richiesta delle pareti del serbatojo, e colla massima facilità del servigio della tromba di comunicazione. Debba essere per esempio $m =$ lib. 20, e vogliasi supplire a questo peso con aria portata alla densità maggiore soltanto della metà della densità ordinaria terrestre, e fare perciò $D' = \frac{3}{2}$. Risulterà dalla formola (n)

$$2r' = \text{pie. Bol. } 7,4217 \text{ circa.}$$

La condensazione proposta in quest'esempio non importa una robustezza del serbatojo difficile da ottenersi: facile è la costruzione di una tromba di fedele tenuta d' aria sotto questa moderata pressione di gran lunga inferiore a quella dell'archibugio pneumatico. Anche il volume risultante del

serbatojo è moderato, e da potersi agovelmente addattare al luogo destinato. L' ipotesi ancora di un peso disponibile $m =$ lib. 20 è assai conforme ai bisogni di una possibile, e ben regolata ascensione, come si raccoglie dalle formole, e dagli esempj superiori; oltrecchè la buona costruzione della doppia tromba, e l'abbondante fortezza del recipiente ammetteranno in ciò una più ampia misura.

Per far servire al medesimo uso anche la rarefazione dell' aria al di sotto dell'ordinaria densità, richiederebbesi un recipiente rigido e invariabile. Ma basta al nostro intento la semplice alternativa di maggiore e minor condensazione, la quale ci permette di conservare i vantaggi della costruzione a involucro cedevole, e da potersi anche ammajnare.

34. Il calcolo della salita colla presente modificazione della macchina è quello stesso, che abbiamo veduto del metodo comune; e sussistono ancora per intero le formole (b), (c); (b'), (c'); (d); (b''); (g); (d'); ommesso l'aumento di resistenza esterna derivante dal volume dell' aggiunto serbatojo. Bensì diverso sarà ora il calcolo della discesa, nella quale supposto come dianzi, il principio nella stazione d'equilibrio d'altezza X', è da distinguersi il primo tratto interposto fra questo punto e quello d'altezza X, dove incomincia nel presente caso ad affloscìarsi il globo maggiore.

Per questo primo tratto chiamando m' il peso d' aria che s'incomincia a restituire al serbatojo, il che supporremo farsi in un istante e nella stessa altezza X', si trova l'equazione principale del moto di prima discesa

$$\left\{ N - (m - m')n - Nne^{-\frac{X'-z}{k}} \right\} \left(1 + \frac{3u^2}{16gr} \right) gdz$$
$$= (N - n(m - m'))\, udu$$

la quale mediante la solita nostra interpolazione, e fatto di nuovo

$$'D = e^{-\frac{X'}{k}} e^{\frac{2e+1}{2k}x}$$

$$z = \frac{(\omega+1)_{,}x}{2k} + y$$

e posto

$$N' = N - n(m - m')$$

diviene

$$\left[N' - Nn'D_{\omega} e^{\frac{y}{k}} - \frac{3Nnu^2}{16gr}{}'D_{\omega}\right] gdy = N'udu$$

e integrata trai limiti dell' intervallo $(\omega+1)$ esimo $= {}_{,}x$ porge

$$\frac{{}_{1+\omega}V^2}{2g} = \frac{8N'r}{3Nn'D_{\omega}} + \left(\frac{{}_{\omega}V^2}{2g} - \frac{8N'r}{3Nn'D_{\omega}}\right) e^{-\frac{3Nn'D_{\omega}}{8N'r}{}_{,}x} - \frac{8kNnr'D_{\omega}}{3kNn'D_{\omega} + 8N'r} \times$$

$$\left(e^{\frac{{}_{,}x}{k}} - e^{-\frac{3Nn'D_{\omega}}{8N'r}{}_{,}x}\right). \qquad (h'')$$

E ponendo

$$A = -\frac{3Nn'D_{\omega}}{8N'r} + \left(\frac{3Nn'D_{\omega}}{8N'r} \cdot \frac{{}_{\omega}V^2}{2g} - \frac{8r}{3k} + \frac{Nn'D_{\omega}}{N'} - 1\right)$$

$$B = 1 - \frac{Nn'D_{\omega}}{N'} - \frac{3Nn'D_{\omega}}{8N'r} \frac{{}_{\omega}V^2}{2g}$$

si ha di seconda approssimazione il tempo

$$(k'') \qquad {}_{1+\omega}T = {}_{\omega}T - \frac{1}{\sqrt{Ag}}\left[\text{arc. tang.} \frac{A}{B}\sqrt{\left(\frac{{}_{\omega}V^2}{Ag}\right)}\right.$$

$$\left. - \text{arc. tang.} \frac{A\sqrt{\left(\frac{{}_{\omega}V^2}{Ag} + \frac{B^2}{A^2} - \left(\frac{B}{A} - {}_{,}x\right)^2\right)}}{B - A\,{}_{,}x}\right]$$

i quali risultati s'integreranno di nuovo frai limiti soltanto $\omega\,{}_{,}x = 0$, $\omega\,{}_{,}x = X' - X = k \log. \frac{N}{N - mn}$, e sempre che non sia $m' < m$. Onde si dee fare, quando vorrassi uniforme l'ausiliaria interpolazione,

$${}_{,}x = \frac{k}{h} \log. \frac{N}{N - mn}$$

fissando un numero h sufficiente di divisioni dell'altezza

$${}_{,}X - X.$$

35. Sia U il valore di $_{\omega}V$ corrispondente ad $\omega = {}_{h}$, ossia la velocità discensionale nell'altezza X, dove il globo principale incomincia a corrugarsi. Le equazioni dell' ulteriore discesa si troveranno col ragionamento stesso del numero 25; e ne risulterà

$$_{1+\omega}\frac{V'^2}{2g} = \left(\frac{8r(m-m')}{3\,{}_{\omega}'DN} + \frac{{}_{\omega}V'^2}{2g}\right) e^{-\frac{3Nn\,{}_{\omega}'D\,{}_{h}x}{8r(N-n(m-m'))} - \frac{8r(m-m')}{3\,{}_{\omega}'DN}} \qquad (h''')$$

$$_{1+\omega}T' = {}_{\omega}T' + \frac{2(N+n(m'-m))}{n}\sqrt{\left(\frac{r}{2gN(m'-m)\,{}_{\omega}'D}\right)} \times$$

$$\log.\left(\sqrt{\frac{16gr(m'-m)}{3N\,{}_{\omega}'D}} + {}_{1+\omega}V'\right)\left(\sqrt{\frac{16gr(m'-m)}{3N\,{}_{\omega}'D}} - {}_{\omega}V'\right) : \qquad (k''')$$

$$\left(\sqrt{\frac{16gr(m'-m)}{3N\,{}_{\omega}'D}} - {}_{1+\omega}V'\right)\left(\sqrt{\frac{16gr(m'-m)}{3N\,{}_{\omega}'D}} + {}_{\omega}V'\right)$$

la serie dei valori della velocità $_{\omega}V'$, e del tempo $_{\omega}T'$ dovendo principiare da $_{0}V' = U$, $_{0}T' = {}_{h}T$, valori estremi del periodo antecedente ed essendo quì

$$_{\omega}'D = e^{-\frac{X}{k}}\, e^{\frac{2\omega+1}{2k}\,{}_{h}x} = \frac{1}{n}\, e^{\frac{2\omega+1}{2k}\,{}_{h}x}$$

dove $_{h}x$ è la lunghezza delle parti uguali d'ausiliaria divisione della residua principale altezza da percorrersi.

36. Se tant' aria si condenserà nel globo addizionale, che il peso aggiuntone m' uguagli soltanto il primitivo m, le due ultime equazioni prendono la forma

$$_{1+\omega}V' = {}_{\omega}V'\, e^{-\frac{3n\,{}_{\omega}'D}{16r}\,{}_{h}x} \qquad (h^{iv})$$

$$ {}_{1+\omega}T' = {}_{\omega}T' + \frac{16r}{3n\,{}_{\omega}'D} \cdot \frac{{}_{1+\omega}V' - {}_{\omega}V'}{{}_{1+\omega}V' \cdot {}_{\omega}V'} \qquad (k'^{v}). $$

La prima di queste integrata di nuovo rende

$$ {}_{\omega}V' = U e^{-\frac{3{}_{,}x e^{\frac{{}_{,}x}{k}}}{16r\left(e^{\frac{{}_{,}x}{k}} - 1\right)}\left(e^{\frac{\omega{}_{,}x}{k}} - 1\right)} $$

d' onde attesa la grandezza arbitraria del tratto progressivo ${}_{,}x$ al di sotto della profondità $\omega{}_{,}x = z$, si ha tosto

$$ u = U e^{\frac{3k}{16r}\left(1 - e^{\frac{z}{k}}\right)} \qquad (l) $$

e di quì i valori della velocità ${}_{\omega}V'$, ${}_{1+\omega}V'$ per quelli intervalli tutti, che occorreranno all'approssimazione del tempo nell'altra equazione.

Vediamo in questo caso della restituzione al serbatojo del total peso d' aria m dimesso nella salita, che la discesa è continuamente ritardata dall'altezza X fino a terra, dove però non si repristina l'equilibrio della macchina, bensì estremamente piccola è la velocità d'arrivo, giacchè diviene

$$ = U e^{-\frac{3k(n-1)}{16r}}. $$

37. Se il peso m' d'aria restituito al nostro condensatore sarà $< m$, la macchina non arriverà fino in terra, anzi non oltrepasserà il punto d' altezza $X = k \log. n$, e rimarrà stazionaria nell' altezza intermedia

$$ {}'X = k \log. \frac{Nn}{N - n(m - m')} \qquad ('' d) $$

e avrà luogo in questo primo tratto di discesa la velocità massima

$$u = 4\sqrt{\frac{gm'nr}{3(N-mn)}} \qquad ('b)$$

prossimamente.

38. Riuscirà utilissima questa parziale restituzione di un peso d'aria $m' < m$ per frenare l'accelerazione della discesa nel caso segnatamente della carica del globo a tutta sua capacità, ossia di $n = 1$, $X = 0$, o anche di n pochissimo > 1. Nel caso di n poco > 1, calcolata la parziale discesa pel primo tratto $\omega x = X' - {}'X$ mediante le equazioni (h''), (k''), si ripiglieranno queste medesime per calcolare l'effetto della residua restituzione del peso d'aria $m - m'$ fino all'altezza X ponendovi $N' = N$, e ${}'D_{\omega} = e^{-\frac{X}{k}} e^{\frac{2\omega+1}{2k}x}$. Trovata la velocità U d'arrivo del globo a questo punto di suo primo scemare di volume, se ne sostituirà il valore nelle formole (h'''), (k'''), oppure (h'°) (k'°) unitamente all'anzidetta espressione di ${}'D_{\omega}$, e si proseguirà con queste il calcolo per la discesa rimanente. Ma quando sarà $n = 1$, il calcolo dell'intera discesa dipenderà dalle sole equazioni (h''), (k'').

39. L'anemometro orizzontale, e due barometri muniti della medesima scala, uno libero, l'altro annestato alla tromba del serbatojo d'aria, saranno gli strumenti, dalla cui sola ispezione prenderà il volatore norma spedita e sicura del presente governo di sua salita e discesa. Assicurato dall'anemometro libero d'esser giunto al termine prestabilito di sua elevazione, ne avrà eziandio conferma dalla coincidenza di livello dei due barometri, se tutto dal serbatojo avrà sottratto nel salire l'eccesso d'aria m accumulatovi in principio.

40. Fissata l'altezza totale X' dell'ascensione, caricato il globo principale della conveniente porzione $\frac{1}{n}$ del suo volume di gas idrogeno, e osservata l'altezza, che diremo a, del barometro libero, il volatore costituirà la sua macchina in tale equilibrio prima di partire, che il barometro del serba-

tojo d' aria segni l' altezza

$$b = a\left\{1 + \frac{r^3}{nr'^3}\left(1 - ne^{-\frac{X'}{k}}\right)\right\} \quad (= aD') \qquad (p).$$

Non avrà allora che a ridurre col facile maneggio della tromba l'altezza b del barometro stesso all' ordinaria terrestre a per esser certo di giungnere alla divisata altezza X'. Il che gioverà sia praticato seguitamente salendo, e non tutto a un tratto, o con troppa fretta, onde moderare l' accelerazione di salita sulle prime, come osservammo altrove, assai impetuosa.

41. Sia prestabilito d' incominciare il ritorno dall'altezza X' col rimettere nel recipiente in un numero λ di riprese tali parti m', m'', m''', ... $m^{(\lambda)}$ del peso d' aria equilibrante primitivo, che la macchina soffermisi in altrettante stazioni $'X$, $''X$, $'''X$ . . . . . $^{(\lambda)}X$ sopra il punto di primo allentamento del globo maggiore. Ripiglierà il volatore ad ogni stazione il suo strumento pneumatico, e proseguirà la condensazione d'aria nel serbatojo, finchè l'annesso barometro segnerà rispettivamente le altezze

$$\left.\begin{aligned}
b' &= a\left\{1 + \frac{r^3}{r'^3}\left(e^{-\frac{'X}{k}} - e^{-\frac{X'}{k}}\right)\right\} \\
b'' &= a\left\{1 + \frac{r^3}{r'^3}\left(e^{-\frac{''X}{k}} - e^{-\frac{X'}{k}}\right)\right\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b^{(\lambda)} &= a\left\{1 + \frac{r^3}{r'^3}\left(e^{-\frac{^{(\lambda)}X}{k}} - e^{-\frac{X'}{k}}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (q)$$

essendo l' ultimo esponente $^{(\lambda)}X < X$; ed $^{(\lambda)}X = X$, quando

$n=1$, nel caso, cioè, della carica d' idrogeno a tutta capacità del globo. E sarà

$$\left.\begin{array}{l} {}''X = k \log. \dfrac{Nn}{N - n(m - m' - m'')} \\ {}'''X = k \log. \dfrac{Nn}{N - n(m - m' - m'' - m''')} \end{array}\right\} \quad (d'')$$

ec.

42. IX. Dei due globi del quesito II. il minore viene ora munito di un condensatore di otto piedi di diametro, e caricato a $\frac{7}{8}$ di gas idrogeno. Vuolsi fare con esso una tale ascensione, che di 500. piedi sia la distanza di suo spontaneo equilibrio sopra il punto del totale suo distendimento; e si vuol poscia discendere in due riprese per 400. piedi prima, indi per tutta di seguito l'altezza restante, accumulando nel condensatore una libra d' aria di più del peso dimessone salendo. Cercansi gli elementi primarj di siffatto viaggio, tranne quelli del moto d' elevazione, che già rimane calcolato nella prima parte.

Risp. $X =$ pie. 2949 ,0393124 } Ques. II.
$P + M =$ lib. 2153,055068 }

$X' =$ pie. 3449,0393124 } form. (d)
$m =$ lib. 28,83614625 }

$b =$ pie. 1,5754927 form. (p)

$m' =$ lib. 23,7956098 form. (d')

$b' =$ pie. 1,3310388 form. (q)

$m'' =$ lib. 6,04053639

$b'' =$ pie. 1,4671537 form. (q).

Con questi valori troveremo, che a soli 10. piedi di discesa la macchina ha già acquistata la velocità

$_1V =$ pie. 2,788686 per secondo

impiegando il tempo

$_1T = 7,258445$ secondi.

Percorre la macchina altri 50 piedi nel tempo

$_2T - {}_1T = 12,982211$ secondi

e la sua velocità diviene

$_2V = 4,665178$

Trapassa per altri 50 piedi colla velocità finale

$_3V = 4,6827739$

e il tempo quì impiegato è circa

$_3T - {}_2T = 10,7$ secondi.

Va così il moto lentamente accelerandosi, finchè arriva al massimo di velocità

$u =$ pie. 5,59198455.

Appresso si rallenta, e la macchina viene blandamente ad equilibrarsi nella stazione proposta, formole (h''), (k''), $('b)$.

La nuova condensazione d'aria che quì si fa, rianima il moto discensionale, e già ad altri 10. piedi si ha

$_1V = 1,236677$

e il tempo speso

$_1T = 12,15419179.$

Dopo altri 50 piedi

$_2V = 2,02054179$

$_2T - {}_1T = 27,402027.$

Discende la macchina per altri 40 piedi, e quivi incomincia il maggior globo a corrugarsi. In questo breve tratto il moto si ritarda assai; e si trova

$_3T - {}_2T = 24,7050796$ secondi

$_3V = U = 0,4140015$ piedi per secondo.

Fin qui le formole (h''), (k') nuovamente fattovi $N'=N+n$, per la quale condizione i risultati ora ottenuti ci avvertono di un nuovo massimo di velocità, che posto $du=0$ nell'equazione differenziale del num. 34, riceve prossimamente l'espressione, cangiatovi inoltre X' in 'X,

$$u = 4\sqrt{\left(\frac{gnrm''}{3(N-n(m-m'))}\right)}$$

e nel caso presente

$$u = \text{pie. } 2{,}79218257$$

con un errore in più non molto notabile.

Incominciata la contrazione del globo maggiore, il moto ripiglia vigore, e i primi 10. piedi susseguenti sono percorsi nel tempo

$${}_1T' = 20{,}183444 \text{ minuti secondi}$$

colla velocità finale

$${}_1V' = 0{,}703575 \text{ pie. per secondo}$$

La discesa per altri 50 piedi rende

$${}_2V' = 1{,}052615$$

$${}_2T' - {}_1T' = 52{,}7214166.$$

Altri piedi 50 danno

$${}_3V' = 1{,}1146677$$

$${}_3T' - {}_2T' = 44{,}8051312$$

ec.

formole (h'''), (k'''), postovi $m'+m''-m$ in luogo di $m'-m$.

Appresso incomincia il moto a indebolirsi di nuovo. La solita approssimazione della massima velocità praticata nel calcolo del num. 37. può ridursi alla formola

$$u = 4\sqrt{\left(\frac{gr(m'+m''-m)\sqrt{n}}{3N}\right)}.$$

Ora si ha di quì pel nostro esempio

$$u = \text{pie. } 1{,}0967 \text{ per secondo}$$

poco meno del valor precedente ${}_3V'$.

43. Quantunque l' otre pneumatica sussidiaria fin quì descritta sembri corrispondere assai bene all' oggetto primario di ridurre in potere del volatore la discesa, e di liberarlo interamente dalla necessità di por mano sulla massa dell' aria infiammabile del globo; non mancheranno tuttavia molti, che non lieve incomodo riputeranno la presenza del non piccolo suo volume, e troppo grave occupazione il servigio della tromba, e la sorveglianza, e il confronto dei due barometri. Vediamo, se v' ha provvedimento migliore a costo ancora di sottoporci a qualche perdita del fluido elevatore, purchè ciò non apporti molestia alla massa nel globo principale rinchiusa. Perciocchè non è già il danno di una somigliante perdita, bensì il modo incerto e pericolosissimo di operarla, che ci muove ad abbandonare l' usato metodo di discesa.

Al globo principale facciano uniforme separata corona inferiormente alquanti piccioli globi di numero i ripieni di gas idrogeno anch' essi, e legati per altrettante funicelle alla galleria. Detti r', r'', r''' . . . . . , $r^{(i)}$ i loro semidiametri, ed N'' il peso, che essi soli potranno equilibrare vicino a terra, avremo

$$N'' = \frac{4g\gamma\pi}{3}(1 - D)(r'^3 + r''^3 + r'''^3 + \ldots + r^{(i)3}).$$

Onde in luogo della formola seconda del numero 4. sarà

$$P + M = (1 - D)\left(N'' + \frac{N}{n}\right)$$

e il calcolo superiore del moto ascensionale sussisterà per intero anche in questo caso, purchè vi si cangi N in $N + nN''$.

44. Anche le formole della discesa o continuata, o divisa in più stazioni, che verrà ora intrapresa, e regolata o vuotando, o mettendo in libertà di siffatti palloncini addizionali, saranno quelle stesse, che trovammo nel caso precedente della discesa a restituzione d' aria condensata, purchè vi si faccia il predetto cangiamento di N, e si avverta, che disperdere il gas del palloncino per esempio di diametro $2r'$, essendo

lo stesso che aggiugnere alla macchina il peso $\frac{8g\pi\gamma r'^3}{3}(1-D)$, tale dovrà prendersi il valore di m' nelle formole stesse, e così dicasi delle altre restituzioni di peso.

Basterebbe un solo di questi globi a carica perduta per aver modo di ritornare in terra colla velocità, che si volesse. Ma accadrà frequentemente, che il punto d'arrivo sia incomodo, o che troppo gagliarda oscillazione dell'inferior tratto dell'atmosfera non permetta di ultimare l'incominciata discesa. Nel sistema precedente può l'aereonauta ridonare forza ascensionale alla sua macchina ritogliendo al condensatore il prevalente peso d'aria accumulatovi dianzi. Egli è per supplire a questo urgente bisogno che conviene assumere più globi minori nel presente sistema. Così il volatore, che per discendere ha sciolto o scaricato uno di questi globi, giunto a vista della terra, se trovasi disturbato da vento, o esposto a cadere in luogo svantaggioso, dimette subito una misura di zavorra equivalente in peso alla forza dispersa col primo palloncino, e risale nell'alta atmosfera per ritornare verso terra in più propizie circostanze mediante un secondo scarico simile di gas. Tante volte meno una potrà egli così esplorare il luogo di suo arrivo, e lo stato dell'infima regione dell'atmosfera, quanti ausiliarii palloncini avrà portato seco, l'ultimo essendo riservato ad accelerare la macchina al primo cessare del vento, e al primo apparire di sottoposta libera pianura. Il qual mezzo di prender terra misurato, e immancabile, quanto semplice altrettanto prezioso nel momento più difficile dell'aereo viaggio, è altresì più compendioso ed efficace di quello, che nel precedente sistema ne offre la tromba pneumatica incomoda e laboriosa nel suo servizio, e troppo lenta nel suo effetto.

45. X. Il globo per esempio del diametro di 25. piedi caricato a gas per $\frac{7}{8}$ di sua capacità, e destinato a partire con 20. libre di forza ascensionale sia contornato di cinque uguali

palloncini ripieni dello stesso fluido, e di tale diametro, che ciascuno valga ad equilibrare il peso delle stesse libre 20. La macchina così disposta arriverà all' altezza

$$X' = \text{pie. } 3276{,}244165$$

portando il peso totale

$$P + M - m = \text{lib. } 1325{,}989087$$

e il diametro dei palloncini si troverà

$$2r' = \text{pie. } 6{,}0316982.$$

D' onde un volume loro totale da potersi tutti appostare d' intorno, e in contatto al maggior globo inferiormente, e al di fuori dei cordoni, che lo tengono, senza che sporgano ad accrescere la resistenza dell' aria.

Giunto il volatore all' altezza X', piglia la funicella di uno dei globi minori, e trattolo a se, dà sfogo all' aria infiammabile, che contiene. Tranne il cangiamento trascurabile di volume, che risulta nella macchina, ciò torna allo stesso che alla restituzione delle primitive libre venti di peso; e quindi la macchina riceve forza bastante per arrivare blandamente fino a terra.

Discuopra il volatore in tale suo ritorno ostacoli sottoposti, o trovisi investito da pericolosa corrente, egli versa subito un cartoccio, che tiene in pronto, di zavorra di 20 libre tutt' al più; e in pochi istanti cessato l' inopportuno moto discensionale, si restituisce presso all' altezza di prima per ripartirne a suo piacere sciogliendo un secondo palloncino, e per rinnovare mediante altrettanta zavorra la stessa alternativa, se l' accesso a terra sarà di nuovo impedito, o per afferrarla prontamente, se le circostanze saranno favorevoli, versando in vece un' altra misura di gas, e calando l' ancora.

III.

Moto orizzontale.

46. Corredata la macchina di sufficienti mezzi di una sicura e bene ordinata salita e discesa colla minima alterazione della solita sua forma, e del conosciuto e sperimentato suo apparecchio, resta ora da soccorrere l'aereonauta nel bisogno di qualunque movimento orizzontale; resta da provvederlo di un mezzo impellente a sua voglia disponibile, l'esercizio del quale nulla richiegga di laboriosa di lui cooperazione, nulla costi alla macchina di materiale consumo, niente ne comprometta la sicurezza e l'integrità, e fedele la serbi all'unica direzione primitivamente impressa, e immune da ondeggiamenti e deviazioni sul debole e mobilissimo solo sostegno della via del vento. Dopo di avere attentamente meditato sopra i tentativi fatti sinora per conseguire sì magnifico intento, e sugli artifizj che la meccanica può contribuire all'adempimento di quelle condizioni quanto difficili, altrettanto indispensabili, quest'unico, che passo a dimostrare, mi è sembrato degno d'essere coltivato e seriamente discusso.

S'immagini un asse, o albero cilindrico traforato normalmente da una serie di sottili spranghe di ferro equidistanti e succedentisi nella direzione di un'elice ordinaria, e tutte sporgenti da ambe le parti in lunghezze eguali. Collegati opportunamente in giro, e longitudinalmente questi bastoncini fra loro, e con altri secondarj uniformemente interposti, distendasi e si fermi sovr'essi, e nella fenditura spirale direttrice intagliata da ambi i lati sull'albero un velo di lustrino, o d'altro tessuto resistente, e leggero. Raccomandato l'albero in direzione orizzontale sopra due perni estremi, e soggettato a rapida rotazione nel senso della doppia spirale anzidetta, l'aria rimossa dai due veli eserciterà

contro la concava loro superficie parallelamente all' asse, come l' acqua nella coclea d' Archimede, una pressione che diverrà forza operativa di moto orizzontale di tutto il sistema, sciolto che sarà da esterni ritegni, e abbandonato all' atmosfera.

47. Nella parte superiore di una galleria aereostatica più capace e più alta dell' usato s' adattino mediante solida particolare armatura due coppie di questi volanti parallele e orizzontali, fermando gli assi di ciascuna coppia laterale in un medesimo piano verticale, e le due coppie a uguali distanze dall' asse primario verticale della macchina. I quattro volanti siano interrotti sul mezzo della loro lunghezza da uguali rocchetti, pei quali contrastino con una ruota normale interposta mobile sopra appoggi particolari congiuntamente a unito tamburro nel senso del moto dei rocchetti, e separatamente nel senso contrario. La ruota in fine, e per essa rocchetti e volanti abbian moto in virtù di un peso pendente da robusta e pieghevole funicella avvolta al tamburro, cosicchè l' aereonauta altra cura non abbia che quella di rimontare questo peso girando separatamente il tamburro, svolta che sarà la corda, come accade di fare nè più nè meno nell' orologio a pendolo. Sarà poi da usare la massima diligenza, perchè tutti i pezzi di questo meccanismo siano lavorati coll' ultima perfezione, e col doppio intento del minimo attrito, e del minimo peso loro, salva la necessaria solidità, e nel caso di rottura o degli assi, o dei sostegni, o della corda del peso motore, l' armatura, cui tutto è affidato, preservi la macchina da ogni perdita di pezzi, e la galleria da ogni danno e sconcerto.

Usando più pesi portati da carrucole mobili sopra una stessa corda colla interposizione di alterne carrucole fisse, potremo limitare a breve tratto la discesa dei pesi stessi senza rallentare il moto dei volanti, e prolungandone la durata a risparmio di frequenti interruzioni.

Potrà del pari evitarsi la soverchia grandezza di una ruo-

ta unica trasversale immediatamente operante sui rocchetti sostituendo il sistema di tre altre, due minori trasversali, e una maggiore longitudinale a doppia corona dentata, che frapposta alle prime due le tenga in contrasto coi rocchetti, disposizione sopra tutto necessaria per l'opportuno atteggiamento, e più agevole servigio del volatore. Ma il calcolo nell' ipotesi d' un solo peso, e d'una ruota sola è più semplice, e soddisfa ugualmente al caso di questi due perfezionamenti, salva la correzione del divario delle resistenze, specialmente d' attrito.

Abbiamo supposti altresì i volanti armati ciascuno di due ale spirali soltanto. Se ne ponno applicare a ciascuno altre due uguali, e simili e normali alle prime, senza che l' aria sia impedita di accorrere, e rinnovarvisi frammezzo liberamente, ed esercitare sopra tutte ugualmente la sua reazione.

48. Calcolo del giuoco, e dell' effetto di un sistema di quattro volanti a quattro ale ciascuno

Raggio della ruota dentata motrice . . . . . B

. . . . . del tamburro unito . . . . . b

. . . . . degli occhi, nei quali gira l' asse loro comune c

Lunghezza del tamburro l

. . . . . della ruota . . . . . l'

Peso di tutti questi pezzi . . . . . q

Peso motore . . . . . Q

Tratta di sua discesa . . . . . D'

Raggio dell' albero dei volanti . . . . . a

. . . . . degli occhi in cui gira . . . . . c'

. . . . . dei rocchetti . . . . . B'

Lunghezza di questi . . . . . $2l''$

Lunghezza rimanente dell' albero dei volanti, dettratto l' intervallo dei rocchetti . . . . . $2L$

Lunghezza delle costole trasversali di ciascun velo spirale . . . . . l'''

Numero loro . . . . . n'

Numero delle costole longitudinali che tengono le prime insieme collegate . . . . . n''

Sezione delle une, e delle altre . . . . . i^2

Distanza degli assi di ciascuna coppia laterale di volanti . . . . . $2G$

Densità media o comune loro, e di tutti gli altri pezzi . . . . . δ

Peso di ciascun volante . . . . . q'

Angolo d'inclinazione dell'elice interna colla direzione del proprio asse . . . . . f

Rapporto della pressione all'attrito degli assi . . . k'

Rapporto del numero delle rotazioni dei rocchetti al numero delle rotazioni contemporanee della ruota $\frac{B}{B}$

Durata di ciascuna discesa del peso motore . . . θ

Tempo, che s'impiega nel ricondurlo al principio di essa . . . . . θ'

Durata totale di ω corse del peso, e delle corrispondenti $(\omega - 1)$ interruzioni richieste per rimontarlo. T_ω

Tempo compreso fra 'l principio, e un istante qualunque della corsa $(\omega + 1)$esima del peso . . . . t

Velocità della ruota nel punto di contrasto coi rocchetti in tale istante v

Velocità contemporanea orizzontale della macchina. u

Spazio percorso nel tempo $T_\omega + \theta'$ orizzontalmente S_ω

Spazio percorso nel tempo T_ω . . . . . S'_ω

Velocità orizzontale del sistema al principio della corsa $(\omega + 1)$esima . . . . . U_ω

. . . . alla fine di essa . . . . . $U'_{\omega+1}$

Coordinate della superficie di ciascun velo spirale riferito all'asse e alla base del suo albero . . . . . x, y, z

Angolo d'inclinazione dell'asse del volante col

piano tangente in un punto di coordinate x, y, z del velo spirale . . . . . f'

49. Applicando a questi elementi, e a questa disposizione le note regole della geometria, e della meccanica, troveremo i seguenti risultati preparatorj del nostro problema.

Equazioni della spirale direttrice

$$z = a \text{ sen.} \frac{x \text{ tang.} f}{a}, \quad y = a \cos. \frac{x \text{tang.} f}{a}.$$

Equazioni dell' altro margine esterno dell' ala

$$z = (l'' + a) \text{ sen.} \frac{x \text{ tang.} f}{a}, \quad y = (l'' + a) \cos. \frac{x \text{tang.} f}{a}.$$

Equazione della superficie dell' ala

$$z = y \text{ tang.} \frac{x \text{ tang.} f}{a}.$$

Angolo d' inclinazione dei piani tangenti dell' ala col suo asse

$$\text{sen. } f' = \frac{y \text{ tang.} f}{a \sqrt{\left(\cos. \overline{\frac{x \text{tang.} f}{a}}^2 + \overline{\frac{y^2 \text{tang.} f}{a^2}}^2\right)}}.$$

Espressione differenziale della superficie dell' ala

$$\frac{dxdy}{\cos. \overline{\frac{x \text{tang.} f}{a}}^2} \sqrt{\left(\cos. \overline{\frac{x \text{tang.} f}{a}}^2 + \overline{\frac{y^2 \text{tang.} f}{a^2}}^2\right)}.$$

Superficie dell' ala compresa fra suoi quattro margini

$$\frac{L}{a}\left[(l''+a)\sqrt{(a^2+(l''+a)^2 \text{tang.} f^2)} - a^2\sqrt{(1+\text{tang.} f^2)} - \frac{a^2}{2\text{tang.} f} \times \right.$$
$$\left. \log. \frac{(1+\text{sen.} f)[\sqrt{(a^2+(l''+a)^2 \overline{\text{tang.} f}^2)} - (l''+a)\text{tang.} f]}{(1-\text{sen.} f)[\sqrt{(a^2+(l''+a)^2 \overline{\text{tang.} f}^2)} + (l''+a)\text{tang.} f]}\right].$$

Lunghezza della spirale direttrice, o margine interno dell'ala

$$\frac{2L}{\cos. f}.$$

Lunghezza del margine esterno

$$\frac{2L}{a}\sqrt{(a^2 + (l'' + a)^2 \overline{\text{tang.} f}^2)}$$

Resistenza normale dell' aria in ciascun punto della concava superficie urtante dell' ala

$$\frac{\gamma v^2 e^{-\frac{X'}{k}}}{B'^2} \overline{\cos. f'}^2 (y + z^2).$$

Resistenza semplice dell' aria nella direzione dell'asse del volante

$$\frac{\gamma v^2 e^{-\frac{X'}{k}}}{B'^2} (y^2 + z^2) \text{ sen.} f' \overline{\cos. f'}^2.$$

Forza contraria al moto di rotazione equivalente alla resistenza semplice dell' aria nel senso medesimo, applicata nel punto di contrasto dei rocchetti

$$\frac{\gamma v^2 e^{-\frac{X'}{k}} \overline{\cos. f'}^3}{B'^3} (y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Momento della seconda di queste due resistenze per rispetto all' asse verticale del sistema

$$\frac{\gamma v^2 e^{-\frac{X'}{k}} \text{ sen.} f' \overline{\cos. f'}^2}{B'^2} (y^2 + z^2) [\sqrt{((B + B')^2 - G^2)} \pm y].$$

Espressione differenziale dell' azione totale dell'aria contro il moto rotatorio del volante, e dell' azione totale generatrice del moto orizzontale di tutto il sistema

$$\frac{\gamma v^2 e^{-\frac{X'}{k}}}{B'^3} \cdot \frac{y^3 \partial x d y}{\cos. \frac{\overline{x \text{tang.} f'}^2}{a} \left(\cos. \frac{\overline{x \text{tang.} f'}^2}{a} + \frac{\overline{y^2 \text{tang} f'}^2}{a^2} \right)}$$

$$\frac{\gamma v^2 e^{-\frac{X'}{k}\text{tang.}f}}{aB'^2} \cdot \frac{y^3\,\partial x\,dy}{\cos.\frac{\overline{x\text{tang.}f}^2}{a}\left(\cos.\frac{\overline{x\text{tang.}f}^2}{a}+\frac{\overline{y^2\text{tang.}f}^2}{a^2}\right)}.$$

Differenziale dello sforzo favorevole alla rotazione del volante, che nel moto progressivo del sistema risulta sulla convessità dell'ala dalla resistenza dell'aria anteriore

$$\frac{\gamma u^2 e^{-\frac{X'}{k}\overline{\text{tang.}f}^2}}{a^2B'} \frac{y^3\partial x dy}{\cos.\frac{\overline{x\text{tang.}f}^2}{a}\left(\cos.\frac{\overline{x\text{tang.}f}^2}{a}+\frac{\overline{y^2\text{tang.}f}^2}{a^2}\right)}.$$

Integrali di queste differenziali estesi ai quattro margini dell'ala, ossia.

Resistenza assoluta contro la ruota operata da ciascun'ala di ciascun volante

$$\frac{\gamma La^2v^2e^{-\frac{X'}{k}}}{B'^3\overline{\text{tang.}f}^4}\left\{((l''+a)^2-a^2)\,\overline{\text{tang.}f}^2-a^2\log.\frac{a^2+(l''+a)^2\overline{\text{tang.}f}^2}{a^2(1+\overline{\text{tang.}f}^2)}\right\}.$$

Forza assoluta dell'ala in direzione del proprio asse

$$\frac{a\gamma Lv^2e^{-\frac{X'}{k}}}{B'^2\overline{\text{tang.}f}^3}\left\{((l''+a)^2-a^2)\,\overline{\text{tang.}f}^2-a^2\log.\frac{a^2+(l''+a)^2\overline{\text{tang.}f}^2}{a^2(1+\overline{\text{tang.}f}^2)}\right\}.$$

Valore di prima approssimazione dell'angolo d'inclinazione dell'elice interna colla direzione del suo asse, pel quale diviene massima quest'ultima forza, tutti gli altri elementi essendo dati

$$\text{tang.}f = 1 - \frac{[(l''' + a)^2 - a^2][5a^2 + 4(l''' + a)^2] - 6a^2[(l''' + a)^2 + a^2] \log. \frac{a^2 + (l''' + a)^2}{2a^2}}{24[(l''' + a)^2 + a^2] \left\{ [(l''' + a)^2 - a^2] \log. \frac{a^2 + (l''' + a)^2}{2a^2} \right\}}$$

Sforzo totale favorevole alla rotazione del volante, che risulta nel punto del contrasto dei rocchetti in virtù della resistenza dell'aria esterna sulla convessità di ciascun' ala

$$\frac{\gamma L u^2 e^{-\frac{X'}{k}}}{B' \overline{\text{tang.}f}^2} \left\{ ((l''' + a)^2 - a^2) \overline{\text{tang.}f}^2 - a^2 \log. \frac{a^2 + (l''' + a)^2 \overline{\text{tang.}f}^2}{a^2(1 + \overline{\text{tang.}f}^2)} \right\}$$

Momento medio della forza orizzontale dell' ala attorno all' asse primario verticale, ridotte le distanze da quest' asse all' unica dell' asse del volante

$$v^2 W = \frac{a\gamma L v^2 e^{-\frac{X'}{k}} \sqrt{[(B + B')^2 - G^2]}}{B'^2 \overline{\text{tang.}f}^3} \left\{ [(l''' + a)^2 - a^2] \overline{\text{tang.}f}^2 - a^2 \log. \frac{a^2 + (l''' + a)^2 \overline{\text{tang.}f}^2}{a^2(1 + \overline{\text{tang.}f}^2)} \right\}.$$

Resistenza derivante dagli attriti degli assi della ruota, e di ciascun volante nel punto di contrasto della ruota

$$\frac{1}{k'} \left[\frac{c}{B}(Q + q) + \frac{c'q'}{B'} \right].$$

Resistenza d'attrito dei denti fra loro della ruota, e dei rocchetti uguale alla diciottesima parte dello sforzo contrario di tutte le ale, come prescrive Belidor nel caso svantaggioso dei rocchetti a lanterna.

Forza motrice applicata nel punto di contrasto della ruota

$$\frac{bQ}{B}$$

Forza istantanea ridotta al punto stesso generata nella massa del peso discendente Q, nella ruota, e in tutte le parti dell'albero, e dell'ala ruotante, ommessa la piccola massa del velo, e dei fili di suo collegamento longitudinale, e considerato il tamburro, o corona, cui s'avvolge la corda del peso motore, come parte della ruota

$$\frac{dv}{gdt}\left[\frac{bQ}{B}+\frac{2g\gamma\delta i^2 n'}{3B^2}\left[(l''+a)^3-a^3\right]+2g\gamma\delta\pi\left(\frac{l'B^2}{2\lambda}+\frac{l''B'^2}{\lambda'}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{a^2L(\lambda''^4-(\lambda''-1)^4)}{B^2\lambda''^4}\right)\right].$$

La ruota, e'l tamburro unito, i rocchetti e gli alberi dei volanti non si vorranno certamente costruire a tutta solidità colle dimensioni, che d'altronde saranno necessarie; ma si leverà da tutti questi pezzi incavandoli, e traforandoli simmetricamente, e dove conviene, il più che si potrà di superfluo, e fino al limite della sufficiente loro solidità comparativamente all'ufficio di ciascuno. Così richiede non solamente l'economia del materiale, ma sopra tutto il bisogno della massima agilità di tutto il meccanismo. Si calcoleranno perciò i momenti d'inerzia della ruota, e dei rocchetti interamente solidi, ma sotto una lunghezza ridotta $\frac{l}{\lambda}$, $\frac{2l''}{\lambda'}$, che gli accosti al giusto valore secondo l'alleggerimento, e sottrazione di materiale di ciascun caso. Similmente l'albero cilindrico iscritto alla coclea si dee valutare come una grossa canna di raggio totale a, e raggio interno $a\left(1-\frac{1}{\lambda''}\right)$, come è indicato nella formola poc'anzi stabilita.

Ho voluto premettere questa minuta esposizione del processo d'analisi, che ho praticato nell'investigare il presente delicato e importante problema, onde facilitare il giudizio delle seguenti formole, e conclusioni, alle quali pervenni, di suo scioglimento generale, e di pratica sua esecuzione.

Moltiplicando analogamente al sistema proposto di vo-

lanti le resistenze precedenti, e contrapponendone la somma a quella delle forze motrici, ritrovo primieramente l'equazione del moto di rotazione di ciascuno

$$\frac{bQ}{B}-\frac{1}{k'}\left(c\left(\frac{Q+q}{B}\right)+\frac{4c'q'}{B'}\right)-\frac{16.\,19L\gamma e^{-\frac{X'}{k}\left(a^2v^2-B'^2u^2\overline{\text{tang.}f}^2\right)}}{18B'^3\,\overline{\text{tang.}f}^4}\times$$

$$\left\{\left[(l'''+a)^2-a^2\right]\overline{\text{tang.}f}^2-a^2\log.\frac{a^2+(l'''+a)^2\overline{\text{tang.}f}^2}{a^2(1+\overline{\text{tang.}f}^2)}\right\}=$$

$$\frac{dv}{gdt}\left[\frac{bQ}{B}+\frac{3a\,g\gamma\delta n'i^2}{3B'^2}\left[(l'''+a)^3-a^3\right]+2g\delta\pi\gamma\left(\frac{l'B^2}{2\lambda}+\frac{4l''B'^2}{\lambda'}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{4a^4\,L\,(\lambda''^4-(\lambda''-1)^4}{B'^2\lambda''^4}\right]\right.$$

che calcoleremo frattanto sotto la forma

$$A^2-C^2v^2=F^2\frac{dv}{dt} \qquad \text{(A)}$$

sopprimendo il fattore u^2 di concorso dell'aria esterna a favore della rotazione delle coclee. Nel che avremo una prima garanzia della non eccedenza dell'effetto utile, che il calcolo incomincierà a mostrarci sopra quello della pratica.

51. Sia R una resistenza accessoria costante oltre le già dichiarate, cui debba la macchina superare per obbedire all'impulso delle coclee, come accadrà nelle sperienze, che gioverà farne in terra, delle quali parleremo in seguito. Rammentando l'espressione superiore della forza orizzontale, troveremo per una più generale applicazione del problema l'equazione

$$\frac{16a\gamma Lv^2e^{-\frac{X'}{k}}}{B'^2\overline{\text{tang.}f}^3}\left\{\left[(l'''+a)^2-a^2\right]\overline{\text{tang.}f}^2-a^2\log.\frac{a^2+(l'''+a)^2\overline{\text{tang.}f}^2}{a^2(1+\overline{\text{tang.}f}^2)}\right\}-$$

$$Hu^2e^{-\frac{X'}{k}}-R=\frac{P+M}{g}\,\frac{du}{dt} \qquad \text{(B)}$$

essendo H il solito coefficiente della resistenza dell'aria contro l'intero sistema della macchina.

52. Notisi con L', R' l'altezza, e il raggio interno di un cilindro cavo verticale avente asse comune colla macchina e con a la grossezza, con δ' la densità della sua parete; e sia tale questo cilindro, che equivalga all'interno sistema in peso, momento d'inerzia, e ogn'altra resistenza principale venendo soggettato all'azione di due coppie di volanti simili ai precedenti, e similmente ad esso applicate, ma l'una operante in senso contrario all'altra. Ammessa tale determinazione dei nuovi elementi L', R', δ', a, e rappresentata con $H'u^2+H''u$, la resistenza, che l'aria fa doppiamente di semplice adesione, e attrito sulla superficie ruotante, e principalmente di urto diretto contro le parti sporgenti della macchina, risulta per l'analoga forza motrice, premessa questa terza equazione del moto di conversione

$$16v^2W=H'u^2-H''u=\frac{\delta'\pi\gamma L'[(R'+a)^4-R'^4]}{(B+B')^2-G^2}\,\frac{du}{dt}$$

la velocità angolare u intendendosi quella della circonferenza di raggio $\sqrt{((B+B')^2-G^2)}$, quale è appunto quella de' centri d'applicazione delle forze laterali reciproche dei volanti.

Malagevole sarebbe la determinazione dei coefficienti H' H'' di quest'ultima equazione. Ma siam certi, che assai piccola riuscirà la resistenza $H'u^2+H''u$, e perchè già è per se piccolissima la resistenza di semplice adesione dell'aria, e possiamo, come abbiam fatto nel caso precedente, trascurarla, e perchè ad assai poco si ridurrà l'estensione delle parti sporgenti del nostro apparecchio. Per le quali circostanze, allorchè non si tratterà che di calcolare per esempio un primo girar di bordo della nostra navicella, non commetteremo grave errore facendo uso semplicemente dell'equazione

$$16Wv^2=\frac{\delta'\pi\gamma L'}{(B+B')^2-G^2}\,[\,(R'+a)^4-R'^4\,]\,\frac{du}{dt} \qquad (B')$$

53. In questo calcolo abbiamo contemplata la particolare combinazione di quattro volanti di quattro ale ciascuno,

nulladimeno sono di tutta generalità le stesse equazioni precedenti; poichè non vi si ha che da cangiare i coefficienti numerici attuali a norma di ciascun caso particolare diverso dal presente, nei termini esprimenti la somma delle resistenze e i momenti d'inerzia di tutti i volanti, e di tutte le ale.

Inoltre alle equazioni dei due moti orizzontali progressivo, e di conversione intorno all'asse primario sarebbero da aggiungersi quelle del movimento misto derivante dalla resistenza eccentrica artificiale di una vela verticale posteriore, che non si trascurerà di porre in opra sopra l'aereostato, onde compiutamente dominare la direzione del suo movimento progressivo orizzontale. Ma l'effetto di questa essenziale manovra non potendo rimaner dubbio, nè mancare, dimostrato che sia e assicurato quello massime della manovra di traslazione diretta, e tutta l'istruzione, di che potrà aver bisogno così l'artefice, come l'aereonauta, essendo già manifesta per l'esempio che ne offre l'ordinaria navigazione, sarebbe un moltiplicare il calcolo senza necessità l'intraprendere questa secondaria ricerca.

54. Discesa del peso, rotazione delle coclee, e progresso orizzontale del sistema di tutta la macchina. L'equazione (A) integrata dal limite dei valori $t = 0$, $v = 0$ porge

$$v = \frac{A}{C} \frac{e^{\frac{2ACt}{F^2}} - 1}{e^{\frac{2ACt}{F^2}} + 1} = \frac{B}{b} \frac{dx}{dt} \qquad (1)$$

posto $= x$ il tratto, di che si svolge dal tamburro la corda del peso motore nel tempo t. D'onde per nuova analoga integrazione viene

$$t = \frac{BCx}{Ab} + \frac{F^2}{AC} \log. \left\{ 1 + \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{2BC^2x}{bF^2}}\right)} \right\}$$

e al termine della corsa del peso

$$\theta = \frac{BCD'}{Ab} + \frac{F^2}{AC} \log. \left\{ 1 + \sqrt{\left(1 - e^{-\frac{2BC^2D'}{bF^2}}\right)} \right\} \qquad (2)$$

55. Dovendosi per noi limitare alla sola corsa $(\omega+1)$*esima* del peso l' integrazione dell' equazione (B), il termine di essa esprimente la resistenza dell' aria alla fine del tempo t sì poco differirà nei casi di breve durata di tale corsa dall' espressione $HU^2_{\omega} e^{-\frac{X'}{k}}$, che senza timore potremo questa a quello sostituire, e sottrarci salvando una sufficiente approssimazione alle difficoltà della formola Riccatiana dell' equazione stessa, che allora darà l' integrale

$$U'_{\omega+1} = U_{\omega} + \frac{g\theta}{P+M}\left(\frac{A^2E}{C^2} - HU^2_{\omega} e^{-\frac{X'}{k}} - R\right) - \frac{gAEF^2}{C^3(P+M)}\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2AC\theta}{F^2}} + 1}\right)$$

essendo E il coefficiente di v^2 nel primo termine dell' equazione medesima, di cui l'integrale dee prendersi, come abbiam fatto, trai valori $t = 0$, $u = U_{\omega}$; $t = \theta$, $u = U'_{\omega+1}$.

56. Ma quando molto lunga sarà la tratta di discesa del peso, potrà non essere più trascurabile l'errore di questa modificazione del termine dovuto alla resistenza dell' aria nell'equazione (B), l' influenza del quale è principalissima nel problema, che trattiamo. Allora una suddivisione del calcolo dell' equazione sopra un sufficiente numero di parti uguali dell' intervallo di discesa sarà il miglior modo così di scansare lo scoglio di Riccati nella nostra navigazione orizzontale atmosferica, come lo fu per superare l' inciampo iperlogaritmico nella salita e discesa. Ponendo adunque il tempo della corsa del peso

$$\theta = h\,\alpha'$$

e chiamando u'_i la velocità orizzontale della macchina alla fine del tempo parziale ia', se molto ristretto prenderò il tempo a', potrò nel calcolo del moto del tratto consecutivo $(i+1)a'$ lasciare come sopra nell' equazione (B) il termine costante $Hu'^2_i e^{-\frac{X'}{k}}$ in luogo del variabile $Hu^2 e^{-\frac{X'}{k}}$. Ma farò di più a garanzia della non eccedenza dell' approssimazione; porrò in vece la resistenza maggiore $u'^2_{i+1} He^{-\frac{X'}{k}}$, verrà così l'integrale

$$u'_{i+1} = u'_i + \frac{ga'}{P+M}\left(\frac{A^2E}{C^2} - Hu'^2_{i+1}\, e^{-\frac{X'}{k}} - R\right)$$

$$-\frac{gAEF^2}{C^3(P+M)}\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2ACa'}{F^2}}+1}\right)$$

ossia

$$u'_{i+1} = -\frac{M'}{2}\left\{1 - \sqrt{\left[1 + \frac{4}{M'}\left(u'_i + \frac{N'}{M'}\right)\right]}\right\}$$

da integrarsi per rapporto alle differenze di i in tutta l'estensione dell' intervallo θ, ossia trai limiti dei valori

$$i = 0\,,\ u'_0 = U_0\,;\ i = h\,,\ u'_h = U'_{\theta+1}\,,\ \text{essendo}$$

$$M' = \frac{P+M}{gHa'e^{-\frac{X'}{k}}}$$

$$N' = \frac{A^2E}{C^2a'e^{-\frac{X'}{k}}H}\left\{a' - \frac{F^2}{AC}\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2ACa'}{F^2}}+1}\right)\right\} - \frac{R}{He^{-\frac{X'}{k}}}$$

Notiamo i risultati di questa approssimazione nei tre casi dell' intervallo di discesa θ abbastanza corto, perchè 1.° si

giudichi inutile la suddivisione del medesimo; 2.° bastante la suddivisione in due parti; 3.° la suddivisione in tre parti uguali. Si avrà rispettivamente

$$
(3)\quad \begin{cases}
\begin{cases} U'_{o+1} = -\frac{M'}{2} + \frac{M'}{2}\sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'}U_o\right)} \\ a' = \theta \end{cases} \\[2ex]
\begin{cases} U'_{o+1} = -\frac{M'}{2} + \frac{M'}{2}\sqrt{\left[\frac{4N'}{M'^2} - 1 + 2\sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'}U_o\right)}\right]} \\ a' = \frac{\theta}{2} \end{cases} \\[2ex]
\begin{cases} U'_{o+1} = -\frac{M'}{2} \\ \qquad + \frac{M'}{2}\sqrt{\left[\frac{4N'}{M'^2} - 1 + 2\sqrt{\left(\frac{4N'}{M'^2} - 1 + 2\sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'}U_o\right)}\right)}\right]} \\ a' = \frac{\theta}{3} \end{cases} \\[2ex]
\text{ec.}
\end{cases}
$$

Resteranno ora da integrarsi le differenze finite di o essenziali al problema per soddisfare a quelle domande, che apparteranno al periodo di accelerazione della macchina. Ma prima è da determinarsi l' espressione di U_o.

57. Nell' intervallo di restituzione del peso la macchina procede innanzi di moto ritardato espresso dall' equazione

$$-\left(Hu^2 e^{-\frac{X'}{k}} + R\right) g\,dt = (P + M)\,du$$

di cui l' integrale preso dai valori iniziali $t = o$, $u = U'_o$ è

$$t = \frac{P+M}{gR}\sqrt{\left(\frac{R}{H}\, e^{\frac{X'}{k}}\right)}\ \text{arc. tang.}\left[\frac{(U'_{\circ} - U)\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{R + HU'_{\circ}\, u\, e^{-\frac{X'}{k}}}\right] \quad (3)$$

Potrà però accadere, che il presente intervallo sia così lungo, che lasci tempo a spegnersi il moto orizzontale del sistema. Onde ciò non avvenga, richiedesi, che nel rimontare il peso s' impieghi un tempo

$$\theta' < \frac{P+M}{gR}\sqrt{\left(\frac{R}{H}\, e^{\frac{X'}{k}}\right)}\ \text{arc. tang.}\left[U'_{1}\sqrt{\left(\frac{H}{R}\, e^{-\frac{X'}{k}}\right)}\right] \quad (4)$$

Avremo allora dal precedente integrale la formola utile

$$U_{\circ} = \frac{U'_{\circ} - \sqrt{\left(\frac{R}{H}\, e^{\frac{X'}{k}}\right)}\ \text{tang.}\ \frac{g\theta'\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}}{1 + U'\sqrt{\left(\frac{H}{R}\, e^{-\frac{X'}{k}}\right)}\ \text{tang.}\ \frac{g\theta'\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}} \quad (5).$$

Notisi, che la condizione (4) è sempre adempita nel caso di $R = 0$, cioè nel caso di un aereostato, che non ha veruna estrinseca resistenza da vincere, tranne quella dell'aria, che attraversa.

Le due equazioni (3) e (5) serviranno congiuntamente alla determinazione del moto cercato per ciascuna alternativa di discesa, e ritorno del peso.

Ponendo $\frac{ds}{dt}$ in luogo di u negli integrali indefiniti, d' onde provengono le formole precedenti, potremo intraprendere somiglianti approssimazioni degli spazj $S'_{\circ}$, $S_{\circ}$, di che s' avanza in qualunque epoca del suo viaggio la macchina. Ma l'approssimazione più sicura sarà il valor medio, che di queste

due quantità ci verrà somministrato dall'accurata predisposta approssimazione delle velocità U'_{ϖ}, U_{ϖ}.

58. Continuando le alternative del peso costantemente, periodicamente costante, forz' è, che divenga il progresso della macchina orizzontale, e riesca, dopo un certo numero ϖ di alternative $U'_{\varpi+1} = U'_{\varpi}$, $U_{\varpi+1} = U_{\varpi}$. Sottoponendo alla prima condizione le approssimazioni (3), poscia eliminando la velocità U mediante la formola (5), e ordinando si avranno le corrispondenti equazioni determinate da risolvere

$$(6)\quad \begin{cases} \begin{cases} U'^3 + \left(M' + \frac{1}{m'}\right) U'^2 + \frac{M'^2 - 4N'}{4m'} \cdot U' + \frac{M'^2 + 4M'n' - 4N'}{4M'} = 0 \\ \alpha' = \theta \end{cases} \\ \begin{cases} (2U' + M')^2 + M'^2 - 4N' = 2M'^2 \sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'} \cdot \frac{U' - n'}{1 + m'U'}\right)} \\ \alpha' = \frac{\theta}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} (2U' + M')^2 + M'^2 - 4N' = 2M'^2 \sqrt{\left[\frac{4N'}{M'^2} - 1 + 2\sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'} \frac{U' - n'}{1 + m'U'}\right)}\right]} \\ \alpha' = \frac{\theta}{3} \end{cases} \\ \text{ec.} \end{cases}$$

dove è posto

$$m' = \sqrt{\left(\frac{H}{R}\, e^{-\frac{X'}{k}}\right)} \text{ tang. } \frac{g\theta'\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P + M}$$

$$n' = \sqrt{\left(\frac{R}{H}\, e^{\frac{X'}{k}}\right)} \text{ tang. } g\theta' \sqrt{\left(\frac{HRe^{-\frac{X'}{k}}}{P+M}\right)} = m' e^{\frac{X'}{k}} \frac{R}{H}.$$

Di queste equazioni la seconda è del quinto grado, la terza del nono, la quarta sarebbe del 17*esimo*, ec. Ma la prima servirà di prima approssimazione alla seconda, questa alla terza, e così di seguito, cosicchè qualunque fra esse debba scegliersi, facile sarà il risolverla con tutta la necessaria esattezza.

Il valore così ottenuto di U' ci darà quello di U nella formola (5)

$$U = \frac{U - n'}{1 + m' U'} \qquad (7)$$

Si rammenterà in fine, che quando si tratterà di una macchina aereostatica animata dalle nostre coclee, dovrà farsi in queste equazioni $R = 0$, ossia

$$n' = 0$$

$$m' = \frac{gH\theta' e^{-\frac{X'}{k}}}{P+M}$$

$$N' = \frac{A^2 E}{C^2 a' H e^{-\frac{X'}{k}}} \left\{ a' - \frac{F^2}{AC} \left(1 - \frac{2}{\frac{2ACa'}{e^{F^2}} + 1} \right) \right\}.$$

E veramente sarà ben questo solo il caso, nel quale occorrerà di ricercare il moto periodico del nostro sistema. Perocchè nelle sperienze in terra, che obbligheranno a calcolare una resistenza R oltre quella dell'aria, sarà difficile accorrere così prontamente, e regolarmente a rimontare il peso, che coll'azione di questo non rimanga sospeso, o almeno perturbato anche il moto della macchina. Per la qual cosa tutto allora si ridurrà al calcolo del solo moto della prima corsa,

del peso. Che se in tal caso potrà aver luogo uniformità di moto della macchina in virtù di sufficiente prolungamento dell'intervallo operato coll'artifizio accennato al num. 47, lo rileveremo dalle successive integrazioni dell'equazione a differenze finite del num. 56, le quali condurranno a valore costante di u'_i prima di esaurire il numero degli intervalli d' costituenti la durata θ della corsa del peso.

59. Nel moto ridotto a permanente periodo lo spazio descritto orizzontalmente in un numero ω d'alternative, equivarrà d'ordinario allo spazio medio prossimamente

$$S = \frac{\omega}{2}(\theta + \theta')(U' + U).$$

Se piacesse però per maggiore sicurezza una più diretta approssimazione anche di questa quantità, o la lunghezza dell'intervallo θ la rendesse necessaria; l'equazione (B), e quella del num. 57. soddisfaranno anche a questo intento. L'equazione del n. 57, protrattone il primo integrale fino alla terza potenza della frazione sempre piccola

$$\frac{g\theta'\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}$$

darà dopo la sostituzione di $\frac{ds}{dt}$ al posto di u

$$S_\omega = S'_\omega + \frac{\theta U'_\omega}{1+h'}\left(1 + \frac{h'g'^2\theta'^2}{2.3(1+h')}\right) - \frac{g'k'\theta'^2}{2.3(1+h')} \qquad (8)$$

essendo quì

$$h' = U'_\omega\sqrt{\left(\frac{H}{R}e^{-\frac{X'}{k}}\right)}$$

$$k' = \sqrt{\left(\frac{R}{H}e^{\frac{X'}{k}}\right)}$$

$$g' = \frac{g\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}$$

E rigorosamente nel caso di $R = 0$

$$S_{\omega} = S'_{\omega} + \frac{P+M}{gHe^{-\frac{X'}{k}}} \log. \left(1 + \frac{gH\theta' U'_{\omega} e^{-\frac{X'}{k}}}{P+M} \right) \qquad (9).$$

Colla doppia integrazione simile dell' equazione (B), e coll' artifizio, e secondo i varj casi del num. 56. dedurremo tra i limiti del rispettivo intervallo θ

$$(10) \quad \begin{cases} S'_{\omega+1} = S_{\omega} + \alpha' U_{\omega} + \frac{gA^2E}{(C^2P+M)} \left[\frac{\alpha'^2}{2} - \frac{F^2\alpha'}{AC} + 4 \log. \frac{2e^{\frac{2AC\alpha'}{F^2}}}{e^{\frac{2AC\alpha'}{F^2}} + 1} \right] - \\ \qquad \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{U'_{\omega+1}}{M'} + \frac{gR\alpha'}{P+M} \right) \\ \alpha' = \theta \\ S'_{\omega+1} = S_{\omega} + \alpha' U_{\omega} + \frac{gA^2E}{C^2(P+M)} \left[\alpha'^2 - \frac{2F^2\alpha'}{AC} + 8 \log. \frac{2e^{\frac{2AC\alpha'}{F^2}}}{e^{\frac{2AC\alpha'}{F^2}} + 1} \right] - \\ \qquad \frac{\alpha'}{2} \left(\frac{U'^2_{\omega+1}}{M'} + \frac{2gR\alpha'}{P+M} \right) - \frac{\alpha' M'}{8} \left[1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'} U_{\omega} \right)} \right] \times \\ \qquad \left[5 - \sqrt{\left(1 + \frac{4N'}{M'^2} + \frac{4}{M'} U_{\omega} \right)} \right] \\ \alpha' = \frac{\theta}{2} \\ \qquad \text{ec.} \end{cases}$$

Da queste formole si avrà lo spazio $S'_{\omega+1} - S_{\omega}$ percorso durante la *ωesima* qualunque resituzione del peso; e dalla precedente (8), oppur (9) quello, che la macchina percorre nell' *ωesima* corsa del peso stesso rappresentato da $S_{\omega} - S'_{\omega}$. Onde

sommando queste differenze mediante la successiva sostituzione dei valori delle velocità U_{ω}, $U'_{\omega+1}$ di sopra assegnate troveremo lo spazio cercato totale.

Lo spazio descritto di moto stabilito in ω alternative nel caso di $R=0$, e in quello di $\alpha'=\frac{\theta}{2}$ vien ridotto da questo calcolo più esatto alla formola

$$S'=\frac{\omega(P+M)}{gHe^{-\frac{X'}{k}}}\log.\left(1+\frac{gH\theta'U'e^{-\frac{X'}{k}}}{P+M}\right)+\frac{\frac{\omega\theta}{2}U'(P+M)}{P+M+gH\theta'U'e^{-\frac{X'}{k}}}+$$

$$\frac{A^2g\omega E}{C^2(P+M)}\left[\frac{\theta^2}{4}-\frac{F^2\theta}{AC}+8\log.\frac{2e^{\frac{AC\theta}{F^2}}}{e^{\frac{AC\theta}{F^2}}+1}\right]-\frac{\omega g\theta^2U'^2He^{-\frac{X'}{k}}}{8(P+M)}-$$

$$\frac{\omega(P+M)}{8gHe^{-\frac{X'}{k}}}\left[1-\sqrt{\left(1+\frac{4N'}{M'^2}+\frac{4U'}{M'}\cdot\frac{P+M}{P+M+gH\theta'U'e^{-\frac{X'}{k}}}\right)}\times\right.$$

$$\left.\left[5-\sqrt{\left(1+\frac{4N'}{M'}+\frac{4U'}{M'}\cdot\frac{P+M}{P+M+gH\theta'U'e^{-\frac{X'}{k}}}\right)}\right]\right. \quad (11)$$

dove il valore da sostituirsi di U' è quello della seconda delle formole (6), e i valori di M', N' sono

$$M'=\frac{2(P+M)}{C^2H\theta e^{-\frac{X'}{k}}}$$

$$N'=\frac{2A^2E}{C^2\theta He^{-\frac{X'}{k}}}\left\{\frac{\theta}{2}-\frac{F^2}{AC}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{AC\theta}{F^2}}+1}\right)\right\}.$$

60. Moto unico di conversione della macchina sul proprio asse verticale. L'equazione superiore (B'), giacchè per l'ommessione della resistenza dell'aria si conserva la stessa in tutto l'intervallo θ di restituzione del peso la velocità angolare U'_{ω}

finale dell' intervallo antecedente, si deve integrare coi limiti $t = 0$, $u = U'_o$; $t = \theta$, $u = U'_{o+1}$. Per la ragione stessa l'espressione $\frac{ds}{dt}$ s'integrerà in modo, che $t=0$ renda $s=S'_o+\theta' U'_o$. Si ha così, e togliendo in oltre le differenze finite,

$$U'_o = \frac{16oWA^2[(B+B')^2-G^2]}{\pi\gamma\delta' L' C^2[(R'+a)^4-R'^4]}\left\{\theta - \frac{F^2}{AC}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{2AC\theta}{F^2}}+1}\right)\right\} \qquad (12)$$

velocità angolare indefinitamente crescente col crescere del numero delle alternative, come dovea risultare, soppressa l'estrinseca resistenza dell'aria, ma velocità abbastanza esatta per poche prime alternative, pel calcolo per esempio della prima conversione dell' aereostato, che è forse l'unico oggetto di qualche utilità di questo parziale problema.

Lo spazio circolare di raggio $\sqrt{[(B+B')^2-G^2]}$ descritto contemporaneamente risulterà dopo l'integrazione di tutte le differenze

$$S = \frac{16oWA^2[(B+B')^2-G^2]}{\pi\gamma\delta' L' C^2[(R'+a)^4-R'^4]}\left\{\frac{\theta^2}{2}+\frac{F^2\theta}{AC}-\frac{F^4}{A^2C^2}\log.\frac{e^{\frac{2AC\theta}{F^2}}+1}{2}+\right.$$

$$\left.\frac{(o-1)(\theta+\theta')}{2}\left\{\theta-\frac{F^2}{AC}\left(1-\frac{2}{e^{\frac{2AC\theta}{F^2}}+1}\right)\right\}\right\} \qquad (13).$$

61. Se la macchina in vece d'essere sospesa nell' atmosfera ruotasse fra due ritegni in terra gravitando con tutto il proprio peso P+M; all' equazione (B') dovrebbe aggiungersi il termine $-\frac{c''}{7}\cdot\frac{P+M}{\sqrt{[(B+B')^2-G^2]}}$ e limitarsi la sua integrazione ai valori $t = 0$, $u = U_o$; $t = \theta$, $u = U'_{o+1}$. E si farebbe luogo al calcolo a parte di quest' altra equazione per l' intervallo di restituzione del peso

$$\frac{-c''(P+M)}{7} = \frac{\pi\gamma\delta' L'}{\sqrt{[(B+B')^2-G^2]}}\left((R'+a)^4-R'^4\right)\frac{du}{dt}$$

tra i limiti $t=0$, $u=U'_o$; $t=\theta'$, $u=U_o$, essendo c'' il raggio medio del disco premente dell' asse. Eseguite anche in questo caso tutte le integrazioni così delle differenziali, come delle differenze finite, scioglieranno compiutamente il problema del moto rotatorio della macchina durante l'intera discesa del peso le due formole

$$(14)\quad \begin{cases} U'=\dfrac{16A^2W[(B+B')^2-G'^2]}{C^2L'\delta'\pi\gamma[(R'+a)^4-R'^4]}\left\{\theta-\dfrac{F^2}{AC}\left(1-\dfrac{2}{e^{\frac{2AC\theta}{F^2}}+1}\right)\right\}- \\ \qquad \dfrac{\theta c''(P+M)\sqrt{[(B+B')^2-G^2]}}{7L'\delta'\pi\gamma[(R'+a)^4-R'^4]} \\ S'=\dfrac{16A^2W[(B+B')^2-G^2]}{C^2L'\delta'\pi\gamma[(R'+a)^4-R'^4]}\left\{\dfrac{\theta^2}{2}+\dfrac{F^2\theta}{AC}-\dfrac{F^4}{A^2C^2}\log.\dfrac{e^{\frac{2AC\theta}{F^2}}+1}{2}\right\}. \end{cases}$$

62. Siamo venuti sviluppando il calcolo del giuoco, e dell' effetto delle proposte coclee volanti lasciando indietro nell' equazione principale (A) la parte $\frac{C^2B'^2U^2\overline{\text{tang.}f}^2}{a^2}$ della forza motrice A'; la conservazione del qual termine variabile avrebbe reso estremamente complicato il progredire fino al segno, dove siam giunti. Ma così siam certi d' avere commesso il meno pericoloso degli errori nelle formole ottenute, un errore in meno atto a compensare l'error contrario della teoria, inevitabile in questo genere di applicazioni, derivante massime dalla non mai verificata esattezza dei dati del calcolo. Ecco tuttavia il modo di togliere in gran parte questo errore nelle formole, e nell' epoca del problema, che più interessano, del moto progressivo ridotto a stato permanente.

Determinata con quelle formole la minore U delle due velocità periodiche sotto la predetta mutilazione della forza motrice, ossia come se le coclee coperte in fronte non soggiacessero all' immediata resistenza dell' aria esterna, se ne so-

stituisca il valore nel termine da prima trascurato in luogo di u, e ripigliando l'equazione (B) in vece di A^2 vi si ponga

$$A'^2 = A^2 + \frac{C^2 B'^2 U^2 \operatorname{tang} f^2}{a^2}.$$

E come se, dappoichè il moto orizzontale dovuto alla sola forza A^2 si rese permanente, fosse levato al principiare d'un' alternativa del peso il riparo, per cui l'aria anteriore non avea presa sul convesso delle coclee, s'intraprenda il calcolo della conseguente variazione di quel primo moto, e del nuovo tenore periodico, in cui esso si comporrà ben presto. Anche nelle formole (1), (2) del moto delle coclee dovrà farsi il cangiamento di A in A'.

Se tralascieremo la correzione del num. 56. meno assai necessaria nel presente caso, e tanto meno necessaria, quanto più breve sarà l'intervallo θ, e conserveremo l'equazione del num. 55; il moto orizzontale progressivo nuovamente variato sarà nel caso inoltre di R=o ridotto prossimamente alle due equazioni, notate con V', V le velocità,

$$V'_{o+1} = V_o + \frac{g\theta}{P+M}\left(\frac{A'^2 E}{C^2} - HV^2_o e^{-\frac{X'}{k}}\right) - \frac{gA'EF^2}{C^3(P+M)}\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2A'C\theta}{F^2}} + 1}\right),$$

$$V_o = \frac{V'_o(P+M)}{P+M+gH\theta V'_o e^{-\frac{X'}{k}}}$$

e fatto

$$Z = \frac{gA'E}{C(P+M)}\left\{\frac{A'^2}{C} - \frac{F^2}{C^2}\left(1 - \frac{2}{e^{\frac{2A'C\theta}{F^2}} + 1}\right)\right\}$$

le velocità del moto corretto permanente si avranno dalle equazioni

$$(15)\begin{cases} V'^3+V'^2\left\{\frac{\theta'+\theta}{\theta'^2}\cdot\frac{P+M}{gHe^{-\frac{X'}{k}}}-Z\right\}-\frac{2Z(P+M)}{gH\theta' e^{-\frac{X'}{k}}}V'=\frac{Z(P+M)^2}{g^2H^2\theta'^2 e^{-\frac{2X'}{k}}} \\ V=\frac{V'(P+M)}{P+M+gH\theta'V'e^{-\frac{X'}{k}}} \end{cases}$$

e il viaggio di ω alternative dalla terza, che si ha sommando la formola superiore (9), e la prima delle susseguenti (10), mutando A in A', e integrando le differenze finite

$$S'=\omega\theta V+\frac{g\omega A'^2E}{C^2(P+M)}\left\{\frac{\theta^2}{2}-\frac{F^2\theta}{A'C}+4\log.\frac{2e^{\frac{2A'C\theta}{F^2}}}{e^{\frac{2A'C\theta}{F^2}}+1}\right\}-\frac{g\omega V'H\theta^2 e^{-\frac{X'}{k}}}{2(P+M)}$$

$$+\frac{\omega(P+M)}{gHe^{-\frac{X'}{k}}}\log.\left(1+\frac{g\theta'HV'e^{-\frac{X'}{k}}}{P+M}\right) \qquad (16).$$

63. Sospendendo il volatore col terminare di una corsa del peso in qualunque epoca del viaggio permanente l'azione delle coclee, l'aereostato progredirà tuttavia indefinitamente, nè l'impressa finale velocità V' si ridurrà mai rigorosamente a zero. Bensì il moto diverrà in breve lentissimo, e insensibile, come si vede dalle equazioni, che lo rappresentano, dedotte dall'equazione generale (B) nel caso presente di $v=0$, $R=0$

$$\left.\begin{aligned} u&=\frac{V'(P+M)}{P+M+gHV'te^{-\frac{X'}{k}}} \\ S&=\frac{P+M}{gHe^{-\frac{X'}{k}}}\log.\left(1+\frac{gtHV'e^{-\frac{X'}{k}}}{P+M}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

In qualunque altro sperimento della proposta combinazione di coclee volanti, nel quale oltre la resistenza dell'aria frappongasi altra resistenza costante R, il moto orizzontale residuato dopo l'ultima corsa del peso si troverà similmente per l'equazione (B) ridotto alle due

$$(18)\qquad u = \frac{U'\sqrt{\left(HRe^{-\frac{X'}{k}}\right)} - R.\text{tang.}\,\frac{g't\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}}{\sqrt{R} + U'\sqrt{\left(He^{-\frac{X'}{k}}\right)}\,\text{tang.}\,\frac{g't\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}}.$$

$$S' = \frac{2t\left[U'\sqrt{\left(HRe^{-\frac{X'}{k}}\right)} - R\right]}{U'\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})} + \sqrt{R}} - \frac{P+M}{gHe^{-\frac{X'}{k}}}\left\{\begin{array}{l}\text{log.}\ \dfrac{\sqrt{R}}{\text{cos.}\,\dfrac{g't\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}{P+M}} \\ -\text{log.}\left[\sqrt{R} + U'\sqrt{\left(He^{-\frac{X'}{k}}\right)}\,\text{tang.}\,\dfrac{g't\sqrt{HRe^{-\frac{X'}{k}}}}{P+M}\right]\end{array}\right\}$$

le quali ci mostrano, che in questo caso il moto impresso coll' ultima corsa del peso cessa interamente dopo il tempo

$$(19)\left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{P+M}{g\sqrt{(HRe^{-\frac{X'}{k}})}}\ \text{arc. tang.}\left[U'\sqrt{\left(\dfrac{He^{-\frac{X'}{k}}}{R}\right)}\right] \\ \text{e alla distanza dal luogo, dove fu interrotta l'azione del peso} \\ S = \dfrac{2(P+M)}{g\sqrt{(He^{-\frac{X'}{k}})}}\cdot\dfrac{U'\sqrt{(He^{-\frac{X'}{k}})} - \sqrt{R}}{U'\sqrt{(He^{-\frac{X'}{k}})} + \sqrt{R}}\ \text{arc tang.}\left[U'\sqrt{\left(\dfrac{He^{-\frac{X'}{k}}}{R}\right)}\right] + \\ \qquad \dfrac{P+M}{2gHe^{-\frac{X'}{k}}}\ \text{log.}\left[\dfrac{1}{R}\left(R + HU'^2e^{-\frac{X'}{k}}\right)\right] \end{array}\right.$$

Finirò questo numero avvertendo di nuovo, che nelle approssimazioni precedenti del moto della macchina durante il corso del peso ho considerato principalmente il caso svantaggioso di una breve durata θ della corsa medesima. Quando al contrario sarà molto lungo questo intervallo, potrà in esso stesso aver luogo permanenza di moto, e allora bisognerà fermarsi sull' equazione a differenze finite del num. 56. integrandola colle sostituzioni fin dove si troverà costante il valor di u'_i, e ciò pel primo intervallo d'azione del peso. Si procederà con tal valore al calcolo del susseguente intervallo d'azione; e il numero delle sostituzioni in questo necessarie per giugnere alla permanenza, numero, che misura il tempo dell' accelerazione, sarà lo stesso per tutte le altre alternative di seguito.

64. XI. Prendiamo ora saggio numerico anche delle formole di questa manovra orizzontale assumendo elementi in pratica il più che sia possibile opportuni e verificabili, o tali almeno, che certi essere possiamo, che i risultati di una buona esecuzione al di sotto non rimarranno a quelli, che le formole ci daranno ad argomentare.

Siano primieramente pel sistema della ruota

$Q =$ lib. 90 $=$ Kilog. 32,5665; $D' =$ pie. 10 $=$ met. 3,00983;

$B =$ pie. 2, $b = p.\ 1\ \frac{5}{6}$; $C = p.\ \frac{1}{24}$; $\theta' =$ min. sec. 75.

Pel sistema dei volanti

$2L =$ pie. 6; $a = p.\ \frac{1}{2}$; $c' = c = \frac{1}{24}$; $B' = p.\ \frac{1}{2}$; $l'' = p.\ 1\ \frac{1}{2}$;

$i^2 =$ pie. quad. 0,000341; $n' = 13$.

Diamo a tutte le parti la densità del ferro, e sia perciò comparativamente all' aria

$$\delta' = \delta = 6490.$$

Per la quale ipotesi potremo assumere con tutta l'abbondanza di pesi, e momenti d'inerzia

$$\frac{P}{2} = \frac{2l''}{21} = p\,\frac{1}{24}$$

$$\lambda'' = 18\,.$$

D' onde viene

$$q = \text{lib. } 635{,}119433377.$$
$$q' = \text{lib. } 96{,}697261307.$$

Prendiamo di gradi 45 l' angolo di ravvolgimento dell' elice direttrice sopra il suo albero. Questo valore, che per la facilità della costruzione sarà realmente preferito ad ogni altro in tutti i casi, molto non differirà da quello del massimo effetto, come si potrà riscontrare coll' apposita formola superiore fra quelle del num. 49. Sarà perciò

$$\text{tang. } f = 1$$

e di quì avremo il totale ravvolgimento dell' elice sulla sua armatura cilindrica di raggio $a = p.\frac{1}{2}$, e di lunghezza $2L = p.\,6$.

$\frac{2L}{a\pi}\,360^\circ = 1375^\circ{,}09873177$, tre giri e mezzo $+15^\circ{,}09873177$; la lunghezza dell' elice stessa, ossia del margine interno dell' ala

$$\frac{2L}{\cos.f} = \text{pie. } 8{,}4852811$$

quella del margine esterno

$2L\sqrt{\left(1 + \frac{(l''' + a)^2}{a^2}\right)} = \text{pie. } 36{,}49657518.$ e l'ampiezza dell' ala

(Form. super.) = pie. quad. 53,312213046. Sia di 30. piedi il diametro del globo principale, la carica del gas a tutta sua capacità, e l' altezza d' equilibrio verticale di piedi

$$X' = 500$$

dal che si deduce il carico totale $P + M = \text{lib. } 2460{,}6288331.$ e il coefficiente della resistenza dell' aria

$$He^{-\frac{X'}{k}} = 1,25141647.$$

Ma aggiungendo la resistenza dovuta al sistema delle coclee, faremo abbondantemente

$$He^{-\frac{X'}{k}} = 1,66.$$

Passando ora dagli elementi di costruzione alle equazioni del giuoco, e dell' effetto della macchina trovo i coefficienti primarj

$$A^2 = 75,781978197816.$$
$$C^2 = 2,8766675329.$$
$$F^2 = 230,740167217.$$
$$E = 2,98125143 41.$$
$$m' = 1,30569887925.$$

Pei quali valori, e per le altre riduzioni di tutti i coefficienti, che tralascio di quì registrare, ottengo primieramente dalle formole del moto del peso, e delle coclee

$$v = 2,5047572235 2 \text{ pie. per sec.}$$
$$\theta = 8,3364955357 \text{ secondi.}$$

Onde rammentando, che v è la velocità angolare dell' estremità del raggio della ruota si conchiude, che nella costruzione di questo esempio le coclee nell' atto dell' arrivo del peso al termine della sua corsa sono animate da tale velocità, che compiono una rotazione in minuti secondi 1,384690125; e il peso discende in quell' istante colla velocità di piedi 2,296027745. per secondo. Il volatore pronto colla mano al tamburro della ruota saprebbe prevenire l'agitazione, e lo strappamento, che per tale subitanea interruzione di moto succederebbe nella macchina. Oltrecchè vi sarebbe provveduto con opportuno stabile riparo, e sopra tutto colla suddivisione del peso, e della sua corsa nel modo accennato di sopra, la quale particolarità di costruzione non

può alterare notabilmente la realtà del calcolo di un peso solo, e di una sola corsa.

Se per la ricerca del moto uniforme dell' aereostato faremo uso della terza delle formole (6) combinata colla (7), troveremo, che quella equazione dà risultati di segno contrario per le due ipotesi $U = 0,5$; $U' = 0,45$. Possiamo con sicurezza limitarci senz' altro calcolo all' approssimazione
$U' = 0,46$

pel qual valore deriva dalla formola (7)
$U = 0,2874$.

Dalla formola assegnata nel principio del numero 59. si ha prossimamente il viaggio medio orizzontale dell'aereostato
$S =$ piedi 1345, 32 per ciascun' ora

ossia in meno di 42. alternative del peso motore.

Questi risultati sono già per se soli bastanti, avuto riguardo alla precauzione, colla quale gli abbiamo ottenuti, ad assicurarci della possibilità del buon effetto del nostro meccanismo, sebbene vi manchi tutta la parte dovuta alla resistenza dell' aria esterna sul convesso delle coclee. Immaginiamo, che dopo questo primo stabilimento del moto orizzontale del sistema vengano scoperte in fronte le coclee, e vediamo colle formole del num. 62 il miglioramento, che nell' effetto loro ne risulta prossimamente. Nella prima alternativa del peso, nella quale le coclee urtano immediatamente l' aria anteriore colla velocità comune 0, 2874. guadagnano così in velocità di rotazione, che dalle prime equazioni del numero suddetto si ha

$V'_1 = 0,8591431$.
$V_1 = 0,404911$.

Dopo la seconda alternativa
$V'_2 = 0,9648802$.
$V_2 = 0,426986$.

e così rapidamente crescendo il moto orizzontale dell' aereostato arriva a comporsi stabilmente nelle alterne velocià

$V' = 1,077373$) piedi per minuto secondo. Form. 15.
$V = 0,447651$)

il tempo della corsa del peso essendo ora
$\theta = 8,313030408$.

Onde si ha il vistoso tragitto medio orizzontale di piedi $S' = 2745,0432$ per ciascun' ora.

L'essere questo di oltre il doppio maggiore dell'effetto precedente tiene in parte al diverso modo di approssimazione adoprato al num. 62. Al numero 56. abbiamo soggettato l'aereostato ad una resistenza dell' aria maggiore della vera, impiegandone l'espressione $Hu'^2_{i+1} e^{-\frac{X'}{k}}$, mentre al num. 62. abbiamo espressa tale resistenza in ciascuna alternativa pel termine $HV^2_{\omega} e^{-\frac{X'}{k}}$ dovuto alla velocità finale dell'alternativa precedente. È però da notare, che in compenso è anche minore del vero il conto, che ivi abbiam fatto della cooperazione dell' aria esterna alla rotazione delle coclee, avendola desunta dalla sola velocità permanente U del moto a coclee coperte. Si può dunque tenere per fermo, che il viaggio, che si otterrebbe colla particolare combinazione del proposto esempio, è per lo meno compreso in grandezza fra i due, che abbiamo derivati dalla teorica della macchina senza contare il di più, che ne sarebbe venuto, se profittato avessimo della possibilità di una più sollecita restituzione del peso motore, di una frequenza assai minore di quella interruzione, e di una più economica e vantaggiosa determinazione del coefficiente F^2 della prima equazione.

65. Pienamente rassicurati dal calcolo più scrupoloso, e circospetto di un effetto abbondante e immancabile del più semplice artifizio meccanico, che aggiungere si possa all' ordinario apparecchio dei globi aereostatici pel bramato intento del permanente loro moto orizzontale, ritorniamo al divisamento della pratica esecuzione. Fra le condizioni della quale

già dichiarate superiormente quella è da raccomandarsi particolarmente, che l'aggiunto meccanismo s'accosti il più che sia possibile al centro di resistenza dell' aria sopra l'intero sistema, e librato esattamente, e stabilmente d' intorno all' asse comune del globo, e della galleria, serbi con questa la più perfetta uniformità, e simmetria di volumi e di pesi parziali d' intorno a quest' asse medesimo. Anche del modo di governare lo stesso moto orizzontale abbiam fatto cenno di sopra. Ma la forma, e la situazione di una vela posteriore di governo, quale ci viene suggerita dall' ordinaria navigazione, potrebbe non essere la più opportuna sia per la facilità del maneggio, sia per la prontezza dell' effetto, cui dee servire sopra un aereostato, dove la comodità non meno che la facilità, e speditezza è da curarsi diligentemente d' ogni minimo servizio d' una qualunque manovra orizzontale. A me sembra, che meglio adempirebbe queste condizioni una semplice ventola verticale affidata a interno registro di piena comodità del volatore, e a guide resistenti, per le quali spiegarla all' uopo, e ammajnarla di fianco in direzione perpendicolare a quella degli assi delle coclee. Anzi gioverà che questa specie di saracinesca abbia giuoco nello stesso piano diametrale della galleria, poichè in tal guisa ricevendo sul principio in tutta la sua lunghezza l' azione dell'aria, e trasmettendola all' aereostato col massimo braccio di leva del suo centro, più pronta ne renderà la conversione. In due casi principalmente avrà bisogno il volatore di farne uso, 1.° quando nell' atto di sciogliere la macchina al moto orizzontale ne trova le coclee motrici rivolte coi loro assi in direzione diversa da quella, sulla quale vuole incamminarsi; 2.° quando dopo d' aver progredito sopra una data direzione, o per sua scelta, o per declinare da obbliqua, o contraria corrente sopravvenuta, abbia a indirizzare il suo viaggio altrove.

Nel primo caso si spiegherà la ventola nell'atto stesso, che incomincia l' azione del peso, e delle coclee. E i due moti nascenti di traslazione, e di rotazione, si cambieranno blan-

damente insieme, e in tal guisa, che almen prossimamente la ventola si conserverà normale alla trajettoria del centro, e quindi alla resistenza dell' aria. Nel secondo caso converrà scegliere un intervallo di sospensione del peso motore per metter fuori la ventola; poichè allora l' urto dell' aria decrescendo successivamente pel decrescere del moto stesso di traslazione, più facile si rende il troncare la rotazione nel momento opportuno, che ora diremo.

Attento frattanto in ambi i casi alla bussola il volatore, quando vedrà per essa la macchina vicina alla richiesta direzione, non basterà già per conservarvela, che ritiri la ventola; poichè il moto impresso di rotazione l' oltrepasserà appena dopo d' averla raggiunta. Sarà perciò indispensabile una seconda ventola simile sul fianco opposto della galleria, la quale al ritirarsi della prima, sorta subito ad ammorzare coll' inversa sua resistenza il moto residuo di conversione dell' aereostato. Col facile alterno giuoco delle due ventole il volatore presto ridurrà stazionario l' ago della sua bussola, e stabile la sua corsa sulla corrispondente bramata direzione. Senza questo secondo registro di correzione, necessario d' altronde per aver mezzo di piegare il corso così a destra come a sinistra ugualmente secondo il bisogno, proseguirebbe la macchina a girare, benchè fosse raccolta la ventola ovvero questa, se rimanesse spiegata, arriverebbe a coprirsi all' indietro della macchina, e a sottrarsi al contrasto dell'aria passando ad affrontarla dalla parte opposta, per retrocedere di nuovo tenendo a guisa di bilanciere in perpetua alterna oscillazione la macchina. Bella occasione sarebbe questa di far prova delle formole universali della meccanica analitica, riportandovi tutta la varietà di movimenti, di epicicloidi e di trajettorie, cui potremmo soggettare il corpo che andiam guidando nell' atmosfera. Ma basta anche di questo problema la parte, che ormai abbiam data, quanta si doveva, al proposito di questa Memoria di servire più che al calcolo, alla realtà e al puro bisogno della pratica.

66. Restami da insegnare con maggiore precisione l' effettiva composizione delle coclee, e'l modo di sperimentarne in terra, non l' effetto, che già è abbastanza assicurato pel calcolo e pei risultati precedenti, e piena è la meccanica di felici applicazioni del principio medesimo; bensì il giuoco e il delicato servizio dell' identica particolare combinazione, di cui si tratta. La figura 1.ª della quì annessa tavola porge un' indicazione dell' armatura principale, quale in pratica potrà eseguirsi di una coclea semplice. Fra le costole trasversali se ne vede buon numero di più robuste uniformemente distribuite, che arrivando sino all'asse vi tengono collegato tutto il rimanente. Altri bracci di ritegno in ogni senso potranno stabilirsi nell' albero a norma dell' ampiezza, del peso, e della forza di resistenza, di questa specie di armatura di scala a chiocciola. La quale si vede in oltre nella figura accompagnata da ambe le parti come dal profilo del cancello, e parapetto di siffatte scale. Mostra esso una doppia sponda di latta, che elevata di qualche oncia sopra il velo spirale in tutta la sua lunghezza, terrà vieppiù obbligata l' aria all' azione del velo ruotante, e senza dubbio procaccierà sul giuoco dell' aria stessa un miglioramento analogo a quello sensibilissimo delle ruote idrauliche a palette concave o circondate da bordo saliente dimostrato da La-Grange, e nuovamente illustrato dal Cav. Morosi.

Converrà per tal fine costruire due cilindri di latta, e segnare sovr' essi le due fettuccie spirali, forarle nei punti, ove dovranno connettersi coll' armatura del velo, indi tagliarle per metterle in opra nella coclea, al che facilmente s' addatteranno per la curvatura cilindrica abituale già da esse contratta. Esattamente corrispondenti ai fori così predisposti nelle due sponde dovransi collocare, e fermare nell' albero i bracci normali, o maggiori costole di ritegno, e collegamento dell' armatura.

Si poseranno perciò i due cilindri di latta con asse comune sopra un disco bene appianato di legno; e sopra que-

sto si projetteranno i centri dei fori aperti secondo l' andamento spirale predetto. Il disco è rappresentato nella figura 2; e le projezioni dei fori sono espresse dai numeri 1, 2, 3, ec. Se ne compongano ora di questi dischi di legno quanti speroni trasversali occorrono alla fermezza della coclea; e similmente divise le basi loro con linee rette in tanti settori, quanti corrispondono alle segnate projezioni, sovrappongansi l' uno all' altro in modo, che le linee di divisione, e i numeri, che le distinguono, collimino sulle stesse verticali esattamente, e in tale collocamento si stringano tutti insieme. La pila così risultante si fori circolarmente d' intorno all' asse; e ai dischi minori di legno che se ne caveranno, sostituiscansene altrettanti di ferro uguali prolungando anche sovr' essi, e incidendovi le linee di divisione delle corone residue di legno.

Si traforino di nuovo per l' asse i dischi di ferro sostituiti, e l' apertura sia parallelepipeda. Parallelepipedo in fine si costruisca l' albero della coclea, e di grossezza pari al traforo precedente della pila di ferro. I dischi, che la compongono, s' infilino ad uno ad uno equidistanti, e nelle distanze espresse dal numero loro sopra la lunghezza dell' albero, il quale nei tratti intermedj potrà alleggerirsi, e ridursi a minore grossezza cilindrica. A ciascun disco e all' albero nel tempo stesso s' avviti stabilmente uno dei principali bracci rettilinei trasversali in guisa, che il braccio annesso al primo disco inferiore collimi sulla linea segnata col numero 1, come TT' nella figura 2; quello annesso al secondo coincida colla linea del numero 2, colla linea 3 il braccio del terzo disco, e così di seguito. Con tale addattamento saranno questi pezzi interamente dominati dalla rotazione dell' albero, e faranno un corpo solo con esso, mentre presenteranno compiuto, e nella giusta disposizione il nerbo dell' armatura della coclea. Saranno questi bracci i primi a ricevere le due sponde di latta pei fori loro corrispondenti, fra le quali s' inseriranno poscia e si metteranno in tensione

le altre minori legature trasversali in direzione perpendicolare all' asse; le quali dovransi inoltre sostenere, e rafforzare con altre intermedie longitudinali massime nel caso di notabile ampiezza della coclea.

Non essendo la superficie continua, cui si avvicina questa facile costruzione, del genere delle sviluppabili, non potrà a rigore addattarsi ai quadrilinei dell'armatura niuno dei veli ordinarj di tessuto rettilineo e piano. Ciò non ostante potremo farne uso senza timore massime col presidio delle divisate due sponde salienti, fra le quali l' aria fuggitiva supplirà ben essa la piccola discontinuità del letto che le prepariamo. Soltanto dovrà mettersi diligenza nell' addossare il lustrino o altro velo all' armatura, acciocchè uniforme e inalterabile ne sia la cucitura in ogni senso, e ugualmente forte la tensione in tutti i quadrilinei del parimente uniforme compartimento.

67. Rappresenti la figura 3. una coppia delle faccie consecutive d' un prisma a base regolare, e l'andamento *kgl* d' un poligono rettilineo spirale equilatero sovr' esso descritto. S' immagini la serie dei piani normali alle faccie del prisma condotti pei lati *kg*, *gl*, ec. del poligono spirale. Tirate in questi piani altrettante rette parallele alle rispettive basi *kg*, *gl*, risulterà una serie di trapezi, la configurazione e disposizione dei quali porgerà norma di un' altra composizione di velo spirale, che non tralascierò di descrivere perchè potrebbe giudicarsi più facile e opportuna della precedente, e perchè contiene il compimento e il buon uso, che potrebbe farsi del sistema del soprallodato Sig. Sarti.

Sono sei gli elementi essenziali dei trapezi ora indicati, il lato del poligono spirale direttore, il lato parallelo esterno del trapezio rispettivo, il passo *hg* del poligono stesso il lato della base del prisma, e il raggio del circolo a questa circoscritto. Io dimostrerò la corrispondente particolare composizione di velo spirale, lasciando interamente disponibili questi sei elementi dai quali tutti gli altri dipendono.

Sia il circolo della figura 4 il circoscritto alla base del prisma. Tirinsi in questo primieramente le rette

ep metà del lato della base del prisma normale al ragio ob.

bt tangente della metà be dell' arco sotteso dal lato nel circolo circoscritto alla base medesima.

om' metà della diagonale sottesa ad un angolo della base del prisma.

$cq = c'o$ metà della diagonale sottesa a due angoli consecutivi della base stessa.

og uguale al passo del poligono spirale indicato da gh nella figura 3.

Poscia descrivansi le quarte proporzionali seguenti

ox dopo le tre ob, og, oq.

of dopo ob, og, oc'.

or dopo ob, of, ox.

ou dopo or, $os = 2pe$, $os' = gs = \sqrt{(\overline{og}^2 + \overline{os}^2)}$.

oy dopo ob, ox, $ov = 2pe$.

on dopo oe, $oe' = pe$, $oz = fv = \sqrt{(\overline{of}^2 + \overline{ov}^2)}$.

ok dopo oc', os, om'.

Dal punto O della retta OB fig. 5., conducasi la normale superiore OU uguale alla 4.ª proporzionale ou, e l' inferiore OY uguale all' altra oy; e presa sulla retta stessa la OB uguale al raggio ob tirinsi le due rette BU, BY. S' iscrivano nell' angolo OBY normali alla retta OB le differenze $om' - ok$, $om' - bt$ prese nel circolo della figura antecedente; e i segmenti Br, Bx della BY voltinsi in BR, BX sull'altra retta BU. Indi preso sulla OB da B verso O il tratto BC uguale alla proporzionale on, conducansi le nuove rette CX, CR. Sarà l' angolo XCR quello, che formerà col lato LG., fig. 6., del poligono spirale lo spigolo posteriore, o lato non parallelo GX del rispettivo trapezio M.

Sul mezzo b finalmente del lato LG alzata la perpendicolare uguale alla tangente bt del circolo precedente, e per l' estremità L anteriore del lato stesso tirata la retta Lt, sa-

rà questa la direzione dell' altro lato non parallelo del trapezio.

Determinati, e disposti in tal modo i trapezi parziali, non resterà che a trovarsi l' angolo di seconda inflessione, che le basi consecutive faranno tra loro nella composizione del continuato velo totale. Ma nella pratica varrà più d'ogni costruzione geometrica saldare le basi dei trapezi a due a due effettivamente sul modello *kgl* delle due faccie del prisma stesso facendole collimare coi lati *kg*, *gl* del poligono. Ho chiamata anteriore l' estremità L del lato del trapezio, e posteriore l' altra per riguardo all' andamento, che debbono seguire del poligono spirale. Si avvertirà perciò, che il trapezio M nella formazione del total velo dovrà portare la sua estremità L per esempio sul punto *l* del modello, e l'altra G sul punto *g*.

Ho poi segnato sulla figura due trapezi contrapposti pel caso, in cui debbasi comporre il volante con ala doppia. Il braccio, che li porta s' infilerà per l' occhio parallelepipedo E sull' albero; e ciascun trapezio girevole provvisoriamente sul punto di sua applicazione *b* prenderà quasi spontaneamente colla sua base la giusta dirittura di seconda inflessione del poligono spirale, portando la sua estremità L anteriore a contatto colla posteriore del lato del trapezio uguale susseguente predisposto sul rispettivo suo braccio d' applicazione all' albero. La quale circostanza potrebbe ben anche dispensare per ciò, che riguarda la composizione pratica del velo, da tutte le costruzioni geometriche precedenti, tranne quella dell' angolo L. Dopo d' aver girati i trapezi fino a tale situazione, vi si fermeranno collegandoli stabilmente all' albero nel punto *b*, e nei punti estremi di ciascuna base loro; indi si applicherà internamente il lustrino cucendolo a tutti i contorni trapezj, e il nuovo volante sarà compiuto. Quì però sarà più ancora che nel caso precedente necessario il soccorso delle due sponde laterali elevate.

68. Il miglior modo finalmente di sperimentare in terra

sia l' una sia l' altra foggia di volanti, e il più analogo alla proposta applicazione aereonautica sarà quello, che nella figura 7. facilmente si può riconoscere. Essa mostra la projezione di una specie di carretta a quattro ruote, sopra il letto della quale composto pel lungo e pel traverso di pochi travicelli fortemente connessi fra loro, e coi due assi delle ruote sorgono tre piccole colonne 1, 1, 1 nella parte posteriore, e altrettante 2, 2, 2 contrapposte e uguali nella fronte, le prime colle seconde, e le une e le altre fra loro ben collegate. Dal mezzo lateralmente, e sulla linea delle colonne estreme altre due coppie 4, 4, 4, 4 ne sorgono, e queste con quelle sostengono gli alberi orizzontali di due coclee, una per parte, lasciandone libera pienamente la rotazione. Ciascuno dei due alberi porta fisso nel suo mezzo un rocchetto C, e questo è frapposto alle due colonnette laterali intermedie. I due alberi sono impernati a quella uguale altezza necessaria, onde le coclee non urtino ruotando nè col letto del carro, nè coi traversi superiori della sua armatura. Tra i rocchetti C, C nella residua opportuna larghezza del carro sono a particolari sostegni 5, 5; 5, 5 parimente uniti fra loro affidate due ruote dentate B, B a portata di agire sui denti dei due rocchetti; e fra esse introducesi a contrasto simile la ruota maggiore A a doppia corona dentata mobile sui due appoggi 3, 3. Sopra le colonnette estreme di mezzo 1, 2, e sopra un' altra simile intermedia di soccorso, che si vede projettata senza numero al di là della ruota, tutte tre più elevate delle altre di qualche piede, è stabilito un maggior travicello longitudinale fesso per la metà circa anteriore di sua lunghezza, e munito in tale sua fenditura di alcune carrucole fisse, che vedonsi projettate in *c*, *c*, *c*, ec. Dalla gola della ruota A sorte all' indietro una robusta e pieghevole funicella, e viene ad addossarsi alla prima e più vicina di queste carrucole; di quì scende a sostenerne un' altra mobile, indi risale ad accavalciarsi alla seconda carrucola fissa, poscia discende a imbrigliarne una seconda mobile, e così di seguito. Dalle

estremità dell' asse di ciascuna delle carrucole mobili e scorrevoli sulla corda pende un peso p. Tutti questi pesi uguali uniti alle loro carrucole operando contemporaneamente sulla corda, e dividendosi fra loro a propria discesa la parte, che mano a mano se ne svolge dal tamburro della ruota, fanno della sola altezza moderata del carro una tratta di discesa del total peso motore equivalente, atta a prolungare l' azione delle coclee, e a risparmiare all' esperienza il disturbo delle interruzioni. Tale dovrà essere la combinazione delle ruote, e la suddivisione del peso motore da praticarsi sopra l' aereostato colla sola differenza che quivi il telajo delle carrucole fisse gioverà, che sia stabilito inferiormente al sistema delle ruote per procurare inoltre maggiore stabilità verticale all' aereostato medesimo. Nella figura 6. colla projezione degli assi dei volanti ho segnato quella di un' ala soltanto per ciascuno, e dell' ala stessa la projezione sola dei bracci di sua armatura. Ma dall' ispezione di questi rilevasi abbastanza quel che più era necessario, l'andamento rispettivo delle due coclee laterali, e il senso di loro contemporanea rotazione.

69. Abbiansi ora in pronto e pesi motori diversi, e mute di coclee, e di sponde loro di note diverse dimensioni. E per togliere ogni incertezza sull'estensione della superficie, che il carro oppone per se stesso all' aria, s' adattino verticalmente alle due estremità di questo due veli rettangolari ben tesi, e di questi telai ancora tengansene preparati di varia grandezza.

Pesato il carro in ciascun suo diverso apparecchio, e sperimentato a parte il peso che equilibra in ciascun caso l' attrito degli assi delle ruote del carro stesso, e il peso che mette in istato prossimo al moto il sistema delle ruote dentate, di ciascuna muta di coclee, e quello delle carrucole dei pesi motori, premettansi alcune sperienze dirette ad accertare quel primo punto della corsa del carro, dove il suo moto sotto il minimo suo volume, e col massimo aggregato di pesi motori si compone in istato permanente. Sarà all' arrivo del carro a

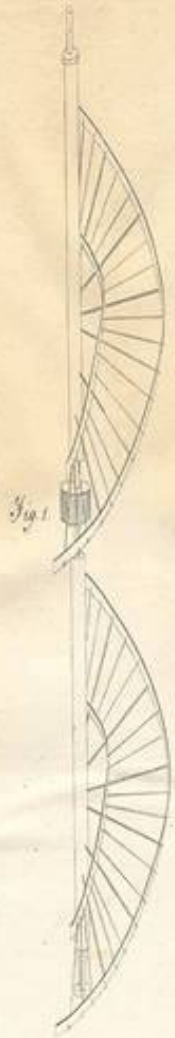


Fig. 1.

Fig. 7.

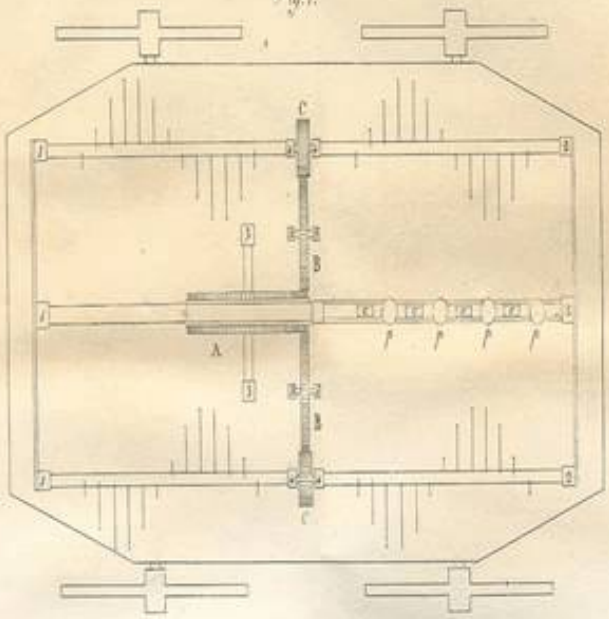


Fig. 2.

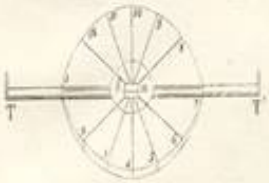
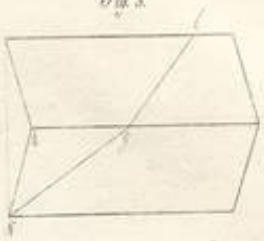


Fig. 3.



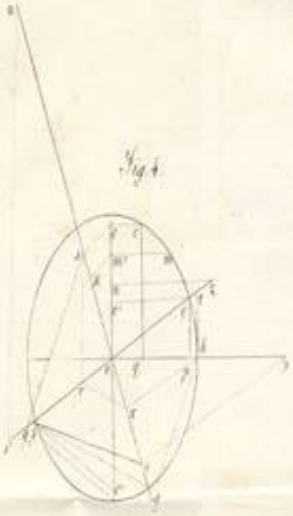


Fig. 4.

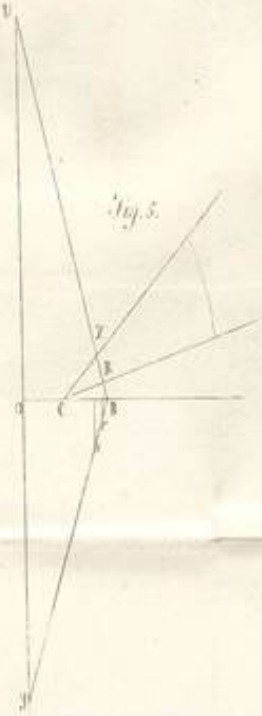


Fig. 5.

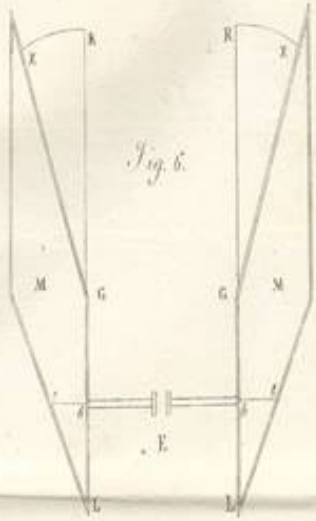


Fig. 6.

questo punto, cui si apporrà stabile segnale, che s' incomincerà in tutte le altre principali sperienze a misurare con buon cronometro la durata del viaggio della macchina continuato a quell' altro punto parimente da riconoscersi innanzi, dove sta per finire la discesa dei pesi motori. Che se manchi un pavimento uniforme di lunghezza bastante a questo necessario divisamento, in vece d'una incommoda correzione sulle dimensioni delle coclee, o limitazione di pesi motori, converrà, e sarà anche utile d' altronde, interporre la resistenza di un peso estrinseco pendente da una corda, la quale sormonti una carrucola fissa di rimando all' altezza delle coclee, e vada a legarsi coll' altro capo dietro al carro all' altezza medesima. Questo peso affrettando la permanenza del moto del carro, e quindi raccorciando le corse parziali da esplorarsi, potrà render atta all' esperienza la lunghezza limitata del piano disponibile.

Dalla misura esatta del tempo, e degli spazj corrispondenti dal carro percorsi, e da quella degli attriti si avrà quanto basta per discuoprire l' effetto pratico possibile della nuova identica maniera di provocare la reazione dell' aria destinata al movimento artificiale delle macchine aereostatiche, e per dedurne eziandio in generale nuovi lumi sulla varia intensità di questa forza passiva dell'aria a fronte di superficie diverse, che l' urtino e direttamente, e obbliquamente, e con un moto progressivo, e rotatorio nel tempo stesso. D' onde forse potrà ridondare vantaggio a tutta la meccanica pratica non minore di quello, che all' idraulica navigazione già procurarono Bossut, D' Alembert, e Condorcet colle magnifiche loro sperienze di battelli di varia forma, e grandezza messi in moto in canali d' ogni ampiezza e profondità.