SULLE FUNZIONI GENERATRICI

MEMORIA II.ª

DEL

SIG. MARCHESE LUIGI RANGONI

Ricevuta adì 15. *Settembre* 1824.

Nella precedente Memoria (1) essendosi considerate le funzioni generatrici ad una sola variabile, resta a trattarsi delle altre a due o più variabili e ad applicarle alla soluzione delle equazioni alle differenze finite e parziali, alle quali riduconsi diversi problemi analoghi a quelli, che già furono sciolti nel mentovato scritto, benchè di ordine più elevato, ed in generale connessi colle leggi delle serie recurro-recurrenti.

1. Si abbia pertanto l'espressione generale delle funzioni generatrici a due variabili secondo la forma esposta (2) dal Sig. Marchese Laplace

$$(1)^a \ldots\ldots y_{0,0} + y_{1,0}.t + y_{2,0}.t^2 \ldots\ldots + y_{x,0}.t^x + y_{x+1,0}.t^{x+1} + \text{ec.}$$

$$(2)^a \ldots\ldots + y_{0,1}.t' + y_{1,1}.tt' + y_{2,1}.t^2t' \ldots\ldots + y_{x,1}.t^x t' + y_{x+1,1}.t^{x+1} t' + \text{ec.}$$

$$(3)^a \ldots\ldots + y_{0,2}.t'^2 + y_{1,2}.tt'^2 + y_{2,2}.t^2t'^2 \ldots\ldots + y_{x,2}.t^x t'^2 + y_{x+1,2}.t^{x+1} t'^2 + \text{ec.}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$(x+1)^a \ldots + y_{0,x'}.t'^{x'} + y_{1,x'}.tt'^{x'} + y_{2,x'}.t^2t'^{x'} \ldots\ldots + y_{x,x'}.t^x t'^{x'} + y_{x+1,x'}.t^{x+1} t'^{x'} + \text{ec.}$$

---

(1) Vedi Memorie della Società Italiana. Tom. XIX. pag. 241.

(2) V. Laplace. Théorie Analytique des probabilités. - Seconde édition. Paris 1814. pag. 50.

In essa il coefficiente di $t^x t'^{x'}$, che rappresenta quello in generale del prodotto di due potenze qualunque di t, t' è $y_{x,x'}$, siccome la stessa funzione generatrice non è che lo sviluppo di tutte le combinazioni, che possono farsi di tutti i valori possibili degli indici $x+m$, $x'+m'$, e de' corrispondenti esponenti di t, t' in una funzione generalmente rappresentata da $y_{x+m,x'+m'}.t^{x+m}t'^{x'+m'}$, nella quale tanto x, x', quanto m, m' possono ricevere tutti i valori interi da zero inclusivamente all' infinito. Ora è da notarsi, che la sovraesposta funzione generatrice può considerarsi composta di $x+1$ funzioni generatrici ad una sola variabile secondo le diverse linee orizzontali contrassegnate $(1)^a$, $(2)^a$, $(3)^a \ldots (x+1)^a$ in ognuna delle quali cioè l'indice corrispondente al valore di $x'+m'$ è costante. Così nella linea $(1)^a$ è sempre $x'=m'=0$, mentre il valore di $x+m$ cominciando da 0 cresce ad ogni termine all'infinito per la differenza 1. Prendendo poi altrettante file verticali, rispettivamente composte dei primi, secondi ec. termini delle orizzontali, la funzione generatrice a due variabili si considera pure divisa in funzioni generatrici ad una sola variabile in ciascuna delle quali l' indice del valore $x'+m'$ varia ad ogni termine per la differenza 1, mentre è costante l' indice del valore di $x+m$. Ciò posto la funzione generatrice può presentarsi in un aspetto più semplice solo che si rifletta come $y_{x+m,0}.t^{x+m}t'^0=y_{x+m,0}.t^{x+m}$ esprimendo il termine generale della funzione generatrice in cui $x'+m'$ è costante ed uguale allo zero, non si avrà che da aggiungere all' indice 0 in $y_{x+m,0}.t^{x+m}$ un valore costante di $x'+m'$, per esempio n, e moltiplicare $y_{x+m,n}.t^{x+m}$ per t'^n per avere il termine generale di un' altra funzione generatrice in cui $x'+m'$ è pure costante ma $=n$. Ora questa operazione può indicar-

si per $y_{x+m,0}.t^{x+m}.t'^{n}_{+n}$ intendendo sempre che n qualunque siasi debba essere aggiunto all'indice o in $y_{x+m,0}.t^{x+m}$, e che il risultamento debba moltiplicarsi per t^{n}. Con questa nuova convenzione si vedrà per le cose già dette, che la proposta funzione generatrice a due variabili prende la forma

$$(A).\left(y_{0,0}+y_{1,0}.t+y_{2,0}.t^{2}+\ldots\ldots+y_{x,0}.t^{x}+y_{x+1,0}.t^{x+1}+\text{ec.}\right)\times$$
$$\left(t'^{0}_{+0}+t'_{+1}+t'^{2}_{+2}+\ldots\ldots+t'^{x'}_{+x'}+\text{ec.}\right).$$

Da tutto ciò è pur facile l'inferire, che rappresentando per $G(y_{x\,x'})$ la funzione generatrice a due variabili, e per $g(y_{a,x})$ ovvero $g(y_{b,x'})$ la generatrice di una funzione di una sola variabile che può esserlo anche di una costante a, o b, sarà $G(y_{x,x'})$ equivalente non meno a $g(y_{0,x'}).t^{0}+g(y_{1,x'}).t^{1}+g(y_{2,x'})t^{2}+$ ec. che a $g(y_{x,0}).t'^{0}+g(y_{x,1}).t'+g(y_{x,2}).t'^{2}+$ ec. Giova poi l'avvertire, che ogniqualvolta in una funzione a due variabili $y_{x,x'}$ la x non varj al variare della x', e viceversa, la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ potrà notarsi nel primo caso per $g\left(\frac{y_{x,x'}}{x'}\right)$, e nel secondo per $g\left(\frac{y_{x,x'}}{x}\right)$.

La funzione generatrice a due variabili sotto qualunque forma, che vuolsi quind'innanzi chiamare u, quando sia moltiplicata per $\frac{1}{t}-1$ diviene la funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}=y_{x+1,x'}-y_{x,x'}$ supposto che in $y_{x,x'}$ varj la sola x per la differenza 1. Di fatto in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ il coefficiente di $t^{x}.t'^{x'}$ non può risultare che dalla moltiplicazione di $\frac{1}{t}$ per la

combinazione $y_{x+1,0}.t^{x+1}.t'^{x'}_{+x'}=y_{x+1,x'}.t^{x+1}.t'^{x'}$, e di -1 per l'altra combinazione $y_{x,0}.t^{x}.t'^{x'}_{+x'}$, e quindi si rende evidente essere $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ la funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}$, quando x' non varia. Allo stesso modo, indicando per $'\Delta y_{x,x'}$ la differenza prima di $y_{x,x'}$ considerando come variabile la sola x', si proverà essere $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)$ la funzione generatrice di $'\Delta y_{x,x'}$. Propriamente poi la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ in questo caso è $y_{x,0}.t^{x}\left(t'^{0}_{+0}+t'^{1}_{+1}+t'^{2}_{+2}+t'^{3}_{+3}+\text{ec.}+t'^{x'}_{+x'}+\text{ec.}\right)\times\left(\frac{1}{t'}-1\right)$ o più semplicemente $t^{x}\left(\frac{1}{t'}-1\right).g\left(\frac{y_{x,x'}}{x'}\right)$ essendo x un qualunque numero che non varia al variare della x', siccome nel caso di x' non variabile al variare della x la funzione generatrice è $t'^{x'}_{+x'}\left(y_{0,0}+y_{1,0}.t+y_{2,0}.t^{2}+y_{3,0}.t^{3}+\text{ec.}+y_{x,0}.t^{x}+y_{x+1,0}.t^{x+1}+\text{ec.}\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)$ ovvero $t'^{x'}\left(\frac{1}{t}-1\right).g\left(\frac{y_{x,x'}}{x}\right)$. Pertanto esprimendo per $\Delta^{i}y_{x,x'}$ la differenza *i esima* di $y_{x,x'}$ quando varia la sola x, ed applicando alla trovata funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}$ il discorso, che fu fatto intorno a quella di Δy_{x} nella precedente Memoria al n.° 1. si vedrà facilmente essere nel presente caso $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{i}$ la funzione generatrice di $\Delta^{i}y_{x,x'}$ giacchè prescindendo dalle potenze negative di t, $\Delta y_{x,x'}$ e le sue variazioni tengono in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ quello stesso posto che $y_{x,x'}$ e le sue variazioni

tengono in u; e parimenti $\Delta^2 y_{x\,x'}$ tiene in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$ lo stesso luogo che $\Delta y_{x,x'}$ in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, e così di seguito. Allo stesso modo si dimostra, che la funzione generatrice di $'\Delta^{i'} y'_{x,x'}$ cioè della differenza *i' esima* di $y_{x,x'}$ variando la sola x' è espressa da $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$, dal che pure si inferisce, che essendo $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$ rispetto a $'\Delta^{i'} y_{x,x'}$ e prescindendo sempre dalle potenze negative di t', ciò che è u rispetto ad $y_{x,x'}$, la funzione generatrice di $\Delta^{i}.'\Delta^{i'} y_{x,x'}$ sarà espressa da

$$u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{i}.$$

2. Se per $\nabla y_{x,x'}$ si denoti una espressione della forma

$$\begin{array}{l} Ay_{x,x'}+By_{x+1,x'}+Cy_{x+2,x'}+Dy_{x+3,x'}+\text{ec.} \\ \quad +B'y_{x,x'+1}+C'y_{x+1,x'+1}+D'y_{x+2,x'+1}+\text{ec.} \\ \qquad +C''y_{x,x'+2}+D''y_{x+1,x'+2}+\text{ec.} \end{array}$$

si troverà la sua funzione generatrice nella somma delle funzioni generatrici di ciascuna delle serie disposte in linee orizzontali in che essa come sopra si divide. Ora ciascuna di queste serie non contiene che una sola variabile giacchè in ciascuna di esse come è visibile x', $x'+1$, $x'+2$ ec. sono costanti. Dunque la funzione generatrice parziale di $Ay_{x,x'}+By_{x+1,x'}+Cy_{x+2,x'}+Dy_{x+3,x'}+$ ec. sarà $u\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\frac{D}{t^3}+\text{ec.}\right)$ poichè moltiplicando u per A, il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ nel prodotto è la sola espressione $Ay_{x,x'}$, moltiplicando u per $\frac{B}{t}$ il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non può essere che $By_{x+1,x'}$ e così di

seguito. Applicando osservazioni analoghe all'altra serie $B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} + D'y_{x+2,x'+1} +$ ec. si vedrà, che il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in $\frac{uB'}{t'}$ è $B'y_{x,x'+1}$, in $\frac{uC'}{t't}$ sarà $C'y_{x+1,x'+1}$ come in $\frac{uD'}{t't^2}$ esso è $D'y_{x+2,x'+1}$; dunque la funzione generatrice parziale di $B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} + D'y_{x+2,x'+1} +$ ec. è $\frac{u}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right)$. Così si mostrerà essere la funzione generatrice di $C''y_{x,x'+2} + D''y_{x+1,x'+2} +$ ec. espressa da $\frac{u}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right)$, e quindi la funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$ sarà $u\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]$. In questa nuova funzione generatrice, è facile a vedersi, che la data espressione di $\nabla y_{x,x'}$ comparisce come il termine generale della serie de' coefficienti, poichè in questa, prescindendo pur sempre dai termini, che contengono potenze negative di t, o di t', i coefficienti a cagion d'esempio di $t^{x-1} t'^{x'}$, $t^x t'^{x'-1}$, $t^{x-2} t'^{x'}$, $t^x t'^{x'-2}$ ec. ovvero di $t^{x-1} t'^{x'-1}$, $t^{x-2} t'^{x'-2}$ ec. si hanno dal porre in $\nabla y_{x,x'}$ o nella sua espressione $x-1$ in luogo di x, $x'-1$ in luogo di x' successivamente, o ad un tempo stesso, e così di seguito. Si rileva pertanto, che la funzione $u\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]$ non è altro, che la u nella quale ad $y_{x,x'}$ ed alle sue variazioni siano state sostituite rispettivamente le espressioni di $\nabla y_{x,x'}$, $\nabla y_{x-1,x'}$, $\nabla y_{x,x'-1}$,

$\nabla y_{x-1,x'-1}$ ec. Quindi se per $\nabla^2 y_{x,x'}$ si indichi una funzione nella quale $\nabla y_{x,x'}$ entri allo stesso modo che $y_{x,x'}$ in $\nabla y_{x,x'}$ è chiaro per un discorso simile al già fatto, che la funzione generatrice di $\nabla^2 y_{x,x'}$ si avrà da quella di $\nabla y_{x,x'}$ moltiplicata per l'espressione per cui si moltiplicò pure la u onde avere la stessa funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$. Di fatto se si indichi con u' la funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$ essendo per ipotesi

$$\begin{aligned}\nabla^2 y_{x,x'} = {} & A\nabla y_{x,x'} + B\nabla y_{x+1,x'} + C\nabla y_{x+2,x'} + D\nabla y_{x+3,x'} + \text{ec.} \\ & + B'\nabla y_{x,x'+1} + C'\nabla y_{x+1,x'+1} + D'\nabla y_{x+2,x'+1} + \text{ec.} \\ & + C''\nabla y_{x,x'+2} + D''\nabla y_{x+1,x'+2} + \text{ec.}\end{aligned}$$

dalle osservazioni già fatte si dedurrà la funzione generatrice di $\nabla^2 y_{x,x'}$ espressa da $u'\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]$ ovvero, sostituendo l'espressione già trovata di u', da $u\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]^2$. Pertanto rappresentando generalmente per $\nabla^n y_{x,x'}$ una funzione che abbia lo stesso senso rispetto a $\nabla^{n-1} y_{x,x'}$ che si è dato a $\nabla^2 y_{x,x'}$ rispetto a $\nabla y_{x,x'}$, e supposto ancora che le funzioni $\nabla^{n-2} y_{x,x'}$, $\nabla^{n-3} y_{x,x'}$ ec. retrocedendo fino a $\nabla^2 y_{x,x'}$ abbiano ciascuna lo stesso senso rispetto alla prossima di un indice inferiore, con raziocinj interamente analoghi ai già esposti si troverà la funzione generatrice di $\nabla^n y_{x,x'}$ espressa da $u\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right)\right.$

$+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\Big]^n$. Quindi, poichè per le cose dette si rende manifesto, che la trovata funzione generatrice ha la stessa forma di u, se ne inferisce pure anche per ciò che si è dimostrato nel n.° precedente essere $\left(\frac{1}{t}-1\right)^i\times\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}u\Big[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\Big]^n$ la funzione generatrice di $\Delta^i.'\Delta^{i'}\nabla^n y_{x,x'}$.

3. Se nella espressione $\Big[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\Big]$ si ponga in luogo di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$ rispettivamente y_x, $y_{x'}$ ed essa poi si moltiplichi tutta per $(y_x)^0(y_{x'})^0$ prenderà la medesima la seguente forma

$$(y_x)^0.(y_{x'})^0\times\left\{\begin{array}{l} A+B(y_x)^1+C(y_x)^2+D(y_x)^3+\text{ec.} \\ +B'(y_{x'})^1+C'(y_x)^1(y_{x'})^1+D'(y_x)^2(y_{x'})^1+\text{ec.} \\ +C''(y_{x'})^2+D''(y_x)^1(y_{x'})^2+\text{ec.} \end{array}\right\}$$

Quindi sostituendo ad $(y_x)^0.(y_{x'})^0$ o ciò che è lo stesso all' unità, che può sempre considerarsi come moltiplicatore di ciascun termine di questa serie, la funzione $y_{x,x'}$, ed applicando ai suoi indici rispettivamente in forma di somma gli esponenti di (y_x), $(y_{x'})$, da essa nascerà l' espressione proposta al principio del precedente numero 2 cioè:

$$Ay_{x,x'} + By_{x+1,x'} + Cy_{x+2,x'} + Dy_{x+3,x'} + \text{ec.}$$
$$+ B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} + D'y_{x+2,x'+1} + \text{ec.}$$
$$+ C''y_{x,x'+2} + D''y_{x+1,x'+2} + \text{ec.}$$

Da ciò si raccoglie che se s, e quindi s^i è una funzione di $\frac{1}{t}$, e di $\frac{1}{t'}$, sviluppando s^i secondo le potenze di queste variabili, che riusciranno perciò necessariamente moltiplicate fra loro nel risultato dello sviluppo, si otterrà una funzione della stessa forma di $\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]$, la quale potrà dare facilmente il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in us^i applicando in essa per ciascuna delle potenze o semplici, o insieme moltiplicate di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$ la funzione $y_{x,x'}$ accresciuta ne' suoi indici degli esponenti di quelle potenze. Così ad un termine qualunque $\frac{k}{t^m t'^{m'}}$ di quello sviluppo dovrà sostituirsi $ky_{x+m,x'+m'}$, e per conseguenza a $k\,\frac{1}{t^0}\,.\,\frac{1}{t'^0} = k$ sarà da sostituirsi $ky_{x,x'}$. È poi evidente, che se prima di sviluppare s^i si sostituisca in s, y_x in luogo di $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ in luogo di $\frac{1}{t'}$ e poscia sviluppata s^i secondo le potenze di y_x, e di $y_{x'}$ si sostituisca a queste la funzione $y_{x,x'}$ accresciuta ne' suoi indici degli esponenti di quelle, si otterrà l'intento anche più semplicemente, ed avrà luogo anche in questo modo il passaggio dalla funzione generatrice us^i all' analogo coefficiente di $t^x.t'^{x'}$.

Se in vece di sviluppare s^i secondo le potenze di $\frac{1}{t}$,

$\frac{1}{t'}$ si sviluppi secondo le potenze di $\frac{1}{t}-1$, e di $\frac{1}{t'}-1$ potrà designarsi per $k\left(\frac{1}{t}-1\right)^m\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{m'}$ un termine qualunque di questo sviluppo, ed il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in $ku\left(\frac{1}{t}-1\right)^m\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{m'}$ essendo pel num. 1. $k\Delta^m{}'\Delta^{m'}y_{x,x'}$, che si riduce a $ky_{x,x'}$ quando $m=m'=0$, si avrà il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in us^i col sostituire in s, $\Delta y_{x,x'}$ in luogo di $\frac{1}{t}-1$, $'\Delta y_{x,x'}$ in luogo di $\frac{1}{t'}-1$, e sviluppando poi s^i secondo le potenze di $\Delta y_{x,x'}$, $'\Delta y_{x,x'}$ non si dovrà in fine che applicare alle caratteristiche Δ, $'\Delta$ gli esponenti delle potenze medesime cioè scrivere $k\Delta^m{}'\Delta^{m'}y_{x,x'}$ in luogo di un termine qualunque $k(\Delta y_{x,x'})^m('\Delta y_{x,x'})^{m'}$, e per conseguenza $ky_{x,x}$ in luogo del termine costante k. È poi quasi inutile l'avvertire, che il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in us^i deve in qualunque modo ridursi alla forma $\nabla^i y_{x,x'}$ che è sempre la stessa di quella di $\nabla y_{x,x'}$ proposta al principio del numero 2. deducendosi l'una e l'altra nel modo già spiegato da s^i o da s sviluppate secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$ oppure secondo quelle di $\frac{1}{t}-1$, $\frac{1}{t'}-1$.

4. Esprimendo Σ la caratteristica degli integrali finiti relativi ad x, e $'\Sigma$ quella degli integrali finiti relativi ad x', come pure essendo z la funzione generatrice di $\Sigma^i{}'\Sigma^{i'}y_{x,x'}$ sarà per le cose dette nel precedente num. 1. $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i\times$

$\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$ la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, la quale indipendentemente dalle potenze negative di t, t', e prescindendo delle funzioni arbitrarie di t, t' che le integrazioni successive introducono, deve ridursi ad u. Per rendere ciò più sensibile, e per trovare un' equazione tra $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^{i}\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$ ed u, si supponga primieramente $i'=1$, e sarà $'\Sigma y_{x,x'}$ l' integrale primo di $y_{x,x'}$ nell' ipotesi della sola x' variabile. La sua funzione generatrice si avrà ponendo nella espressione generale di u ridotta nel num. 1. e contrassegnata (A), $'\Sigma y_{x,x'}+\mathrm{A}$ in luogo di $y_{x,x'}$ indicando per A una funzione arbitraria di x. Quindi qualunque termine della funzione generatrice di $'\Sigma y_{x,x'}$ riferito ad una potenza qualunque t^{x-m} sarà perciò rappresentato da $\left[\left(\left(\Sigma y_{x-m,0}+\mathrm{A}\right)t'^{0}+\left(\Sigma y_{x-m,1}+\mathrm{A}\right)t'+\left(\Sigma y_{x-m,2}+\mathrm{A}\right)t'^{2}+\text{ec.}\right]t^{x-m}$, e moltiplicandolo per $\frac{1}{t'}-1$ diverrà $\left(\Sigma y_{x-m,0}t'^{-1}+\frac{\mathrm{A}}{t'}-\Sigma y_{x-m,0}-\mathrm{A}+\Sigma y_{x-m,1}+\mathrm{A}-\Sigma y_{x-m,1}t'-\mathrm{A}t'+\Sigma y_{x-m,2}.t'+\mathrm{A}t'-\Sigma y_{x-m,2}t'^{2}-\mathrm{A}t'^{2}+\text{ec.}\right)t^{x-m}$. Pertanto essendo $'\Sigma y_{x-m,1}-\Sigma y_{x-m,0}=y_{x-m,0}$, $'\Sigma y_{x-m,2}-\Sigma y_{x-m,1}=y_{x-m,1}$ ec., questo termine si ridurrà al corrispondente di u più una funzione arbitraria di t divisa per t' quale dev' essere $\left(\frac{'\Sigma y_{x-m,0}+\mathrm{A}}{t'}\right)t^{x-m}$ onde si ricava, che anche l' intera funzione generatrice di $'\Sigma y_{x,x'}$ sarà uguale ad u più una funzione arbitraria di t divisa per t', la quale può indicarsi per $\frac{a'}{t'}$. Ora con un metodo simile e con processo analogo a quello che fu seguito al numero 5. della precedente Memoria si di-

mostra, che la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ dipendentemente dalla funzione generatrice dell' integrale $'\Sigma^{i'} y_{x,x'}$ è $u + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots\ldots + \frac{q'}{t'^{i'}} = u'$ essendo a', b', c', ec. funzioni arbitrarie di t. Adesso si rifletta, che la funzione generatrice di $\Sigma^{i'} y_{x,x'}$ è $z\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ per ipotesi e per ciò che si è detto al numero 1., e quindi $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ è la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, la quale si ridurrebbe all'espressione di u' se non si dovesse tener conto delle nuove funzioni arbitrarie introdotte dalle integrazioni relative al segno Σ^{i}. Quindi con discorso analogo a quello con cui si è trovato il valore di u' rispetto ad u si troverà quello di $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i} \times \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ rispetto ad u', cioè sarà $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'} = u' + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^i} = u + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots\ldots + \frac{q'}{t'^{i'}} + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^i}$ essendo a, b, c. ec. funzioni arbitrarie di t'.

5. Esposti i teoremi del Laplace con qualche illustrazione, prima di applicarli alla risoluzione delle equazioni alle differenze parziali giova quì dar luogo ad alcune considerazioni intorno alle funzioni generatrici di altre funzioni conosciute.

Date le funzioni generatrici di due o più funzioni ad una sola variabile può aversi facilmente la funzione generatrice del prodotto. Se si indichi per $\varphi(x)$ una funzione conosciuta di x, e per $\varphi'(x')$ una funzione pure conosciuta di x', si avrà l' equazione $G(\varphi(x).\varphi'(x')) = g(\varphi(x)).g(\varphi'(x'))$.

Di fatto essendo $g(\varphi(x)) = \varphi(0).t^0 + \varphi(1).t + \varphi(2).t^2 \ldots + \varphi(x).t^x +$ ec., e $g(\varphi'(x')) = \varphi'(0).t'^0 + \varphi'(1).t' + \varphi'(2).t'^2 \ldots + \varphi'(x').t'^{x'} +$ ec.

il prodotto delle due funzioni generatrici semplici sarà

$$\varphi(0)\varphi'(0).t^0t'^0+\varphi(1)\varphi'(0).tt'^0+\varphi(2)\varphi'(0)t^2t'^0.....+\varphi(x)\varphi'(0).t^xt'^0+\text{ec.}$$

$$+\varphi(0)\varphi'(1).t^0t'+\varphi(1)\varphi'(1).tt'+\varphi(2)\varphi'(1).t^2t'.....+\varphi(x)\varphi'(1)t^xt'+\text{ec.}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$+\varphi(0)\varphi'(x').t^0t'^{x'}+\varphi(1)\varphi'(x').tt'^{x'}+\varphi(2)\varphi'(x).t^2t'^{x'}...+\varphi(x)\varphi'(x')t^xt'^{x'}+\text{ec.}$$

Ma se si pone $\varphi(x)\varphi'(x')=\varphi''(x,x')$ sarà ancora $\varphi(0)\varphi'(0)=\varphi''(0,0)$, $\varphi(x)\varphi'(0)=\varphi''(x,0)$, e viceversa $\varphi(0)\varphi'(x')=\varphi''(0,x)$; dunque il prodotto medesimo prenderà la forma seguente, cioè

$$t'^0.g(\varphi''(x,0))+t'.g(\varphi''(x,1))+t'^2.g(\varphi''(x,2))....+t'^{x'}.g\left(\varphi''\left(\underbrace{x,x'}_{x}\right)\right)+\text{ec.}$$

che è appunto la funzione generatrice a due variabili di $\varphi''(x,x')$ cioè di $\varphi(x)\varphi'(x')$.

Sia per esempio $\varphi(x)=a^x$, $\varphi'(x')=b^{x'}$, e trovate che siano le funzioni generatrici semplici di a^x, e di $b^{x'}$ si avrà pure la funzione generatrice di $a^xb^{x'}$. Ora essendo $g(a^x)=1+at+a^2t^2+a^3t^3....+a^xt^x+\text{ec.}$ sarà $atg(a^x)=at+a^2t^2+a^3t^3+\text{ec.}$ e quindi $g(a^x)-atg(a^x)=1$, $g(a^x)=\frac{1}{1-at}$. Pertanto

$$G(a^xb^{x'})=g(a^x)\,g(b^{x'})=\frac{1}{1-at}\cdot\frac{1}{1-bt'}.$$

La regola fin qui data per trovare la funzione generatrice del prodotto di due variabili si estende pure alla ricerca della funzione generatrice del prodotto di tre o più funzioni di una sola, e diversa variabile. Sieno di fatto le tre funzioni $\varphi(x)$, $\varphi'(x')$, $\varphi''(x'')$. Le rispettive funzioni generatrici saranno

1.ª $\varphi(0).t^0+\varphi(1).t+\varphi(2).t^2+\varphi(3).t^3.....+\varphi(x).t^x+\text{ec.}$

2.ª $\varphi'(0).t'^0+\varphi'(1).t'+\varphi'(2).t'^2+\varphi'(3).t'^3.....+\varphi'(x').t'^{x'}+\text{ec.}$

3.ª $\varphi''(0)'t''^0+\varphi''(1).t''+\varphi''(2).t''^2+\varphi''(3).t''^3.....+\varphi''(x'').t''^{x''}+\text{ec.}$

Si vede quindi facilmente che rappresentando rispettivamente $\varphi(x).t^{x}$, $\varphi'(x').t'^{x'}$, $\varphi''(x'').t''^{x''}$ il termine generale delle tre serie 1.ª, 2.ª, 3.ª, come nella loro moltiplicazione si ottiene il termine $\varphi(x)\varphi'(x')\varphi''(x'').t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$, così si otterranno anche tutti gli altri della stessa forma secondo le infinite combinazioni che possano prendere a tre a tre gli indici x, x', x'' ai quali si attribuiscano tutti i valori possibili in numeri interi. Essendo questa pertanto la natura appunto della funzione generatrice a tre variabili, la quale è tale rispetto a qualunque prodotto della forma $\varphi'''(x, x', x'').t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$ cui si riduce l'altra $\varphi(x)\varphi'(x')\varphi''(x'').t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$, rimane dimostrato, che le funzioni generatrici semplici di ciascuna funzione separata delle tre variabili x, x', x'' essendo insieme moltiplicate danno la funzione generatrice del prodotto $\varphi(x)\,\varphi'(x')\,\varphi''(x'')$. Di quì si ricava anche l'idea generale della funzione generatrice ad un qualunque numero di variabili. Essa di fatto non è altro che quella serie infinita di cui è termine generale $\varphi(x, x', x'' \ldots x^{(m)}).t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''} \ldots t^{(m)\,x^{(m)}}$ in cui x, x', $x'' \ldots x^{(m)}$ siano le viariabili, le quali col loro numero determinano il grado della stessa funzione generatrice, e che ricevono tutti i valori numerici possibili da zero inclusivamente all'infinito combinandosi fra essi tali valori in tutti i modi possibili.

6. Resta ora a vedersi come possa prendersi la funzione generatrice a due variabili di $\varphi(x) + \varphi'(x')$.

È opportuno quì di premettere una considerazione intorno alla funzione generatrice dell'unità ad una o più variabili, per cui vuole intendersi quella funzione o serie ordinata secondo le potenze di t se trattasi di una sola variabile, o secondo le potenze del prodotto di $t\,t'\,t'' \ldots t^{(m)}$ con tutte le combinazioni degli esponenti t, t', t'' ec. se trattasi di più variabili, nella quale il coefficiente di t^{x} ovvero

di $t^{x} t'^{x'} t''^{x''} \ldots . t^{(m)\,x^{(m)}}$ sia l' unità. Quindi tal funzione generatrice sarà a cagione di $g(a^{x}) = \frac{1}{1-at}$ espressa nel primo caso da $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^{2} \ldots . + t^{x} +$ ec., e negli altri da $\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t'} \cdot \frac{1}{1-t''} \ldots . \frac{1}{1-t^{(m)}}$ cioè dal prodotto di altrettante frazioni $\frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{1-t'}$, $\frac{1}{1-t''}$ ec. quante sieno le variabili che entrino nella funzione generatrice richiesta. A cagione d' esempio la funzione a due variabili generatrice dell' unità è

$$\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t'} = (1+t+t^{2}+t^{3} \ldots + t^{x} + \text{ec.})(1+t'+t'^{2}+t'^{3} \ldots + t'^{x'} + \text{ec.})$$

essendo appunto l' unità il coefficiente di $t^{x} t'^{x'}$ in tale prodotto. Ciò deducesi anche in altro modo dal già detto osservando che $1 = x^{0} . x'^{0} . x''^{0} \ldots x^{(m)0}$ cioè, che l' unità può considerarsi come il prodotto di quante funzioni si voglia di diverse variabili, e perciò anche per essa vale la regola, che il prodotto delle funzioni generatrici semplici di x^{0}, x'^{0}, x''^{0}, ec. $x^{(m)0}$ sarà la funzione generatrice di $x^{0} . x'^{0} . x''^{0} \ldots x^{(m)0}$. È poi da notarsi, che per funzione generatrice semplice dell' unità può anche considerarsi più generalmente la frazione $\frac{t^{m}}{1-t}$ $= t^{m} (1 + t + t^{2} + t^{3} +$ ec.), la quale ha luogo dipendentemente dalle condizioni de' diversi problemi, quando i coefficienti di tutte le potenze inferiori a t^{m} debbono annullarsi, e dalle equazioni alle funzioni generatrici, che ne nascono. Pertanto il limite inclusivo di m è $m = 0$, ed allora la funzione generatrice è $\frac{1}{1-t}$ come prima. Sia per esempio in un problema da trovarsi la funzione generatrice di $y_{x,0}\, t^{x}$. Se per le condizioni del

problema stesso la funzione $y_{x,0}$ si annulla finchè x abbia un valore al di sotto di m, allora la funzione generatrice di $y_{x,0}\, t^{x}$ è $\frac{t^m}{1-t}$, poichè dalla funzione generatrice semplice ed assoluta dell'unità quale può chiamarsi $\frac{1}{1-t}$ sono da escludersi i termini da 1 fino a t^m, locchè appunto si eseguisce moltiplicandola per t^m. Inoltre se una funzione $y_{x,x'}$ cominciasse ad essere uguale all' unità pe' valori di $x = m$, $x' = m'$, la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarebbe $\frac{t^m}{1-t} \cdot \frac{t'^{m'}}{1-t'}$ $= \left(t^m + t^{m+1} + t^{m+2} + \text{ec.}\right)\left(t'^{m'} + t'^{m'+1} + t'^{m'+2} + \text{ec.}\right)$ nella quale mancano i prodotti di due qualunque delle potenze di t, t', i cui esponenti sieno rispettivamente minori di m, e di m'. Dopo ciò è facile a vedersi come possa trovarsi la funzione generatrice dell' unità a più variabili in corrispondenza di funzioni, le quali si riducano appunto all' unità per particolari supposizioni intorno alle variabili stesse.

Finalmente si possono ora applicare queste considerazioni alla ricerca della funzione generatrice a due variabili di una quantità della forma $\varphi(x)+\varphi'(x')$. Osservando pertanto che $\varphi(x)=\varphi(x).x^0$, e $\varphi'(x')=\varphi'(x').x^0$, perciò che è stato superiormente dimostrato si vedrà essere $G(\varphi(x).x^0)=g(\varphi(x)).g(x^0)=g(\varphi(x)).\frac{t^m}{1-t}$, e $G(\varphi'(x').x^0) = g(\varphi'(x')).\, g(x^0) = g(\varphi'(x')).\, \frac{t'^{m'}}{1-t'}$. Dunque la funzione generatrice richiesta sarà $g(\varphi(x)).\, \frac{t^m}{1-t} + g(\varphi'(x')).\, \frac{t'^{m'}}{1-t'}$. Sia pertanto a cagion d'esempio l' espressione di cui si vuole la funzione generatrice a due variabili $x+2^{x'}$; ed essendo $\frac{t}{(1-t)^2}$ la funzione generatrice di x, $\frac{1}{1-2t'}$ la funzione generatrice di $2^{x'}$, la richiesta a due variabili sarà $\frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t'^{m'}}{1-t'}$

$+\frac{1}{1-2t'}\cdot\frac{t^m}{1-t}$ indicando al solito per m, m' gli esponenti rispettivi di t, t', che convengono alla funzione generatrice semplice dell'unità nelle particolari condizioni del problema a cui esse si riferiscono.

Una regola analoga servirà per trovare la funzione generatrice a tre variabili per un prodotto o per la somma di due funzioni ad una sola e diversa variabile, od anche di una sola funzione di una variabile qualunque, giacchè nel primo caso basterà moltiplicare la funzione generatrice a due variabili del supposto prodotto o somma per la funzione generatrice semplice dell'unità dipendente da una terza variabile, e nell'altro caso la generatrice della funzione ad una sola variabile, che si suppone sviluppata secondo le potenze di t, verrà moltiplicata pel prodotto di due funzioni generatrici dell'unità rispettivamente sviluppabili per le potenze di t', e di t''. Così la funzione generatrice a tre variabili di xx' sarà $\frac{t}{(1-t)^2}\cdot\frac{t'}{(1-t')^2}\cdot\frac{t''^{m''}}{1-t''}$; quella di $x+x'$ sarà $\left(\frac{t}{(1-t)^2}\cdot\frac{t'^{m'}}{1-t'}+\frac{t'}{(1-t')^2}\cdot\frac{t^m}{1-t}\right)\cdot\frac{t''^{m''}}{1-t''}$, siccome la funzione generatrice a tre variabili della sola x sarà $\frac{t}{(1-t)^2}\cdot\frac{t'^{m'}}{1-t'}\cdot\frac{t''^{m''}}{1-t''}$.

Queste operazioni come è facile a rilevarsi rendono omogenee le funzioni generatrici de' due membri di un' equazione alle differenze finite e parziali, quando il secondo di essa contenga in tutti o in alcuno de' suoi termini qualche funzione di un numero di variabili minore di quello che ne contengono i termini del primo membro.

7. Si può ora con molta semplicità dichiarare la dottrina della risoluzione delle equazioni lineari alle differenze finite e parziali a due variabili, e di qualunqne ordine coi coefficienti costanti.

Sia quindi primieramente l' equazione $y_{x,x'}=\nabla y_{x'x}$,

in cui la funzione $\nabla y_{x,x'}$ abbia lo stesso senso, che le fu attribuito al num. 2. cioè rappresenti una funzione di tal forma, che essa nella totalità de' suoi termini comprendere possa tutte le variazioni di x combinate con quelle di x' nella funzione $y_{x,x'}$ cosicchè ognuna delle predette variazioni di $y_{x,x'}$ sia moltiplicata per un coefficiente che si annulli mancando in $\nabla y_{x,x'}$ la corrispondente combinazione. Ciò posto essendo (num. 1.) u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà pel num. 2. $u\left[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)\right.$ $\left.+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)\right]$ la funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$. Perciò qualora l' equazione proposta si verificasse per qualunque valore di x, x' vi sarebbe pure equazione fra le dette due funzioni generatrici. Siccome però accade che per alcuno dei valori medesimi l'equazione proposta più non sussiste, cominciando essa soltanto a valere quando a cagion d'esempio $x=m$, $x'=m'$, e potendosi d' altronde dalle condizioni de' problemi particolari ricavare i valori di $y_{m,m'}$, $y_{m-1,m'}$, $y_{m,m'-1}$, $y_{m-1,m'-1}$ ec. ed i corrispondenti dei termini di $\nabla y_{m,m'}$, $\nabla y_{m-1,m'}$, $\nabla y_{m,m'-1}$, $\nabla y_{m-1,m'-1}$ ec. se ne inferisce che denotando per u' la somma delle funzioni generatrici di $y_{m,m'}$, $y_{m-1,m'}$, $y_{m,m'-1}$ ec., e per u'' la somma delle funzioni generatrici di $\nabla y_{m,m'}$, $\nabla y_{m-1,m'}$, $\nabla y_{m,m'-1}$ ec. si avrà l' equazione $u-u'=u\left[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)\right.$ $\left.+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)\right]-u''$, dalla quale si deduce il valore generale di u, che sviluppato secondo le potenze di t, t' insieme moltiplicate darà nel coefficiente di $t^x t'^{x'}$ il va-

lore ricercato di $y_{x,x'}$. Intanto è da notarsi che quantunque in una equazione alle differenze parziali il secondo membro possa sempre ridursi alla forma assegnata per $\nabla y_{x,x'}$ facendo crescere opportunamente le variabili di una o più unità, pure riesce spesso più semplice il lasciarvi sussistere gli indici minori di x, o di x' che talvolta vi si incontrano, e che rendono perciò il detto secondo membro per se non riferibile all' espressione di $\nabla y_{x,x'}$. Ogni qualvolta ciò abbia luogo, la funzione generatrice del secondo membro si avrà dipendentemente da u prendendo la somma delle funzioni generatrici di ciascun termine di esso, e rammentando che in generale la funzione generatrice di $Ty_{x\pm m,x'\pm m'}$ è $Tut^{\mp m}.t'^{\mp m'}$, essendo T il coefficiente di un termine qualunque, ed u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$. Del resto il metodo per risolvere l'equazione rimane lo stesso di quello che si è poc'anzi accennato, il quale richiede come meglio si vedrà nelle applicazioni, il frequente passaggio dai coefficienti alle funzioni generatrici per quelle ipotesi de' valori di x, x' ne' quali l' equazione che viene in qualunque de' sopradetti modi proposta non si verifica.

Un metodo pure affatto simile servirà per risolvere l' equazione $y_{x,x'}=\nabla y_{x,x'}+X$, esprimendo per X una funzione qualunque di x, x', ovvero l'equazione $y_{x,x'}={}'\nabla y_{x,x'}+X$ qualora $\nabla y_{x,x'}$ non si riduca per se alla forma attribuita a $\nabla y_{x,x'}$, cioè contenga nelle variazioni di $y_{x,x'}$ qualche indice minore di x, o di x'. Di fatto nell' un caso e nell' altro considerando u come la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, si troverà facilmente la somma delle funzioni generatrici de' termini di $\nabla y_{x,x'}$, o di $'\nabla y_{x,x'}$, la quale unita alla funzione generatrice di X dovrebbe uguagliarsi ad u, qualora per qualunque valore di x, x' l' equazione potesse verificarsi. Però essendovi va-

lori di queste variabili pe' quali l'equazione non sussista, per avere l' equazione richiesta dovrà sottrarsi da u la somma delle funzioni generatrici de' valori di $y_{x,x'}$ che non verificano la proposta, e dalla funzione generatrice del secondo membro dovrà pure sottrarsi la somma delle funzioni generatrici de' corrispondenti valori di $\nabla y_{x,x'}$, ovvero $'\nabla y_{x,x'}$ e di X.

8. Seguendo un andamento analogo a quello della precedente Memoria si potranno ora applicare le esposte Teorie a diversi problemi fra i quali alcuni furono proposti e risoluti dal Sig. Marchese Laplace. Sia pel primo quello con cui trattasi di determinare la probabilità che ha un giuocatore A di vincere mancandogli x colpi favorevoli mentre all'avversario B ne mancano x', essendo il giuoco di tal condizione che avendosi un' urna contenente due palle l' una bianca, e l'altra nera, la prima sia a favore del giuocatore A, e gli faccia guadagnare un punto quando essa si estragga, e lo stesso dicasi della nera riguardo a B, rimettendosi poi dopo ciascuna estrazione la palla estratta nell' urna. Esprimendo quindi per $y_{x,x'}$ la probabilità di A è facile a vedersi che si ha l' equazione $y_{x,x'} = \frac{1}{2} . y_{x-1,x'} + \frac{1}{2} . y_{x,x'-1}$ poichè se la palla estratta è bianca $y_{x,x'}$ si cambia in $y_{x-1,x'}$, e se è nera $y_{x,x'}$ diviene $y_{x,x'-1}$, essendo poi la probabilità semplice di ciascuno di questi cambiamenti $\frac{1}{2}$, mentre è pur tale quella di estrarre o palla nera, o palla bianca. Ciò posto essendo u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quella di $\frac{1}{2}\left(y_{x-1,x'} + y_{x,x'-1} \right)$ sarà $\frac{u}{2}(t+t')$. Riflettasi ora che la supposione di $x=x'=0$ non può mai aver luogo riguardo al principio del giuoco, poichè questo sarebbe nullo, e non nel progresso essendo evidente, che l' uno dei giuocatori deve esaurire prima dell'altro i col-

pi che gli mancano, altrimenti compiendo amendue nel tempo stesso i colpi loro prescritti, vincerebbero pure amendue locchè è assurdo. Dunque facendo $x = x' = 0$ nell' equazione proposta si ha $y_{0,0} = 0$. Pertanto nel secondo membro di essa le funzioni corrispondenti $y_{-1,0}$, $y_{0,-1}$ non possono aver luogo per la stessa ragione, e sono d'altronde escluse dalla natura delle rispettive funzioni generatrici, le quali non ammettono ne' loro termini verun indice negativo. Essendo poi generalmente $y_{0,x'} = 1$ poichè quando $x = 0$ il giuocatore A è certo della vincita, si vedrà eziandio non sussistere l' equazione relativa a questa ipotesi cioè $y_{0,x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{-1,x'} + \frac{1}{2} \cdot y_{0,x'-1}$. Trascurando pertanto nel secondo membro dell' equazione il termine $\frac{1}{2} \cdot y_{-1,x'}$, che non può aver luogo in $\frac{ut}{2}$ funzione generatrice di $\frac{1}{2} \cdot y_{x-1,x'}$ mancando in essa qualunque indice negativo, si tratterà di prendere la funzione generatrice di $y_{0,x'} = 1$, la quale si esprime per $\frac{t'}{1-t'}$ e di sottrarla da u, e di prendere pure la funzione generatrice di $\frac{1}{2} \cdot y_{0,x'-1}$, la quale è $\frac{1}{2} \cdot \frac{t'^2}{1-t'}$ sottraendola da $\frac{u}{2}(t + t')$. Così si avrà l' equazione $u - \frac{t'}{1-t'} = \frac{u}{2}(t + t') - \frac{1}{2} \cdot \frac{t'^2}{1-t'}$, e perciò

$$u = \frac{t'\left(1 - \frac{t'}{2}\right)}{\left(1-t'\right)\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t'}{2}\right)} = \frac{t'}{1-t'}\left(1 - \frac{t'}{2}\right)\left[\left(1 - \frac{t'}{2}\right) - \frac{t}{2}\right]^{-1}$$

$$= \frac{t'}{1-t'}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1 - \frac{1}{2}t'} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{t^2}{\left(1 - \frac{1}{2}t'\right)^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{t^3}{\left(1 - \frac{1}{2}t'\right)^3} + \text{ec.}\right).$$

In questa serie il coefficiente di t^x è $\frac{1}{2^x} \cdot \frac{t'}{\left(1 - t'\right)\left(1 - \frac{1}{2}t'\right)^x}$.

Ora la potenza t^x nella funzione u è moltiplicata rispettivamente in una classe dei termini della stessa u per tutte le potenze di t'. Quindi per avere il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ basterà prendere il coefficiente di $t'^{x'}$ in $\frac{1}{2^x} \cdot \frac{t'}{\left(1-t'\right)\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^x}$ che esprime appunto quella classe di termini all' infinito, ed essendo

$$\frac{t'}{\left(1-t'\right)\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^x} = \frac{t'}{1-t'}\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^{-x} = (t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.})\times$$

$$\left(1+\frac{1}{2}.\,xt'+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{x(x+1)}{1.2}t'^2+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}t'^3\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2^{x'-1}}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots\ldots(x'-1)}t'^{x'-1}+\text{ec.}\right),$$ perciò il coefficiente di $t'^{x'}$ in questa espressione riesce $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{x(x+1)}{1.2}$

$$+\frac{1}{2^3}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^{x'-1}}\cdot\frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}$$ cioè quello stesso che si ottiene ponendo $t'=1$ nello sviluppo di $\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^{-x}$. Sarà dunque $y_{x,x'}=\frac{1}{2^x}\left(1+x.\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2}\right.$

$$\left.+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^3}\ldots+\frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}\cdot\frac{1}{2^{x'-1}}\right).$$

9. Sieno ora le tre palle esistenti in un' urna una delle quali bianca segnata col n.° 1., e le altre due nere, e di queste l'una porti il n.° 1, e l'altra il n.° 2. essendo la palla bianca favorevole al giuocatore A, e le nere al di lui avversario, e si supponga che per convenzione di giuoco debba ciascuna palla estratta diminuire del numero con cui è segnata quello de' punti che mancano al giuocatore cui essa è favorevole. Se $y_{x,x'}$, essendo x il numero de' colpi che mancano ad A, ed x' quello de' colpi che mancano all'altro giuocatore, esprime sempre la probabilità di A ad ottenere tutti i punti che gli mancano, cioè a vincere il giuoco, si avrà l'equazione alle dif-

ferenze parziali $y_{x,x'} = \frac{1}{3} \cdot y_{x-1,x'} + \frac{1}{3} \cdot y_{x,x'-1} + \frac{1}{3} \cdot y_{x,x'-2}$, la quale facilmente si dimostra se avvertasi essere $\frac{1}{3}$ la probabilità dell'estrazione di ciascuna delle tre palle, e cambiarsi $y_{x,x'}$ in $y_{x-1,x'}$ ogni qualvolta si estragga la palla bianca, e divenire $y_{x,x'-1}$, $y_{x,x'-2}$ se rispettivamente si estragga la palla nera segnata col n.° 1, o la palla nera segnata col n.° 2.

Essendo ora u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà $\frac{u}{3}(t+t'+t'^2)$ la funzione generatrice del secondo membro dell'equazione proposta, e per trovare l'equazione necessaria a risolvere il problema giova osservare primieramente, che quando $x=x'=0$ svaniscono tutti i termini della proposta, e che ponendo solamente $x=0$ si ha per la natura del problema $y_{0,x'} = y_{0,x'-1} = y_{0,x'-2} = \text{ec.} = 1$. In questa supposizione, che, come è facile a vedersi, è la sola in cui non sussiste la proposta equazione, non si corrispondono quindi per eguaglianza le relative classi di termini delle due funzioni generatrici u, $\frac{u}{3}(t+t'+t'^2)$, e perciò sarà da sottrarsi da u la funzione generatrice di $y_{0,x'} = 1$ cioè $\frac{t'}{1-t'}$, e da $\frac{u}{3}(t+t'+t'^2)$ la somma delle due funzioni generatrici di $\frac{1}{3} \cdot y_{0,x'-1}$ e di $\frac{1}{3} \cdot y_{0,x'-2}$, la quale è $\frac{1}{3}\left(\frac{t'^2+t'^3}{1-t'}\right)$. Così si avrà $u - \frac{t'}{1-t'}$ $= \frac{u}{3}(t+t'+t'^2) - \frac{1}{3}\left(\frac{t'^2+t'^3}{1-t'}\right)$; onde $u = \dfrac{t'\left(1-\frac{t'}{3}-\frac{t'^2}{3}\right)}{(1-t')\left(1-\frac{t}{3}-\frac{t'}{3}-\frac{t'^2}{3}\right)}$.

Si faccia in questa espressione $1 - \frac{t'}{3} - \frac{t'^2}{3} = a$, e sarà

$u = \frac{t'}{1-t'} \cdot \frac{a}{a - \frac{t}{3}} = \frac{t'a}{1-t'} \left(a - \frac{t}{3} \right)^{-1} = \frac{t'}{1-t'} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot ta^{-1} \right.$

$\left. + \frac{1}{3^2} \cdot t^2 a^{-2} + \frac{1}{3^3} \cdot t^3 a^{-3} \ldots + \frac{1}{3^x} \cdot t^x a^{-x} + \text{ec.} \right)$ in cui il coefficiente di t^x è $\frac{t'}{1-t'} \cdot \frac{1}{3^x} a^{-x} = \frac{1}{3^x} \cdot \frac{t'}{1-t'} \left(1 - \frac{t'(1+t')}{3} \right)^{-x}$

$= \frac{1}{3^x} (t' + t'^2 + t'^3 + \text{ec.}) \left(1 + \frac{xt'(1+t')}{3} + \frac{x(x+1)}{2} t'^2 \frac{(1+t')^2}{3^2} \right.$

$\left. + \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3} t'^3 \frac{(1+t')^3}{3^3} + \text{ec.} \right)$. Quindi il coefficiente di $t'^{x'}$, che si potrà raccogliere da quest' ultima espressione sarà pure il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u, cioè il valore cercato di $y_{x,x'}$. È poi manifesto, che in ogni caso particolare si avrà questo coefficiente nella formola $\frac{1}{3^x} \left(1 + xt' \frac{(1+t')}{3} + \frac{x(x+1)}{2} t'^2 \frac{(1+t')^2}{3^2} \right.$

$\left. + \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3} t'^3 \frac{(1+t')^3}{3^3} + \text{ec.} \right)$ rigettati da essa tutti i termini che nell' ulteriore sviluppo contengono la t' innalzata ad una potenza superiore alla $(x'-1)^{esima}$, e fatto $t'=1$, giacchè è d'altronde evidente che negli altri solamente potrà alzarsi la t' esattamente alla potenza $t'^{x'}$ col venire moltiplicata rispettivamente per uno de' termini della serie $t' + t'^2 + t'^3 + \text{ec.}$, che è uno dei fattori del coefficiente di t^x precedentemente ritrovato.

10. Se si supponga che sieno in un' urna due palle bianche distinte co' numeri 1, 2 ed anche due palle nere distinte cogli stessi numeri, la probabilità del giuocatore A nelle condizioni del giuoco simili a quelle che sonosi ritenute nel precedente numero sarà data dall' equazione

$$y_{x,x'} = \frac{1}{4} \cdot y_{x-1,x'} + \frac{1}{4} \cdot y_{x-2,x'} + \frac{1}{4} \cdot y_{x,x'-1} + \frac{1}{4} \cdot y_{x,x'-2} .$$

Pertanto essendo al solito u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quella del secondo membro dell'equazione proposta sa-

rà $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$. Posto $x=0$ si ha $y_{0,x'}=y_{0,x'-1}=y_{0,x'-2}=$ec. $=1$, ed in questa supposizione vuolsi primieramente sottrarre da u la funzione generatrice di $y_{0,x'}$ cioè $\frac{t'}{1-t'}$ e da $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$ quelle di $\frac{1}{4}.y_{0,x'-1}$ e di $\frac{1}{4}.y_{0,x'-2}$ cioè $\frac{1}{4}.\frac{t'^2}{1-t'}$, ed $\frac{1}{4}.\frac{t'^3}{1-t'}$. Sia inoltre $x=1$, ed in tal caso l'equazione proposta può tradursi in quest' altra $y_{1,x'}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-1}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$, poichè per una parte $y_{0,x'}=1$, e per l' altra $y_{-1,x'}$ può considerarsi $=1$ prendendo $y_{x,x'}$ questa forma quando al giuocatore A mancando un solo punto ha luogo l' estrazione della palla bianca segnata col numero 2, la quale pure gli assicura la vincita. Sussiste dunque anche nell' ipotesi di $x=1$ la proposta equazione ma soltanto indipendentemente dalle funzioni generatrici de' due membri della medesima, poichè d'altronde questi sempre nella stessa ipotesi non possono nella loro integrità riferirsi alle funzioni generatrici mancando in $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$ qualunque termine con indice negativo. Sarà quindi necessario per l' ipotesi di $x=1$ il dedurre dall' equazione $y_{1,x'}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-1}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$ la funzione generatrice di $y_{1,x'}$ che può ora indicarsi per u', e che in seguito si determinerà con opportuno metodo, la quale moltiplicata per t deve sottrarsi da u. Egualmente dovranno sottrarsi da $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$ le funzioni generatrici di $\frac{1}{4}.y_{0,x'}$, $\frac{1}{4}.y_{1,x'-1}$, $\frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$, cioè $\frac{t'}{4(1-t')}$, $\frac{1}{4}u't'$, $\frac{1}{4}u't'^2$ tutte moltiplicate per t. Tutto ciò è evidente, poichè turbandosi l' eguaglianza fra le funzioni generatrici de' due membri dell' equazione proposta nelle ipotesi di $x=0$, $x=1$ è d'uopo sottrarre rispettivamen-

te da tali funzioni quelle classi di termini, che contengono in fattore t^0, e t. Si avrà pertanto l'equazione $u - \frac{t'}{1-t'} - u't =$

$$\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2) - \frac{1}{4}\frac{t'(t'+t'^2)}{1-t'} - t\left(\frac{t'}{4(1-t')} + \frac{1}{4}u't' + \frac{1}{4}u't'^2\right),$$

da cui si avrà u determinata la u'. Ripresa ora l' equazione $y_{1.x'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.y_{1,x'-1} + \frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$, la quale appartiene alle differenze ordinarie, ed è perciò da risolversi col metodo delle funzioni generatrici ad una sola variabile, si deve osservare, che se u' è la funzione generatrice di $y_{1,x'}$, quella del secondo membro dell' equazione è $\frac{1}{1-t'} . \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(u't' + u't'^2)$, essendo $\frac{1}{2} . \frac{1}{1-t'}$ la funzione generatrice di $\frac{1}{2}$ in questo caso. Ciò posto quando $x'=0, y_{1,0} = 0$ e svaniscono o mancano in relazione alla funzione generatrice del secondo membro dell'equazione tutti i termini di esso a riserva di $\frac{1}{2}$, che dovrà quindi sottrarsi dalla stessa funzione generatrice. Quando poi $x' = 1$, essendo evidentemente $y_{1,1} = \frac{1}{2}$, l'equazione è identica in relazione alle funzioni generatrici avendosi da una parte $y_{1,0} = 0$, ed $y_{1,-1}$ mancando ne' termini della generatrice corrispondente. Si avrà dunque l' equazione $u' = \frac{1}{2} . \frac{1}{1-t'}$ $+ \frac{u'}{4}(t' + t'^2) - \frac{1}{2}$, e quindi $u' = \dfrac{\frac{1}{2}t'}{(1-t')\left(1 - \frac{t'}{4} - \frac{t'^2}{4}\right)}$.

Mettendo ora nell' equazione superiore questo valore di u', si avrà $u - \frac{t'}{1-t'} - \dfrac{\frac{1}{2}tt'}{(1-t')\left(1 - \frac{1}{4}t' - \frac{1}{4}t'^2\right)} = \frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$

$$-\frac{1}{4}\frac{t'(t'+t'^2)}{1-t'}-\frac{tt'}{4(1-t')}-\frac{\frac{t}{4}\cdot\frac{t'}{2}(t'+t'^2)}{(1-t')\left(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2\right)},$$ e di quì

$$u=\frac{t'\left(1-\frac{t'}{4}-\frac{t'^2}{4}\right)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t')\left(1-\frac{1}{4}(t+t^2+t'+t'^2)\right)}.$$

Trattasi ora di convertire questa espressione in una serie da cui possa ricavarsi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$. Si faccia quindi $1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2=a$, e sarà $u=(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})\times$

$$t'\left(a+\frac{1}{4}t\right)\left(a-\frac{1}{4}t(1+t)\right)^{-1}=(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})t'\left(a+\frac{1}{4}t\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{t}{4}\cdot\frac{(1+t)}{a^2}+\frac{t^2}{4^2}\cdot\frac{(1+t)^2}{a^3}+\frac{t^3}{4^3}\cdot\frac{(1+t)^3}{a^4}+\text{ec.}\right)$$

$$=(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})t'\left[\left(1+\frac{t}{4}\frac{(1+t)}{a}+\frac{t^2}{4^2}\cdot\frac{(1+t)^2}{a^2}+\text{ec.}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t}{4a}+\frac{t^2}{4^2a^2}\cdot(1+t)+\frac{t^3}{4^3a^3}(1+t)^2+\text{ec.}\right)\right],$$ ed essendo

$$\frac{1}{a}=1+\frac{t'}{4}(1+t')+\frac{t'^2}{4^2}\cdot(1+t')^2+\frac{t'^3}{4^3}\cdot(1+t')^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{a^2}=1+\frac{2t'}{4}(1+t')+\frac{2.3}{2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{2.3.4}{2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{a^3}=1+\frac{3t'}{4}(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{3.4.5.}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{a^4}=1+\frac{4t'}{4}(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\text{ec.}$$

ec. ec.

si avrà pure dopo le necessarie sostituzioni

$$(B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad u = (t' + t'^2 + t'^3 + t'^4 + \text{ec.}) \times$$

$$\left\{\begin{array}{l}
1 + \frac{t(1+t)}{4}\left(1 + \frac{t'}{4}(1+t') + \frac{t'^2}{4^2}(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t}{4}\left(1 + \frac{t'}{4}(1+t') + \frac{t'^2}{4^2}(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \frac{t^2(1+t)^2}{4^2}\left(1 + \frac{2t'}{4}(1+t') + \frac{2.3}{2.4^2}t'(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t^2(1+t)}{4^2}\left(1 + \frac{2t'}{4}(1+t') + \frac{2.3}{2.4^2}t'(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \frac{t^3(1+t)^3}{4^3}\left(1 + \frac{3t'}{4}(1+t') + \frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t^3(1+t)^2}{4^3}\left(1 + \frac{3t'}{4}(1+t') + \frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \frac{t^4(1+t)^4}{4^4}\left(1 + \frac{4t'}{4}(1+t') + \frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t^4(1+t)^3}{4^4}\left(1 + \frac{4t'}{4}(1+t') + \frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \text{ec.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}\right\}$$

In questa formola per avere il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non curando il fattore $t' + t'^2 + t'^3 + t'^4 + \text{ec.}$ si dee tener conto di tutte le potenze di t' inclusivamente a t'^0 non superiori a $t'^{x'-1}$, limitatamente però al caso in cui sieno moltiplicate per la sola potenza x^{esima} di t, e fare in seguito $t'=1$. Di fatto tutte le potenze di t' non superiori a $t'^{x'-1}$ nel detto fattore debbono essere elevate alla potenza x'^{esima} per la loro moltiplicazione con uno de' termini della serie $t' + t'^2 + t'^3 + t'^4 + \text{ec.}$ Ora la formola stessa da adoperarsi colla detta regola per ottenere il ricercato coefficiente può anche ridursi osservando che

$$\frac{t(1+t)}{4} + \frac{t}{4} = \frac{t(2+t)}{4},$$

$$\frac{t^2(1+t)^2}{4^2} + \frac{t^2(1+t)}{4^2} = \frac{t(1+t)+t}{4} \cdot \frac{t(1+t)}{4} = \frac{t(2+t)}{4} \cdot \frac{t(1+t)}{4},$$

$$\frac{t^3(1+t)^3}{4^3} + \frac{t^3(1+t)^2}{4^3} = \frac{t(1+t)+t}{4} \cdot \frac{t^2(1+t)^2}{4^2} = \frac{t(2+t)}{4} \cdot \frac{t^2(1+t)^2}{4^2},$$

$$\frac{t^4(1+t)^4}{4^4} + \frac{t^4(1+t)^3}{4^4} = \frac{t(1+t)+t}{4} \cdot \frac{t^3(1+t)^3}{4^3} = \frac{t(2+t)}{4} \cdot \frac{t^3(1+t)^3}{4^3}$$

ec. ec.

Diverrà essa pertanto soppresso il fattore $t'+t'^2+t'^3+t'^4+$ ec. come segue

$$1+\frac{t(2+t)}{4}\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{1}{4}t'(1+t')+\frac{1}{4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{1}{4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.} \\ +\frac{t(1+t)}{4}\left[1+\frac{2}{4}.t'(1+t')+\frac{3}{4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{4}{4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\right] \\ +\frac{t^2(1+t)^2}{4^2}\left[1+\frac{3}{4}.t'(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{3.4.5}{1.2.3.4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\right] \\ +\frac{t^3(1+t)^3}{4^3}\left[1+\frac{4}{4}.t'(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\right] \\ \text{ec.} \end{array}\right\}$$

Si rileva quindi da questa espressione colla regola data, che quando $x=0$, $y_{0,x'}=1$, poichè non vi è che il termine 1 il quale possa considerarsi moltiplicato per $t'^{x'-1}$, e per t^0 essendo evidentemente tutti gli altri termini della formola moltiplicati almeno per t. Intanto se nell' espressione (B) in vece di sopprimere il fattore $t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.}=t'(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec})$ si fosse soppresso $1+t'+t'^2+t^3+$ ec., allora nell' espressione trovata come è facile d'altronde a comprendersi rimanendo gli stessi tutti i termini nella grande parentesi, la cui somma giova qui denotare per s fuori di essa si troverebbe in vece di $1+\frac{t(2+t)}{4}.s$, $t'+\frac{(2+t)}{4}tt's$, ed essa somministrerebbe i valori di $y_{x,x'}$ prendendo tutti i termini contenenti t^x moltiplicati per qualunque delle potenze di t' inclusivamente a $t'^{x'}$. Anche in questo modo si otterrebbe $y_{0,x'}=1$ poichè in coerenza della regola già data il solo primo termine t' che si fa $=1$ può dare il valore di $y_{0,x'}$ contenendo tutti gli altri termini una potenza di t superiore a t^0. Qualora però nella espressione $t'+\frac{(2+t)tt'}{4}s$ si prescindesse dal termine t' non potrebbesi più avere $y_{0,x'}$ che *a priori*, locchè accade appunto nella formola del Sig. Marchese Laplace, la quale riduce-

si a $\frac{(2+t)tt'}{4}$ s da lui dedotta dallo sviluppo in serie di

$$\frac{t'\left(1-\frac{1}{4}.t'-\frac{1}{4}.t'^2\right)+\frac{1}{4}tt'}{1-\frac{1}{4}.t-\frac{1}{4}.t'-\frac{1}{4}.t^2-\frac{1}{4}.t'^2}-t',$$ cioè dalla funzione

generatrice di sopra trovata, a cui egli egualmente pervenne moltiplicandola poi per $1-t'$, e sottraendone t', e ciò poichè, come si è veduto, il fattore $\frac{1}{1-t'}=1+t'+t'^2+t'^3+$ec. non influisce che ad insegnare il modo per determinare il valore di $y_{x,x'}$. Non si può per altro non riflettere, che l'eliminazione di t' dalla funzione generatrice di $y_{x,x'}$ non serve, che a fare sparire dall' espressione generale della stessa $y_{x,x'}$ il valore particolare di $y_{0,x'}$, che sussistendo la t', si ottiene conservando alla medesima una maggiore generalità.

11. Sciolti i problemi dei tre numeri precedenti con metodo per avventura più semplice benchè sempre analogo a quello usato dal Sig. Marchese Laplace da cui prima nel trattarli si ottennero (1) gli stessi risultamenti, giova ora applicare la presente Teoria a due altri problemi di probabilità proposti e risoluti da Lagrange (2) e in seguito dal Brunacci (3) col calcolo delle differenze finite.

Cercasi col primo di essi la rispettiva probabilità che compete a due Giuocatori Tizio, e Cajo per guadagnare la partita, mentre manca a Tizio un numero x' di eventi favorevoli ed a Cajo un numero x, essendo inoltre q la probabilità dell' evento semplice favorevole a Tizio, e p l' analoga

(1) V. Laplace-Opera sopracitata da pag. 210 fino alla pag. 216.

(2) V. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Berlin. an. 1775.

(3) V. Brunacci-Corso di Matematica sublime Tom. I. pag. 261. e seguenti.

probabilità favorevole a Cajo. Espressa per $y_{x,x'}$ la probabilità, che ha Tizio di guadagnare la partita si stabilisce dai mentovati Autori l' equazione fondamentale $y_{x,x'} = q\,y_{x,x'-1} + py_{x-1,x'}$. Quindi essendo u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quella del secondo membro dell' equazione sarà $qut' + put$. Ora l' equazione non può sussistere quando $x'=0$, poichè niun evento più mancando a Tizio, la sua probabilità diviene certezza e si ha $y_{x,0} = 1$, $y_{x-1,0} = 1$ ec. e d' altronde l' equazione stessa avendo allora un termine con indice negativo, che non può riferirsi alla funzione generatrice, si riduce prescindendo da questo ad $y_{x,0} = py_{x-1,0}$ cioè $1 = p$ locchè è assurdo. Si dovrà dunque sottrarre da u la funzione generatrice di $y_{x,0} = 1$, la quale, poichè in essa il coefficiente di t^0 deve annullarsi a cagione di $y_{0,0} = 0$, si trova essere $\frac{t}{1-t}$. Si sottrarrà pure da $qut'+put$ la funzione generatrice di $py_{x-1,0}$, la quale perciò sarà $\frac{pt^2}{1-t}$. È intanto quasi inutile l'osservare che quando $x=0$, $y_{0,x'} = 0 = y_{0,x'-1}$ ec. poichè quando mancano ancora a Tizio eventi favorevoli x', ovvero $x'-1$, e niuno ne manca a Cajo il primo ha già perduto, ed inoltre l'equazione proposta in questo caso svanisce anche perchè la funzione $py_{-1,x'}$ non può esistere nella corrispondente funzione generatrice. È poi chiaro, che l'equazione sussiste quando in essa si pone $x=x'=1$, poichè allora diviene $y_{1,1} = qy_{1,0} = q$ riducendosi di fatto per Tizio, quando a Lui non meno che a Cajo manca un colpo solo, la probabilità di vincere alla semplice probabilità di avere un evento favorevole. Si avrà perciò l'equazione $u - \frac{t}{1-t} = qut' + put - \frac{pt^2}{1-t}$ onde $u = \frac{t-pt^2}{(1-t)(1-pt-qt')}$

$=(1-pt)t(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})((1-pt)^{-1}+(1-pt)^{-2}qt'$ $+(1-pt)^{-3}q^2t'^2+\text{ec.})=(t+t^2+t^3+\text{ec.})(1+(1-pt)^{-1}qt'$ $+(1-pt)^{-2}q^2t'^2\ldots+(1-pt)^{-x'}q^{x'}t^{x'}+\text{ec.})$. Pertanto siccome la potenza $t^{x'}$ non può entrare che nella sola parte $(t+t^2+t^3+\text{ec.})\times$ $(1-pt)^{-x'}q^{x'}t^{x'}$ della precedente espressione, sarà il ricercato coefficiente di $t^x t'^{x'}$ cioè $y_{x,x'}=q^{x'}\left(1+px'+\frac{x'(x'+1)}{2}p^2\right.$ $\left.+\frac{x'(x'+1)(x'+2)}{2.3}p^3\ldots+\frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x'+x-2)}{2.3.4\ldots(x-1)}p^{x-1}\right)$ presi tutti i termini dello sviluppo di $(1-pt)^{-x'}$ fino a quello inclusivamente che contiene la potenza t^{x-1}, e fatto dopo $t=1$.

Coll' altro problema sopraccennato domandasi la probabilità che compete ad un giuocatore che scommette di ottenere un dato evento x' volte almeno in un numero x di colpi per guadagnare con ciò la partita, essendo p la probabilità favorevole all' evento semplice, e quindi $1-p$ la probabilità contraria. Secondo queste condizioni e denominazioni si ha $y_{x,x'}=py_{x-1,x'-1}+(1-p)y_{x-1,x'}$. Quindi riguardata al solito u come funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà $putt'+(1-p)ut$ la funzione generatrice del secondo membro di questa equazione. Per trovare il valore di u deesi primieramente osservare, che quando $x'=0$, $y_{x,0}=1$, poichè quando rimanendo ancora x colpi da provarsi non resta più oltre da condursi il dato evento favorevole al giuocatore, questi ha già la certezza dell'aver vinto. Ciò vale eziandio nella supposizione di $x=0$ cioè $y_{0,0}=1$, poichè il giuocatore ha vinto del pari quando nè restano più colpi da farsi nè dee più condursi il dato evento. Non verificandosi pertanto l' equazione proposta qualunque volta sia $x'=0$ restando x indeterminata, e d' altronde man-

candone tutti i termini rispetto alle funzioni generatrici quando sia $x=0$, onde $y_{0,x'}=0$ supposto $x'>0$, saranno da prendersi, e da sottrarsi rispettivamente dalle funzioni generatrici de' due membri dell'equazione quelle di $y_{x,0}=1$, e di $(1-p)y_{x-1,0}=1-p$ cioè $\frac{1}{1-t}$ e $\frac{t(1-p)}{1-t}$. Così si avrà l'equazione $u-\frac{1}{1-t}=putt'+(1-p)ut-\frac{t(1-p)}{1-t}$ onde $u=\frac{1-t(1-p)}{(1-t)(1-ptt'-(1-p)t)}=(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\times\left((1-t(1-p))\left((1-(1-p)t)-ptt'\right)^{-1}=(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\times\left(1+(1-(1-p)t)^{-1}ptt'+(1-(1-p)t)^{-2}p^2t^2t'^2\ldots\ldots+(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}t^{x'}t'^{x'}+\text{ec.}\right)\right.$. Ora si vede, che il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in questa espressione non può essere che il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}t^{x'}=(t^{x'}+t^{x'+1}+\text{ec.})(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}$. Ora questo si ha svolgendo l'espressione $(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}$, e separando da essa tutti i termini che contengono le potenze di t fino a $t^{x-x'}$ inclusivamente, e fatto nel risultato $t=1$. Così si troverà $y_{x,x'}=p^{x'}\left(1+(1-p)x'+\frac{x'(x'+1)}{2}(1-p)^2+\frac{x'(x'+1)(x'+2)}{2.3}(1-p)^3\ldots\ldots+\frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x-1)}{2.3\ldots\ldots(x-x')}(1-p)^{x-x'}\right)$. È manifesto di fatto, che ciascuna potenza di t nello sviluppo di $(1-(1-p)t)^{-x'}$ dovendo essere moltiplicata per una potenza della stessa t non mai minore di $t^{x'}$, per avere il coefficiente di t^x debbono escludersi dai termini da prendersi per determinarlo quelli che contengono una potenza di t maggiore di $t^{x-x'}$.

12. Trattasi ora di applicare l'esposto metodo anche a qualche problema direttamente relativo alle serie *recurro-recurrenti*, che come si sa dipendono dalle equazioni a differenze parziali.

Sia per non dipartirsi dagli esempi dati dal Brunacci (1) ad applicazione del calcolo delle differenze finite quella stessa serie la cui legge apparisce dall' equazione $y_{x,x'} = 2y_{x,x'-1} + y_{x+1,x'-1}$ la risoluzione della quale dà il termine generale della stessa serie indicata dalla tavola seguente

	0	1	2	3	4	x
0	0	2	4	6	8	$2x$
1	2	8	14	20	26	
2	12	30	48	66	84	
3	54	108	162	216		
4	216	378	540			
.	. . . . .					
.	. . . . .					
x'	. . . . .					

L' equazione proposta sussiste per qualunque valore positivo di x comprensivamente allo zero, e fintantochè sia $x' > 0$. Nel caso della $x' = 0$ mancano nella funzione generatrice del secondo membro dell' equazione le funzioni $y_{x,-1}$, $y_{x+1,-1}$ come quelle che hanno indici negativi. Esistendo però nella funzione generatrice del primo membro, la quale al solito si denota per u la funzione $y_{x,0} = 2x$ per ipotesi, si cer-

(1) V. Brunacci. Opera e Volume sopracitati pag. 170.

cherà la funzione generatrice di $2x$ osservando, che supposto $x=0$, $y_{0,0}=0$. Quindi essendo in questo caso la funzione generatrice di $y_{x,0}$ espressa da $\frac{2t}{(1-t)^2}$, si hanno anche tutti i dati per istabilire l' equazione delle funzioni generatrici, poichè supposto solamente $x'=1$ si ha $y_{x,1}=2y_{x,0}+y_{x+1,0}=6x+2$, sicchè l' equazione in questo caso si verifica. Si avrà pertanto $u-\frac{2t}{(1-t)^2}=2ut'+\frac{ut'}{t}$, onde $u=\frac{2t}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t'-\frac{t'}{t}}$ $=\frac{2t}{(1-t)^2}\left(1-\left(2+\frac{1}{t}\right)t'\right)^{-1}=\frac{2t}{(1-t)^2}\left(1+\left(2+\frac{1}{t}\right)t'+\left(2+\frac{1}{t}\right)^2t'^2\right.$ $\left.+\left(2+\frac{1}{t}\right)^3t'^3\ldots+\left(2+\frac{1}{t}\right)^{x'}t'^{x'}+\text{ec.}\right)$. Perciò il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non potrà ricavarsi che dalla parte $\frac{2t}{(1-t)^2}\left(2+\frac{1}{t}\right)^{x'}t'^{x'}$ della precedente espressione, e sarà lo stesso che il coefficiente di t^x in $2t(1+2t+3t^2+4t^3+\text{ec.})\times$ $\left(2^{x'}+x'.\frac{1}{t}.2^{x'-1}+\frac{x'(x'-1)}{2}.\frac{1}{t^2}.2^{x'-2}+\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3}.\frac{1}{t^3}.2^{x'-3}\ldots\right.$ $\left.\ldots+\frac{1}{t^{x'}}\right)$, il quale, riflettendo, che in generale il prodotto di $\frac{1}{t^m}$ per $2t(x+m)t^{x+m-1}$ è $2(x+m)t^x$, si trova essere $2x.2^{x'}+2(x+1)x'2^{x'-1}+2(x+2)\frac{x'(x'-1)}{2}.2^{x'-2}+2(x+3)\times$ $\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3}.2^{x'-3}\ldots+2(x+x')$.

Allo stesso risultato si derviene mediante uno sviluppo alquanto diverso. Di fatto $\frac{2t}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t'-\frac{t'}{t}}=\frac{2t^2}{(1-t)^2(t-2tt'-t')}$ $=\frac{2t^2}{(1-2t')(1-t)^2(t-r)}\left(\text{fatto }\frac{t'}{1-2t'}=r\right)=\frac{2t^2}{(1-t)^2(1-2t')}(t^{-1}+rt^{-2}$

$+r^2t^{-3}+$ ec.$)=\frac{2t}{1-2t'}.(1+2t+3t^2+\text{ec.})(1+rt^{-1}+r^2t^{-2}+\text{ec.})$

dal che si vede, che il coefficiente di t^x in questa espressione è $\frac{2}{1-2t'}(x+(x+1)r+(x+2)r^2+(x+3)r^3+\text{ec.})$ $=2\left(\frac{x}{1-2t'}+\frac{(x+1)t'}{(1-2t')^2}+\frac{(x+2)t'^2}{(1-2t')^3}+\text{ec.}\right)$, e quindi il coefficiente di $t'^{x'}$ in quest' ultima espressione, il quale è pur quello di $t^x t'^{x'}$ nella funzione generatrice proposta, potrà aversi prendendo il coefficiente di $t'^{x'}$ in $\frac{1}{1-2t'}$, il quale è evidentemente $2^{x'}$, quello di $t'^{x'-1}$ in $\frac{1}{(1-2t')^2}$ che è $x.2^{x'-1}$, quello di $t'^{x'-2}$ in $\frac{1}{(1-2t')^3}$ cioè $\frac{x'(x'-1)}{2}2^{x'-2}$, e così di seguito fino al coefficiente di t'^0 in $\frac{1}{(1-2t')^{x'+1}}$ inclusivamente (1). Per tal modo si otterrà $y_{x,x'}=2\left(x.2^{x'}+(x+1)x'.2^{x'-2}+(x+2)\times\frac{x'(x'-1)}{2}2^{x'-2}+(x+3).\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3}.2^{x'-3}\ldots+(x+x')\right)$ come prima.

13. Merita ora di essere sciolto col metodo delle funzioni generatrici un altro problema di serie *recurro recurrente*, che il Sig. Lacroix chiama a *double entrée*, al quale viene da esso applicato un metodo complicatissimo, da cui d'altronde anzichè l' espressione del ricercato termine generale risulta solamente la traccia per rinvenirlo (2).

Pertanto essendo il medesimo dato dall' equazione $y_{x,x'}=2y_{x,x'-1}+2y_{x-1,x'-1}$, nella quale si faccia $y_{0,1}=0$, $y_{1,1}=1$,

(1) Veggasi il n. 24. della prima Memoria relativa alle funzioni generatrici.

(2) V. Lacroix. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Integral. T. III. Seconde édition. pag. 295. e seguenti.

$y_{2,1}=0$, $y_{3,1}=0$ ec. la serie cui esso si riferisce è la seguente

	1	2	3	4	5 x
1	1	0	0	0	0 . . . . . ec.
2	2	2	0	0	0 . . . . .
3	4	8	4	0	0 . . . . .
4	8	24	24	8	0 . . . . .
5	16	64	96	64	16 . . . . .
6	32	160	320	320	160 . . . . .
7	64	384	960	1280	960 . . . . .
.	. . . . .				
.	. . . . .				
x'	. . . . .				

Onde determinare la funzione generatrice dell'equazione proposta conviene osservare, che i termini della serie notati nella tavola sonosi ricavati dall' equazione stessa considerando nulli tutti que' valori di $y_{x,x'}$ in cui $x=0$, $x'=0$, giacchè negli indici della serie manca lo zero. Quindi perciò e per l' ulteriore supposizione di $y_{m,1}=0$ quando sia m numero intero e positivo >1 non che di $y_{1,1}=1$ si verificano tutte le seguenti equazioni salva la prima $y_{1,1}=2y_{1,0}+2y_{0,0}=0$ mentre in vece si ha $y_{1,1}=1$, $y_{2,1}=2y_{2,0}+2y_{1,0}=0$, $y_{3,1}=2y_{3,0}+2y_{2,0}=0$ ec. $y_{2,2}=2y_{2,1}+2y_{1,1}=2$, $y_{1,2}=2y_{1,1}+2y_{0,1}=2$. Dunque prendendo le funzioni genera-

trici dei termini della nostra equazione, e rappresentando al solito per u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ si avrà $u - tt' = 2ut' + 2utt'$ essendo $y_{1,1}\ tt'$ il solo termine di u che turbi l'equazione fra i termini corrispondenti delle funzioni generatrici. Quindi sarà pure $u = \frac{tt'}{1-2t'-2tt'} = tt'(1 - 2t'(1+t))^{-1}$ $= tt'(1 + 2t'(1+t) + 2^2t'^2(1+t)^2 + 2^3t'^3(1+t)^3 \ldots\ldots + 2^{x'-1}t'^{x'-1}(1+t)^{x'-1} + \text{ec.})$. Pertanto, come è facile a vedersi, il ricercato coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non può essere che quello di t^{x-1} in $2^{x'-1}(1+t)^{x'-1} = 2^{x'-1}\left(1 + (x'-1)t + \frac{(x'-1)(x'-2)}{1.2}t^2 + \frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)}{1.2.3}t^3 \ldots + \frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots(x'-x+1)}{1.2.3\ldots(x-1)}t^{x-1} + \text{ec.}\right)$.

Dunque sarà $y_{x,x'} = 2^{x'-1}\frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots\ldots(x'-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-1)}$.

Sia ora $x=5$, $x'=6$, e si troverà $y_{5,6} = \frac{2^5.5.4.3.2.}{2.3.4} = 160$ come nella tavola. Similmente abbiasi $x = 3$, $x' = 7$ e sarà $y_{3,7} = 2^6.\frac{6.5}{2} = 960$ pure come nella tavola.

È opportuno da ultimo di osservare, che l'espressione trovata di $y_{x,x'}$ non può valere se non fino a tanto che x non sia $> x'$ come d'altronde porta la natura della serie, in cui sono nulli come rilevasi anche dal la tavola tutti i termini relativamente ai quali l'indice x è $> x'$. Nel caso poi di $x = x' = 1$ apparisce dallo sviluppo della funzione u essere $y_{1,1} = 1$, poichè in esso appunto l'unità è il coefficiente di tt'.

14. Seguendo il piano tracciato anche nella prima memoria cade quì in acconcio di risolvere un altro problema relativo in qualche modo alla partizione de' numeri.

Sia proposto perciò di determinare in quanti modi possa il numero x' essere la somma degli esponenti di x lettere a, b, c, d, ec. innalzate a potenza ed insieme moltiplicate.

Rappresentando per $y_{x,x'}$ il numero ricercato, $y_{x-1,x'-m}$ esprimerà il numero delle maniere nelle quali la somma di tali esponenti riesce $= x'$ tenendo fermo in una data lettera l'esponente m, essendo m qualunque numero intero. Di quì nasce l'equazione del problema nella supposizione, che fra gli esponenti delle diverse lettere non debba aver luogo lo zero, cioè $y_{x,x'} = y_{x-1,x'-1} + y_{x-1,x'-2} + y_{x-1,x'-3} +$ ec. ovvero $y_{x,x'-1} = y_{x-1,x'-2} + y_{x-1,x'-3} + y_{x-1,x'-4} +$ ec., e perciò $y_{x,x'} = y_{x-1,x'-1} + y_{x,x'-1}$ come con altro metodo trovò il Brunacci (1).

Se fra gli esponenti delle lettere si ammetta anche lo zero, fatto $m=0$, $m=1$, $m=2$, ec. nel simbolo $y_{x-1,x'-m}$, si troverà per questo caso $y_{x,x'} = y_{x-1,x'} + y_{x-1,x'-1} + y_{x-1,x'-2} +$ ec. $y_{x,x'-1} = y_{x-1,x'-1} + y_{x-1,x'-2} + y_{x-1,x'-3} +$ ec., e quindi $y_{x,x'} = y_{x-1,x'} + y_{x,x'-1}$.

Frattanto considerata l'equazione $y_{x,x'} = y_{x-1,x'-1} + y_{x,x'-1}$, ed essendo u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà $utt' + ut'$ quella di $y_{x-1,x'-1} + y_{x,x'-1}$. Ora supposto $x'=0$ sarà $y_{x,0} = 0$, poichè è chiaro che la somma di esponenti maggiori di zero non può essere zero, e l'equazione proposta in questa ipotesi svanisce, come accade pure in quella di $x=0$ essendo $y_{0,x'}=0$, non potendo essere zero il numero delle lettere. Inoltre si ha pure, fatto $x'=1$, $y_{x,1} = 0$ qualunque volta non sia $x=1$, poichè la somma degli esponenti di più lettere, i quali si suppongono non minori di 1 non può essere 1. È però $y_{1,1} = 1$, e non sussistendo allora l'equazione proposta dovrà

(1) V. Brunacci. Opera, e Volume sopracitati pag. 193. e seg.

sottrarsi da u il termine $y_{1,1}\, tt' = tt'$, e si avrà l' equazione $u - tt' = utt' + ut'$ onde $u = \frac{tt'}{1-(1+t)t'} = tt'(1+(1+t)t'+(1+t)^2t'^2 + (1+t)^3t'^3 \ldots + (1+t)^{x'-1}t'^{x'-1} + \text{ec.})$. Dunque il coefficiente di $t'^{x'}$ in u sarà $t(1+t)^{x'-1} = t\,(1 + (x'-1)t + \frac{(x'-1)(x'-2)}{1.2}t^2 + \frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)}{1.2.3}t^3 \ldots + \frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots(x'-(x-1))}{1.2.3\ldots(x-1)}t^{x-1} + \text{ec.}$

E quindi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ ovvero $y_{x,x'}$ sarà $= \frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots(x'-x+1)}{1.2.3\ldots(x-1)}$ come trovò pure il Brunacci.

Considerata ora l' equazione $y_{x,x'} = y_{x-1,x'} + y_{x,x'-1}$, la quale esprime le condizioni del problema quando fra gli esponenti delle lettere si ammetta anche lo zero, si vede facilmente, che essa sussiste finchè non sia $x'=0$, giacchè in questo caso si ha $y_{x,0} = 1$ posto $x > 1$ essendo evidente potersi avere la somma zero degli esponenti però in un modo solo quando in ciascuna delle x lettere l' esponente sia zero. E poichè anche $y_{x-1,0} = 1$, posto $x > 1$, ne segue, che la funzione generatrice di $y_{x,0}$ è $\frac{t}{1-t}$, e quella di $y_{x-1,0}$ è $\frac{t^2}{1-t}$. Si vedrà quindi facilmente essere l' equazione tra le funzioni generatrici $u - \frac{t}{1-t} = ut + ut' - \frac{t^2}{1-t}$, onde $u = t\,(1-(t+t'))^{-1} = t\,(1+(t+t')+(t+t')^2+(t+t')^3 \ldots + (t+t')^{x'} + \text{ec.})$, dal che si rileva che il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in questa espressione di u non può essere che quello di $t^{x-1}t'^{x'}$ in $(t'+t)^{x'+x-1} = t'^{x'+x-1} + (x'+x-1)\,tt'^{x'+x-2} + \frac{(x'+x-1)(x'+x-2)}{1.2}t^2 t'^{x'+x-3} + \frac{(x'+x-1)(x'+x-2)(x'+x-3)}{1.2.3}t^3 t'^{x'+x-4} \ldots\ldots$

$+\frac{(x'+x-1)(x'+x-2)\ldots\ldots(x'+x-(x-1))}{1.2\ldots\ldots\ldots(x-1)}t^{x-1}t'^{x'}$. Dunque $y_{x,x'}$ $=\frac{(x'+x-1)(x'+x-2)(x'+x-3)\ldots\ldots(x'+2)(x'+1)}{1.2.3.\ldots\ldots(x-1)}$.

Si ponga per esempio $x=4$, $x'=6$ si avrà da questa formola $y_{4,6}=\frac{9.8.7}{1.2.3}=84$.

15. Non essendosi fin quì risolute equazioni alle differenze parziali contenenti funzioni conosciute di x e di x', è quindi opportuno di dar luogo a qualche esempio anche intorno a queste.

Sia perciò l'equazione $y_{x,x'}-y_{x-1,x'-1}=xx'$, la quale esprime le condizioni di una serie in cui un termine qualunque considerato come funzione degli indici x, x' eguaglia il prodotto di questi accresciuto del termine che è funzione degli indici stessi diminuiti ciascuno di un'unità. Ciò posto se si suppone inoltre $y_{x,0}=y_{0,x'}=0$ anche quando $x=0$ ovvero $x'=0$, essendo al solito u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ si avrà l'equazione $u-utt'=\frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2}$ (num. 5.), ed $u=\frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2(1-tt')}$ $=(tt'+t^2t'^2+t^3t'^3+\text{ec.})(1+2t+3t^2\ldots\ldots+(x-2)t^{x-3}+(x-1)t^{x-2}$ $+xt^{x-1}+\text{ec.})(1+2t'+3t'^2+\text{ec.})$. Quindi il coefficiente di t^x in questa espressione sarà $(xt'+(x-1)t'^2+(x-2)t'^3\ldots\ldots+t'^x)(1+2t'$ $+3t'^2+\text{ec.})$, e da esso si ricaverà il coefficiente di $t'^{x'}$, o ciò che è lo stesso nel presente caso il coefficiente di $t^xt'^{x'}$, il quale risulta

$$xx'+(x-1)(x'-1)+(x-2)(x'-2)\ldots+(x-x'+1).1.$$

Per applicare questa formola a qualche esempio si ponga $x=x'=4$, sarà $y_{4,4}=16+9+4+1=30$, $y_{3,3}=9+4+1=14$, valori che rendono per l'appunto identica l'equazione proposta. Sia per un' altro esempio $x=6$, $x'=3$ si avrà $y_{6,3}-y_{5,2}=32-14=18$ come dev' essere.

Se invece di supporre $y_{x,0} = y_{0,x'}$ comprensivamente ad $y_{0,0} = 0$ si pone $y_{x,0} = y_{0,x'} = m$ comprensivamente ad $y_{0,0} = m$, essendo m un numero intero qualunque dato, non si avrebbe più l' equazione $u - utt' = \frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2}$. Di fatto nella nuova ipotesi si vede facilmente che è d' uopo sottrarre da u i termini che non verificano l'equazione proposta corrispondenti a tutti i valori di $y_{x,0}$, $y_{0,x'}$ quali si hanno appunto dalle due funzioni $\frac{m}{1-t}$, $\frac{m}{1-t'}$ generatrici di m. Ma siccome sottraendo queste due funzioni da u se ne leverebbe due volte il termine $y_{0,0}$ dipendente tanto dalla ipotesi di $x=0$ in $y_{x,0}$ quanto da quella di $x'=0$ in $y_{0,x'}$, per toglierlo una volta sola è d' uopo moltiplicare per t o per t' rispettivamente una delle due funzioni $\frac{m}{1-t}$, $\frac{m}{1-t'}$ ed allora sottrarre la somma da u. Così pertanto si avrà $u = \frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2(1-tt')} + \frac{mt}{(1-t)(1-tt')} + \frac{m}{(1-t)(1-tt')}$, e per determinare il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ si dovrà aggiungere all' espressione già trovata per $y_{x,x'}$ nella precedente ipotesi quella di $t^x t'^{x'}$ in $\left(\frac{mt}{1-t} + \frac{m}{1-t'}\right) \cdot \frac{1}{1-tt'}$. Ora il coefficiente di t^x in $\frac{mt}{1-t} \cdot \frac{1}{1-tt'} = mt(1+t+t^2+\text{ec.})(1+tt'+t^2t'^2 + t^3t'^3 + \text{ec.})$ è $m(1+t'+t'^2+t'^3 \ldots t'^{x-1}) = \frac{m(1-t'^x)}{1-t'}$, e quello di t^x in $\frac{m}{1-t'} \cdot \frac{1}{1-tt'} = \frac{m}{1-t'}(1+tt'+t^2t'^2+t^3t'^3+\text{ec.})$ è $\frac{mt'^x}{1-t'}$. Dunque essendo $\frac{m(1-t'^x)}{1-t'} + \frac{mt'^x}{1-t'} = \frac{m}{1-t'}$ il coefficiente di t^x in $\left(\frac{mt}{1-t} + \frac{m}{1-t'}\right) \frac{1}{1-tt'}$, quello di $t^x t'^{x'}$ in questa

stessa formola sarà pure il coefficiente di $t'^{x'}$ in $\frac{m}{1-t'}$ $=m(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})$, cosicchè il ricercato è m. Adunque nella nuova ipotesi di $y_{x,0}=y_{0,x'}=y_{0,0}=m$ si ha

$$y_{x,x'}=xx'+(x-1)(x'-1)+(x-2)(x'-2)\ldots+(x-x'+1).1+m.$$

16. Continuando nella ricerca del termine generale delle serie si cerchi ora il valore di $y_{x,x'}$ nell' equazione $y_{x,x'}=x+2^{x'}+y_{x,x'-1}+2y_{x+1,x'-1}$ dedotta dalla legge che seguono i termini della serie descritta nella seguente Tavola

	0	1	2	3	4 x
0	1	1	1	1	1 1
1	5	6	7	8	9 . . . . .
2	21	25	29	33	. . . . .
3	79	92	105	118	. . . . .
4	. . . . .				
.	. . . . .				
x'	. . . . .				

Pertanto se si denota al solito per u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, e per u' quella di $x+2^{x'}$, sarà la funzione generatrice del secondo membro dell' equazione espressa da $u'+ut'+\frac{2ut'}{t}$. Ora u' può determinarsi sommando i due prodotti della funzione generatrice di x per la funzione generatrice dell' unità relativamente a t' e della fun-

zione generatrice di $2^{x'}$ per la funzione generatrice dell'unità relativamente a t. Così si avrà $u' = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{1}{1-t'} + \frac{1}{1-2t'} \cdot \frac{1}{1-t}$. Intanto poichè per ipotesi quando $x'=0$ si ha $y_{x,0} = 1$ anche quando $x=0$, ed allora il secondo membro dell'equazione proposta si riduce ad $x+1$ prescindendo dalle funzioni con indice negativo, prese le funzioni generatrici di $y_{x,0} = 1$, e di $x+1$, le quali sono rispettivamente $\frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{(1-t)^2}$ si otterrà facilmente l' equazione $u - \frac{1}{1-t} = ut' + \frac{2ut'}{t} + \frac{t}{(1-t')(1-t)^2} + \frac{1}{(1-2t')(1-t)} - \frac{1}{(1-t)^2}$ onde si ricava $u = \left(\frac{t}{1-t} + \frac{t^2}{(1-t')(1-t)^2} + \frac{t}{(1-2t')(1-t)} - \frac{t}{(1-t)^2}\right) : (t - tt' - 2t')$.

Per avere il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u cioè il valore di $y_{x,x'}$ si osservi, che l'espressione di u riducendone tutti i termini allo stesso denominatore diviene $\frac{t^2t'(1-2t') + t(1-t')(1-t)}{(1-t)^2(1-t')(1-2t')} \cdot \frac{1}{t-tt'-2t'}$ $= \left(\frac{t^2t'}{(1-t)^2(1-t')} + \frac{t}{(1-t)(1-2t')}\right) \cdot \frac{1}{t-tt'-2t'} = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t'}{(1-t')} \times \frac{1}{1-\left(1+\frac{2}{t}\right)t'} + \frac{1}{(1-t)} \cdot \frac{1}{(1-2t')} \cdot \frac{1}{1-\left(1+\frac{2}{t}\right)t'}$. Essendo il primo termine di questa espressione lo stesso che $\frac{t}{(1-t)^2} \times (t' + t'^2 + t'^3 + \text{ec.}) \left[1 + \left(1+\frac{2}{t}\right)t' + \left(1+\frac{2}{t}\right)t'^2 + \text{ec.}\right]$ sarà in esso il coefficiente di $t'^{x'}$ denotato da $\frac{t}{(1-t)^2} \times \left[1 + \left(1+\frac{2}{t}\right) + \left(1+\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{t}\right)^3 \ldots + \left(1+\frac{2}{t}\right)^{x'-1}\right]$

$$= \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{\left(1+\frac{2}{t}\right)^{x'} - 1}{\left(1+\frac{2}{t}\right) - 1} = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t}{2}\left[\left(1+\frac{2}{t}\right)^{x'} - 1\right]$$

$$= \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t}{2}\left(\frac{2x'}{t} + \frac{2^2}{t^2} \cdot \frac{x'(x'-1)}{2} + \frac{2^3}{t^3} \cdot \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \right.$$

$$\left. + \frac{2^{x'}}{t^{x'}}\right)$$, e quindi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è $x.\,x' + (x+1) \times$

$$\frac{x'(x'-1)}{2} \cdot 2 + (x+2)\,\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} \cdot 2^2 \cdot \cdot \cdot + (x+x'-1).\,2^{x'-1}.$$

E poichè con analogo sviluppo trovasi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in $\frac{1}{(1-t)(1-2t')} \cdot \frac{1}{1-\left(1+\frac{2}{t}\right)t'}$ essere $3^{x'+1} - 2^{x'+1}$, riunendo i coefficienti parziali verrà $y_{x,x'} = x.x' + (x+1)\frac{x'(x'-1)}{2} \cdot 2$

$$+ (x+2)\,\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} \cdot 2^2 \cdot \ldots + (x+x'-1)2^{x'-1} + 3^{x'+1} - 2^{x'+1},$$

espressione che si mostrerà identica alla ritrovata dal Brunacci (1) solo che si osservi, che essendo $3^{x'+1} = 2.3^{x'} + 3^{x'} = 2.3^{x'}$ $+ 1 + 2x' + \frac{x'(x'-1)}{2} \cdot 2^2 + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} \cdot 2^3 \cdot \cdot \cdot \cdot + 2^{x'}$. il valore assegnato di $y_{x,x'}$ si trasformerà pure in $1 + (x+2)x'$

$$+ (x+3)\,\frac{x'(x'-1)}{2} \cdot 2 + (x+4)\,\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} \cdot 2^2 \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (x+x'+1).\,2^{x'-1} + 2.\,3^{x'} - 2^{x'+1}.$$

17. Qualche volta col metodo delle funzioni generatrici sembra che non possano ottenersi che soluzioni particolari de' problemi, che col mezzo di esso s'intraprende di risolvere. Però essendo il numero di tali soluzioni limitato, e potendo tutte ottenersi ad una per volta, si ha poi nel loro com-

(1) V. Brunacci. Opere e Vol. sopracitati pag. 216.

plesso la soluzione generale de' problemi stessi. A cagion d' esempio abbiasi l'equazione $y_{x,x'} = y_{x-2,x'} + y_{x-1,x'-1}$. Si supponga inoltre essere $y_{x,0} = y_{0,x'} = 0$, $y_{m,m} = 1$, essendo m numero qualunque intero non < 1, e di più $y_{x,1} = 1$, $y_{m,m+n} = 0$, cioè $y_{x,x'} = 0$ ogni qualvolta sia $x' > x$. Dipendentemente da queste condizioni l'equazione proposta non si verifica ne' due casi di $x = x' = 1$, e di $x = 2$, $x' = 1$, poichè in amendue il primo membro risulta $= 1$, ed il secondo si riduce a zero. Essa però sussiste posto $x = x' = 2$, poichè allora viene $y_{2,2} = y_{0,2} + y_{1,1}$, equazione identica per ipotesi. Ciò posto si vede facilmente nascere l' equazione $u - tt' - t^2 t' = u t^2 + u tt'$ ossia $u = \frac{tt' + t^2 t'}{1 - t(t+t')}$, essendo sempre u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$. Al secondo membro della medesima è chiaro potersi dare diverse forme, fra le quali quella che dipende dalla risoluzione in fattori del denominatore $1 - t(t+t')$ si presenta forse per la prima. Essa però non è quella che conduca più facilmente alla determinazione del ricercato coefficiente. Di fatto posto $1 - t^2 - tt' = 0$ si ha $t = \frac{-t' \pm \sqrt{(4+t'^2)}}{2} = \frac{-t' \pm r}{2}$ ponendo $\sqrt{(4+t'^2)} = r$; dunque $t^2 + tt' - 1 = \left(t + \frac{t'}{2} - \frac{r}{2}\right) \times \left(t + \frac{t'}{2} + \frac{r}{2}\right)$, $1 - t^2 - tt' = -(t+p)(t+p')$ fatto ancora $\frac{t'}{2} - \frac{r}{2} = p$, $\frac{t'}{2} + \frac{r}{2} = p'$. Pertanto $u = \frac{-tt' - t^2 t'}{(t+p)(t+p')}$ $= -(tt' + t^2 t') . \frac{1}{pp'} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p}} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p'}}$. Ora $\frac{1}{1 + \frac{t}{p}} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p'}}$ $= \left(1 + (-1)\frac{t}{p} + (-1)^2 \frac{t^2}{p^2} + \text{ec.}\right)\left(1 + (-1)\frac{t}{p'} + (-1)^2 \frac{t^2}{p'^2} + \text{ec.}\right)$; dunque il coefficiente di t^x in $\frac{1}{1 + \frac{t}{p}} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p'}}$ è il se-

guente $(-1)^x \cdot \frac{1}{p'^x} + (-1)^x \cdot \frac{1}{pp'^{x-1}} + (-1)^x \cdot \frac{1}{p^2 p'^{x-2}} \cdots\cdots$ $+ (-1)^x \cdot \frac{1}{p^x}$ cioè una serie geometrica in cui il numero de' termini è $x+1$. Sarà dunque questo coefficiente $= (-1)^x \cdot \frac{1}{p'^x}$ $\left(\frac{p'^{x+1}}{p^{x+1}} - 1\right) : \left(\frac{p'}{p} - 1\right) = (-1)^x \cdot \frac{1}{p'^x}\left(\frac{p'^{x+1} - p^{x+1}}{p^{x+1}}\right) \cdot \frac{p}{p'-p}$ $= (-1)^x \cdot \frac{1}{p'^x\, p^x} \cdot \left(\frac{p'^{x+1} - p^{x+1}}{p'-p}\right)$. Perciò il coefficiente di t^{x-1}, e quello di t^{x-2} saranno rispettivamente $(-1)^{x-1} \times$ $\frac{1}{p'^{x-1}\, p^{x-1}} \cdot \left(\frac{p'^x - p^x}{p'-p}\right)$, $(-1)^{x-2} \cdot \frac{1}{p'^{x-2}\, p^{x-2}}\left(\frac{p'^{x-1} - p^{x-1}}{p'-p}\right)$, ed il coefficiente di t^x in u sarà per conseguenza $t'\left((-1)^x \cdot \frac{1}{p'^x p^x}\left(\frac{p'^x - p^x}{p'-p}\right)\right.$ $\left. + (-1)^{x-1} \frac{1}{p'^{x-1} p^{x-1}}\left(\frac{p'^{x-1} - p^{x-1}}{p'-p}\right)\right) = t'\left\{(-1)^x \frac{1}{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^x \left(\frac{t'-r}{2}\right)^x} \times\right.$

$$\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^x - \left(\frac{t'-r}{2}\right)^x}{\left(\frac{t'+r}{2}\right) - \left(\frac{t'-r}{2}\right)}\right\} + (-1)^{x-1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{t'-r}{2}\right)^{x-1}} \times$$

$$\left.\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^{x-1} - \left(\frac{t'-r}{2}\right)^{x-1}}{\left(\frac{t'+r}{2}\right) - \left(\frac{t'-r}{2}\right)}\right\}\right\} = t'\left\{(-1)^x \frac{4^x}{(t'^2 - r^2)^x}\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^x - \left(\frac{t'-r}{2}\right)^x}{r}\right\}\right.$$

$$\left. + (-1)^{x-1} \cdot \frac{4^{x-1}}{(t'^2 - r^2)^{x-1}}\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^{x-1} - \left(\frac{t'-r}{2}\right)^{x-1}}{r}\right\}\right\}.$$ Quindi l'espressione dello stesso coefficiente si riduce a

$$\text{(C)} \ldots \frac{1}{2^{x-1}}\left(x t'^x + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} t'^{x-2} r^2 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5} t'^{x-4} r^4 \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots(2m+1)} t'^{x-2m} r^{2m} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{2^{x-2}}\left((x-1) t'^{x-1}\right.$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}\,t'^{x-3}\,r^2+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.2.3.4.5}\,t'^{x-5}\,r^4\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+1)}\,t'^{x-(2m+1)}\,r^{2m}+\text{ec.}\Big),$$ nella quale tutta la quantità moltiplicata per $\frac{1}{2^{x-1}}$ dà il coefficiente di $t'^{x'}$ nel caso che x' si riduca alla forma $x-2m$, cioè sia $x-2m=x'$, $x-x'=2m$, e la quantità moltiplicata per $\frac{1}{2^{x-2}}$ dà il coefficiente di $t'^{x'}$ quando sia $x-(2m+1)=x'$, $x-x'=2m+1$. Supposto pertanto il primo caso, il coefficiente di $t'^{x-2m}=t'^{x'}$ dovrà ricavarsi dalla formola

$$(1)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\Big(xt'^{x}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,t'^{x-2}(4+t'^2)+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}\times$$

$$t'^{x-4}(4+t'^2)^2\ldots\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots\ldots(2m+1)}\,t'^{x-2m}(4+t'^2)^m+\text{ec.}\Big)$$

o piuttosto dall' altra

$$(2)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\Big(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots\ldots(2m+1)}\,t'^{x-2m}(4+t'^2)^m+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2))}{1.2.3\ldots(2m+3)}\times$$

$$t'^{x-2m-2}(4+t'^2)^{m+1}\ldots\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2m+2m'))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+2m'+1)}\times$$

$$t'^{x-(2m+2m')}(4+t'^2)^{m+m'}+\text{ec.}\Big),$$ giacchè come è facile a vedersi i coefficienti parziali di $t'^{x'}$ non possono ricavarsi che dai termini dell'espressione (1) ne' quali la potenza di t' non superi la $x-2m^{esima}$. Ora supposto $x-2m-2m'=1$, od $x-2m-2m'=0$, locchè riguarda i due casi di x, x' amendue dispari, e di x, x' amendue pari, i coefficienti parziali di $t'^{x'}$, si ricaveranno da ciascuno de' termini dell'espressione (2) fino a quello inclusivamente in cui la potenza di t' è $x-2m-2m'$. Preso quindi in generale il coefficiente di $t'^{2m'}$ in $(4+t'^2)^{m+m'}$ col dare successivamente ad m' tutti i valori 1, 2, 3, 4 ec.

nella formola che ne risulterà, si avranno da essa altrettanti fattori dei termini componenti il coefficiente di t'^{x-2m} da moltiplicarsi poi rispettivamente pe' fattori dipendenti da x ne' varj termini dell'espressione (2). Pertanto essendo $(4+t'^2)^{m+m'}$

$$=4^{m+m'}+(m+m')\,4^{m+m'-1}\,t'^2+\frac{(m+m')(m+m'-1)}{1.2}\,4^{m+m'-2}\,t'^4$$

$$+\frac{(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)}{1.2.3}\,4^{m+m'-3}\,t'^6$$

$$+\frac{(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\,4^{m}\,t'^{2m'}+\text{ec.},$$

sarà per conseguenza $\frac{(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}.4^m$ il ricercato coefficiente di $t'^{2m'}$ in $(4+t'^2)^{m+m'}$. Posto $m'=1$ questo coefficiente è $(m+1).4^m$, e posto $m'=2$ diviene $\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}.4^{m+1}$; ed osservando, che questa generale espressione non si estende al caso di $m'=0$ nel quale d'altronde si ha in 4^m il coefficiente di $t'^0=t'^{2m'}$, risulta finalmente il ricercato coefficiente totale espresso da

$$(3)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\Bigg(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots(2m+1)}.4^m+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2))}{1.2.3\ldots(2m+3)}(m+1)4^m$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+4))}{1.2.3\ldots(2m+5)}\cdot\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}\cdot 4^m$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+6))}{1.2.3\ldots(2m+7)}\cdot\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1.2.3.}\cdot 4^m\ldots$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2m'))}{1.2.3\ldots(2m+2m'+1)}\cdot\frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\cdot 4^m\Bigg).$$

Sia per esempio $x=8$, $x'=2$, e sarà $y_{8,2}=\frac{1}{2^7}.4^3.\times\frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.}=4$, poichè è chiaro che in questo caso $x-x'=6=2m=2.3$, onde $m=3$, $2m'=2$, $m'=1$, e quindi il valore da prendersi in questo caso finisce dopo il pri-

mo termine. Sia ancora $x=9, x'=3$, onde $x-x'=9-3=2\,.\,3$, e quindi $m=3, x-2.3-2=1$, e si avrà $y_{9,3}=\frac{1}{2^8}\,.\,4^3\,.\,\frac{8.9}{2}+\frac{1.4^4}{2^8}=10$. Questi risultati possono verificarsi col mezzo delle sostituzioni successive nella equazione superiormente stabilita. Di fatto per essa si ha $y_{9,3}=y_{7,3}+y_{8,2}=y_{5,3}+y_{6,2}+y_{6,2}+y_{7,1}$ $=y_{5,3}+2y_{6,2}+1=y_{3,3}+y_{4,2}+2(y_{4,2}+y_{5,1})+1=4+3y_{4,2}$ $=4+3(y_{2,2}+y_{3,1})=4+6=10$.

Resta ora da determinarsi generalmente il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-(2m+1)$. Per le cose già dette apparisce, che questo coefficiente non potrà prendersi, che dalla quantità moltiplicata per $\frac{1}{2^{x-2}}$ nella formola (C) cominciando dal termine contenente la potenza $t'^{x-(2m+1)}$. Così si troverà esso col mezzo dell' espressione

$$\frac{1}{2^{x-2}}\Bigg[\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+1)}\,t'^{x-(2m+1)}(4+t'^2)^m$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+3))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+3)}\,t'^{x-(2m+3)}(4+t'^2)^{m+1}\ldots\ldots$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+2m'+1))}{1.2.3\ldots(2m+2m'+1)}\,t'^{x-(2m+2m'+1)}(4+t'^2)^{m+m'}+\text{ec.}\Bigg]$$

ove supposto $x-2m-2m'-1=0$, od anche $x-2m-2m'-1=1$, e prendendo il coefficiente di t'^0 in $(4+t'^2)^m$, quello di t'^2 in $(4+t'^2)^{m+1}$ e così successivamente fino al coefficiente di $t'^{2m'}$ in $(4+t'^2)^{m+m'}$ risulterà il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ espresso da

$$\frac{1}{2^{x-2}}\Bigg(\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots(2m+1)}\,.\,4^m+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+3))}{1.2.3\ldots(2m+3)}\times$$
$$(m+1)4^m+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+5))}{1.2.3\ldots(2m+5)}\,.\,\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}\,.\,4^m\ldots\ldots$$
$$\ldots+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+2m'+1))}{1.2.3\ldots(2m+2m'+1)}\,.\,\frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\,.\,4^m\Bigg).$$

Sia ora $x=10$, $x'=3$, e quindi $m=3$; sarà $y_{10,3}=\frac{1}{2^8}\times 2^6.\frac{9.8}{2}+1=10$. Sia pure $x=13$, $x'=4$, $x-x'=9=2.4+1$, sarà dunque $m=4$, ed $y_{13.4}=\frac{1}{2^{11}}.2^8.\frac{12.11.10}{2.3}+\frac{1}{2^{11}}.2^8.5.12=35$. Di fatto dipendentemente dall' equazione proposta si ha $y_{13,4}=y_{11,4}+y_{12,3}=y_{9,4}+y_{10,3}+y_{10,3}+y_{11,2}=y_{9,4}+2y_{10,3}+y_{11,2}=y_{7,4}+y_{8,3}+2(y_{8,3}+y_{9,2})+y_{9,2}+y_{10,1}=y_{7,4}+3(y_{8,3}+y_{9,2})+1=y_{5,4}+y_{6,3}+3(y_{6,3}+y_{7,2})+3(y_{7,2}+y_{8,1})+1=y_{5,4}+4y_{6,3}+6y_{7,2}+4=y_{3,4}+y_{4,4}+4(y_{4,3}+y_{5,2})+6(y_{5,2}+y_{6,1})+4=4(y_{4,3}+y_{5,2})+6y_{5,2}+11=4(y_{2,3}+y_{3,2})+4(y_{3,2}+y_{4,1})+6(y_{3,2}+y_{4,1})+11=21+14y_{3,2}=21+14(y_{1,2}+y_{2,1})=35$.

Per dimostrare sempre più, che le trovate formole soddisfanno ad ogni condizione del problema si supponga nella formola (3) $m=0$, ciò che torna al supporre $x=x'$, e quindi per ipotesi fatta dapprima $y_{x,x'}=1$; si tratterà dunque di dimostrare, che in generale $x+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}+$ ec. $=2^{x-1}$.

Perciò osservo, che

$$\text{(D)}\ \ldots x+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{ec.}=1+x-1+\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.2.3.4.5}+\text{ec.},$$

essendochè in generale considerando per n un numero intero qualunque è

sempre $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2n)}{1.2.3\ldots(2n+1)} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2n)}{1.2.3\ldots 2n}$

$+ \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(2n+1))}{1.2.3.\ldots(2n+1)} = ((2n+1)+x-(2n+1)) \times$

$\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(2n+1))}{1.2.3.\ldots(2n+1)}$. Osservando ora, che l'ultimo termine dell' espressione (3) mentre in essa si fa $m=0$ può essere $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m'-2))}{1.2.3.\ldots(2m'-1)}$ quando $x'=2m'$, ovvero $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2m')}{1.2.3\ldots(2m'+1)}$ quando $x'=2m'+1$, espressioni l'una delle quali si riduce a $2m'$ e l'altra all'unità, e d'altronde essendo $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m'-2))}{1.2.3\ldots(2m'-1)} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m'-2))}{1.2.3\ldots(2m'-2)}$

$+ \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m'-1))}{1.2.3\ldots(2m'-1)} = 2m'-1+1$ quando $x=2m'$, ed inoltre $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2m')}{1.2.3\ldots(2m'+1)} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2m')}{1.2.3\ldots 2m'}$

$+ \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m'+1))}{1.2.3\ldots(2m'+1)} = 1+0$, quando $x=2m'+1$, perciò siccome nell' un caso e nell' altro ogni coppia di termini del secondo membro dell'equazione (D) corrisponde perfettamente nel suo aggregato a ciascuno de' termini per ordine del primo membro, ed il secondo non è che lo sviluppo della potenza $(1+1)^{x-1}$ ne viene, che sarà $x + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$

$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5} + \text{ec.} = 2^{x-1}$.

18. Riprendendo l' equazione $u = \frac{tt'+t^2t'}{1-t(t+t')}$ si può ricavarne più semplicemente l'espressione di $y_{x,x'}$ omettendo di risolvere in fattori il denominatore del secondo membro. Di fatto si ha $\frac{t^2t'+tt'}{1-t(t+t')} = t^2t'+t^3t'(t+t')+t^4t'(t+t')^2+t^5t'(t+t')^3\ldots$

$+t^{x-2}t'(t+t')^{x-2} + \text{ec.} + tt'+t^2t'(t+t')+t^3t'(t+t')^2+t^4t'(t+t')^3\ldots$

$+t^x t'(t+t')^{x-1}$ + ec., ed in questo sviluppo si vede facilmente che i parziali coefficienti di $t^x t'^{x'}$ non potranno ricavarsi da alcuno de' termini oltre $t^x t'(t+t')^{x-2}$, ed oltre $t^x t'(t+t')^{x-1}$ rispettivamente delle due serie in che si divide lo sviluppo medesimo. Quindi pure si vede, che retrocedendo in amendue ai termini più vicini al principio si trova il coefficiente di t^x espresso da $t'^{x-1} + (x-3)\,t'^{x-3}$

$$+\frac{(x-4)(x-5)}{1.2}\,t'^{x-5} + \frac{(x-5)(x-6)(x-7)}{1.2.3}\,t'^{x-7}\ldots.$$

$$+\frac{(x-(m+2))(x-(m+3))\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots\ldots m}\,t'^{x-(2m+1)} + \text{ec.}$$

$$+t'^{x} + (x-2)t'^{x-2} + \frac{(x-3)(x-4)}{1.2}\,t'^{x-4} + \frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3}\,t'^{x-6}\ldots.$$

$$+\frac{(x-(m+1))(x-(m+2))\ldots\ldots(x-2m)}{1.2.3.\ldots m}\,t'^{x-2m} + \text{ec.}$$

Pertanto ad ottenere il coefficiente di $t'^{x'}$ giova osservare, che se x' è della forma $x-(2m+1)$, cioè se sia $x-x'=2m+1$, essendo m qualunque numero intero positivo, il ricercato coefficiente sarà:

$$\text{(E)}\ldots\ldots\ldots\ \frac{(x-(m+2))(x-(m+3))\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3.\ldots m}$$

e se sia $x-x'=2m$ il coefficiente medesimo sarà:

$$\text{(F)}\ldots\ldots\ldots\ \frac{(x-(m+1))(x-(m+2))\ldots\ldots(x-2m)}{1.2.3.\ldots m}$$

Sia per esempio $x=9$, $x'=2$, $x-x'=2.3+1$, e perciò $m=3$; ed applicando la formola (E) si avrà $y_{9,2}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$. Sia ancora $x=8$, $x'=2$, onde $x-x'=6=2.3$, e verrà applicando la formola (F), $y_{8,2}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$.

Vi ha un altro modo di sviluppo, che dà in generale l'espressione di $y_{x,x'}$ qualunque sieno x, x' purchè numeri inte-

ri, al quale però sembra sempre da preferirsi il metodo precedente per la maggiore semplicità delle formole, e per la più facile loro applicazione ai casi particolari. Si ha infatti

$$\frac{tt'+t^2t'}{1-t(t+t')}=\frac{tt'+t^2t'}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{tt'}{1-t^2}}=\frac{tt'}{1-t}\left(1+\frac{tt'}{1-t^2}+\frac{t^2t'^2}{(1-t^2)^2}\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{t^{x'-1}\,t'^{x'-1}}{(1-t^2)^{x'-1}}+\text{ec.}\right)=(t+t^2+t^3+\text{ec.})\left(t'+\frac{tt'^2}{1-t^2}+\frac{t^2t'^3}{(1-t^2)^2}\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{t^{x'-1}\,t'^{x'}}{(1-t^2)^{x'-1}}+\text{ec.}\right),$$ d' onde si vede, che il coefficiente di $t'^{x'}$ in questa espressione non può essere che $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\times\frac{t^{x'}}{(1-t^2)^{x'-1}}$, e quello di t^{x} derivato dall'altro sarà lo stesso che il coefficiente di $t^{x-x'}$ in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\frac{1}{(1-t^2)^{x'-1}}$

$$=(1+t+t^2+t^3\ldots\ldots\ldots+t^{x-x'}+\text{ec.})(1-t^2)^{-(x'-1)}$$

$$=(1+t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^{x-x'}+\text{ec.})\left(1+(x'-1)t^2+\frac{(x'-1)x'}{1.2}t^4\right.$$

$$\left.+\frac{(x'-1)x'(x'+1)}{1.2.3}t^6\ldots+\frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x'+m-2)}{1.2.3.\ldots m}t^{2m}+\text{ec.}\right).$$ Quindi o si supponga $x-x'=2m$, ovvero si dia luogo all' altra supposizione di $x-x'=2m+1$, si vedrà essere nell'un caso e nell' altro il coefficiente di $t^{x-x'}$ che nel caso presente è pur quello di $t^{x}t'^{x'}$ espresso per

$$1+(x'-1)+\frac{(x'-1)x'}{1.2}+\frac{(x'-1)x'(x'+1)}{1.2.3}\ldots+\frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x'+m-2)}{1.2.3\ldots m}.$$

Sia perciò nuovamente $x=9$, $x'=2$ ovvero $x=8$, $x'=2$; si avrà in amendue i casi $y_{9,2}=y_{8,2}=1+1+1+1=4$.

È poi da osservarsi, che anche indipendentemente da m può aversi un' espressione generale di $y_{x,x'}$, la quale come si è veduto è quella del coefficiente di $t^{x-x'}$ in $\frac{1}{1-t}\times$

$\frac{1}{(1-t^2)^{x'-1}}$. Ora $\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^{x'-1}} = (1-t)^{-x'} (1+t)^{-(x'-1)}$

$$= \left(1 + x't + \frac{x'(x'+1)}{1.2} \cdot t^2 + \frac{x'(x'+1)(x'+2)}{1.2.3} \cdot t^3 \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-x')} t^{x-x'} + \text{ec.}\right)\left(1 + (x'-1)(-1)t + \frac{(x'-1)x'}{1.2}(-1)^2 t^2\right.$$

$$\left. + \frac{(x'-1)x'(x'+1)}{1.2}(-1)^3 t^3 \ldots + \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x-2)}{1.2.3\ldots(x-x')}(-1)^{x-x'} t^{x-x'} + \text{ec.}\right),$$

e perciò il coefficiente di $t^{x-x'}$ sarà

$$\frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x-2)}{1.2.3\ldots(x-x')}(-1)^{x-x'} + \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x-3)}{1.2.3\ldots(x-x'-1)}(-1)^{x-x'-1} . x'$$

$$+ \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots\ldots(x-4)}{1.2.3\ldots(x-x'-2)} \cdot (-1)^{x-x'-2} \cdot \frac{x'(x'+1)}{1.2}$$

$$+ \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots\ldots(x-5)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x'-3)}(-1)^{x-x'-3} \cdot \frac{x'(x'+1)(x'+2)}{1.2.3}$$

$$+ \text{ec.}$$

$$+ \frac{(x'-1)(-1)x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x-2)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x'-1)} + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-x')}.$$

Sia ancora $x=9$, $x'=2$; e sarà $y_{9,2} = -1+2-3+4-5+6-7+8 = 4$ come prima.

19. Se si trattasse di risolvere l' altra equazione $y_{x,x'} = y_{x-3,x'} + y_{x-1,x'-1}$ si procederebbe con metodo analogo al già seguito nell' equazione poco fa considerata, dipendentemente però dalle particolari supposizioni, che possono introdursi nel problema di serie ricorrente, cui essa si riferisce. Quindi per maggiore semplicità supposto, che sia $y_{m,m} = 1$ quando essendo $m>0$ si fa $x=x'=m$, ed inoltre $y_{0,0} = 0$, $y_{x,1} = 1$ finchè $x > 0$, $y_{x,x'} = 0$ essendo $x < x'$, dipendentemente da queste condizioni l'equazione proposta non sussiste allorchè posto $x'=1$ si pone successivamente $x=1, x=2, x=3$, giacchè in ognuno di questi casi il primo membro dell'equazione prendendo il valore dell'unità, tutti i termini del secondo si annullano. Sic-

come però quando $x-3<x'$ si annulla il primo termine del secondo membro dell'equazione per una delle condizioni già assunte, non aggiungendone verun'altra implicitamente si suppone in tal caso che si verifichi l'equazione $y_{x,x'}=y_{x-1,x'-1}$ essendo $x'>1$ locchè è arbitrario. Se si supponesse, che per la natura del problema non potesse verificarsi tale equazione, sarebbe d'uopo dipendentemente dalle altre condizioni che si aggiungessero, determinare le funzioni generatrici di $y_{x,x'}$, $y_{x-1,x'-1}$ relativamente al detto caso di $x-3<x'$, e sottrarle rispettivamente da quelle de' due membri dell'equazione proposta per istabilire fra queste l'opportuna relazione. Nella presente ipotesi però in modo analogo a quello che fu adoperato nel precedente problema si trova l'equazione fra le funzioni generatrici

$u-tt'-t^2t'-t^3t'=ut^3+utt'$, onde $u=\frac{t'(t+t^2+t^3)}{1-tt'-t^3}=$ $t'(t+t^2+t^3)(1+t(t'+t^2)+t^2(t'+t^2)^2+t^3(t'+t^2)^3+\text{ec.})$.

Cercando ora il coefficiente di t^x nella parte $\frac{t't}{1-tt'-t^3}=$ $t'(t+t^2(t'+t^2)+t^3(t'+t^2)^2+t^4(t'+t^2)^3+\text{ec.})$ o piuttosto in $t'(t+t^2(t'+t^2)+t^3(t'+t^2)^2+t^4(t'+t^2)^3\ldots+t^x(t'+t^2)^{x-1})$, giacchè non potrebbe ricavarsi dai termini ulteriori, si troverà esso espresso da $t'^x+(x-3)t'^{x-3}+\frac{(x-5)(x-6)}{1.2}t'^{x-6}$ $+\frac{(x-7)(x-8)(x-9)}{1.2.3}t'^{x-9}\ldots+\frac{(x-(2m+1))(x-(2m+2))\ldots(x-3m)}{1.2.3\ldots m}t'^{x-3m}+\text{ec.}$

osservando, che i coefficienti parziali di t^x non possono aversi che dai termini della forma $t't^{x-2n}(t'+t^2)^{x-(2n+1)}$, essendo n numero intero non <0, e preso pure per m un altro qualunque numero intero. Sarà dunque il coefficiente di $t'^{x'}$ o ciò che è lo stesso di $t^xt'^{x'}$ quando x' è della forma $x-3m$, cioè $x-x'=3m$ espresso dalla formola

$$(G) \ldots\ldots\ldots \frac{(x-(2m+1))(x-(2m+1))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

la quale è la sola che soddisfi al problema quando x' è della supposta forma. Di fatto sostituendola nell'equazione $y_{x,x'} = y_{x-3,x'} + y_{x-1,x'-1}$, a cagione di $x' = x - 3m$, $y_{x-3,x'}$ si ha ponendo in (G) $x-3$ in luogo di x, ed $m-1$ in luogo di m, ed il secondo membro della stessa equazione diviene

$$\frac{(x-3-(2(m-1)+1)(x-3-(2(m-1)+2)\ldots\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots(m-1)}$$

$$+ \frac{(x-1-(2m+1))(x-1-(2m+2))\ldots\ldots\ldots(x-1-3m)}{1.2.3\ldots\ldots m} =$$

$$\frac{(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots(m-1)}$$

$$+ \frac{(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots\ldots\ldots(x-(3m+1))}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots m} =$$

$$\frac{(m+x-(3m+1))(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3\ldots\ldots m} =$$

$$\frac{(x-(2m+1))(x-(2m+2))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots m}.$$

Trovato pertanto il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ nella parte $\frac{t't}{1-tt'-t^3}$, nella quale tal coefficiente non può corrispondere che all'ipotesi di $x' = x - 3m$, esso si avrà facilmente nelle altre due parti della proposta funzione generatrice cioè $\frac{t't^2}{1-tt'-t^3}$, $\frac{t't^3}{1-tt'-t^3}$. Di fatto il coefficiente di t^x vien dato in amendue dal coefficiente di t^x in $\frac{t't}{1-tt'-t^3}$ cambiando in esso rispettivamente x in $x-1$, ed in $x-2$ come insegnano le regole già date. Saranno dunque espressi tali altri coefficienti, primieramente rispetto a $\frac{t't^2}{1-tt'-t^3}$ da

$$(1)\ldots t'^{x-1}+(x-4)t'^{x-4}+\frac{(x-6)(x-7)}{1.2}t'^{x-7}+\frac{(x-8)(x-9)(x-10)}{1.2.3}t'^{x-10}\ldots$$

$$+\frac{(x-(2m+2)(x-(2m+3))\ldots(x-(3m+1))}{1.2.3\ldots m}t'^{x-(3m+1)}$$

e rispetto a $\frac{t't^3}{1-tt'-t^3}$ da

$$(2)\ldots t'^{x-2}+(x-5)t'^{x-5}+\frac{(x-7)(x-8)}{1.2}t'^{x-8}+\frac{(x-9)(x-10)(x-11)}{1.2.3}t'^{x-11}\ldots$$

$$+\frac{(x-(2m+3))(x-(2m+4))\ldots\ldots(x-(3m+2))}{1.2.3\ldots m}t'^{x-(3m+2)}.$$

Dal primo di tali coefficienti si ricava pertanto quello di $t'^{x'}$ o di $t^x t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-(3m+1)$, il quale risulta

$$(H)\ldots\ldots\frac{(x-(2m+2)((x-(2m+3))\ldots\ldots(x-(3m+1))}{1.2.3\ldots m}$$

posto m non <1, giacchè quando $m=0$ cioè $x'=x-1$ il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è l' unità, e dal secondo risulta

$$(K)\ldots\ldots\frac{(x-(2m+3))(x-(2m+4))\ldots\ldots(x-(3m+2))}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

per coefficiente di $t^x t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-(3m+2)$.

Sia per esempio $x=10$, $x'=6$; si avrà $x-x'=10-6=3.1+1$, onde $m=1$, e sarà $y_{10,6}=6$, $y_{x-3,x'}=y_{7,6}=1$ poichè quando $x'=x-1$ come si vede dalla formola (1), il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è l'unità. Inoltre poichè $y_{x-1,x'-1}=y_{9,5}$, e $9-5=4=3.1+1$, ponendo nella formola (H) $x=9$, $m=1$, sarà $y_{9,5}=5$. Potrebbe farsi lo stesso sperimento intorno alla formola (K), ma ciò sarebbe superfluo provata già abbastanza la sicurezza del metodo, per cui rimane dimostrata la piena soluzione della proposta equazione distinta ne' tre casi che sono i soli possibili di $x-x'$ appartenente a ciascuna delle tre forme numeriche $3m$, $3m+1$, $3m+2$.

20. Un metodo analogo agli usati nei due numeri precedenti conduce alla completa soluzione dell'equazione assai più generale $y_{x,x'}=y_{x-n,x'}+y_{x-1,x'-1}$ nella quale n essendo un numero qualunque dato può perciò determinare qualunque ordine dell' equazione. Posta pertanto u come funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quelle di $y_{x-n,x'}$, $y_{x-1,x'-1}$ saranno rispettivamente ut^n, utt', e ritenendo che quando $x'=1$ sia $y_{x,1}=1$ sempre quando $x>0$ essendo poi $y_{0,1}=0$, ed inoltre supposto $y_{x-m,1}=0$ finchè $x=1$, $x=2$, $x=3$ ec. $x=n$, cioè fintantochè non sia $x>m$, ne viene l' equazione tra le funzioni generatrici $u-t'(t+t^2+t^3+t^4\ldots+t^n)=ut^n+utt'$, onde $u=\frac{t'(t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^n)}{1-t(t^{n-1}+t')}$ $=t'(t^n+t^{n-1}\ldots\ldots+t)(1+t(t^{n-1}+t')+t^2(t^{n-1}+t')^2+t^3(t^{n-1}+t')^3+\text{ec.})$, e denotando per r un esponente intero che possa ricevere tutti i valori da 1 fino ad n inclusivamente, il coefficiente di t^x in $t't^r(1+t(t^{n-1}+t')+t^2(t^{n-1}+t')^2+\text{ec.})=t'(t^r+t^{r+1}(t^{n-1}+t')+t^{r+2}(t^{n-1}+t')^2+\text{ec.})$ non potrà ottenersi in alcuna sua parte da termini che oltrepassino $t't^{r+x-r}(t^{n-1}+t')^{x-r}$, e solamente da quelli della forma $t't^{x-m(n-1)}(t^{n-1}+t')^{x-r-m(n-1)}$ essendo m numero intero qualunque ed anche zero, giacchè è d'altronde evidente che innalzando ad una qualunque potenza intera il binomio $t^{n-1}+t'$, gli esponenti di t riescono sempre multipli di $n-1$. Quindi il coefficiente di t^x ricavandosi dalla sola espressione $t't^x(t^{n-1}+t')^{x-r}+t't^{x-(n-1)}(t^{n-1}+t')^{x-r-(n-1)}+t't^{x-2(n-1)}\times(t^{n-1}+t')^{x-r-2(n-1)}\ldots+t't^{x-m(n-1)}(t^{n-1}+t')^{x-r-m(n-1)}+\text{ec.}$ sarà:

$$(\mathrm{I}) \ldots t'^{x-r+1} + (x-r-(n-1))t'^{x-r-(n-1)} + \frac{(x-r-2(n-1))(x-r-2(n-1)-1)}{1.2} \times$$

$$t'^{x-r-2(n-1)-1} + \frac{(x-r-3(n-1))(x-r-3(n-1)-1)(x-r-3(n-1)-2)}{1.2.3} t'^{x-r-3(n-1)-2} \ldots$$

$$+ \frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1)(x-r-m(n-1)-2)\ldots(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3 \ldots m} \times$$

$$t'^{x-r-m(n-1)-(m-1)}.$$

Perciò il coefficiente di $t'^{x'}$ che si ricava da quello di t^x o, ciò che è lo stesso, il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u è

$$\frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1) \ldots (x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3 \ldots m}$$

$$= \frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1) \ldots (x-r-mn+1)}{1.2.3 \ldots m}$$

poichè qualunque sia x' purchè non $>x$ può sempre supporsi $x'=x-r-mn+1$, ovvero $x-x'=r+mn-1$ cioè la differenza de' due numeri x, x' sarà sempre o un multiplo esatto di n, locchè avviene nel caso di $r=1$, o lo sarà coll'avanzo di un numero $<n$, locchè ha luogo quando si fa successivamente $r=1$, $r=2$, $r=3$ ec. fino ad $r=n$ inclusivamente. A cagion d'esempio se si pone $n=3$, $r=2$ sarà $x-x'$ della forma $3m+2$ come riesce nel problema precedente. Per mostrare ora come il valore trovato generalmente per $y_{x,x'}$ rende identica l'equazione proposta, giova osservare come l'espressione corrispondente dee convertirsi in quella di $y_{x-n,x'}$ ponendo nella prima $x-n$ in luogo di x, ed $m-1$ in luogo di m, ed in quella di $y_{x-1,x'-1}$ ponendo soltanto nella prima $x-1$ in luogo di x, e ciò è evidente poichè in questo ultimo caso la differenza $x-x'=(x-1)-(x'-1)$ non varia. Per tal modo l'equazione $y_{x,x'}=y_{x-n,x'}+y_{x-1,x'-1}$ diviene

$$(\mathrm{L}) \ldots \frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1) \ldots (x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3 \ldots m} =$$

$$\frac{(x-r-m(n-1)-1)\,(x-r-m(n-1)-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}$$

$$+\frac{(x-r-m(n-1)-1)(x-r-m(n-1)-2)\,.\,.\,.\,.\,(x-r-m(n-1)-m)}{1.2.3\,.\,.\,.\,m}$$

$$=\frac{(m+x-r-m(n-1)-m)(x-r-m(n-1)-1)(x-r-m(n-1)-2)\ldots(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}$$

equazione di cui si rileva a colpo d'occhio l'identità. Vuolsi intanto notare, che l'espressione di $y_{x,x'}$ non ha luogo quando $m=0$ sicchè supposto $x-x'=r+mn-1=r-1$, $x'=x-r+1$ il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è 1, cioè il coefficiente del primo termine dello sviluppo del coefficiente di t^x in u. Se inoltre $x=x'$ onde $r=1$ si ha parimenti $y_{x,x'}=1$.

Sia ora per un esempio $x=10$, $x'=4$, $n=4$ onde $x-x'=6=r+1.4-1$, ed $r=3$, $m=1$. L'espressione di $y_{x,x'}$ dà nel presente caso $y_{10,4}=10-3-3=4$. Per avere gli altri due valori di $y_{6,4}$, $y_{9,3}$ che nella loro somma debbono eguagliare quello di $y_{10,4}$ siccome quanto al primo de' suddetti due valori l'applicazione della formola del primo termine del secondo membro dell' equazione (L) condurrebbe ad un risultato infinito a cagione di $m-1=0$ nel presente caso, è d'uopo perciò ricavare direttamente dalla formola (I) il coefficiente di $t'^{x'}$. Ora poichè riguardo ad $y_{6,4}$, $x-x'=6-4=2$ $=r+0.4-1$, onde $r=3$, il coefficiente ricercato sarà quello di $t'^{x-3+1}=t'^4$ che è l'unità, e quindi $y_{6,4}=1$. L'altro valore di $y_{9,3}$ si ricava dal secondo termine del secondo membro dell' equazione (L) fatto nuovamente $x=10$, $r=3$, $m=1$, $n=4$, e si ottiene $y_{9,3}=10-3-1.3-1=3$ come appunto dev' essere.

21. Un metodo analogo a quello che ha servito fin quì per la risoluzione delle equazioni alle differenze parziali con due variabili è applicabile anche alle equazioni che ne contengono tre, e potrebbe colle dovute avvertenze estendersi anche a quelle che ne contenessero un maggior numero. Questo metodo quanto alle prime dipende dal considerare la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$ dotata di una proprietà che compete similmente alla funzione generatrice di $y_{x,x'}$ vale a dire che se u è la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$ quella di $y_{x\pm m,x'\pm n,x''\pm r}$ è $ut^{\mp m}.t'^{\mp n}.t''^{\mp r}$ come non difficilmente può rilevarsi qualora si considerino le funzioni generatrici a tre variabili decomposte in funzioni generatrici a due sole, siccome queste furono già decomposte in altre ad una sola. Ciò posto ripetendo quì i raziocinj adoperati al numero 7. si può senza più risolvere il seguente problema, che conduce ad una equazione alle differenze parziali a tre variabili.

Si tratta di assegnare con una formola il numero de' modi ne' quali x cose possano partirsi in tre cumuli, nel primo de' quali le cose stesse sieno combinate ad x' ad x', e nel secondo sieno combinate ad x'' ad x''.

Essendo evidente che il numero ricercato dev' essere una funzione di x, x', x'' essa potrà esprimersi per $y_{x,x',x''}$, siccome $y_{x+1,x',x''}$ avrà lo stesso senso rispetto ad un numero di cose maggiore di un' unità del proposto cioè ad $x+1$ cose, che debbano fra loro combinarsi come si è detto. Ma questo ulterior numero di maniere oltre al comprendere quello che è rappresentato da $y_{x,x',x''}$ ne avrà altrettante di più quante sieno le unità nella somma $y_{x,x'-1,x''}+y_{x,x',x''-1}$ giacchè la cosa aggiunta rispettivamente combinata con ognuno de' cumuli delle altre ad $x'-1, x'-1$ in $y_{x,x'-1,x''}$ e ad $x''-1, x''-1$

in $y_{x,x',x''-1}$ darà altrettanti de' modi richiesti. Si avrà quindi l'equazione $y_{x+1,x',x''}=y_{x,x',x''}+y_{x,x'-1,x''}+y_{x,x',x''-1}$ ovvero $y_{x,x',x''}=y_{x-1,x',x''}+y_{x-1,x'-1,x''}+y_{x-1,x',x''-1}$, la quale sussiste sempre fuori del caso di $x=x'=x''=0$ per cui si ha $y_{0,0,0}=1$ potendosi concepire come zero cose si dividano in un modo solo in tre parti, la prima e la seconda delle quali ne contenga un numero zero. Sarà perciò l' equazione tra le funzioni generatrici: $u-1=ut+utt'+utt''$, ed $u=\frac{1}{1-t(1+t'+t'')}=1+t(1+t'+t'')$ $+t^2(1+t'+t'')^2+t^3(1+t'+t'')^3\ldots\ldots+t^x(1+t'+t'')^x+$ ec. essendo u funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$. Il ricercato coefficiente sarà dunque quello di $t'^{x'}t''^{x''}$ in $(1+t'+t'')^x$ $=(t'+(1+t''))^x=t'^x+x(1+t'')t'^{x-1}+\frac{x(x-1)}{1.2}(1+t'')^2t'^{x-2}$ $+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(1+t'')^3t'^{x-3}\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-x'+1)}{1.2.3\ldots x'}(1+t'')^{x-x'}t'^{x'}+$ ec. Cercando ora il coefficiente di $t''^{x''}$ in $(1+t'')^{x-x'}=1+(x-x')t''$ $+\frac{(x-x')(x-x'-1)}{1.2}t''^2+\frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)}{1.2.3}t''^3\ldots\ldots$ $+\frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x-x'-x''+1)}{1.2.3\ldots x''}t''^{x''}+$ ec. si vedrà essere quello di $t'^{x'}t''^{x''}$ in $(1+t'+t'')^x$, o ciò che è lo stesso $y_{x,x',x''}$ $=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-x'+1)}{1.2.3\ldots x'}\cdot\frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x-x'-x''+1)}{1.2.3\ldots x''}$.

Questa espressione è identica a quella che occupandosi dello stesso problema trovò prima per induzione il Brunacci (1), determinando in seguito (2) la corrispondente equazione da risolversi co' metodi del calcolo delle differenze fi-

(1) V. Corso di Matematica sublime. Tom. I. pag. 46.

(2) Ivi pag. 211.

nite, la quale è identica alla fondamentale della presente soluzione.

22. Col metodo adoperato nel numero precedente si risolve un altro problema relativo alle probabilità che fu pure trattato dal Brunacci (1).

Si suppone, che un Giuocatore attenda ad ogni colpo un evento favorevole mentre ne può avere altri due contrarj, e che inoltre la legge del giuoco prescriva che egli non possa guadagnarlo qualora non incontri x volte l'evento favorevole prima che l'uno degli eventi contrarj siasi verificato x' volte, e l'altro x'' volte. Supposto eziandio, che le rispettive probabilità degli eventi semplici sieno p, q, r, poichè la probabilità di guadagnare la partita pel considerato Giuocatore può esprimersi per $y_{x,x',x''}$ che ad ogni nuovo colpo può divenire o $y_{x-1,x',x''}$, o $y_{x,x'-1,x''}$, o $y_{x,x',x''-1}$, ne segue, che l' equazione da trattarsi per risolvere il problema è

$$y_{x,x',x''}=py_{x-1,x',x''}+qy_{x,x'-1,x''}+ry_{x,x',x''-1}.$$

Se ora si chiami u la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$, quella del secondo membro dell'equazione sarà $put+qut'+rut''$, e l' equazione fra le medesime si determina osservando, che qualora sia $x=0$, ed x', x'' siano numeri maggiori di zero $y_{0,x',x''}=1$ equivalendo allora questa espressione alla certezza, poichè difatto è certo che il Giuocatore ha ottenuto zero eventi favorevoli prima d'incontrare gli eventi contrarj, o a meglio dire non può incontrare x', o x'' eventi contrarj che dopo zero eventi favorevoli, quali ha appunto nel principio del giuoco. Nel caso poi di $x=x'=0$ si ha $y_{0,0,x''}=0$, poichè è assurdo che il Giuocatore non abbia niun evento favorevole prima di niun evento contrario o a dir meglio ab-

(1) Ivi pag. 266.

bia zero eventi favorevoli prima di zero eventi contrarj, e lo stesso deve dirsi quando $x=x''=0$, avendosi pure $y_{0,x',0}=0$. Ma quando $x=0$ solamente, il secondo membro dell'equazione contiene le due espressioni $y_{0,x'-1,x''}$, $y_{0,x',x''-1}$ ciascuna delle quali vale l'unità quando $x'-1$, $x''-1$ sieno maggiori dello zero, dunque dovrà sottrarsi da u la funzione generatrice dell'unità, che nel presente caso è $\frac{t'}{1-t'}\cdot\frac{t''}{1-t''}$, e corrispondentemente dalla funzione generatrice del secondo membro dell'equazione proposta si toglieranno le due espressioni $\frac{qt'^2}{1-t'}\cdot\frac{t''}{1-t''}$ ed $\frac{rt''^2}{1-t''}\cdot\frac{t'}{1-t'}$. Così si avrà l'equazione $u-\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}$ $=put+qut'+rut''-\frac{qt'^2t''}{(1-t')(1-t'')}-\frac{rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')}$, onde $u=\frac{t't''-qt'^2t''-rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')}:(1-(pt+qt'+rt''))=\frac{t't''-qt'^2t''-rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')}\times$ $(1+(pt+qt'+rt'')+(pt+qt'+rt'')^2\ldots+(pt+qt'+rt'')^x+\text{ec.})$. Dunque primieramente il coefficiente di t^x in questa espressione non potrà ottenersi che dalla parte: $\frac{t't''-qt'^2t''-rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')}\times$ $\left((pt+qt'+rt'')^x+(pt+qt'+rt'')^{x+1}+(pt+qt'+rt'')^{x+2}+\text{ec.}\right)$, e sarà per conseguenza $\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}(1-(qt'+rt''))p^x(1+(x+1)\times$ $(qt'+rt'')+\frac{(x+2)(x+1)}{1.2}(qt'+rt'')^2+\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{1.2.3}(qt'+rt'')^3+\text{ec.})$. Quindi riducendo ed osservando che in generale $\frac{(x+n)(x+n-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots n}$ $-\frac{(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots(n-1)}=\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}{1.2.3\ldots n}$, sarà lo stesso coefficiente di t^x equivalente a $\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}\,p^x\,(1+x(qt'+rt'')$ $+\frac{x(x+1)}{1.2}(qt'+rt'')^2+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(qt'+rt'')^3+\text{ec.})$ dal quale re-

sta a ricavarsi quello di $t'^{x'} t''^{x''}$. Ora riflettendo che $\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}$ $=(t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.})(t''+t''^2+t''^3+t''^4+\text{ec.})$, e che tutti i termini di ciascuna potenza $(qt'+rt'')^n$ dovendo nella formola trovata essere moltiplicati per tutti i prodotti delle potenze di t', t'' all'infinito, se ne inferisce, che per avere il coefficiente cercato di $t'^{x'} t''^{x''}$ o ciò che è lo stesso nel nostro caso l' espressione di $y_{x,x',x''}$, si dovranno dalla formola suddetta escludere tutti i termini di ciascuna potenza $(qt'+rt'')^n$ ne' quali t', t'' sieno rispettivamente elevati ad una potenza superiore di $x'-1$, $x''-1$. Ma in questi stessi termini le quantità q, r saranno sempre innalzate rispettivamente alla stessa potenza a cui lo siano t', t'', dal che facilmente si raccoglie dover poi essere $y_{x,x',x''}=p^x\left(1+x(q+r)+\frac{x(x+1)}{1.2}(q+r)^2\right.$ $\left.+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q+r)^3+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}(q+r)^4+\text{ec.}\right)$ purchè nelle particolari applicazioni si escludano tutti i termini ne' quali le potenze di q, r superino rispettivamente i gradi $x'-1$, $x''-1$.

23. Sia ora per trattare un altro problema già risoluto da Lagrange (1) in altra maniera, e dipendente da una funzione di tre variabili l' equazione $y_{x,x',x''}=py_{x-1,x'-1,x''}$ $+qy_{x-1,x',x''-1}+(1-p-q)y_{x-1,x',x''}$, nella quale $y_{x,x',x''}$ esprime la probabilità, che ha un giuocatore di ottenere in x colpi un dato evento per x' volte, ed un altro evento pur dato per x'' volte, essendo l' uno o l' altro possibile a ciascun colpo rispettivamente secondo le probabilità semplici p, q.

Pertanto cominciando dal supporre nella proposta equa-

(1) V. Nouveaux Mémoires de l' Académie Royale de Berlin. an. 1775. pag. 243.

zione $x''=0$ si ha $y_{x,x',0}=py_{x-1,x'-1,0}+qy_{x-1,x',-1}$ $+(1-p-q)y_{x-1,x',0}=py_{x-1,x'-1,0}+(1-p)y_{x-1,x',0}$ a cagione di $y_{x-1,x',0}=y_{x-1,x',-1}$, poichè l'indice negativo -1 equivale nel caso presente quanto alla probabilità all' indice zero, significando l' indice negativo un colpo di più riuscito favorele a quell' evento, che il giuocatore dovea condurre soltanto per x'' volte. Però quantunque anche in questa ipotesi di $x''=0$ l' equazione ridotta come sopra per una considerazione intrinseca alla natura del problema sussista, rendendosi la stessa di quella che fu stabilita pel numero 11, è d'uopo ciò non ostante, dipendentemente dalla natura delle funzioni generatrici alle quali vuolsi riferire la proposta equazione, e che si suppongono non contenere termini con indici negativi, è d' uopo dissi riguardare come nulla l' espressione $qy_{x-1,x',-1}$ mentre $y_{x-1,x',0}$ non può esserlo, e più allora non sussiste l'equazione proposta, la quale falsamente dà $y_{x,x',0}=py_{x-1,x'-1,0}$ $+(1-p-q)y_{x-1,x',0}$. Passando perciò a stabilire la relazione tra le funzioni generatrici de' due membri della proposta stessa, ed indicando per u al solito la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$ si dovrà da essa sottrarre primieramente la funzione generatrice di $y_{x,x',0}$ quale vien data dal num. 11. e denotandola quì per u', si toglierà poi dalla funzione generatrice del secondo membro della proposta la funzione generatrice di $py_{x-1,x'-1,0}+(1-p-q)y_{x-1,x',0}$, cioè $pu'tt'+(1-p-q)\,u't$. Dando ora luogo all' ipotesi di $x'=0$ si vedrà facilmente, che nascendo pure per essa l' insussistenza dell' equazione del problema, sarà da sottrarsi da u la funzione u'' generatrice di $y_{x,0,x''}$, e dalla funzione generatrice del secondo membro della stessa equazione dovrà pure sottrarsi la somma $qu''\,tt''+$ $(1-p-q)u''t$, essendo u'' la stessa u' in cui siasi sostituito q a

p, e t' a t'. Inoltre nella supposizione di $x'=x''=0$ si annullano tutti i termini dell' equazione tranne $y_{x,0,0}=1$, ed $(1-p-q)y_{x-1,0,0}=1-p-q$. Sembrerebbe quindi a prima vista, che si dovessero sottrarre rispettivamente dalle funzioni generatrici del primo, e del secondo membro dell'equazione le espressioni $\frac{1}{1-t}$, $(1-p-q)\frac{t}{1-t}$, ma siccome per la sottrazione di $u'+u''$ da u, e per quella di $pu'tt'+(1-p-q)u't+qu''tt''+(1-p-q)u''t$ da $putt'+qutt''+(1-p-q)ut$, che è la funzione generatrice del secondo membro dell' equazione si sottraggono rispettivamente due volte le generatrici di $y_{x,0,0}$ e di $(1-p-q)y_{x-1,0,0}$ mentre esse non possono esistere nelle corrispondenti generatrici a tre variabili che una volta sola, così è d' uopo in vece l' aggiungerle alle medesime nello stabilire l' equazione esprimente la loro relazione. Sarà questa pertanto $u-u'-u''+\frac{1}{1-t}=putt'+qutt''+(1-p-q)ut-pu'tt'-(1-p-q)u't-qu''tt''-(1-p-q)u''t+(1-p-q)\frac{t}{1-t}$; ed essendo pel numero 11. $u'=\frac{1}{1-t}+pu'tt'+(1-p)u't-\frac{t(1-p)}{1-t}$, si ha pure $u-\frac{1}{1-t}-pu'tt'-(1-p)u't+\frac{t(1-p)}{1-t}-u''+\frac{1}{1-t}=putt'+qutt''+(1-p-q)ut-pu'tt'-(1-p-q)u't-qu''tt''-(1-p-q)u''t+(1-p-q)\frac{t}{1-t}$, ovvero $u-u''=putt'+qutt''+(1-p-q)ut+qu't-qu''tt''-(1-p-q)u''t-\frac{qt}{1-t}$. Inoltre essendo pure per lo stesso numero 11. $u''=\frac{1}{1-t}+qu''tt''+(1-q)u''t-\frac{t(1-q)}{1-t}$, si avrà ancora $u-\frac{1}{1-t}-qu''tt''-(1-q)u''t+\frac{t(1-q)}{1-t}=putt'+qutt''+(1-p-q)ut+qu't-qu''tt''-(1-p-q)u''t-\frac{qt}{1-t}$,

ovvero $u - \frac{1}{1-t} + \frac{t}{1-t} = putt' + qutt'' + (1-p-q)ut + qu't + pu''t$,

ed $u = \frac{1+qu't+pu''t}{1-ptt'-qtt''-(1-p-q)t}$, la quale espressione può considerarsi divisa in altrettante parti quanti sono i termini del suo numeratore.

Si tratta quindi primieramente di ricercare il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{1}{1-ptt'-qtt''-(1-p-q)t} = \frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$

$= 1 + (pt'+qt''+(1-p-q))t + (pt'+qt''+(1-p-q))^2 t^2 + (pt'+qt''+(1-p-q))^3 t^3 \ldots + (pt'+qt''+(1-p-q))^x t^x +$ ec.

Dunque il coefficiente di t^x in questa espressione è $(pt'+qt'' + (1-p-q))^x = p^x t'^x + x(qt''+(1-p-q))p^{x-1} t'^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}(qt''+(1-p-q))^2 p^{x-2} t'^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \times (qt''+(1-p-q))^3 p^{x-3} t'^{x-3} \ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(x-x'-1))}{1.2.3\ldots(x-x')} \times (qt''+(1-p-q))^{x-x'} p^{x'} t'^{x'} +$ ec. da cui risulta essere $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x')}(qt''+(1-p-q))^{x-x'} p^{x'}$ quello di $t'^{x'}$. Ora

$(qt''+(1-p-q))^{x-x'} = q^{x-x'} t''^{x-x'} + (x-x')(1-p-q)q^{x-x'-1} t''^{x-x'-1} + \frac{(x-x')(x-x'-1)}{1.2}(1-p-q)^2 q^{x-x'-2} t''^{x-x'-2} + \frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)}{1.2.3} \times (1-p-q)^3 q^{x-x'-3} t''^{x-x'-3} \ldots + \frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x-x'-(x-x'-x''-1))}{1.2.3\ldots(x-x'-x'')} \times (1-p-q)^{x-x'-x''} q^{x''} t''^{x''} +$ ec., e quindi se ne deduce facilmente, che il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ nella prima parte di u, cioè in $\frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ è

$$(M) \ldots \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x')} \cdot \frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-x'')}(1-p-q)^{x-x'-x''} p^{x'} q^{x''}.$$

Ciò posto è opportuno l'osservare, che questo coefficien-

te manca o svanisce quando $x-x'-x''<0$ ed $x-x'<x''$, poichè allora è nullo il coefficiente di $t''^{x''}$ in $(qt''+(1-p-q))^{x-x'}$, e d'altronde è evidente, che il problema riesce impossibile quando $x<x'+x''$, poichè non potendo aver luogo a ciascun colpo, che un evento solo, si richiede almeno, che il numero de' colpi accordato pareggi la totalità degli eventi da condursi. Nel caso poi di $x-x'-x''=0$, cioè di $x-x'=x''$ il coefficiente di $t''^{x''}$ in $(qt''+(1-p-q))^{x-x'}$ è $q^{x''}$ dipendentemente dallo sviluppo di $(qt''+(1-p-q))^{x''}$, e perciò quello di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ nella espressione $\frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ è $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots.(x-x')}p^{x'}q^{x''}=$

$$\text{(M')} \ldots\ldots \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots.x''}p^{x'}q^{x''}.$$

Trovato così generalmente il richiesto coefficiente nella prima parte di u, vuolsi anche rinvenire nella seconda parte cioè in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$. E poichè il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ in $\frac{qt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si ha dall' espressione (M) moltiplicata per q cambiando solamente in essa x in $x-1$, come è evidente per le cose già dimostrate, cosicchè esso risulta espresso da

$$\text{(N)} \ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots.(x'+1)}{1.2.3\ldots.(x-x'-1)}\cdot\frac{(x-x'-1)(x-x'-2)(x-x'-3)\ldots\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots.(x-x'-x''-1)}\times$$
$$(1-p-q)^{x-x'-x''-1}p^{x'}q^{x''+1},$$

e d'altronde il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ in u', che non è punto funzione di t'' si ha dal numero 11, nascerà quindi il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ dal complesso dei prodotti di tutte le variazioni possibili del coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ in u' per le corrispondenti di quello di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ in $\frac{qt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$

relativamente però solo ad x ed x', cioè tali che i coefficienti variati, che entrano in ciascun prodotto appartengano rispettivamente a potenze di t, t', che insieme moltiplicate producano $t^x t'^{x'}$. Se si indica pertanto il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u' per $T'_{x,x'} =$

$$(N')\ldots p^{x'}\left(1+(1-p)x'+\frac{x'(x'+1)}{1.2}(1-p)^2+\frac{x'(x'+1)(x'-2)}{1.2.3}(1-p)^3\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2\ldots\ldots(x-x')}(1-p)^{x-x'}\right)$$

come dal numero 11. sopracitato, e per $T_{x,x',x''}$ quello di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{qt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ cioè l'espressione (N), potrà il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ esprimersi come segue:

$$(O)\ldots\left\{\begin{array}{l}
T'_{0,0}.T_{x,x',x''}+T'_{1,0}.T_{x-1,x',x''}+T'_{2,0}.T_{x-2,x',x''}\ldots+T'_{x,0}.T_{0,x',x''}\\
+T'_{0,1}.T_{x,x'-1,x''}+T'_{1,1}.T_{x-1,x'-1,x''}+T'_{2,1}.T_{x-2,x'-1,x''}\ldots+T'_{x,1}.T_{0,x'-1,x''}\\
+T'_{0,2}.T_{x,x'-2,x''}+T'_{1,2}.T_{x-1,x'-2,x''}+T'_{2,2}.T_{x-2,x'-2,x''}\ldots+T'_{x,2}.T_{0,x'-2,x''}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+T'_{0,x'}.T_{x,0,x''}+T'_{1,x'}.T_{x-1,0,x''}+T'_{2,x'}.T_{x-2,0,x''}\ldots+T'_{x,x'}.T_{0,0,x''}
\end{array}\right\}$$

In questa espressione però svaniscono dipendentemente dalle variazioni di x e di x' nel coefficiente $T'_{x,x'}$ considerato generalmente tutti que' termini ne' quali esistendo sempre come fattore lo stesso $T'_{x,x'}$ sia $x < x'$, e ciò secondo l'indole di questa funzione determinata nel num. 11. anche nella supposizione di $y_{0,x'} = 0$ quando $x' > 0$, e per l'ipotesi di quel secondo problema, che richiede il numero de' colpi prescritto non minore di quello delle volte per cui deve condursi il dato evento. Quindi sussistono tutti i termini della prima fila orizzontale nella espressione (O), essendo ciascuno dei

coefficienti $T'_{0,0}$, $T'_{1,0}$, $T'_{2,0}$ ec. eguale all'unità, come fu pure osservato al num. 11., ma nella seconda fila si annulla il primo termine, e rimangono gli altri essendo $T'_{0,1}=0$, nella terza si annullano i due primi a cagione di $T'_{0,2}=T'_{1,2}=0$, e così successivamente fino all'ultima fila, nella quale annullandosi tutti i termini da quello che contiene come fattore $T'_{0,x'}$ fino all' altro, che contiene come fattore $T'_{x'-1,x'}$ inclusivamente, restano i successivi $T'_{x',x'}.T_{x-x',0,x''}+\text{ec.}+T'_{x,x'}.T_{0,0,x''}$. Pertanto il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ dipendentemente dalla natura della funzione $T'_{x,x'}$ potrà anche rappresentarsi sotto l' altra forma:

$$(O')..\left\{\begin{array}{l}
T_{x,x',x''}+T_{x-1,x',x''}+T_{x-2,x',x''}\ldots+T_{0,x',x''}\\
+T'_{1,1}.T_{x-1,x'-1,x''}+T'_{2,1}.T_{x-2,x'-1,x''}+T'_{3,1}.T_{x-3,x'-1,x''}\ldots+T'_{x,1}.T_{0,x'-1,x''}\\
+T'_{2,2}.T_{x-2,x'-2,x''}+T'_{3,2}.T_{x-3,x'-2,x''}+T'_{4,2}.T_{x-4,x'-2,x''}\ldots+T'_{x,2}.T_{0,x'-2,x''}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+T'_{x',x'}.T_{x-x',0,x''}+T'_{x'+1,x'}.T_{x-x'-1,0,x''}+T'_{x'+2,x'}.T_{x-x'-2,0,x''}\ldots+T'_{x,x'}.T_{0,0,x''}
\end{array}\right\}$$

Questa espressione intanto specialmente nelle sue applicazioni può amettere molte riduzioni. Di fatto considerando tutte le variazioni di x, x' in $T_{x,x',x''}$ che danno altrettanti moltiplicatori rispettivi in ciascun termine di (O') è chiaro, che questi possono generalmente rappresentarsi per $T_{x-m,x'-n,x''}$ ove m, n possono essere numeri qualunque interi, ed anche lo zero. Quindi si vede, che se nella formola (N) si ponga $x-m$ in luogo di x, ed $x'-n$ in luogo di x' dovrà dirsi lo stesso di $x-m$ rispetto ad $x'-n$, ed x'' nel risultamento, che di x rispetto ad x', x'' nella (N) prima della sostituzione. Ora essendo la (N) indipen-

dentemente dalla quantità costante q, che in essa entra come fattore la stessa che la (M), in cui ad x siasi sostituito $x-1$, ciò che vale in (M) per x rispetto ad x', x'' varrà in (N) per $x-1$ rispetto ad x', x'', e così varrà per $x-m-1$ rispetto ad $x'-n$, x'' pure in (N) dopo le accennate sostituzioni. Dunque se $x-m-1 = x'-n+x''$ sarà

$$T_{x-m,x'-n,x''} = \frac{(x-m-1)(x-m-2)(x-m-3)\ldots\ldots(x'-n+1)}{1.2.3\ldots(x-m-x'+n-1)} p^{x'-n} q^{x''+1},$$

e se $x-m-1 < x'-n+x''$, sarà $T_{x-m,x'-n,x''} = 0$. Dunque supposto sempre $x-m-1 = x'-n+x''$, ed inoltre $m=n=0$, sarà $T_{x,x',x''} =$

$$\text{(P)} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x'-1)} p^{x'} q^{x''+1},$$

e se $x-1 < x'+x''$ si ha $T_{x,x',x''} = 0$.

Però l' espressione (P) non può dare il valore di $T_{x,x',x''}$ nel caso in cui essendo sempre $x-1 = x'+x''$ riesca $x-1 < x'+1$, e ciò è evidente. Per questo caso sarà quindi d'uopo di convertire la formola nell' altra

$$\text{(P')} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x''-1)} p^{x'} q^{x''+1}$$

la quale si sarebbe ottenuta direttamente, se nel determinare successivamente i coefficienti di t^{x}, $t'^{x'}$, $t''^{x''}$ in $\frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si fosse con operazione reciproca determinato quello di $t''^{x''}$ prima di quello di $t'^{x'}$.

Da queste riflessioni si deduce facilmente, che la parte del coefficiente ricercato dal problema, la quale si ricava dalla funzione generatrice $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si riduce finalmente alla forma

$$(O'')\ldots\left\{\begin{array}{l}
\quad T_{x,x',x''} + T_{x-1,x',x''} \ldots + T_{x'+x''+1,x',x''} \\
+T'_{1,1}.T_{x-1,x'-1,x''} + T'_{2,1}.T_{x-2,x'-1,x''} \ldots + T'_{x-x'-x'',1}.T_{x'+x'',x'-1,x''} \\
+T'_{2,2}.T_{x-2,x'-2,x''} + T'_{3,2}.T_{x-3,x'-2,x''} \ldots + T'_{x-x'-x''+1,2}.T_{x'+x''-1,x'-2,x''} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+T'_{x',x'}.T_{x-x',0,x''} + T'_{x'+1,x'}.T_{x-x'-1,0,x''} \ldots + T'_{x-x''-1,x'}.T_{x''+1,0,x''}
\end{array}\right\}$$

nella quale implicitamente si suppone, che sia $x > x' + x''$, altrimenti come è evidente per le cose dette tutta l' espressione si annulla. È poi opportuno di notare, che l' ultimo termine della serie in (O'') è $T'_{x-x''-1,x'}.T_{x''+1,0x''}$, poichè continuandone più oltre l' ultima fila, s' incontrerebbe subito il termine $T'_{x-x'',x'}.T_{x'',0,x''}$ in cui $T_{x'',0,x''} = 0$, riferendosi questa espressione al caso in cui $x - m = x''$, $x' - n = 0$, e perciò $x - m - 1 < x' - n + x''$. Un' analoga riflessione dimostra come la serie parziale di ciascuna delle altre file finisca precisamente coll' ultimo termine in essa rispettivamente notato. Si vedrà pure facilmente, che il prodotto $T'_{x',x'}.T_{x-x',0,x''}$ ed i successivi che dipendono dall' aumento della x', determinano necessariamente l' ultima fila orizzontale, poichè l'ulteriore, che si supponesse, avrebbe per primo termine $T'_{x'+1,x'+1} \times T_{x-x'-1,-1,x''}$, il quale contenendo funzioni con indice negativo non può pel già detto aver luogo.

Resta ora a trovarsi il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{pu''t}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$. Perciò si osservi, che il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{pt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ è

$$(Q)\ldots\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-1)}\cdot\frac{(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-x''-1)}(1-p-q)^{x-x'-x''-1}\,p^{x'+1}\,q^{x''}$$

moltiplicata per p l'espressione (M) e posto in essa $x-1$ in luogo di x, cambiandosi poi la (Q) stessa nella espressione

$$(Q)' \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-1)}\, p^{x'+1}\, q^{x''}$$

quando $x-1=x'+x''$, ed annullandosi quando $x-1<x'+x''$. Questa espressione però non ha luogo quando alle stesse già supposte condizioni si aggiunga quella di $x-1<x'+1$. Allora essa serve all' ipotesi di $x-1=x'+x''$ quando si trasformi nell' altra

$$(Q'') \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots(x-x''-1)}\, p^{x'+1}\, q^{x''}$$

che è pure giustificata per le riflessioni fatte intorno all' espressione (P'). Ciò posto se il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{pt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si rappresenti per $T'''_{x,x',x''}$, e per $T'''_{x,x''}$ il coefficiente di $t^x t'^{x''}$ in u'' cioè

$$(Q''')\ldots\ldots q^{x''}\left(1+(1-q)x''+\frac{x''(x''+1)}{1.2}(1-q)^2+\frac{x''(x''+1)(x''+2)}{1.2.3}(1-q)^3\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x''(x''+1)(x''+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-x')}(1-q)^{x-x''}\right)$$

quale ricavasi dal problema secondo del numero 11. ponendo nella formola apposita q in luogo di p, ed x'' in luogo di x', con raziocinio analogo a quello con cui si è trovato il coefficiente di $t^x t'^{x'} t'^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt+qt''+(1-p-q))t}$ si troverà il corrispondente in $\frac{pu''t}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$, il quale risulta dato dalla seguente espressione:

$$(R)\ldots\left\{\begin{array}{l}
T''_{x,x',x''} + T''_{x-1,x',x''} \ldots + T''_{x'+x''+1,x',x''} \\
+T'''_{1,1}\,.\,T''_{x-1,x',x''-1} + T'''_{2,1}\,.\,T''_{x-2,x',x''-1} \ldots + T'''_{x-x'-x'',1}\,.\,T''_{x'+x'',x',x''-1} \\
+T'''_{2,2}\,.\,T''_{x-2,x',x''-2} + T'''_{3,2}\,.\,T''_{x-3,x',x''-2} \ldots + T'''_{x-x'-x''+1,2}\,.\,T''_{x'+x''-1,x',x''-2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+T'''_{x'',x''}\,.\,T''_{x-x'',x',0} + T'''_{x''+1,x''}\,.\,T''_{x-x''-1,x',0} \ldots + T'''_{x-x'-1,x''}\,.\,T''_{x'+1,x',0}.
\end{array}\right\}$$

Si vede pertanto, che la medesima è perfettamente analoga alla espressione (O''), e da questa ricavasi cambiando in essa primieramente i simboli generali $T_{x,x',x''}$, $T'_{x,x'}$ rispettivamente in $T''_{x,x',x''}$ e $T'''_{x,x''}$, e poscia trasportando all'indice x'' le variazioni dell'indice x' e reciprocamente considerando x' come costante in vece di x'', coll'avvertenza poi di compiere l'espressione (R) colla fila orizzontale, che ha per primo termine $T'''_{x'',x''} \cdot T''_{x-x'',x',0}$ ripetendo un discorso affatto simile a quello con cui si determinò per ultima fila in (O'') quella, che ha per primo termine $T'_{x,x'} \cdot T_{x-x',0,x''}$. Rimane pertanto dimostrato, che la somma delle tre espressioni (M), (O''), (R) è il valore cercato di $y_{x,x',x''}$, che risolve perciò il problema.

Per farne ora qualche applicazione sia $x=5$, $x'=3$, $x''=1$. Ponendo questi valori in (M), la prima parte del coefficiente richiesto risulta $20(1-p-q)p^3q$. Ponendoli poscia in (O'') si tratterà di determinare i valori di $T_{5,3,1}$, $T'_{1,1} \cdot T_{4,2,1}$, $T'_{2,2} \cdot T_{3,1,1}$, $T'_{3,3} \cdot T_{2,0,1}$ alla somma de' quali si riduce (O'') in questo caso, giacchè ogni altro termine di quella espressione generale divien nullo, perchè in esso il moltiplicatore funzione delle tre variabili riesce sempre tale che l'indice in prima sede non supera la somma degli altri due. Ciò posto applicando simultaneamente le formole (P), (N') si ha $T_{5,3,1}=4p^3q^2$, $T'_{1,1} \cdot T_{4,2,1}=p.3p^2q^2$, $T'_{2,2} \cdot T_{3,1,1}=p^2.2pq^2$, $T'_{3,3} \cdot T_{2,0,1}=p^3q^2$. Restano ora a prendersi nella espressione (R) i valori di $T''_{5,3,1}$, $T'''_{1,1} \cdot T''_{4,3,0}$ riducendosi la medesima a questi soli come rilevasi per le osservazioni già fatte. Pertanto la formola (Q') dà $T''_{5,3,1}=4p^4q$, e le formole (Q'''), (Q'') danno insieme $T'''_{1,1} \cdot T''_{4,3,0}=q\,p^4$. Sarà dunque $y_{x,x'',x'''}$
$=20(1-p-q)p^3q+4p^3q^2+3p^3q^2+2p^3q^2+p^3q^2+4p^4q+p^4q$
$=20p^3q-10p^3q^2-15qp^4$.

Questo risultato viene esattamente confermato coll' uso del metodo delle sostituzioni successive. Di fatto richiamando sempre ed applicando ad ogni espressione della forma $y_{x,x',x''}$ il raziocinio con cui fu stabilita l'equazione fondamentale del problema si ha $y_{5,3,1} = py_{4,2,1} + qy_{4,3,0} + (1-p-q)y_{4,3,1}$ $= p(py_{3,1,1} + qy_{3,2,0} + (1-p-q)y_{3,2,1}) + q(py_{3,2,0} + qy_{3,3,-1}$ $+ (1-p-q)y_{3,3,0}) + (1-p-q)(py_{3,2,1} + qy_{3,3,0} + (1-p-q)y_{3,3,1})$. Quindi a cagione di $y_{3,3,0} = y_{3,3,-1} = p^3$, e di $y_{3,3,1} = 0$ viene pure $y_{5,3,1} = p^2y_{3,1,1} + 2qpy_{3,2,0} + 2p(1-p-q)y_{3,2,1}$ $+ ((1-p)p^3 + (1-p-q)p^3)q = p^2(py_{2,0,1} + qy_{2,1,0} + (1-p-q)y_{2,1,1})$ $+ 2qp(py_{2,1,0} + qy_{2,2,-1} + (1-p-q)y_{2,2,0}) + 2p(1-p-q)(py_{2,1,1}$ $+ qy_{2,2,0} + (1-p-q)y_{2,2,1}) + q((1-p)p^3 + (1-p-q)p^3)$ $= p^3y_{2,0,1} + 3p^2qy_{2,1,0} + 3p^2(1-p-q)y_{2,1,1} + 2qp(1-p)p^2$ $+ 2pq(1-p-q)p^2 + q((1-p)p^3 + (1-p-q)p^3) = p^3(py_{1,-1,1}$ $+ qy_{1,0,0} + (1-p-q)y_{1,0,1}) + 3p^2q(py_{1,0,0} + qy_{1,1,-1}$ $+ (1-p-q)y_{1,1,0}) + 3p^2(1-p-q)(py_{1,0,1} + qy_{1,1,0} + (1-p-q)y_{1,1,1}$ $+ 3q(1-p)p^3 + 3q(1-p-q)p^3 = p^3(pq + q + (1-p-q)q)$ $+ 3p^2q(p + qp + (1-p-q)p) + 3p^2(1-p-q)(pq+qp) + 3q(1-p)p^3$ $+ 3q(1-p-q)p^3 = p^3(2q-q^2) + 3p^2q(2p-p^2) + 6qp^3(1-p-q)$ $+ 3q(1-p)p^3 + 3q(1-p-q)p^3 = 2qp^3 - q^2p^3 + 6qp^3 - 3qp^4 + 6qp^3$ $- 6qp^4 - 6q^2p^3 + 3qp^3 - 3qp^4 + 3qp^3 - 3qp^4 - 3q^2p^3 = 20qp^3$ $- 10q^2p^3 - 15qp^4$ come precedentemente.

Sia ora per altro esempio in $y_{x,x',x''}$ $x = 4$, $x' = x'' = 2$, e l' espressione (M') applicata a questo caso dà $y_{4,2,2} = 6p^2q^2$ giacchè nel medesimo svaniscono interamente le espressioni (O''), (R), essendo quanto alla prima in ogni variazione del sim-

bolo $T_{x,x',x''}=0$ l'indice in prima sede eguale o minore della somma degli altri due, e quindi $T_{4,2,2}=0$, $T_{3,1,2}=0$, $T_{2,1,2}=0$ ec. $T_{2,0,2}=0$, $T_{1,0,2}=0$ ec. La stessa osservazione si estende al simbolo $T''_{x,x',x''}$ nella espressione (O''). Non resta perciò che a verificare anche tale risultato col metodo delle sostituzioni successive. Con questo si ha $y_{4,2,2}=py_{3,1,2}+qy_{3,2,1}+(1-p-q)y_{3,2,2}=p(py_{2,0,2}+qy_{2,1,1}+(1-p-q)y_{2,1,2})+q(py_{2,1,1}+qy_{2,2,0}+(1-p-q)y_{2,2,1})=2pqy_{2,1,1}+p^2y_{2,0,2}+q^2y_{2,2,0}=4p^2q+p^2q^2+q^2p^2=6q^2p^2$ come prima.

È opportuno intanto di notare quì di passaggio, che nella supposizione di $x=x'+x''$ l'espressione $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x''}p^{x'}q^{x''}$ unico valore di $y_{x,x',x''}$ mostra col suo coefficiente $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x''}$ in quanti modi gli eventi corrispondenti a p, q possono insieme permutarsi in $x'+x''$ colpi colla condizione, che l' uno abbia luogo per x' volte, l'altro per x'' volte, giacchè ad ognuna di queste permutazioni relative all' intero numero de' colpi competerà sempre la probabilità composta $p^{x'}q^{x''}$.

24. I mezzi fin quì usati per risolvere le equazioni alle differenze parziali con funzioni di due o tre variabili si palesano in gran parte adattati alla risoluzione di altre analoghe equazioni di un ordine più elevato, e con funzioni contenenti un maggior numero di variabili. I limiti però naturalmente prescritti ad un saggio di una qualunque Teoria non consentono di mostrare in questo scritto tutta l' estensione di quella delle funzioni generatrici. Rimarrebbero quindi molte altre considerazioni da farsi intorno alla medesima, e principalmente riguardo ai diversi metodi dello sviluppo in serie ordinate secondo le potenze ed i prodotti delle potenze di più variabili di quelle espressioni, che le contengono divise o comunque insieme moltiplicate, giacchè appunto a tale sviluppo riduce-

si la risoluzione di qualunque equazione tra le funzioni generatrici. A dilatare possibilmente il relativo Calcolo possono eziandio giovare parecchi Teoremi non tutti forse compresi fra quelli, che dimostrò il Laplace nella citata opera delle Probabilità, e non tutti certamente esposti da questo Sommo Geometra con quella maggiore semplicità e chiarezza, che desiderar possa il progresso delle Scienze Matematiche. Merita perciò sempre questo ramo importantissimo di analisi di essere perfezionato con nuove cure, e con nuovi sforzi, siccome in ispecie può aggiungersi certamente alle speculazioni del Laplace in ciò, che ha rapporto alle equazioni a differenze tanto ordinarie che parziali coi coefficenti variabili, ed a quelle che dotate di coefficienti costanti hanno poi differenze variabili, col mostrarne la reciproca dipendenza. Sarebbe poi ad ogni modo da augurarsi, che il metodo per risolvere le equazioni alle differenze coi coefficienti variabili potesse procedere col soccorso del calcolo delle funzioni generatrici in un modo analogo a quello con cui si applica alle equazioni dotate di coefficienti costanti. E perciò sarebbe d'uopo sostituire agli artifizj che riducono le une alle altre di tali equazioni per l' uso del calcolo delle differenze finite, ne' pochi casi, che non vinsero la sagacità degli Analisti, metodi di più estesa riduzione intrinsecamente derivanti dalla Teoria delle funzioni generatritrici. A questa intrapresa, che particolarmente vedrei con lieto animo abbracciarsi da ingegni più felici del mio, amerei io pure rivolgermi non senza però diffidare della difficoltà della materia, delle angustie del tempo, e delle vicende della vita.

FINE.