MEMORIE
DI
MATEMATICA

SULLE FUNZIONI GENERATRICI

MEMORIA

DEL SIG. MARCHESE LUIGI RANGONI

Ricevuta il dì 15. *Settembre* 1823.

Una Memoria del Signor Marchese Laplace stampata fra quelle dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1779. contiene l' invenzione, ed i principj del calcolo delle funzioni generatrici suscettive di numerose ed utili applicazioni. Tali furono esse riconosciute dal Socio Sig. Paoli (1), specialmente in ordine all'integrazione delle equazioni a differenze parziali miste di finite ed infinitesime, quantunque poi con diverso metodo trattasse al suo solito profondamente questo ramo d'analisi. Niun altro che io sappia intraprese a coltivare il calcolo delle funzioni generatrici fuori del Sig. Lacroix, il quale (2) ne mo-

(1) Vedi - Memorie della Società Italiana. tom. VIII. pag. 575.
Paoli - Supplemento agli Elementi di Algebra. Opuscolo. III. pag. 165. e seg.

(2) V. Lacroix. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral - Seconde édition. Paris 1819. Tom. III. pag. 322. e seg.

strò la Teoria desunta pure da più ampia dottrina, che ne avea in seguito (1) pubblicata lo stesso Laplace. In questa si mostrano rapidamente gli usi importantissimi delle funzioni generatrici, ed oltre a quelli notati dal Sig. Paoli, anche gli altri, che riguardano l' interpolazione, e la trasformazione delle serie, l'integrazione delle equazioni lineari differenziali non meno che a differenziali parziali, rivolgendosi pure qualche considerazione alle equazioni alle differenze finite tanto ordinarie, che parziali. Siccome però in quest' ultimo rapporto sembra, che egli non abbia fatto che accennare i metodi, che conducono alla soluzione dei problemi relativi, così ho stimato opportuno di esporre nuovamente i principj fondamentali di tutta la dottrina delle funzioni generatrici ad una sola variabile con più estese dimostrazioni di quelle, che ne diede il Laplace, deducendone l'integrazione delle equazioni lineari a differenze finite ordinarie coi coefficienti costanti, unico oggetto di questa memoria; ed applicandola alla risoluzione di diversi problemi appartenenti alle serie specialmente ricorrenti, alla dottrina delle combinazioni, alla partizione dei numeri, ed al calcolo de' probabili.

1. Sia y_x una funzione qualunque di x. Può sempre concepirsi una tale funzione di t, che sviluppata secondo le potenze di t dia la seguente serie:

$$y_0+y_1.t+y_2.t^2+y_3.t^3....+y_x.t^x+y_{x+1}.t^{x+1}....+y_\infty.t^\infty$$

Questa funzione è quella che chiamasi *funzione generatrice di* y_x, essendo questa variabile il coefficiente di t^x. Se questa serie, per qualunque operazione, che possa farsi sulla medesima, riceva per t^x un diverso coefficiente, la serie così modificata diverrà la funzione generatrice di questo nuovo coefficiente. Moltiplicando per esempio la detta serie, che quind' in-

(1) V. Laplace. Théorie Analytique des probabilités.-Seconde édition. Paris. 1814.

nanzi può esprimersi con u, per $\frac{1}{t^r}$, la funzione $\frac{u}{t^r}$ sarà la generatrice di y_{x+r}, giacchè y_{x+r} diviene allora il coefficiente di t^x. Ciò posto se anche u si moltiplichi per $\left(\frac{1}{t}-1\right)$, il coefficiente di t^x in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ sarà $y_{x+1}-y_x$, che è la differenza finita di y_x, supposto che x varj dell' unità; e fatto $y_{x+1}-y_x=\Delta y_x$, sarà $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ la funzione generatrice di Δy_x. Intanto si ha

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)=y_0.t^{-1}+(y_1-y_0)t^0+(y_2-y_1)t+(y_3-y_2)t^2....+(y_{x+1}-y_x)t^x+\text{ec.}=$$
$$y_0t^{-1}+\Delta y_0.t^0+\Delta y_1.t+\Delta y_2.t^2....+\Delta y_x.t^x+\text{ec.}$$

Moltiplicando ancora questa nuova funzione per $\frac{1}{t}-1$, si vedrà facilmente essere la funzione $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$ generatrice di $\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=\Delta^2 y_x$, giacchè tale riesce il coefficiente di t^x in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$; e siccome moltiplicando nuovamente per $\frac{1}{t}-1$, il coefficiente di t^x nella funzione $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$ riesce $\Delta^2 y_{x+1}-\Delta^2 y_x=\Delta^3 y_x$, se ne inferisce, che la funzione generatrice di $\Delta^3 y_x$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$: ed in generale la funzione generatrice di $\Delta^i y_x$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$.

2. Moltiplicando la funzione $u=y_0+y_1.t+y_2.t^2...+y_x.t^x+\text{ec.}$ per $a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}...+\frac{q}{t^n}$, il coefficiente di t^x nella nuova funzione che risulterà è $ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}...+qy_{x+n}$, giac-

chè per ottenerlo i termini $a, \frac{b}{t}, \frac{c}{t^2} \ldots \frac{q}{t^n}$ dovranno moltiplicarsi rispettivamente, e per ordine per tutti i termini della u da $y_x t^x$ fino ad $y_{x+n} t^{x+n}$, ed è poi chiaro, che $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots + qy_{x+n}$ può considerarsi come il termine generale della serie de' coefficienti della nuova funzione, cosicchè fatto successivamente $x=0, x=1$ ec. sarà $ay_0 + by_1 + cy_2 \ldots + qy_n$ il coefficiente di t^0, ed $ay_1 + by_2 + cy_3 \ldots + qy_{n+1}$ il coefficiente di t^1 ec. Perciò indipendentemente dai termini contenenti potenze negative di t, quali si hanno dal moltiplicare $y_0, y_1 t \ldots$ fino ad $y_{n-1} t^{n-1}$ inclusivamente per $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots + \frac{q}{t^n}$, la proposta moltiplicazione di u produce lo stesso effetto, che il cambiare in essa la y_x in $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \ldots + qy_{x+n}$, o piuttosto in ∇y_x, con cui quest' ultima espressione può denotarsi. Sarà dunque per tal modo

$u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots + \frac{q}{t^n}\right)$ ovvero $\nabla y_0 + \nabla y_1 . t + \nabla y_2 . t^2 \ldots + \nabla y_x . t^x +$ ec.

la funzione generatrice di ∇y_x. Quindi poichè $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots + \frac{q}{t^n}\right)$, prescindendo dai termini che contengono potenze negative di t, è lo stesso che $\nabla y_0 + \nabla y_1 . t + \nabla y_2 . t^2 \ldots + \nabla y_x . t^x +$ ec, e questa ultima serie ha la stessa forma della u, si proverà similmente, che, moltiplicandola per $a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} \ldots + \frac{q}{t^n}$, indipendentemente dalle potenze negative di t si ottiene lo stesso risultato che si ha qualora a ∇y_x si sostituisca in essa $a\nabla y_x + b\nabla y_{x+1} + c\nabla y_{x+2} \ldots + q\nabla y_{x+n}$, quantità che si indicherà per $\nabla^2 y_x$,

e la cui funzione generatrice sarà per conseguenza $\nabla^2 y_0 + \nabla^2 y_1 . t + \nabla^2 y_2 . t^2 .. + \nabla^2 y_x . t^x + \text{ec.}$ ovvero $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^2$. Proseguendo si dimostrerà allo stesso modo, che la funzione generatrice di $a\nabla^3 y_x + b\nabla^3 y_{x+1} + c\nabla^3 y_{x+2} ... + q\nabla^3 y_{x+n} = \nabla^3 y_x$ è $\nabla^3 y_0 + \nabla^3 y_1 . t + \nabla^3 y_2 . t^2 ... + \nabla^3 y_x . t^x + \text{ec.}$ ovvero $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^3$; e così di seguito si troveranno le funzioni generatrici di $\nabla^4 y_x$, $\nabla^5 y_x$ ec.; e si giungerà finalmente a conchiudere in generale essere $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^i$ la funzione generatrice di $\nabla^i y_x$.

3. Avendo quindi la funzione $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^s$, nella quale l'esponente s esprime un numero intero qualunque, indipendentemente sempre dai termini che contengono potenze negative di t, la stessa forma rispetto a $\nabla^i y_x$ che ha la u rispetto ad y_x, ne viene, che siccome pel n.° 1. $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ è la funzione generatrice di $\Delta^i y_x$ così sarà $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^s \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ la funzione generatrice di $\Delta^i \nabla^i y_x$. Perciò essendo pure la forma di questa funzione rispetto a $\Delta^i \nabla^i y_x$ la stessa che quella di u rispetto ad y_x come è evidente per le cose dette, ed essendo pel n.° 1. $\frac{u}{t^r}$ la funzione generatrice di y_{x+r}, sarà $\frac{u}{t^r}\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^s \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ la funzione generatrice di $\Delta^i \nabla^i y_{x+r}$.

4. Si possono generalizzare i risultati del n.° precedente supponendo, che ∇y_x rappresenti una qualunque funzione li-

neare di y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ec. cioè di tutte, o di alcune soltanto di queste espressioni. È certo, che considerando ∇y_x come coefficiente di t^x nella funzione u moltiplicata per una funzione di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t^3}$ ec. questa deve rendersi identica a ∇y_x sostituendo in essa y_x all' unità, y_{x+1} ad $\frac{1}{t}$, y_{x+2} ad $\frac{1}{t^2}$ ec. Ciò si verifica appunto, come deve verificarsi in qualunque altro caso analogo, in quello del prec. n.° 2., in cui la funzione moltiplicatrice di u è espressa da $a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots+\frac{q}{t^n}$, risultandone per coefficiente di t^x nel prodotto la funzione $ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}\ldots+qy_{x+n}$. Quindi viceversa nel supposto significato di ∇y_x la sua funzione generatrice sarà us, indicando per s ciò che diviene ∇y_x quando in luogo di y_x, y_{x+1}, y_{x+2} ec. si pone rispettivamente e per ordine 1, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$ ec. E poichè, come si vede facilmente, la funzione us, prescindendo dai termini contenenti potenze negative di t, ha la stessa forma di u, come fu dimostrato nel caso speciale del n.° 2., nel quale può ridursi a $\nabla y_0+\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\ldots+\nabla y_x.t^x$; moltiplicandola per s, locchè equivale a cambiare in essa la ∇y_x in una funzione di ∇y_x, ∇y_{x+1}, ∇y_{x+2} ec. che si rappresenta per $\nabla^2 y_x$, si avrà nella funzione us^2 la generatrice di $\nabla^2 y_x$. Così procedendo innanzi allo stesso modo si dimostra essere in generale us^i la funzione generatrice di $\nabla^i y_x$.

5. Se nella funzione u si ponga $\Sigma^i y_x$ in luogo di y_x, indicando per $\Sigma^i y_x$ l' integrale $i.^{esimo}$ di y_x, e la nuova funzione

si chiami z, sicchè si abbia $\Sigma^i y_0 + \Sigma^i y_1 . t + \Sigma^i y_2 . t^2 \ldots + \Sigma^i y_x . t^x + \text{ec.} = z$, per le cose dimostrate nel n.° 1. sarà la funzione generatrice della differenza $i.^{esima}$ di $\Sigma^i y_x$ cioè di y_x espressa da $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$, essendo z la funzione generatrice di $\Sigma^i y_x$. Perciò supposto, che u sia sempre la funzione generatrice di y_x, $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ dovrebbe ridursi ad u; ma le successive i integrazioni di y_x introducono nella z tutte le quantità costanti che per esse si aggiungono, le quali impediscono che si verifichi questa identità. Per trovare dunque un' equazione fra u e $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$, tenendo conto di dette costanti, si osservi, che se nella funzione u si pone $\Sigma y_x + A$, cioè l'integrale primo di y_x colla sua costante in luogo di y_x, la nuova funzione sarà $\Sigma y_0 + A + (\Sigma y_1 + A)t + (\Sigma y_2 + A)t^2 \ldots + (\Sigma y_x + A)t^x + \text{ec.}$, la quale si indichi per u'. Moltiplicandola per $\frac{1}{t} - 1$ essa diviene $\frac{1}{t}\ \Sigma y_0 + \frac{A}{t} - \Sigma y_0 - A + \Sigma y_1 + A - \Sigma y_1 . t - At + \Sigma y_2 . t + At - \text{ec.}$ la quale, prescindendo dal termine $\frac{1}{t}\ \Sigma y_0$ che contiene una potenza negativa di t, si riduce ad $u + \frac{A}{t}$, essendo $\Sigma y_1 - \Sigma y_0 = y_0$, $\Sigma y_2 - \Sigma y_1 = y_1$ ec. sarà dunque $u'\left(\frac{1}{t} - 1\right) = u + \frac{A}{t}$ onde $u' = \left(u + \frac{A}{t}\right) : \left(\frac{1}{t} - 1\right)$. Ma se in luogo di $\Sigma y_x + A$ si ponga $\Sigma(\Sigma y_x + A) + B$, ed il risultato, che si chiami u'', si moltiplichi per $\frac{1}{t} - 1$, si proverà allo stesso modo indipendentemente dalla funzione sommatoria moltipli-

cata per t^{-1}, essere $u''\left(\frac{1}{t}-1\right)=u'+\frac{B}{t}$; e sostituendo in questa equazione il già trovato valore di u', sarà pure $u''\left(\frac{1}{t}-1\right)=\ldots$ $\left(u+\frac{A}{t}\right):\left(\frac{1}{t}-1\right)+\frac{B}{t}$ ovvero $u''\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}-1\right)=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}-\frac{B}{t}=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}$, essendo indifferente l'esprimere la costante divisa per t con A—B o con A. Se ora nella funzione u'' si ponga $\Sigma(\Sigma(\Sigma y_x+A)+B)+C$ in luogo di $\Sigma(\Sigma y_x+A)+B$ nascerà una nuova funzione u''' per cui si avrà $u'''\left(\frac{1}{t}-1\right)=u''+\frac{C}{t}$, ed essendo $u''=\left(u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}\right):\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$ sarà $u'''\left(\frac{1}{t}-1\right)^3=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}-\frac{2C}{t^2}+\frac{C}{t}=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}$. Proseguendo per tal maniera si viene a conoscere, che rappresentando z la funzione generatrice dell' integrale i^{esimo}. di y_x, siccome u', u'', u''', rappresentano quelle del primo, secondo, terzo, sarà generalmente $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}\ldots\ldots+\frac{F}{t^i}$ tante essendo le costanti A, B, . . . F quante sono le successive integrazioni in $\Sigma^i y_x$. Da quest'ultima equazione poi si ricava

$$z=\frac{ut^i+At^{i-1}+Bt^{i-2}+Ct^{i-3}\ldots\ldots+F}{(1-t)^i},$$

che è il valore della funzione generatrice dell'integrale i^{esimo}. di y_x esteso soltanto ai valori positivi di x, giacchè nelle funzioni generatrici fin quì considerate non essendosi avuto riguardo, che alle potenze positive di t, sonosi per conseguenza trascurate le funzioni y_{-1}, y_{-2}, ec. y_{-x} corrispondenti alle potenze negative di t. Quindi, facendosi pure astrazione dalle accennate costan-

ti, la funzione generatrice di $\Sigma^i y_x$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$, vale a dire che questa funzione generatrice si ottiene cambiando in quella di $\Delta^i y_x$, i in $-i$, cosicchè $\Delta^{-i} y_x$ può rappresentare una quantità identica a $\Sigma^i y_x$. Però se si ha riguardo alle costanti arbitrarie, bisogna passando dalle potenze positive di $\frac{1}{t}-1$ alle negative, cioè cambiando i in $-i$ nella funzione $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ generatrice di $\Delta^i y_x$, aumentare u della serie $\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+$ec. prolungata come si disse.

6. Si è veduto fin quì come le funzioni generatrici si formino dalla legge delle variabili corrispondenti. È d'uopo ora vedere come le variabili si deducano dalle loro funzioni generatrici. Essendo quindi s una funzione qualunque di $\frac{1}{t}$ si tratta di ricavare $\nabla^i y_x$ dalla sua funzione generatrice. Poichè secondo ciò che si è veduto al n.° 4. $\nabla^i y_x$ è il coefficiente di t^x nella funzione us^i, in cui s è ciò che diviene ∇y_x quando vi si pone l' unità in luogo di y_x, $\frac{1}{t}$ in luogo di y_{x+1}, $\frac{1}{t^2}$ in luogo di y_{x+2} ec. sviluppando s^i secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, ogni termine dello sviluppo di s^i potrà essere generalmente rappresentato da $\frac{k}{t^n}$, ed il coefficiente di t^x nella funzione $\frac{ku}{t^n}$ sarà (n. 1.) ky_{x+n}, che rappresenta pure ciascun termine del coefficiente di t^x in us^i. Quindi i termini dello sviluppo di s^i, tutti compresi sotto la forma $\frac{k}{t^n}$, daranno quelli di $\nabla^i y_x$ quando in $\frac{k}{t^n}$ si sostituisca $(y_x)^n$ in vece di $\frac{1}{t^n}$, e l'esponente si tra-

sporti ad accrescere l' indice x. Così a cagion d'esempio quando $n=1$, il termine $\frac{k}{t}$ dello sviluppo di us^i dà il termine ky_{x+i} di $\nabla^i y_x$, e quando $n=0$ il termine k del predetto sviluppo darà il termine ky_x di $\nabla^i y_x$. Di quì nasce la regola per avere $\nabla^i y_x$, la quale prescrive 1.° di porre in s, y_x in luogo di $\frac{1}{t}$ sviluppando poi ciò che diviene s^i secondo le potenze di y_x; 2.° di trasportare all' indice x gli esponenti di y_x; 3.° di moltiplicare per y_x i termini indipendenti da y_x, e che possono riguardarsi avere $(y_x)^0$ per coefficiente. Per rendere intanto la cosa più sensibile con un esempio si supponga $s=a+\frac{b}{t}$, e per la regola data si troverà il coefficiente di t^x in us^2 ponendo in s, y_x in luogo di $\frac{1}{t}$, ed innalzando $a+by_x$ al quadrato, che sarà $a^2+b^2(y_x)^2+2ab(y_x)^1$ da cui, cambiando $(y_x)^2$ in y_{x+2}, $(y_x)^1$ in y_{x+1}, e moltiplicando a^2 per y_x, risulterà $a^2y_x+b^2y_{x+2}+2aby_{x+1}=\nabla^2 y_x$. Lo stesso risultato si ottiene osservando, che $\nabla y_x=ay_x+by_{x+1}$, giacchè se s è ciò che diviene ∇y_x cambiando y_x nell' unità, ed y_{x+1} in $\frac{1}{t}$, viceversa s dà il valore di ∇y_x quando ad $\frac{1}{t}$ si sostituisce y_{x+1}, ed i termini indipendenti da $\frac{1}{t}$ si moltiplicano per y_x. E poichè $\nabla^2 y_x$ è ciò che diviene ∇y_x quando in esso si sostituisce ∇y_x ad y_x sarà $\nabla^2 y_x=a(ay_x+by_{x+1})+b(ay_{x+1}+by_{x+2})=a^2y_x+2aby_{x+1}+b^2y_{x+2}$ come prima.

7. La regola data nel n.° precedente onde trovare $\nabla^i y_x$

serve pure a trovare $\Delta^i y_x$ cioè la differenza i^{sima} di y_x, giacchè $\nabla^i y_x$ si cambia in $\Delta^i y_x$, o piuttosto si riduce al caso speciale di $\Delta^i y_x$, quando $s = \frac{1}{t} - 1$, poichè si è veduto al n.° 1. essere $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ la funzione generatrice di $\Delta^i y_x$; e quindi poichè $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i = \frac{1}{t^i} - \frac{i}{t^{i-1}} + \frac{i(i-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{t^{i-2}} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{t^{i-3}} +$ ec. sostituendo y_{x+i} ad $\frac{1}{t^i}$, y_{x+i-1} ad $\frac{1}{t^{i-1}}$, y_{x+i-2} ad $\frac{1}{t^{i-2}}$ ec. si avrà $\Delta^i y_x = y_{x+i} - i y_{x+i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2} y_{x+i-2} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3.} y_{x+i-3} +$ ec.

8. Se in vece di sviluppare s^i secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, si sviluppi secondo quelle di $\frac{1}{t} - 1$, e si denoti per $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ un termine qualunque della serie che ne risulta, il coefficientedi t^x in $ku\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ sarà $k\left(y_{x+n} - n y_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{x+n-2} - \text{ec.}\right)$ $= k\Delta^n y_x$ secondo ciò che si è veduto nel n.° precedente, e come apparisce dallo sviluppo di $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ colla regola del binomio neutoniano, moltiplicandone i termini rispettivamente per quelli di u per avere tutti i prodotti parziali che contengono il fattore t^x. Ciò posto con riflessioni analoghe a quelle del n.° 6. si rileva, che si avranno tutti i termini di $\nabla^i y_x$ sostituendo per ogni valore particolare di $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$, Δy_x in luogo di $\frac{1}{t} - 1$ e trasportando l' esponente n all' indice del segno della differenza, cosicchè ne risulti $k\Delta^n y_x$, che rappresenta pure generalmente ciascun termine di $\nabla^i y_x$. Per questa regola simile alla data nel citato n.° 6. si avrà $\nabla^i y_x$, ponendo come si è detto in s, sempre supposta funzione di

$\frac{1}{t}$, Δy_x in luogo di $\frac{1}{t}-1$, o ciò che torna lo stesso Δy_{x+1} in luogo di $\frac{1}{t}$. Sviluppando allora s^i secondo le potenze di Δy_x si porrà quindi nel risultato, Δy_x in luogo di $(\Delta y_x)^2$, e $\Delta^2 y_x$ in luogo di $(\Delta y_x)^3$ ec., e finalmente i termini indipenti da Δy_x, che possono considerarsi moltiplicati per $(\Delta y_x)^0$, si moltiplicheranno per $\Delta^0 y_x = y_x$.

9. La dimostrazione del n.° precedente può ricevere una maggiore generalità, poichè se sia s funzione di r, ed r sia funzione di $\frac{1}{t}$ di modo che il coefficiente di t^x in ur sia Πy_x, si avrà $\nabla^i y_x$ sostituendo in s, Πy_x in luogo di r, sviluppando in seguito s^i secondo le potenze di Πy_x, ed applicando al solito gli esponenti alla caratteristica Π, cioè indicando per n un esponente qualunque comprensivamente al caso di $n=0$ col porre $\Pi^n y_x$ in luogo di $(\Pi y_x)^n$. Nelle supposizioni del n.° preced. si ha $r=\frac{1}{t}-1$ funzione di $\frac{1}{t}$, ed s è sviluppato secondo le potenze di $\frac{1}{t}-1$. Quindi $ur = u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, ed il coefficiente di t^x in ur è, come già si è veduto al n.° 1., Δy_x, cosicchè Πy_x in questo caso diviene Δy_x da sostituirsi in s in luogo di $\frac{1}{t}-1$ per ottenere poi l'espressione di $\nabla^i y_x$, nel modo spiegato.

Si raccoglie pertanto generalmente, che lo sviluppo di $\nabla^i y_x$ per una serie ordinata secondo le variazioni successive di Πy_x, $\Pi^2 y_x$ ec. si riduce alla formazione della funzione generatrice di $\nabla^i y_x$ cioè di us^i, allo sviluppo della funzione stes-

sa secondo le potenze di una data funzione; e finalmente al ritorno dalla funzione generatrice così sviluppata ai coefficienti variabili corrispondenti, divenendo gli esponenti delle potenze dello sviluppo gli indici della caratteristica di questi coefficienti. Il passaggio da questi coefficienti alle loro funzioni generatrici, e *viceversa* costituisce il *calcolo delle funzioni generatrici* di cui restano a vedersi le applicazioni.

10. Rischiarata fin quì la Teoria delle funzioni generatrici ad una sola variabile seguendo collo stesso ordine le proposizioni stabilite dal Sig. Laplace non è difficile di prevederne le molte applicazioni; e si richiede ora mostrarne quelle poche, le quali si riferiscono alla soluzione delle equazioni alle differenze finite coi coefficienti costanti.

Sia pertanto l' equazione generale alle differenze coi coefficienti costanti a, b, c, d, ec. e col secondo membro nullo, che trattasi di risolvere

$$(A) \ldots ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1}+y_x=0$$

ovvero

$$y_x=-(ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1}).$$

Considerata la funzione u del n.° 1. come generatrice di y_x, è chiaro per le riflessioni esposte nel successivo n.° 2. che $-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ sarà la funzione generatrice di $-(ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1})$ quantità, che può rappresentarsi per $-\nabla y_x$. Ora essendo secondo l' equazione proposta $y_x=-\nabla y_x$, sarà anche $y_{x\pm m}=-\nabla y_{x\pm m}$ finchè $x-m$ non riceva un tale valore o negativo, od anche positivo, per cui secondo le particolari condizioni dei problemi ai quali l' equazione medesima può riferirsi, essa non si verifichi. Prima pertanto che ciò avvenga, si eguaglieranno fra loro i termini corrispondenti delle due funzioni u, $-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$, e per trovare una

equazione fra le medesime sarà d' uopo sottrarre dalla prima tutti que' termini pe' quali non si verifica l' equazione $y_{x\pm m}\, t^{x\pm m} = -\nabla y_{x\pm m}.t^{x\pm m}$, e dalla seconda, oltre il sottrarne le quantità, che si riducono alla forma $-\nabla y_x.t^{x\pm m}$ e per le quali pure non si verifica la stessa equazione, si dovranno inoltre levare quelle, che non possono ridursi a tal forma, e che sono introdotte dalla moltiplicazione della funzione u per l' esposto fattore. Ciò premesso affine di rendere la cosa più sensibile si osservi essere

$$-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=$$

$$-(qy_0t^{-1}+qy_1t^0+qy_2t\ldots\ldots+qy_{x+1}t^x+\text{ec.})$$

$$-(py_0t^{-2}+py_1t^{-1}+py_2t^0+py_3t\ldots\ldots+py_{x+2}t^x+\text{ec.})$$

$$-(gy_0t^{-3}+gy_1t^{-2}+gy_2t^{-1}+gy_3t^0+gy_4t\ldots\ldots+gy_{x+3}t^x+\text{ec.})$$

$$-(fy_0t^{-4}+fy_1t^{-3}+fy_2t^{-2}+fy_3t^{-1}+fy_4t^0+fy_5t\ldots\ldots+fy_{x+4}t^x+\text{ec.})$$

. . . . . .

. . . . . .

$$-(by_0t^{-m+1}+by_1t^{-m+2}+by_2t^{-m+3}+by_3t^{-m+4}\ldots.+by_{x+m-1}t^x+\text{ec.})$$

$$-(ay_0t^{-m}+ay_1t^{-m+1}+ay_2t^{-m+2}+ay_3t^{-m+3}+ay_4t^{-m+4}\ldots.+ay_{x+m}t^x+\text{ec.}$$

ovvero, ordinando secondo le potenze negative di t, e successivamente secondo le positive si avrà.

$$-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=$$

$$-(qy_0+py_1+gy_2+fy_3\ldots\ldots\ldots\ldots+by_{m-2}+ay_{m-1})\,t^{-1}$$

$$-(py_0+gy_1+fy_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+by_{m-3}+ay_{m-2})\,t^{-2}$$

$$-(gy_0 + fy_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + by_{m-4} + ay_{m-3})\, t^{-3}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-ay_0 t^{-m}$$

$$-(qy_1 + py_2 + gy_3 + fy_4 \ldots\ldots\ldots\ldots + by_{m-1} + ay_m)\, t^0$$

$$-(qy_2 + py_3 + gy_4 + fy_5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + by_m + ay_{m+1})\, t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$-(qy_{x+1} + py_{x+2} + gy_{x+3} + fy_{x+4} \ldots\ldots + by_{x+m-1} + ay_{x+m})t^x - \text{ec.}$$

È facile intanto a vedersi, che il coefficiente di t^{-1} può esprimersi per $-\nabla y_{-1}$, giacchè esso è appunto ciò, che diviene la quantità come sopra rappresentata da $-\nabla y_x$ allorquando in essa si pone $x = -1$. Si vedrà pure che il coefficiente di t^{-2} è $-\nabla y_{-2} + qy_{-1}$, essendo lo stesso coefficiente ciò che diviene la quantità espressa da $-\nabla y_x$ allorchè si fa $x = -2$ sottratto però il termine $-qy_{-1}$. Parimenti il coefficiente di t^{-3} nel terzo termine riesce $= -\nabla y_{-3} + qy_{-2} + py_{-1}$, e quello di t^{-4} nel quarto è $= -\nabla y_{-4} + qy_{-3} + py_{-2} + gy_{-1}$ e così successivamente finchè pel coefficiente t^{-m} si avrà $-\nabla y_{-m} + qy_{-m+1} + py_{-m+2} \ldots\ldots\ldots + by_{-1} = -ay_0$. Si rileva eziandio, che i coefficienti di t^0, t^1, $t^2 \ldots\ldots t^x$ sono rispettivamente $-\nabla y_0$, $-\nabla y_1$, $-\nabla y_2 \ldots\ldots -\nabla y_x$. Sarà quindi ancora

$$-u\left(\frac{q}{t} + \frac{p}{t^2} + \frac{g}{t^3} + \frac{f}{t^4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{b}{t^{m-1}} + \frac{a}{t^m}\right) =$$

$$-\nabla y_{-1} t^{-1} - (\nabla y_{-2} - qy_{-1})t^{-2} - (\nabla y_{-3} - qy_{-2} - py_{-1})t^{-3} - \ldots$$

$-ay_0 t^{-m} - \nabla y_0 - \nabla y_1 . t - \nabla y_2 . t^2 - \nabla y_3 . t^3 \ldots - \nabla y_x . t^x$. Confrontata ora questa funzione colla u, e supposto che l'uguaglianza dei termini corrispondenti non cominci, che fra il termine $-\nabla y_n . t^n$ dell' una, e il termine $y_n . t^n$ dell'altra, è chiaro, che sottraendo dalla prima tutti i termini precedenti a $-\nabla y_n . t^n$, e dalla seconda tutti quelli, che precedono $y_n t^n$ ne nascerà l' equazione

$$-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$$
$$+\nabla y_{-1} . t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}+(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}\ldots$$
$$\ldots\ldots+ay_0 t^{-m}+\nabla y_0+\nabla y_1 . t+\nabla y_2 . t^2\ldots\ldots\ldots$$
$$+\nabla y_{n-1} . t^{n-1}=u-y_0-y_1 . t-y_2 . t^2\ldots\ldots-y_{n-1} . t^{n-1};$$ e ponendo

$$\text{(B)}\ldots\ldots\begin{cases}\nabla y_{-1} t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}+(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}\ldots\\ \ldots\ldots\ldots+ay_0 t^{-m}+\nabla y_0+\nabla y_1 . t+\nabla y_2 . t^2\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots+\nabla y_{n-1} . t^{n-1}+y_0+y_1 . t+y_2 . t^2\ldots+y_{n-1} . t^{n-1}\end{cases}$$
$$=\varphi(t)$$

si otterrà finalmente

$$\text{(C)}\ldots\ldots u=\frac{\varphi(t).t^m}{t^m+qt^{m-1}+pt^{m-2}+gt^{m-3}\ldots\ldots+bt+a}$$

e quindi per avere il valore di y_x non resterà che a svolgere in serie questo valore di u secondo le potenze di t, per trovare quello del coefficiente di t^x, che sarà il ricercato. A ciò potranno servire molte maniere di sviluppi, fra i quali quel-

lo, che sembra più opportuno, consiste nel decomporre, quando sia possibile, la frazione esprimente la funzione generatrice di y_x in altrettante quanti sono i fattori del suo denominatore, locchè equivale, quando lo stesso denominatore abbia solamente fattori disuguali, e possa in essi risolversi coi metodi conosciuti per la risoluzione delle equazioni algebraiche, a trovare altrettante frazioni col numeratore costante quante sono le radici dell' equazione $t^m + qt^{m-1} + pt^{m-2} + gt^{m-3} \ldots + bt + a = 0$.

11. Per applicare le cose spiegate nel n.° precedente, si prenda ad esempio il problema appartenente al giuoco degli scacchi proposto dal geometra Charles, e poscia risoluto colle differenze finite dal Padre Gregorio Fontana (1), e dal Brunacci (2). Tale problema dall' ultimo de' citati Autori si enuncia così: „ Data nello Scacchiere una casella qualunque, e supponendo la torre posta in una casella parimente data; si dimanda in quante maniere la torre facendo x mosse, possa andare dalla casella o scacco in cui si trova, alla detta determinata casella „.

Indicando quindi per y_x il numero delle maniere nelle quali la torre partendo da una sede qualunque dello Scacchiere può ritornarvi dopo x mosse; per z_x il numero delle maniere nelle quali la stessa torre facendo x mosse dopo essere partita da una sede qualunque può fermarsi in un' altra, che sia colla prima nella stessa linea parallela al lato dello Scacchiere; finalmente per u_x il numero delle maniere nelle quali quel pezzo fatte x mosse può fermarsi in una sede diversa da quella da cui partì, e non posta in una stessa linea parallela al lato dello Scacchiere, si hanno le tre seguenti equazioni già stabilite con ingegnoso raziocinio:

---

(1) V. Biblioteca Fisica di Europa. Tom. VIII. pag. 29. e seg.

(2) V. Brunacci. Corso di Matematica Sublime. Tom. I. pag. 131.

$$1.^a \quad y_{x+1} = 14 z_x$$

$$2.^a \quad z_{x+1} = y_x + 6 z_x + 7 u_x$$

$$3.^a \quad u_{x+1} = 2 z_x + 12 u_x .$$

E prima di risolvere l' equazione

$$y_{x+3} = 18 y_{x+2} - 44 y_{x+1} - 168 y_x, \text{ ovvero}$$

$$\frac{1}{168} y_{x+3} - \frac{3}{28} y_{x+2} + \frac{11}{42} y_{x+1} + y_x = 0,$$

che pel Brunacci viene dedotta dalle precedenti colle opportune eliminazioni, giova col soccorso delle medesime trovare i valori di $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, ec. anche per far vedere come il metodo delle sostituzioni successive conduca qualche volta a determinare con maggiore facilità, che non si otterrebbe dalle formole generali, i valori particolari di y_x. D' altronde i valori di y_0, y_1, y_2, y_3 sono necessarj come quantità costanti a fissare l' espressione della funzione generatrice, il cui sviluppo determina poi quella di y_x. Ciò posto, poichè è manifesto essere $y_0 = y_1 = 0, z_1 = 1, u_1 = 0$, fatto nella 2.ª, e nella 3.ª delle precedenti equazioni $x = 1$, si avrà $z_2 = y_1 + 6 z_1 + 7 u_1 = 6$, $u_2 = 2 z_1 + 12 u_1 = 2$. Quindi posto $x = 1$ anche nella 1.ª si ha $y_2 = 14 z_1 = 14$. Fatto ora $x = 2$ nella 2.ª viene $z_3 = y_2 + 6 z_2 + 7 u_2 = 64$: dunque ponendo successivamente $x = 2$, $x = 3$ nella 1.ª sarà $y_3 = 14 . z_2 = 84$, $y_4 = 14 z_3 = 896$. E posto $x = 2$ nella 3.ª sarà $u_3 = 2 z_2 + 12 u_2 = 36$, e fatto $x = 3$ nella 2.ª viene $z_4 = y_3 + 6 z_3 + 7 u_3 = 720$, e quindi dalla 1.ª si ha $y_5 = 14 . z_4 = 10080$. Per trovare il valore di z_5 da cui dipende quello di y_6 si osservi, che posto $x = 3$ nella 3.ª viene $u_4 = 2 z_3 + 12 u_3 = 560$. Pertanto fatto $x = 4$

nella 2.ª si ha finalmente $z_5 = y_4 + 6z_4 + 7u_4 = 9136$, onde dalla 1.ª si ricava $y_6 = 14z_5 = 127904$.

Ripigliando adesso l' equazione $\frac{1}{168} y_{x+3} - \frac{3}{28} y_{x+2} + \frac{11}{42} y_{x+1} + y_x = 0$ e paragonandola colla (A) del n.° prec. si vedrà essere $g = \frac{1}{168}$, $p = -\frac{3}{28}$, $q = \frac{11}{42}$ annullandosi tutti gli altri coefficienti della formola generale. Sarà dunque la funzione generatrice di y_x espressa (n.° 10.) da $\frac{\phi(t).t^3}{t^3 + \frac{11}{42}t^2 - \frac{3}{28}t + \frac{1}{168}} = \frac{\phi(t).t^3.168}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1}$. Per determinare $\phi(t)$ conviene notare, che il più piccolo valore di x che verifica l' equazione proposta è quello di $x = 1$ come può facilmente sperimentarsi dopo le cose dette. Perciò applicando la formola (B) del n.° prec. si scorgerà essere nel nostro caso $\phi(t) = \nabla y_{-1} t^{-1} + \nabla y_0$ annullandosi tutti gli altri termini di quella; ed essendo $\nabla y_x = \frac{1}{168} y_{x+3} - \frac{3}{28} y_{x+2} + \frac{11}{42} y_{x+1}$ sarà $\nabla y_{-1} = \frac{1}{12}$, $\nabla y_0 = -1$: dunque $\phi(t) = \frac{t^{-1} - 12}{12}$. E perciò si avrà $\frac{\phi(t).t^3.168}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1} = \frac{14(t^{-1} - 12)t^3}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1} = \frac{14(t^{-1} - 12)}{t^{-3} - 18t^{-2} + 44t^{-1} + 168}$ frazione, il cui denominatore si risolve nei tre fattori $\frac{1}{t} - 6$, $\frac{1}{t} - 14$, $\frac{1}{t} + 2$, ed eguagliato a zero, dà quella stessa equazione da cui dipende secondo i metodi conosciuti, l' integrazione della equazione proposta. Si tratta pertanto dopo aver fatto $\frac{1}{t} = t'$ di risolvere la frazione $\frac{t' - 12}{t'^3 - 18t'^2 + 44t' + 168}$ nelle tre altre $\frac{A}{t' - 6}$, $\frac{B}{t' - 14}$, $\frac{C}{t' + 2}$, nelle quali i numeratori sono quantità costanti. A determinarle varrà il metodo de' coefficienti

indeterminati pel quale si avranno le tre seguenti equazioni

$A + B + C = 0, \; -12A - 4B - 20C - 1 = 0$

$-7A - 3B + 21C + 3 = 0$

da cui si ricava facilmente $A = \frac{6}{64}$, $B = \frac{1}{64}$, $C = -\frac{7}{64}$. Ora pertanto sarà $u = \frac{(t'-12)14}{t'^3 - 18t'^2 + 44t' + 168} = 14\left(\frac{6}{64} \cdot \frac{1}{t'-6} + \frac{1}{64} \cdot \frac{1}{t'-4} - \frac{7}{64} \cdot \frac{1}{t'+2}\right)$. E poichè in generale $\frac{1}{t'-a}$, essendo a una qualunque quantità positiva o negativa, si sviluppa nella serie $\frac{1}{t'} + \frac{a}{t'^2} + \frac{a^2}{t'^3} +$ ec. nella quale il coefficiente di $\frac{1}{t'^x} = t^x$ è evidentemente a^{x-1}, sarà perciò u la somma di tre serie ordinate secondo le potenze di t, che riunite in una sola danno pel coefficiente di t^x, o ciò che è lo stesso pel valore di y_x la quantità $14\left(\frac{6}{64} \cdot 6^{x-1} + \frac{1}{64} \cdot 14^{x-1} - \frac{7}{64}(-2)^{x-1}\right)$ $= \frac{14.6^x + 14^x + 49.(-2)^x}{64}$ formola identica alla ritrovata dal Brunacci (1). Dopo ciò è facile il ritrovare le espressioni di z_x, e di u_x. Di fatto dipendentemente dall'equazione $y_{x+1} = 14z_x$ sarà $z_x = \frac{6.6^x + 14^x - 7.(-2)^x}{64}$, e dipendentemente dall' equazione $z_{x+1} = y_x + 6z_x + 7u_x$ si ottiene $u_x = \frac{-2.6^x + 14^x + (-2)^x}{64}$.

12. Se in vece di decomporre l' espressione della funzione u del n.° precedente nelle tre frazioni considerate, se ne richiami la prima forma $\frac{\phi(t)t^3.168}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1} = \frac{14(t^{-1} - 12)t^3}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1}$ $= \frac{14t^2(1-12t)}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1}$ e si ponga $\frac{1-12t}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1} = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 +$ ec. determinando col metodo pure de' coefficienti

(1) V. Brunacci. Op. e Vol. citati pag. 133.

indeterminati le costanti A, B, C ec. si avrà una nuova serie, che moltiplicata in ogni suo termine per $14t^2$ darà nel coefficiente di t^x il valore di y_x secondo le condizioni del probl. precedente. Eseguite pertanto le opportune operazioni, si ottiene la seguente equazione

$$\begin{aligned} 1-12t = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + Ft^5 + \text{ec.} \\ -18At - 18Bt^2 - 18Ct^3 - 18Dt^4 - 18Et^5 - \text{ec.} \\ +44At^2 + 44Bt^3 + 44Ct^4 + 44Dt^5 + \text{ec.} \\ +168At^3 + 168Bt^4 + 168Ct^5 + \text{ec.} \end{aligned}$$

onde A=1, B=6, C=64, D=720, E=9136. Si potrebbe non difficilmente proseguire la determinazione dei coefficienti della sviluppata serie, che cominciando da E ed inoltrando verso le potenze più alte di t, tutti dipendono dai tre precedenti, in modo che un coefficiente qualunque S si avrà dall'equazione $S-18R+44Q+168P=0$, supposto che P, Q, R, sieno per ordine i coefficienti che precedono S. Basta però vedere la corrispondenza dei valori di tali coefficienti con quelli che si determinarono per y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, col metodo delle sostituzioni successive nel n.° prec. Essi si troveranno identici ai coefficienti della serie ultimamente considerata, quando questa come si disse venga in ogni suo termine moltiplicata per $14t^2$. Ne risulterà di fatto l' altra serie $14t^2 + 14.6t^3 + 14.64t^4 + 14.720t^5 + 14.9136t^6 + \text{ec.}$ in cui i coefficienti di t^2, t^3, t^4, t^5, t^6 sono gli stessi valori già prima trovati in altro modo benchè con minore semplicità per y_2, y_3, y_4, y_5, y_6. Perciò l' ultimo metodo spiegato sembra da preferirsi agli altri per determinare il valore di y_x in qualunque supposizione di x, che con troppo lunghe operazioni soltanto può ottenersi anche dalla formola generale del n.° precedente per valori alquanto grandi di x.

13. Per continuare le applicazioni del metodo esposto per la risoluzione dell' equazione generale considerata nel n.° 10.

giova cercar quella di un problema già trattato pure dal Brunacci, il quale conduce come si vedrà ad una funzione generatrice frazionaria, in cui il denominatore contiene fattori eguali. Abbiasi pertanto la serie seguente nella quale i tre primi termini sieno dati, essendo la legge con cui tutti mutuamente si legano espressa dall'equazione $y_{x+3}=5y_{x+2}-8y_{x+1}+4y_x$

Indici	0, 1, 2, 3, 4, 5. . . . . x.
Termini	0, 0, 1, 5, 17, 49 . . . . . y_x.

Si avrà : $y_x-\frac{1}{4}y_{x+3}+\frac{5}{4}y_{x+2}-2y_{x+1}=0$, e quindi nella formola (A) del n.° 10. sarà $g=-\frac{1}{4}, p=\frac{5}{4}, q=-2$ ponendo a zero tutti i coefficienti degli altri termini che precedono ; ed applicando la formola (C) dello stesso n.° viene $u=\frac{\phi(t)t^3}{t^3-2t^2+\frac{5}{4}t-\frac{1}{4}}=\frac{-4\phi(t)}{t^{-3}-5t^{-2}+8t^{-1}-4}$. Per determinare $\phi(t)$ si osservi, che nel nostro caso ∇y_x è (n.° 2.) $=-\frac{1}{4}y_{x+3}+\frac{5}{4}y_{x+2}-2y_{x+1}$, e siccome l' equazione $-\nabla y_x=y_x$ si verifica anche quando $x=0$, nel qual caso si ha $\frac{1}{4}y_3-\frac{5}{4}y_2+2y_1=y_0=0$, onde sarà $y_3=5$, essendo già per ipotesi $y_2=1$, $y_1=y_0=0$, e $\phi(t)$ nella formola (B) del citato n.° si ridurrà a $\nabla y_{-1}t^{-1}=-\frac{1}{4}t^{-1}$. Si avrà quindi $u=\frac{t^{-1}}{t^{-3}-5t^{-2}+8t^{-1}-4}$, e fatto $t^{-1}=\frac{1}{t}=z$ verrà $u=\frac{z}{z^3-5z^2+8z-4}=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ $=z\left(\frac{C}{z-1}+\frac{C'}{(z-2)^2}+\frac{C''}{z-2}\right)$ supposto C, C', C'' tre quantità costanti determinabili secondo il metodo dei coefficienti indeterminati. Qualunque però sia il valore che di esse risulti colle analoghe operazioni (1) svolgendo in serie i tre termini fra-

(1) V. Euler. Introductio in Analysin infinitorum Cap. II.

zionarj che compongono l'ultima espressione di u, e prendendo per ciascuno di essi il coefficiente di $\frac{1}{z^{x+1}}$, si troverà facilmente la forma di y_x dipendentemente dalla sua funzione generatrice. Di fatto essendo perciò che si è detto anche nel n.° 11. il coefficiente di $\frac{1}{z^{x+1}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{z-1}$ espresso da $1^x=1$, e in quello di $\frac{1}{z-2}$ essendo tale coefficiente $=2^x$; ed essendo inoltre generalmente $\frac{1}{(z-a)^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{2a}{z^3}+\frac{3a^2}{z^4}+\frac{4a^3}{z^5}+$ ec. sarà il coefficiente di $\frac{1}{z^{x+1}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{(z-2)^2}$ espresso da $x.2^{x-1}$, e per conseguenza il termine della funzione u, il cui coefficiente esprime il valore di y_x, sarà come è chiaro $z\left(\frac{C.1}{z^{x+1}}+\frac{C'.x.2^{x-1}}{z^{x+1}}+\frac{C''.2^x}{z^{x+1}}\right)=\frac{C+C'.x.2^{x-1}+C''.2^x}{z^x}$ $=(C+C'x.2^{x-1}+C''2^x)t^x$; e finalmente $y_x=C+C'x.2^{x-1}+C''2^x$, espressione identica a quella, che trovasi presso il Brunacci (1) solo, che si cambj nella prima C' in $2C'$, locchè può farsi trattandosi di costanti da determinarsi, cosicchè il metodo fin qui adoperato non toglie il maggior comodo eventuale di determinare le costanti nel modo proprio dell' integrazione delle equazioni alle differenze. Volendosi però anche in questo esempio determinare le costanti colla decomposizione della frazione $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=z\left(\frac{C}{z-1}+\frac{C'}{(z-2)^2}+\frac{C''}{z-2}\right)$ si troveranno le tre seguenti equazioni $C+C''=0$, $-4C+C'-3C''=0$, $4C-C'+2C''=1$, dalle quali si ricava $C''=-1$, $C=1$, $C'=1$.

(1) V. Brunacci. Corso di Matematica Sublime Tom. I. pag. 111.

Sarà dunque $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=z\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}\right)$, e per le cose già dette prendendo i coefficienti di $\frac{1}{z^{x+1}}$ nelle tre serie che nascono dal rispettivo sviluppo di $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{(z-2)^2}$, $-\frac{1}{z-2}$ verrà $z\left(\frac{1+x.2^{x-1}-2^x}{z^{x+1}}\right)=\frac{1+x.2^{x-1}-2^x}{z^x}=(1+x.2^{x-1}-2^x)t^x$ pel termine della funzione u che ha per coefficiente y_x; e sarà finalmente $y_x=1+x.2^{x-1}-2^x$ come precisamente rinvenne il citato Brunacci. (1)

14. La funzione generatrice del n.° precedente ridotta alla forma $z\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{z-2}\right)$ può condurre allo scoprimento della somma della serie, di cui si è già trovato il termine generale. Di fatto si sviluppa tale funzione nelle tre serie

(1)..... $(1+1+1+1+\text{ec}\ldots\ldots)$

(2)..... $(1+2.2+3.2^2+4.2^3+\ldots\ldots+x.2^{x-1}+\text{ec.})$

(3)... $-(1+2+2^2+2^3+\ldots\ldots\ldots\ldots+2^x+\text{ec.})$

i cui rispettivi termini generali sono per ordine 1, $x.2^{x-1}$, -2^x, prescindendo però dal primo termine della serie (3) che non può ridursi alla forma -2^x nella necessaria supposizione di $x>0$, e supposto pure $z=1$ come quantità arbitraria. E siccome detti termini generali, che possono chiamarsi parziali, compongono appunto colla loro somma il termine generale determinato nel n.° prec., così è facile a vedersi che sommando i primi x termini delle serie (1), (2), e gli x termini dopo il primo della serie (3), la riunione delle tre somme darà la cer-

(1) V. Brunacci. Opera e Vol. citati pag. 112.

cata. Sia quindi S la somma della serie (1), la quale evidentemente si scopre essere espressa da x, S' la somma della serie (2), S'' la somma della serie (3) presa positivamente, ed ommesso il primo termine. Se si rifletta, che queste serie nascono dal dividere all' infinito l' unità pe' fattori $z-1$, $(z-2)^2$, $z-2$, fatto poi in seguito $z=1$, e che la divisione arrestata al quoziente parziale x^{esimo} rispetto allo sviluppo della frazione $\frac{1}{(z-2)^2}$ lascia generalmente il residuo $\frac{(x+1)2^x}{z^x}-\frac{x.2^{x+1}}{z^{x+1}}$, ed arrestata al quoziente parziale $x+1^{esimo}$ nello sviluppo della frazione $\frac{1}{z-2}$ lascia generalmente il residuo $\frac{2^{x+1}}{z^{x+1}}$, si vedrà pure essere $1=S'(z-2)^2+\frac{(x+1)2^x}{z^x}-\frac{x.2^{x+1}}{z^{x+1}}$, ed $S'=1-(x+1)2^x+x.2^{x+1}$ fatto $z=1$; e così si avrà $1=\left(S''+\frac{1}{z}\right)(z-2)+\frac{2^{x+1}}{z^{x+1}}$, ed $S''=2^{x+1}-2$. Sarà dunque finalmente $S+S'-S''=x+1-(x+1).2^x+x.2^{x+1}+2-2^{x+1}=3+x+2(x-1)2^x-(x+1)2^x=3+x+x.2^x-3.2^x$ somma cercata, e pure identica a quella che con altro metodo determinò il Brunacci (*).

15. Sia ancora l' equazione $y_{x+3}+y_{x+2}-y_{x+1}-y_x=0$ ovvero $-y_{x+3}-y_{x+2}+y_{x+1}+y_x=0$, la quale esprime le condizioni di una serie ricorrente in cui un termine qualunque dopo i tre primi che possono prendersi ad arbitrio, eguaglia la differenza tra la somma dei due antiprecedenti prossimi, ed il precedente, e se ne cerchi pertanto la somma. Osservando, che in corrispondenza della formola (A) del n.° 10. si ha $g=-1$, $p=-1$, $q=1$, la funzione generatrice di y_x sarà quindi pel n.° stesso $\frac{\phi(t)t^3}{t^3+t^2-t-1}$. Per determinare $\phi(t)$, conviene richiamare,

(*) V. Brunacci. Opera e Vol. sopracitati pag. 112.

che essendo nel nostro caso $\nabla y_x = -y_{x+3} - y_{x+2} + y_{x+1}$ se si supponga $y_0 = y_1 = 0$, $y_2 = -1$ sussisterà l'equazione $-\nabla y_0 = y_0$ ed anche $-\nabla y_x = y_x$ nella supposizione di $x=0$. Perciò è facile a vedersi che $\varphi(t)$ si ridurrà nell'espressione generale della formola (B) del citato numero al solo termine $\nabla y_{-1}\, t^{-1} = t^{-1}$

sicchè sarà $u = \frac{t^2}{t^3+t^2-t-1} = \frac{t^{-1}}{1+t^{-1}-t^{-2}-t^{-3}} = \frac{-t^{-1}}{t^{-3}+t^{-2}-t^{-1}-1}$

$= \frac{-z}{z^3+z^2-z-1}$ (dopo aver fatto $z = \frac{1}{t}$) $= \frac{-z}{(z+1)^2(z-1)}$

$= -z\left(\frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)^2} - \frac{1}{4(z+1)}\right)$ spezzando il valore di u in tre frazioni come nel n.° 13., e sarà in ultimo

$$u = z\left(\frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{2(z+1)^2} - \frac{1}{4(z-1)}\right)$$

$$= \frac{z}{4}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} \ldots - \frac{(-1)^{x+1}}{z^{x+1}} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{z}{2}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} - \frac{4}{z^5} \ldots - \frac{x(-1)^x}{z^{x+1}} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{z}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} \ldots + \frac{1}{z^{x+1}} + \text{ec.}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \ldots - \frac{(-1)^{x+1}}{z^x} + \text{ec.}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} - \frac{4}{z^4} \ldots - \frac{x(-1)^x}{z^x} + \text{ec.}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \ldots + \frac{1}{z^x} + \text{ec.}\right)$$

Si vede facilmente, che il termine generale della serie proposta è espresso da $-\frac{1}{4}(-1)^{x+1} - \frac{1}{2}x(-1)^x - \frac{1}{4}$, e che per averne la somma è d'uopo raccogliere in una le tre somme di x termini corrispondenti delle serie, che danno come sopra il valore di u. Ora siccome l'ultimo termine di queste serie, indipendentemente dal coefficiente numerico, è rispetti-

vamente $\frac{-(-1)^{x+1}}{z^x}$, $\frac{-x(-1)^x}{z^x}$, $\frac{1}{z^x}$; perciò con un raziocinio simile a quello adoprato nel n.° preced. si vedrà, che essendo $\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\ldots\ldots-\frac{(-1)^{x+1}}{z^x}\right)=-\frac{1}{4}S'$, indicata per S' la somma di x termini della serie, che si ottiene sviluppando $\frac{1}{z+1}$, si avrà $S'(z+1)+\frac{(-1)^{x+2}}{z^x}=1$, da cui ricavasi $S'=\frac{1-(-1)^x}{2}$ fatto $z=1$. Si vedrà inoltre essere $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3}-\frac{4}{z^4}\ldots\ldots-\frac{x(-1)^x}{z^x}\right)=\frac{z}{2}S''$, indicata per S'' la somma di x termini della serie che nasce sviluppando $\frac{1}{(z+1)^2}$, ed $S''(z+1)^2+\frac{(x+1)(-1)^x}{z^x}-\frac{x(-1)^{x+1}}{z^{x+1}}=1$, onde $S''=\frac{1-(x+1)(-1)^x+x(-1)^{x+1}}{4}$ fatto $z=1$. Finalmente essendo $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\ldots\ldots+\frac{1}{z^x}\right)=-\frac{x}{4}$ fatto $z=1$, verrà la somma cercata $=-\frac{1}{4}S'+\frac{1}{2}S''-\frac{x}{4}$ $=-\frac{1}{4}\left(\frac{1-(-1)^x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-(x+1)(-1)^x+x(-1)^{x+1}}{4}\right)-\frac{x}{4}=x\left(\frac{(-1)^{x+1}-1}{4}\right)$.

16. Essendo fin quì considerata l'equazione generale alle differenze coi coefficienti costanti, e col secondo membro nullo, si tratta ora di esaminare quella, che avendo il secondo membro funzione di x, o quantità costante, ritenga tutte le altre condizioni della precedente. Sia perciò l'equazione

$$ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1}+y_x=X$$

ovvero

$$\text{(D)}\ldots y_x-X=-(ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1})=-\nabla y_x.$$

Si consideri al solito u come funzione generatrice di y_x, ed u' come generatrice di X, la quale sia simile ad u, cosicchè esprimendo per $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}\ldots X^{(x-1)}$ i valori che prende X quando in essa si sostituisce 0, 1, 2, 3.....$x-1$ in vece

di x, essi occupino nella u' gli stessi luoghi occupati nella u da $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{x-1}$. Ciò posto, poichè in conformità di quanto emerge dai precedenti n.^{i} 2. 10. $u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ è la funzione generatrice di ∇y_x, sarà facile a vedersi, che si avrebbe dipendentemente dall' equazione proposta, $u-u'=-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ se valesse in ogni supposizione $y_x-X=-\nabla y_x$. Ma siccome questa equazione non si verifica che dentro certi limiti, e secondo le diverse condizioni dei problemi ai quali si applica; per esempio, quando $x=n$, ovvero $x>n$, e non quando $x<n$, onde avere un' equazione fra le tre funzioni soprindicate sarà d' uopo prima sottrarre da ciascuna rispettivamente i termini che hanno per coefficienti, quanto alle funzioni u, u', le quantità $y_0, y_1, y_2 \ldots\ldots y_{n-1}$ e le $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)} \ldots\ldots X^{(n-1)}$, e rispetto alla funzione $u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ quelli ne' quali il coefficiente delle potenze di t non si riduce alla forma ∇y_x, o anche riducendovisi moltiplica però una potenza di t inferiore a t^n. Così, essendo, per ciò che si è pure dimostrato al n.° 10. la stessa funzione $u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=\nabla y_{-1}\,t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})\,t^{-2}$
$+(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})\,t^{-3}+\ldots\ldots\ldots+ay_0\,t^{-m}+\nabla y_0$
$+\nabla y_1.t\ldots\ldots+\nabla y_{n-1}.t^{n-1}+\nabla y_n.t^n+\nabla y_{n+1}.t^{n+1}\ldots\ldots+\nabla y^x.t^x$
si dovranno per lo scopo accennato sottrarre da questa espressione tutti i termini precedenti a $\nabla y_n.t^n$. Si avrà pertanto

$$u-y_0-y_1.t-y_2.t^2\ldots\ldots-y_{n-1}.t^{n-1}-u'+X^{(0)}+X.^{(1)}t+X^{(2)}.t^2\ldots.$$
$$\ldots..+X^{(n-1)}.t^{n-1}=-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$$
$$+\nabla y_{-1}.t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}+(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}\ldots.$$
$$+ay_0t^{-m}+\nabla y_0+\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\ldots.+\nabla y_{n-1}.t^{n-1};\text{ e fatto}$$

$$(E)\ldots.\left\{\begin{array}{l} y_0+y_1.t+y_2.t^2\ldots.+y_{n-1}.t^{n-1}-X^{(0)}-X^{(1)}.t-X^{(2)}.t^2\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots-X^{(n-1)}.t^{n-1}+\nabla y_{-1}.t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2} \\ +(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}\ldots\ldots+ay_0.t^{-m}+\nabla y_0 \\ +\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\ldots\ldots+\nabla y_{n-1}.t^{n-1} \\ =\phi(t) \end{array}\right.$$

sarà

$$u-u'=-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)+\phi(t),$$

e quindi

$$(F)\ldots\ldots\ldots\ldots u=\frac{u'+\phi(t)}{at^{-m}+bt^{-m+1}\ldots.+pt^{-2}+qt^{-1}+1}.$$

17. Per applicare subito queste formole generali, si consideri il problema già trattato (1) dal Brunacci, e con cui cercasi, essendo x il numero totale delle palle esistenti in un' urna, la probabilità di estrarre a caso un numero pari di esse e la probabilità di estrarne un numero dispari.

Rappresentando per y_x la somma dei casi nei quali il numero delle palle prese sia pari, e per z_x la somma dei casi, ne' quali il numero delle palle sia dispari, si hanno secondo il lodato Autore le due equazioni

(1) V. Brunacci. Opera, e Vol. sopracitati pag. 260. e seguente.

$$y_{x+1}=y_x+z_x \qquad z_{x+1}=z_x+y_x+1$$

da cui colla opportuna eliminazione, e riduzione si ottiene l'altra $y_x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y_{x+1}$, la quale paragonata colla generale (D) del preced. n.° 16. dà $X=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$, $a=b=c=\ldots$ $\ldots=p=0$, $X^{(0)}=X^{(1)}=X^{(2)}=\ldots=X=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}y_{x+1}=-\nabla y_x$. Pertanto applicando la formola (F) del citato n.° sarà

$$u=\frac{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3\ldots\ldots+\frac{1}{2}t^x+\text{ec.}\right)+\phi(t)}{-\frac{1}{2}t^{-1}+1},\ \text{e}$$

poichè l'equazione proposta non si verifica quando $x=0$, essendo allora $y_1=y_0=0$, come è evidente per la natura del problema, e d'altronde si adempie quando $x=1$, avendosi allora $y_2-2y_1=1$, perciò $\phi(t)$ si ridurrà a $-X^{(0)}=\frac{1}{2}$, e sarà finalmente $u=\dfrac{-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3\ldots\ldots+\frac{1}{2}t^x+\text{ec.}\right)}{-\frac{1}{2}t^{-1}+1}=$ $\frac{t+t^2+t^3\ldots+t^x+\text{ec.}}{t^{-1}-2}$, cosicchè fatto nel denominatore $t^{-1}=z$ si tratterà primieramente di sviluppare in serie $\frac{1}{z-2}$, locchè eseguito colla successiva divisione produce $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}\ldots$ $\ldots+\frac{2^{x-2}}{z^{x-1}}+$ ec. $=t+2t^2+4t^3\ldots+2^{x-2}t^{x-1}+$ ec. serie geometrica, di cui la somma per $x-1$ termini fatto $t=1$ darà il coefficiente di t^x nella funzione generatrice u. Si avrà così $y_x=\frac{1(2^{x-1}-1)}{2-1}=2^{x-1}-1$. Di fatto il prodotto $(t+t^2+t^3\ldots$ $\ldots+t^{x-1}+\text{ec.})(t+2t^2+4t^3\ldots\ldots+2^{x-2}t^{x-1})$ essendo sviluppato secondo le potenze di t, dà pel termine affetto della potenza

t^x, $t^x+2t^x+4t^x \ldots\ldots +2^{x-2}t^x=(2^{x-1}-1)t^x$, locchè conferma la regola già data. Pertanto essendo per la prima delle stabilite equazioni $z_x=y_{x+1}-y_x=2^x-1-2^{x-1}+1=2^x-2^{x-1}=2^{x-1}$, si trovano facilmente secondo le note regole le probabilità ricercate.

18. Sia ora l'equazione alle differenze di secondo ordine $y_{x+2}-y_x=1$, la quale esprime le condizioni del problema con cui cercasi il valore di y_x denotante il numero dei modi, ne' quali un numero qualunque intero x può partirsi in altri due diseguali della serie de' naturali da 1 ad x inclusivamente. Sarà pertanto eziandio $y_x+1=y_{x+2}$; e si avrà confrontando questa equazione colla generale (D) del n.° 16. $p=-1$, $q=0$, $a=b=c=\ldots\ldots=g=0$, $X=-1$, $\nabla y_x=-y_{x+2}$; e quindi per la formola (F) dello stesso n.° si avrà

$u=\frac{-(1+t+t^2+t^3+\ldots\ldots+t^x+ec.)+\varphi(t)}{-t^{-2}+1}$. Ora poichè l'equazione proposta non sussiste finchè non sia $x=1$, nel qual caso si verifica essere $y_3-2y_1=1$, ovvero $y_3=1$ essendo $y_1=y_0=0$, sarà $\varphi(t)=-X^{(0)}=1$, onde $u=\frac{-(t+t^2+t^3\ldots+t^x+ec.)}{-t^{-2}+1}=\frac{t+t^2+t^3\ldots+t^x+ec.}{t^{-2}-1}=\frac{t+t^2+t^3\ldots+t^x+ec.}{z^2-1}$ fatto $t^{-1}=z$; e decomponendo $\frac{1}{z^2-1}$ in due frazioni, che abbiano rispettivamente per denominatori $z+1$, $z-1$ sarà $\frac{1}{z^2-1}=$ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\ldots\ldots+\frac{1}{z^{x-1}}+\text{ec.}\right)$ $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}\ldots\ldots-\frac{(-1)^{x-1}}{z^{x-1}}+\text{ec.}\right)$, sicchè prendendo la differenza delle somme di queste due serie per $x-1$ termini in ciascuna fatto prima $z=1$, per le cose già

dette anche nell' esempio del precedente n.° 17. sarà

$$y_x = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1.((-1)^{x-1}-1)}{-1-1}\right) = \frac{2x-3+(-1)^{x-1}}{4}.$$

19. Giova quì richiamare un altro problema risoluto pure dal Brunacci (1) col calcolo delle differenze finite, al quale si applica il metodo esposto al n.° 16. di questa Memoria. Sia la serie ricorrente cogli indici corrispondenti

Indici 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... x

Termini 1, 2, 4, 9, 30, 157. . . . . y_x

la legge della quale viene espressa dalla equazione

$y_{x+3} = 5^x + 9y_{x+2} - 26y_{x+1} + 24y_x$ ovvero dalla $y_x + \frac{5^x}{24} = \frac{y_{x+3}}{24} - \frac{9y_{x+2}}{24} + \frac{26y_{x+1}}{24}$. Confrontata questa equazione colla (D) del n.° 16. sarà $X = -\frac{5^x}{24}$, $g = -\frac{1}{24}$, $p = \frac{9}{24}$, $q = -\frac{26}{24}$, $\nabla y_x = -\frac{y_{x+3}}{24} + \frac{9y_{x+2}}{24} - \frac{26y_{x+1}}{24}$; e nella formola (F) dello stesso num.° sarà $u' = -\frac{1}{24}(5^0 + 5t + 5^2t^2 + 5^3t^3 \ldots + 5^xt^x + \text{ec.})$ ed $u = \left(\frac{-5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots+5^xt^x+\text{ec.})+24\phi(t)}{24}\right) : \left(\frac{-t^{-3}+9t^{-2}-26t^{-1}+24}{24}\right)$ $= \frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots+5^xt^x+\text{ec.}-24\phi(t)}{t^{-3}-9t^{-2}+26t^{-1}-24}$. Per determinare $\phi(t)$ si osservi, che verificandosi l' equazione proposta anche nella supposizione di $x=0$, giacchè essendo per ipotesi $y_0=1$, $y_1=2$, $y_2=4$ si ha da essa per l'appunto $y_3=9$, svaniranno nell'espressione generale (E) di $\phi(t)$ del n.° 16. tutti i termini $X^{(0)}$ $X^{(1)}t$ ec. ∇y_0, $\nabla y_1 t$, ec. ed y_0, $y_1 t$ ec. e resterà $\phi(t) = \nabla y_{-1}.t^{-1} + (\nabla y_{-2} - qy_{-1})t^{-2} + (\nabla y_{-3} - qy_{-2} - py_{-1})t^{-3} =$

(1) V. Brunacci. Opera e Vol. sopra indicati pag. 109. e seg.

$-\frac{12}{24}t^{-1}+\frac{7}{24}t^{-2}-\frac{1}{24}t^{-3}$; e sarà finalmente

$u=\frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots+5^xt^x+ec.+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3}}{t^{-3}-9t^{-2}+26t^{-1}-24}$, e fatto $t^{-1}=z$ nel denominatore, si ha ancora

$$u=\frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots\ldots+5^xt^x+ec.+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3}}{z^3-9z^2+26z-24}$$

$$=\frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots\ldots+5^xt^x+ec.+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3}}{(z-2)(z-3)(z-4)}$$

$$=(5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots+5^xt^x+\text{ec.}+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3})$$
$$\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-4}\right)=\ldots.$$

$$(5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots+5^xt^x+\text{ec.}+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3})\times$$
$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}\ldots+\frac{2^{x+2}}{z^{x+3}}+\text{ec.}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}\ldots\right.\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{3^{x+2}}{z^{x+3}}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{4^2}{z^3}\ldots+\frac{4^{x+2}}{z^{x+3}}+\text{ec.}\right)\Big)$$
$$=\frac{1}{2}\left(t.5^{x-1}t^{x-1}+2t^2.5^{x-2}t^{x-2}\ldots+2^{x-1}t^x.5^0+\text{ec.}\right)-\ldots$$
$$(t.5^{x-1}t^{x-1}+3t^2.5^{x-2}t^{x-2}\ldots\ldots+3^{x-1}t^x.5^0+\text{ec.})+\ldots.$$
$$\frac{1}{2}\left(t.5^{x-1}t^{x-1}+4t^2.5^{x-2}t^{x-2}\ldots\ldots\ldots+4^{x-1}t^x.5^0+\text{ec.}\right)+$$
$$(12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3})\left(\frac{1}{2}(t+2t^2+2^2t^3\ldots\ldots\ldots+2^{x+2}t^{x+3}+\text{ec.})\right.$$
$$-(t+3t^2+3^2t^3\ldots.+3^{x+2}t^{x+3}+\text{ec.})+\frac{1}{2}(t+4t^2+4^2t^3\ldots.$$
$$\left.\ldots\ldots+4^{x+2}t^{x+3})\right).$$

Ridotta la funzione generatrice a questa forma, è facile a vedersi non essere la medesima, che l' aggregato di più serie tutte ordinate secondo le potenze di t all' infinito. Sommando pertanto tutti i coefficienti di t^x nelle diverse serie, il risultato sarà il valore cercato di y_x; e per trovare tali coefficienti, sarà d' uopo, prima di tutto fatto $t=1$ per maggiore semplicità, prendere la somma di x termini del-

le tre progressioni geometriche, ciascuna delle quali ha per primo termine 5^{x-1}, essendo poi $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ i rispettivi quozienti, ed in seguito trovare il coefficiente di t^x nelle altre tre serie, che hanno per primo termine comune l'unità, e per quozienti rispettivi i numeri 2, 3, 4, essendo ciascuna moltiplicata per la quantità $12t^{-1} - 7t^{-2} + t^{-3}$. Così si avrà

$$y_x = \frac{1}{2}\left(\frac{5^x - 2^x}{3}\right) - \left(\frac{5^x - 3^x}{2}\right) + \frac{1}{2}(5^x - 4^x) + \frac{1}{2}\left(12.2^x - 7.2^{x+1} + 2^{x+2}\right)$$

$$- 12.3^x + 7.3^{x+1} - 3^{x+2} + \frac{1}{2}\left(12.4^x - 7.4^{x+1} + 4^{x+2}\right) =$$

$\frac{5^x + 5.2^x + 3.3^x - 3.4^x}{6}$, espressione identica a quella già trovata (1) dal Brunacci.

20. Prima d'innoltrare alla soluzione di un altro problema è opportuno l'osservare per maggiore chiarezza e comodità del calcolo, che esso richiede, come volendo risolvere una frazione della forma $\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}$ in tre altre $\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c}$, si trova generalmente $A = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $B = \frac{1}{(b-c)(b-a)}$, $C = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$, e quindi supposto, che a, b, c sieno le tre radici cubiche dell'unità 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, la seconda, e la terza delle quali si rappresentino eziandio per α, β, sarà in questo caso $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3\beta}$, $C = \frac{1}{3\alpha}$ come si ricava avendo riguardo alle conosciute proprietà delle radici cubiche dell'unità. Ciò posto cercasi l'espressione generale del numero dei modi, ne' quali un numero intero x può partirsi in altri tre disuguali sopra x termini della serie de' naturali. L'equa-

(1) V. Brunacci. Opera e Vol. citati pag. 111.

zione, che esprime le condizioni di tale problema, indicando per y_x il numero ricercato, è $y_{x+3}-y_x=\frac{2x-3-(-1)^x}{4}$ ovvero $y_x+\frac{2x-3-(-1)^x}{4}=y_{x+3}$, la quale paragonata colla generale (D) del n.° 16. dà $X=\frac{3-2x+(-1)^x}{4}$, $a=b=c=\ldots\ldots=p=q=0$ $g=-1$, $\nabla y_x=-y_{x+3}$; e per la formola (F) dello stesso num.° si ha $u=\frac{u'+\varphi(t)}{-t^{-3}+1}=\frac{-u'-\varphi(t)}{t^{-3}-1}=\left(\frac{-(3-2.0+(-1)^0)}{4}-\frac{(3-2.1+(-1)^1)t}{4}\right.$

$$\left.-\frac{(3-2.2+(-1)^2)t^2}{4}-\frac{(3-2.3+(-1)^3)t^3}{4}-\ldots\ldots-\varphi(t)\right):(t^{-3}-1).$$

Per determinare $\varphi(t)$ si osservi, che l'equazione proposta si verifica finchè non sia $x=0$, nel qual caso si avrebbe $y_3-y_0=-1$, mentre d'altronde per la natura del problema si ha $y_3=y_0=0$. Pertanto $\varphi(t)$ si ridurrà nella formola generale (E) del n.° 16. $=-X^{(0)}=-1$. Sarà dunque

$$u=\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots}{4}\right)\cdot\frac{1}{t^{-3}-1}$$

$$=\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots}{4}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{3(z-1)}+\frac{1}{3\beta(z-\alpha)}+\frac{1}{3\alpha(z-\beta)}\right)=$$

$$\left(\frac{-3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots}{4}\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{3\beta}\left(\frac{1}{z}+\frac{\alpha}{z^2}+\frac{\alpha^2}{z^3}+\text{ec.}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{1}{z}+\frac{\beta}{z^2}+\frac{\beta^2}{z^3}+\text{ec.}\right)\right)=$$

$$\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots}{4}\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{3}(t+t^2+t^3+\text{ec.})+\frac{1}{3\beta}(t+\alpha t^2+\alpha^2t^3+\text{ec.})+\frac{1}{3\alpha}(t+\beta t^2+\beta^2t^3+\text{ec.})\right)$$

fatto al solito $t^{-1}=z$, e poi decomponendo la frazione $\frac{1}{z^3-1}$ nelle tre sopradivisate, e restituendo t in luogo di $\frac{1}{z}$. È facile quindi a vedersi anche per gli esempj già recati, che il valore di y_x si avrà raccogliendo in una sola le somme di nove serie ciascuna di termini $x-1$, e si vedrà pure, che fatto $t=1$ le somme parziali sono le seguenti:

1.ª $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(1+1^2+1^3..+1^{x-1})\right)=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(x-1)\right)=\frac{-3x+3}{3.4}$

2.ª $\frac{-3}{3.4\beta}\left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3...+\alpha^{x-2}\right)=-\frac{3}{3.4\beta}\left(\frac{\alpha^{x-1}-1}{\alpha-1}\right)$

3.ª $\frac{-3}{3.4\alpha}\left(1+\beta+\beta^2+\beta^3...+\beta^{x-2}\right)=-\frac{3}{3.4\alpha}\left(\frac{\beta^{x-1}-1}{\beta-1}\right)$

4.ª $\frac{2}{3.4}\left(1+2+3+4...+(x-1)\right)=\frac{2}{3.4}(x-1)\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\frac{x^2-x}{3.4}$

5.ª $\frac{2}{3.4\beta}\left(\alpha^{x-2}+2\alpha^{x-3}+3\alpha^{x-4}+\text{ec.}\right)=\frac{2}{3.4\beta}\left(\frac{\alpha^x+x-1-\alpha x}{(\alpha-1)^2}\right)$

6.ª $\frac{2}{3.4\alpha}\left(\beta^{x-2}+2\beta^{x-3}+3\beta^{x-4}+\text{ec.}\right)=\frac{2}{3.4\alpha}\left(\frac{\beta^x+x-1-\beta x}{(\beta-1)^2}\right)$

7.ª $\frac{-1}{3.4}\left((-1)^{x-1}+(-1)^{x-2}+(-1)^{x-3}+\text{ec.}\right)=\frac{1}{3.4.2}\left(1+(-1)^x\right)$

8.ª $\frac{-1}{3.4\beta}\left((-1)^{x-1}+\alpha(-1)^{x-2}+\alpha^2(-1)^{x-3}+\text{ec.}\right)=\frac{1}{3.4\beta}\left(\frac{\alpha^{x-1}+(-1)^x}{\alpha+1}\right)$

9.ª $\frac{-1}{3.4\alpha}\left((-1)^{x-1}+\beta(-1)^{x-2}+\beta^2(-1)^{x-3}+\text{ec.}\right)=\frac{1}{3.4\alpha}\left(\frac{\beta^{x-1}+(-1)^x}{\beta+1}\right)$

È d' uopo osservare che la 1.ª delle indicate somme è quella di una progressione aritmetica, siccome pure lo è la 4.ª La 2.ª e 3.ª appartengono a progressioni geometriche, siccome pure la 7.ª 8.ª e 9.ª. Quanto poi alle serie 5.ª e 6.ª l'espressione della loro somma, che è la stessa per amendue variata soltanto α in β o viceversa, trovasi come segue: essendo $\frac{2}{3.4\beta}(\alpha^{x-2}+2\alpha^{x-3}+3\alpha^{x-4}+\text{ec.})=\frac{2\alpha^{x-2}}{3.4\beta}\left(1+\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}+\text{ec.}\right)$ si tratterà per avere la somma 5.ª di prendere $x-1$ termini

della serie che nasce sviluppando colla successiva divisione la frazione $\frac{1}{z^2-2az+a^2}$ posto in essa $z=1$, $a=\frac{1}{\alpha}$; e moltiplicarne in seguito l'aggregato per $\frac{2\alpha^{x-2}}{3.4\beta}$. Di fatto si ha $\frac{1}{z^2-2az+a^2}$ $=\frac{1}{z^2}+\frac{2a}{z^3}+\frac{3a^2}{z^4}+\frac{4a^3}{z^5}+$ ec. e la somma S di $x-1$ termini di questa serie si ha generalmente dall' equazione $S(z-a)^2+\frac{xa^{x-1}}{z^{x-1}}-\frac{(x-1)a^x}{z^x}=1$ stabilita coll' osservare, che arrestando la divisione dopo il termine $(x-1)^{esimo}$ dello sviluppo, cioè dopo il termine $\frac{(x-1)a^{x-2}}{z^x}$, il residuo è $\frac{xa^{x-1}}{z^{x-1}}-\frac{(x-1)a^x}{z^x}$, e quindi sarà $S=\left(\frac{(x-1)a^x}{z^x}-\frac{xa^{x-1}}{z^{x-1}}+1\right):(z-a)^2$; e fatto come si è detto in questa espressione $z=1$, e rispettivamente $a=\frac{1}{\alpha}$, $a=\frac{1}{\beta}$, moltiplicandola pure rispettivamente per $\frac{2\alpha^{x-2}}{3.4\beta}$, e per $\frac{2\beta^{x-2}}{3.4\alpha}$ ne nasceranno le somme 5.ª e 6.ª già indicate. Ciò premesso per raccogliere le diverse somme che riunite costituiscono il valore di y_x si riducano primieramente le due somme 2.ª e 3.ª unendole insieme, le quali daranno il complesso $-\frac{3}{3.4}\left(\frac{\alpha^{x-1}-1}{(\alpha-1)\beta}+\frac{\beta^{x-1}-1}{(\beta-1)\alpha}\right)=-\frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1}-\alpha^x-3+\beta^{x-1}-\beta^x)$. Così riunendo le due somme 5.ª e 6.ª risulterà $\frac{2}{3.4}\left(\frac{\alpha^x+x-1-\alpha x}{\beta(\alpha^2-2\alpha+1)}+\frac{\beta^x+x-1-\beta x}{\alpha(\beta^2-2\beta+1)}\right)=\frac{-1}{3.3.2}(\alpha^x+\beta^x+3x-2)$; e dalla riunione della 8.ª e della 9.ª si avrà il risultato $\frac{1}{3.4}\left(\frac{\alpha^{x-1}+(-1)^x}{1+\beta}+\frac{\beta^{x-1}+(-1)^x}{1+\alpha}\right)=\frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1}+\alpha^x+\beta^{x-1}$ $+\beta^x+(-1)^x)$; e dalla riunione di tutte le somme si avrà finalmente

$$y_x = \frac{-3x+3}{3.4} - \frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1} - \alpha^x - 3 + \beta^{x-1} - \beta^x) + \frac{x^2-x}{3.4} - \frac{1}{3.3.2} \times$$
$$(\alpha^x + \beta^x + 3x - 2) + \frac{1}{3.4.2}(1 + (-1)^x) + \frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1} + \alpha^x + \beta^{x-1} + \beta^x + (-1)^x)$$
$$= \frac{6x^2 - 36x + 47}{8.9} + \frac{(-1)^x}{8} + \frac{\alpha^x + \beta^x}{9}$$

formola identica a quella che si sarebbe ottenuta però con un processo alquanto prolisso, e brigoso, dall'integrazione dell' equazione proposta esprimente le condizioni del problema, usando del calcolo delle differenze finite.

21. Il metodo fin qui esposto si applica pure a quelle equazioni alle differenze, nelle quali la quantità incognita è funzione di due variabili, purchè l' una di esse non cambj al variare dell' altra. Prendasi ad esempio il seguente problema.

„ Data una somma c al frutto semplice annuo di m per „ 1, si cerca la somma x', che vuolsi annualmente spendere, per „ consumare in x anni e sorte, e frutti. „

Poichè la sorte residua al principio di ogni anno detratte le somme già spese, è una funzione di x', e di x, prendendo x per un numero qualunque di anni, potrà essa generalmente rappresentarsi per $y_{x',x}$. Così la sorte residua al principio dell' anno $(x-1)^{esimo}$ sarà $y_{x',x-1}$. Ma per le condizioni del problema $y_{x',x-1}$ deve produrre nell' anno $(x-1)^{esimo}$ il frutto $my_{x',x-1}$, e deve pure alla fine di esso diminuirsi della somma x' per formare la sorte residua al principio dell' anno x^{esimo}, dunque si avrà l'equazione $y_{x',x} = y_{x',x-1} + my_{x',x-1} - x'$, ovvero facendo crescere la x di un' unità

$$y_{x',x+1} = y_{x',x} + my_{x',x} - x' = (m+1)y_{x',x} - x',$$

ossia $\frac{y_{x',x+1}}{m+1} = y_{x',x} - \frac{x'}{m+1}$, la quale paragonata colla generale (D) del n.° 16. dà $X = \frac{x'}{m+1}$, $q = \frac{-1}{m+1}$, $\nabla y_x = \frac{-1}{m+1} y_{x',x+1}$

$a=b=c=\ldots\ldots=p=0$, e per la formola (F) dello stesso numero si ha

$$u=\frac{\frac{x'}{m+1}+\frac{x't}{m+1}+\frac{x't^2}{m+1}+\ldots\ldots\ldots+\varphi(t)}{\frac{-1}{m+1}t^{-1}+1}=$$

$$\frac{-(x'+x't+x't^2+\ldots\ldots\ldots+(m+1)\varphi(t))}{t^{-1}-(m+1)}.$$

Per determinare $\varphi(t)$ si rifletta, che l' equazione proposta sussiste finchè sia $x=0$. In questa supposizione altresì si determina il valore di $y_{x',0}$ osservando che $y_{x',1}=c$ cosicchè dall' equazione proposta nell' ipotesi di $x=0$ si ha $X^{(0)}=\frac{x'}{m+1}$, $y_{x',0}=\frac{c+x'}{m+1}$, $\nabla y_0=\frac{-c}{m+1}$, $\nabla y_{-1}.t^{-1}=\frac{-(c+x')t^{-1}}{(m+1)^2}$. Dunque dovendosi prendere nell'espressione di $\varphi(t)$ della (E) (n.° 16.) tutti i rispondono al caso in cui l'equazione non si verifica secondo l'ipotesi da cui deriva, sarà perciò $\varphi(t)=y_{x',0}-X^{(0)}+\nabla y_{-1}.t^{-1}$ $+\nabla y_0=\frac{c+x'}{m+1}-\frac{x'}{m+1}-\frac{(c+x')t^{-1}}{(m+1)^2}-\frac{c}{m+1}=-\frac{(c+x')t^{-1}}{(m+1)^2}$, e quindi verrà $u=\frac{-(x'+x't+x't^2+\text{ec.})+\frac{(c+x')t^{-1}}{(m+1)}}{t^{-1}-(m+1)}$, e per le cose dette nei numeri precedenti sarà $y_{x',x}=-x'(m+1)^{x-1}$ $-x'(m+1)^{x-2}-\ldots\ldots-x'(m+1)^0+\frac{(c+x')(m+1)^x}{m+1}=-x'\left(\frac{(m+1)^x-1}{m}\right)$ $+(c+x')(m+1)^{x-1}$. Parimenti sarà $y_{x',x+1}=-x'\left(\frac{(m+1)^{x+1}-1}{m}\right)$ $+(c+x')(m+1)^x=0$, giacchè nel principio dell'anno $(x+1)^{esimo}$ deve appunto essersi annullata la sorte c secondo l'ipotesi, e quindi sarà $x'-x'(m+1)^{x+1}+(c+x')m(m+1)^x=0$, da cui si ri-

cava $x' = \frac{cm(m+1)^x}{(m+1)^x - 1}$, risultato conforme a quello, che ottenne (1) il Marie sciogliendo in altra maniera questo problema.

22. Sonovi alcuni problemi, i quali nella loro risoluzione possono ammettere promiscuamente l'uso del calcolo delle differenze finite insieme a quello delle funzioni generatrici. Si cerchi a cagion d'esempio in quanti modi il numero qualunque x intero possa partirsi in quattro pure interi, e disuguali sopra x termini della serie de' naturali. Sia il numero de' modi richiesti espresso da z'^{v}_{x}, e quello dei modi ne' quali x può partirsi in tre presi nella detta maniera si esprima per z'''_{x}. Avrà così luogo l'equazione $z'^{v}_{x} - z'^{v}_{x-4} = z'''_{x-4}$, ovvero $z'^{v}_{x+4} - z'^{v}_{x} = z'''_{x}$, la quale, quantunque con calcolo sommamente operoso, potrebbe integrarsi secondo i metodi conosciuti. Quindi ad ottenere il prefisso scopo sembra dover preferirsi altro metodo, che vi conduce per altra via più semplice e più breve. Perciò osservando, che l'equazione proposta dà l'altra $z'^{v}_{x} = z'''_{x-4} + z'''_{x-8} + z'''_{x-12} + z'''_{x-16} +$ ec. in cui il secondo membro costituisce una serie il cui termine generale è z'''_{x-4n}, e che si tronca col termine z'''_{x-4n-4} esclusivamente, essendo n un numero tale per cui riesca $z'''_{x-4n-4} < 6$. Intanto, poichè il valore di z'''_{x-4} dato per x, si ha dalla formola $y_x = \frac{6x^2 - 36x + 47}{8.9} + \frac{(-1)^x}{8} + \frac{\alpha^x + \beta^x}{9}$ del n.° 20. ponendo in essa $x-4$ in luogo di x, cosicchè la formola stessa così ridotta può riguardarsi come il termine generale della serie proposta presa però inversamente, nel quale attribuito ad x il minor valore, che renda la funzione z_{x-4} maggiore dello zero,

(1) V. Marie. Lezioni Elementari di Matematiche tradotte ed illustrate dai PP. Canovai, e Del-Ricco. Quinta Edizione. Firenze 1803. pag. 389.

essa poi cresca successivamente andando verso i termini più grandi per la differenza di quattro unità. Sarà pertanto, onde avere la somma di questa serie, o ciò che è lo stesso il valore di z'^{v}_{x}, da integrarsi l' espressione $\frac{6(x-4)^2-36(x-4)+47}{8.9}+\frac{(-1)^{x-4}}{8}$ $+\frac{\alpha^{x-4}+\beta^{x-4}}{9}=\frac{6x^2-84x+287}{8.9}+\frac{(-1)^x}{8}+\frac{\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}}{9}$, la quale perciò sommata col suo integrale preso nella supposizione della differenza $=4$ darà $z'^{v}_{x}=\frac{6x(x-4)(2x-4)}{2.3.4.8.9}-\frac{84x(x-4)}{2.4.8.9}+\frac{287x}{4.8.9}$ $+\frac{(-1)^x x}{4.8}+\frac{\alpha^{x-1}}{9(\alpha-1)}+\frac{\beta^{x-1}}{9(\beta-1)}+\frac{6x^2-84x+287}{8.9}+\frac{(-1)^x}{8}+\frac{\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}}{9}$ $+C=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{574}{2.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}\right.$ $\left.+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right)+C$, dove C è la costante introdotta dalla integrazione. Qui è d' uopo prima di tutto osservare, che la quantità $(-1)^x$ nella integrazione eseguita si è considerata come costante, poichè, come è facile a rilevarsi essa non varia al variare continuo della x per la differenza 4. Trattasi ora di determinare la costante C per quattro casi diversi, giacchè dipende essa dal primo o se si voglia dall'ultimo termine della serie, a cui secondo la diversa forma di x rispetto al multiplo di 4, corrispondono altrettanti valori di x. Di fatto potendo x appartenere ad una delle forme $4n+9$, $4n+8$, $4n+7$, $4n+6$, essendo rispettivamente $x-4$ di una delle forme $4n+5$, $4n+4$, $4n+3$, $4n+2$, si vede essere nei diversi casi l'ultimo termine della serie z'''_9, z'''_8, z'''_7, z'''_6 corrispondentemente ad $n=1$, cosicchè quando sia $n=0$ si annullano pure i termini seguenti. Dunque nelle supposizioni di $x=9$, $x=8$, $x=7$, $x=6$ la somma dei termini diviene nulla; e con questa condizione attribuendo successivamente alla x nella formola testè ritrovata tali valori, si determinano quelli della costante C in corrispondenza alle quattro forme diverse di x. Fatto pertanto in essa $x=9$, si ha

$\frac{1}{9}\left(\frac{729-1215+594}{2.8}-\frac{27}{2.8}+\frac{574}{2.8}-\frac{18}{2.8}-\frac{16}{2.8}\right)+C=0$, e quindi $C=\frac{-621}{2.8.9}$, e nelle supposizioni di $x=8$, $x=7$, $x=6$ si ha similmente e per ordine $C=\frac{-720}{2.8.9}$, $C=\frac{-621}{2.8.9}$, $C=\frac{-684}{2.8.9}$, e quindi le quattro diverse somme che ne risultano, chiamate S, S', S'', S''' rispettivamente, saranno le seguenti:

Per x della forma $4n+9$,

$$S=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-47}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per x della forma $4n+8$,

$$S'=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-146}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per x della forma $4n+7$.

$$S''=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-47}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per x della forma $4n+6$,

$$S'''=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-110}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per comprendere in una sola e generale tutte queste espressioni si rileva facilmente, poichè esse non differiscono che nella quantità costante numerica, essere d' uopo ritrovare una tale funzione di x, la quale si annulli allorchè x è di una delle forme $4n+9$, $4n+7$, e si eguagli alla differenza $\frac{-146+47}{2.8.9}=\frac{-99}{2.8.9}$ quando x è della forma $4n+8$, ed alla differenza $\frac{-110+47}{2.8.9}=\frac{-63}{2.8.9}$ quando x è della forma $4n+6$. Allora tale funzione unita in somma colla prima delle sopranotate espressioni darà il valore generale di z'^{v}_{x}. Essa può trovarsi non meno coll' ordinario calcolo delle differenze finite quanto con quello delle fuuzioni generatrici. Onde facilitare nell' un modo o nell' altro le necessarie operazioni, che riescono sempre alquanto prolisse, giova il dar luogo ad un' altra con-

siderazione, che può renderle più semplici. La funzione di x richiesta come sopra dev'essere composta di due parti pure funzioni di x, vale a dire di una che nel caso generico di x dispari si annulli, ed in quello di x pari sussista, e riesca $= \frac{-63}{2.8.9} = \frac{-7}{2.8}$, e di un'altra parte, la quale riesca $= \frac{-36}{2.8.9} = -\frac{1}{4}$ quando x è della forma $4n+8$, e si annulli in tutti gli altri casi. Riguardo quindi alla prima parte si ottiene l'intento col porre $V_{x+1} + V_x = -\frac{7}{2.8}$, indicando per V_x quella funzione, che si annulla, e rispettivamente riesce $= -\frac{7}{2.8}$ quando x è dispari, e quando è pari. Si avrà dunque integrando, $V_x = -\frac{7}{4.8} + A(-1)^x$, essendo A la costante introdotta dall' integrazione: e poichè quando x è dispari $V_x = 0$, sarà perciò $A = \frac{-7}{4.8}$, e l'integrale completo V_x verrà $= -\frac{7}{4.8} - \frac{7}{4.8}(-1)^x$. Ciò posto si avrà l'altra parte richiesta dalla risoluzione dell' equazione $V'_{x+3} + V'_{x+2} + V'_{x+1} + V'_x = -\frac{1}{4}$, rappresentando per V'_x la funzione, che abbia le quattro condizioni richieste. Per risolverla col metodo delle funzioni generatrici sarà d'uopo paragonarla colla generale (D) del n.° 16., nella quale perciò si ha $y_x = V'_x$, $X = -\frac{1}{4}$, $a = b = c = \ldots = f = 0$, $g = p = q = 1$, $\nabla y_x = V'_{x+3} + V'_{x+2} + V'_{x+1}$. Sarà quindi fatto $t^{-1} = z$, $u = \frac{u' + \varphi(t)}{t^{-3} + t^{-2} + t^{-1} + 1} = \frac{u' + \varphi(t)}{z^3 + z^2 + z + 1} = (u' + \varphi(t)) \times \frac{1}{(z+1)(z-\sqrt{-1})(z+\sqrt{-1})} = (u' + \varphi(t))\left(\frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}\right)$.

Per determinare $\varphi(t)$ si osservi, che sussistendo l'equazione proposta anche quando sia $x=0$, giacchè si ha $V'_0 = -\frac{1}{4}$

si dovranno prendere nell' espressione generale di $\varphi(t)$ (n.° 16.) i soli termini $\nabla y_{-1}.t^{-1}$, $(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}$, $(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}$; ed essendo $\nabla y_{-1}=V'_2+V'_1+V'_0=-\frac{1}{4}$, $\nabla y_{-2}-qy_{-1}=V'_1+V'_0=-\frac{1}{4}$; $\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1}=-\frac{1}{4}$, sarà per conseguenza $\varphi(t)=-\frac{1}{4}(t^{-1}+t^{-2}+t^{-3})$. E siccome nel nostro caso $u'=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2-$ ec. sarà ancora

$$u=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\text{ec.}\ \frac{1}{4}t^{-1}-\frac{1}{4}t^{-2}-\frac{1}{4}t^{-3}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\sqrt{-}}{z+\sqrt{-1}}\right)=$$
$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\text{ec.}\ldots-\frac{1}{4}t^{-1}-\frac{1}{4}t^{-2}-\frac{1}{4}t^{-3}\right)$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{(-1)}{z^2}+\frac{(-)^2}{z^3}+\frac{(-1)^3}{z^4}+\text{ec.}\right)\\ -\frac{1}{4}(1+\sqrt{-1})\left(\frac{1}{z}+\frac{\sqrt{-1}}{z^2}+\frac{(\sqrt{-1})^2}{z^3}+\frac{(\sqrt{-1})^3}{z^4}+\text{ec.}\right)\\ -\frac{1}{4}(1-\sqrt{-1})\left(\frac{1}{z}+\frac{(-\sqrt{-1})}{z^2}+\frac{(-\sqrt{-})^2}{z^3}+\frac{(-\sqrt{-})^3}{z^4}+\text{ec.}\right)\end{array}\right\}$$

Quindi avendosi $\frac{1}{z}=t$, si rileverà facilmente essere il valore di V'_x per le cose dette nei numeri precedenti lo stesso, che il coefficiente di t^x nell' espressione:

$$-\frac{1}{8}(t^x+(-1)t^x+(-1)^2t^x\ldots+(-1)^{x-1}t^x)$$
$$+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(t^x+(\sqrt{-t})t^x+(\sqrt{-1})^2t^x\ldots+(\sqrt{-1})^{x-1}t^x)$$
$$+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(t^x+(-\sqrt{-1})t^x+(-\sqrt{-1})^2t^x\ldots+(-\sqrt{-1})^{x-1}t^x)$$
$$-\frac{(-1)^xt^x}{8}+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^xt^x+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})^xt^x$$
$$-\frac{(-1)^{x+1}t^x}{8}+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^{x+1}t^x+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})^{x+1}t^x$$
$$-\frac{(-1)^{x+2}t^x}{8}+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^{x+2}t^x+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})^{x+2}t^x,$$

dalla quale, fatto pure $t=1$, e sommando le serie geometri-

che di x termini, e riducendo, si avrà $V'_x = -\frac{1}{16} - \frac{(-1)^x}{16}$ $-\frac{(\sqrt{-1})^x}{16} - \frac{(-\sqrt{-1})^x}{16}$. Per avere adunque l'espressione generale di z'^{v}_x riassumendo le premesse dichiarazioni non si avrà, che a sommare i valori di S, V_x, V'_x, cosicchè $z'^{v}_x = S + V_x + V'_x$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-47}{2.8} + \frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8} + \frac{9.2(-1)^x}{2.8} + \frac{\alpha^x}{\alpha-1} + \frac{\beta^x}{\beta-1}\right)$$

$$-\frac{7}{4.8} - \frac{7}{4.8}(-1)^x - \frac{1}{16} - \frac{(-1)^x}{16} - \frac{(\sqrt{-1})^x}{16} - \frac{(-\sqrt{-1})^x}{16} =$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+63x-65}{2.8} + \frac{\alpha^x}{\alpha-1} + \frac{\beta^x}{\beta-1}\right) + \frac{(x-5)(1+(-1)^x)}{4.8} - \left(\frac{(-\sqrt{-1})^x + (\sqrt{-1})^x}{16}\right).$$

Se si amasse di trattare questo problema col solo calcolo delle funzioni generatrici converrebbe prendere in altro modo le somme delle serie, che nascono dalla considerazione dell' equazione $z'^{v}_x = z'''_{x-4} + z'''_{x-8} + z'''_{x-12} +$ ec. poichè allora sostituendo nel termine generale dato per x il suo valore $4n+9$, $4n+8$ ec. secondo le particolari ipotesi converrebbe determinare ciascuna somma considerando sempre n come numero dei termini in ogni serie, e quindi variabile per la differenza 1. Le somme poi si avrebbero tutte separatamente dall'equazione $S_n - S_{n-1} = T$, indicando per S_n la somma richiesta, per S_{n-1} la somma di $n-1$ termini della stessa serie, e per T il termine generale corrispondente. Ottenute le quattro diverse somme date per n, in luogo di questa lettera si sostituirebbe il suo valore dato per x rispettivamente dalle equazioni $x = 4n+9$, $x = 4n+8$, ec. e si riunirebbero in fine le stesse ad una sola espressione col metodo già spiegato.

23. Vedutosi l' uso del metodo delle funzioni generatrici per la risoluzione di ogni equazione lineare alle differenze finite, e coi coefficienti costanti non è fuor del proposito il notare come le equazioni fondamentali dei problemi dati ai n.i 18. 20. 22. per la partizione di un numero x in due, in tre

o in quattro parti intere e disuguali non sono che casi particolari di un' equazione assai più generale. Essa nasce dalla ricerca del numero dei modi ne' quali il numero qualunque intero x può essere la somma di x' termini disuguali delle serie aritmetica m, $m+n$, $m+2n$, $m+3n$, ec. di numeri interi. Se si rappresenti per $z_{x,x'}$ la funzione corrispondente, da cui ottengasi in ogni caso il numero richiesto, si vedrà facilmente, che la totalità delle partizioni si dividerà in quelle nelle quali non entra la parte m, e in quelle nelle quali essa si trova. Quanto alle prime esse sono evidentemente altrettante, quante quelle per le quali $x-nx'$ può essere la somma di x' termini qualunque e disuguali della serie, cioè $z_{x-nx',x'}$ giacchè per ipotesi n dev' essere elemento comune di ciascuna delle x parti. Rispetto poi alle partizioni, nelle quali esiste la parte m esse saranno altrettante, quante quelle per le quali $x-m$ può essere la somma di $x'-1$ termini della serie fra i quali non entri la m, ossia per ciò che si è detto prima, altrettante, quante sono quelle per le quali il numero $x-m-n\,(x'-1)$ può essere la somma di $x'-1$ termini qualunque purchè disuguali della serie, cioè $z_{x-m-n(x'-1),x'-1}$, e si avrà così l'equazione $z_{x,x'}=z_{x-nx',x'}+z_{x-m-n(x'-1),x'-1}$ la quale, fatto $m=n=1$ diviene $z_{x,x'}=z_{x-x',x'}+z_{x-x',x'-1}$ in cui $z_{x,x'}$ rappresenta il numero de' modi, ne' quali il numero qualunque x può essere la somma di x' termini disuguali della serie de' numeri naturali. Dunque fatto successivamente $x'=2, =3, =4$, sarà primieramente $z_{x,2}-z_{x-2,2}=z_{x-2,1}$ ovvero $z_{x+2,2}-z_{x,2}=z_{x,1}$, che ha lo stesso significato di quella che fu stabilita al n.° 18, giacchè è evidente essere $z_{x,1}=1$. Così si avranno pure le equazioni $z_{x+3,3}-z_{x,3}=z_{x,2}$, e $z_{x+4,4}-z_{x,4}=z_{x,3}$, che sono le stesse di quelle che rispettivamente furono poste nei n.° 20. 22. L' equazione poi $z_{x,x'}=z_{x-nx',x'}+z_{x-m-n(x'-1),x'-1}$ esprime

un importante e generalissimo teorema, che in altro modo fu già dimostrato (1) dall' illustre geometra Sig. Paoli.

24. Si raccoglie intanto dalle premesse cose, che la maggior difficoltà, che può incontrarsi nell' uso del calcolo delle funzioni generatrici per la risoluzione dei problemi, oltre quella di stabilirne opportunamente le equazioni, dipende dallò sviluppo delle stesse funzioni generatrici, per cui si richiedono sovente metodi speciali, i quali potrebbero talvolta riuscire soggetti agli inconvenienti dell' induzione. Il Sig. Marchese Laplace nelle citate sue opere ne ha accennati parecchi sommamente ingegnosi, benchè l' esposizione da Lui fattane lasci in essi sussistere il bisogno di una maggiore illustrazione. I confini prescritti ad una memoria comunque estesa non consentono di trattarne in questa diffusamente, e soltanto a fondamento delle cose, che sono per dirsi nei numeri seguenti per la rigorosa soluzione di un interessantissimo problema pure trattato dal Sig. Laplace, merita di essere quì recato il metodo appartenente allo sviluppo della formola $(1+t+t^2+t^3+t^4\ldots+t^x+\text{ec.})^n$, o ciò che è lo stesso alla ricerca generale del coefficiente di t^x nel prodotto da essa indicato. Per trovarlo giova prima di tutto avvertire, che supposti n, p, m tre numeri qualunque interi se il coefficiente di t^x abbia in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^p$ la forma $\frac{(x+m)(x+m-1)(x+m-2)\ldots(x+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1}$, il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^{p+1}$ sarà espresso da $\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{(m+1)(m)(m-1)\ldots 2.1}$. Di fatto dovendo per ipotesi i coefficienti di t^0, t^1, t^2, t^3, $t^4\ldots t^x$ in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^p$

(1) V. Memorie della Società Italiana. Tom. II. pag. 832. | Paoli. Opuscula Analytica. Liburni. 1780.

formare la serie $1, m+1, \frac{(m+2)(m+1)}{2} \ldots \frac{(x+m-2)(x+m-3)\ldots(x-1)}{m(m-1)\ldots 2.1}$, $\frac{(x+m-1)(x+m-2)\ldots x}{m(m-1)\ldots 2.1}$, $\frac{(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{m(m-1)\ldots 2.1}$, la quale ha $x+1$ termini, si vede facilmente che la somma della medesima deve essere il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3\ldots+t^x+\text{ec.})^{p+1}$ qualora si rifletta al modo con cui i termini contenenti rispettivamente t^0, t^1, t^2, t^3 ec. in $(1+t+t^2+t^3\ldots+t^x+\text{ec.})^p$ si moltiplichino coi termini di $(1+t+t^2+t^3\ldots+t^x+\text{ec.})$. Ora trattasi di dimostrare una tal somma eguale al numero dei modi ne' quali $x+m+1$ cose possono combinarsi ad $m+1$ ad $m+1$, il quale appunto è espresso come d' altronde si sa da $\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots\ldots(x+1)}{1.2\ldots\ldots(m-1)(m)(m+1)}$. A rendere più sensibile la dimostrazione si immagini, che le $x+m+1$ cose sieno rappresentate da a, b, c, d, e, ec. Nella totalità delle combinazioni in questione vi saranno le parziali, che contengono la a, le quali saranno altrettante, quante sono quelle nelle quali $x+m$ cose possono combinarsi ad m ad m, numero che è espresso da $\frac{(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{1.2\ldots\ldots(m-1)m}$. Le combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$, che contengono la b saranno in parte comprese fra quelle, nelle quali entra pure la a, e le rimanenti saranno altrettante, quante sono quelle nelle quali $x+m-1$ cose possono combinarsi ad m ad m cioè saranno in numero espresso da $\frac{(x+m-1)(x+m-2)\ldots x}{1.2\ldots(m-1)m}$. Similmente le combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$ nelle quali entra la c saranno, oltre quelle già assegnate nelle quali entra pure la a, e la b quelle eziandio nelle quali la c può combinarsi colle altre $x+m-2$ cose. Il numero pertanto di tali combinazioni nelle quali entra la c esclusa la a e la b sarà espresso da $\frac{(x+m-2)(x+m-3)\ldots(x-1)}{m(m-1)\ldots 2.1}$. Così procedendo si vedrà essere $\frac{(x+m-3)(x+m-4)\ldots(x-2)}{m(m-1)\ldots 2.1}$ il numero delle

combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$ nelle quali entra la d escluse le a, b, c. Continuando pure la stessa analisi, si troverà il numero delle combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$, nelle quali entra una qualunque delle cose indicate esclusivamente a tutte le precedenti a, b, c, d ec. espresso da uno de' termini della indicata serie corrispondentemente retrocedendo dall' ultimo, cosicchè quando si giungerà alla cosa $(x+1)^{esima}$ secondo l'ordine divisato, la quale, escluse tutte le precedenti, deve ancora combinarsi insieme alle altre m ad $m+1$ ad $m+1$ si troverà, che il numero delle combinazioni corrispondenti è lo stesso che quello delle combinazioni di m cose ad m ad m cioè 1, che è il primo termine della serie proposta. Sarà quindi esaurito il total numero delle combinazioni di $x+m+1$ cose ad $m+1$ ad $m+1$ colla somma della serie medesima, e sapendosi d'altronde, che detto numero è espresso da $\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(m-1)(m)(m+1)}$, esprimerà esso pure la somma della serie. Ciò si evince eziandio sottraendo da questa espressione quella che nasce ponendo in essa x in luogo di $x+1$, o ciò che è lo stesso $x-1$ in luogo di x, con che si ha

$$\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(m-1)(m)(m+1)} - \frac{(x+m)(x+m-1)(x+m-2)\ldots\ldots x}{1.2\ldots(m-1)(m)(m+1)} =$$

$\frac{(x+m)(x+m-1)(x+m-2)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(m-1)m}$, che è il termine generale della serie proposta.

Il lemma precedente conduce a determinare il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+t^4\ldots\ldots+t^x+\text{ec.})^n$. Si ponga perciò $n=1$, ed allora si vede essere 1 il coefficiente di t^x. Si faccia ancora $n=2$ e si vedrà essere $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2 = 1+2t+3t^2+4t^3+\text{ec.}$, e quindi $x+1$ sarà il coefficiente di t^x. Così pure se $n=3$ sarà in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^3$ il coefficiente di $t^x = 1+2+3+\ldots\ldots+(x+1) = \frac{(x+2)(x+1)}{2}$, che appar-

tiene alla forma del termine generale della serie considerata nel lemma precedente. Similmente pel lemma stesso il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^4$ si troverà espresso da $\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{1.2.3}$, e quello di $(1+t^2+t^3+\text{ec.})^5$ riceverà il valore $\frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}{1.2.3.4}$, e così successivamente riguardo ai coefficienti di t^x nelle potenze superiori di $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})$; e quindi in generale il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+t^4.....+t^x+\text{ec.})^n$ supposto n non <3 sarà $\frac{(x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)....(x+1)}{1.2.3.4....(n-1)}$.

25. Le considerazioni del numero precedente giovano per mostrare la rigorosa applicazione di un metodo analogo a quello, che è stato seguito nell' integrazione delle equazioni alle differenze di ordine determinato ad altre di ordine indeterminato come meglio si chiarirà coll' esempio. Una di queste nasce dal problema seguente proposto dal Sig. Laplace. (1)

Sia q la probabilità di un evento semplice per ciascuno di x colpi, cioè la probabilità di condurre un evento determinato dipendentemente da una sola prova, la quale poi debba ripetersi x volte. Si cerca la probabilità composta risguardante la ripetizione continua per i volte dell' evento semplice dentro il numero x di colpi o di prove.

Sia $z_{x,i}$ la funzione di x, i esprimente la probabilità di condurre l'evento composto al colpo x^{esimo}; e poichè nell'ipotesi, che esso così si verifichi, il colpo $x-i^{esimo}$ dev' essere contrario all' evento semplice, ed il colpo $x-i-1^{esimo}$ può essere a questo o favorevole o contrario, si indichi per P la

(1) V. Laplace. Théorie analytique des probabilités. Seconde édition 1814. pag. 247.

somma delle due probabilità l'una favorevole e l'altra contraria all'evento semplice pel colpo $x-i-1^{esimo}$, probabilità tali però che escludano la verificazione dell'evento composto prima del colpo $x-i-1^{esimo}$ come contraria all'ipotesi. Si indichino pure per P', P'', P''', ec. le analoghe somme di probabilità per ordine corrispondenti ai colpi precedenti fino allo $x-2i.^{esimo}$ intorno al quale giova osservare, che qualora si suppongano tutti i colpi dopo di esso fino allo $x-i-1^{esimo}$ inclusivamente favorevoli all'evento semplice, non si potrà il colpo suddetto $x-2i^{esimo}$ supporre che contrario, altrimenti si avrebbe l'evento composto al colpo $x-i-1^{esimo}$: ciò posto si vedrà valere l'equazione $z_{x,i}=P(1-q)q^i$, ed essendo $P=F+C$ quando per F, C si esprima rispettivamente la probabilità favorevole e la contraria all'evento semplice, ed essendo d'altronde $F=qP'$, $Cq^i=z_{x-1,i}$, $C=\frac{z_{x-1,i}}{q^i}$ sarà pure $P=qP'+\frac{z_{x-1,i}}{q^i}$, e quindi $P'=qP''+\frac{z_{x-2,i}}{q^i}$, $P''=qP'''+\frac{z_{x-3,i}}{q^i}$ . . . . . $P^{(i-1)}=\frac{z_{x-i.i}}{q^i}$, giacchè anche per le cose dette la probabilità corrispondente all'evento semplice pel colpo $x-2i$ non può essere che contraria. Sostituendo pertanto nell'equazione $z_{x,i}=(1-q)Pq^i$ successivamente i valori di P, P', P'', P''' . . . . . $P^{(i-1)}$ si troverà

$$z_{x,i}=(1-q)(z_{x-1,i}+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-i,i})$$

ovvero

$$\text{(G)}\quad z_x=(1-q)(z_{x-1}+qz_{x-2}+q^2z_{x-3}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-i}),$$

poichè non variando la i al variare della x, si può conside-

rare la probabilità ricercata come funzione della sola variabile x.

Seguendo ora il metodo del Sig. Laplace trattasi di ritrovare la funzione generatrice di z_x, da cui avendosi quelle di z_{x-1}, z_{x-2}, z_{x-3}, ec. z_i riunendole tutte in una somma si ricaverà la funzione generatrice della probabilità richiesta col presente problema, e quindi la probabilità stessa in cui si raccolgono tutte le combinazioni di probabilità semplici, per le quali si ottiene l' evento composto dal colpo $i.^{esimo}$ fino allo x^{esimo} inclusivamente per amendue. Per risolvere ora l'equazione (G) si rappresenti il secondo membro di essa per $(1-q)\nabla z_x$, cioè sia $z_x=(1-q)\nabla z_x$. Quindi indicando al solito per u la funzione generatrice di z_x, quella di $(1-q)\nabla z_x$ dev' essere $(1-q)u(t+qt^2+q^2t^3....+q^{i-1}t^i)=u'$, giacchè in questa il coefficiente di t^x dev' essere appunto $(1-q)(z_{x-1}+qz_{x-2}.....+q^{i-1}z_{x-i})$. E le funzioni u, u' sarebbero anche perfettamente eguali se l' equazione proposta sussistesse per qualunque supposizione del valore di x, poichè allora sarebbero eziandio corrispondentemente uguali tutti i coefficienti delle potenze di t nelle due funzioni. Ad ogni modo si avrà sempre l' equazione $u+\phi(t)=u'$, esprimendo per $\phi(t)$ una quantità contenente una o più potenze di t che si annullerà o riceverà un determinato valore secondo la diversità dei casi. Nel presente, poichè il minor valore che possa darsi ad x è quello di $x=i$ essendo $z_i=q^i$, e d'altronde l'equazione in questa ipotesi darebbe $z_i=(1-q)(z_{i-1}+qz_{i-2}+\text{ec.})=0$, se ne inferisce, che essendo il coefficiente di t^i in u espresso da q^i mentre si annulla in u', sarà $\phi(t)=-q^i t^i$ circoscriven-

dosi poi questo valore dall' osservare, che ponendo $x=i+1$ l' equazione sussiste come nelle successive supposizioni. Sarà pertanto $u-q^i t^i = u' = (1-q)u(t+qt^2+q^2t^3 \ldots\ldots + q^{i-1} t^i)$ $=(1-q)ut\frac{q^i t^i - 1}{qt-1}$, e finalmente $u=\frac{q^i(1-qt)t^i}{1-t+(1-q)q^i t^{i+1}}$. Ritrovata ora l'espressione di u funzione generatrice di z_x si vede subito essere la funzione generatrice di $z_x+z_{x-1}+z_{x-2}+z_{x-3}\ldots\ldots+z$ cioè della probabilità totale ricercata espressa da $u(1+t+t^2+t^3\ldots+t^{x-i})=u\left(\frac{t^{x-i+1}-1}{t-1}\right)=\frac{u}{1-t}-\frac{ut^{x-i+1}}{1-t}=u(1+t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^x+\text{ec.})-ut^{x-i+1}(1+t+t^2\ldots\ldots+t^x+\text{ec.})$ sviluppata in serie ordinata secondo le potenze di t. Riflettendo per altro al modo con cui nella nuova funzione nasce il coefficiente di t^x, e considerando perciò la funzione u sotto la forma generale $z_0+z_1t+z_2t^2+z_3t^3\ldots\ldots+z_it^i\ldots\ldots+z_xt^x+\text{ec.}$ si vedrà, che la prima parte del coefficiente in questione corrispondente ad $u(1+t+t^2+t^3\ldots+t^x+\text{ec.})$ è $z_x+z_{x-1}+z_{x-2}\ldots+z_{x-i+1}+\text{ec.}$ e l'altra parte corrispondente a $-ut^{x-i+1}(1+t+t^2\ldots+t^{i-1}+\text{ec.})$ è $-(z_{i-1}+z_{i-2}+z_{i-3}+\text{ec.})$, la quale si riduce a zero, poichè, come si è veduto, i è il minor valore, che possa darsi ad x. Dunque resterà la sola parte del coefficiente, che corrisponde ad $u(1+t+t^2\ldots\ldots\ldots+t^x+\text{ec.})=\frac{u}{1-t}$ $=\frac{q^i(1-qt)t^i}{(1-t)^2\left(1+\frac{(1-q)q^i t^{i+1}}{1-t}\right)}$ a cui perciò si riduce la funzione generatrice della probabilità totale ricercata, funzione pertanto che si ottiene in questo come in altri casi analoghi con dividere soltanto l' espressione di u per $1-t$ come usò il Sig. Marchese Laplace. A sviluppare ora l' ultima funzione ritro-

vata per avere il coefficiente di t^{x+i} si faccia $\frac{(1-q)q^i t^{i+1}}{1-t} = -z$, e sarà $\frac{q^i(1-qt)t^i}{(1-t)^2(1-z)} = q^i(1-qt)t^i(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2 \times (1+z+z^2+z^3+\text{ec.}) = q^i(1-qt)t^i(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2 \times \left(1-\frac{(1-q)q^i t^{i+1}}{1-i}+\frac{(1-q)^2 q^{2i} t^{2i+2}}{(1-t)^2}-\frac{(1-q)^3 q^{3i} t^{3i+3}}{(1-t)^3}+\frac{(1-q)^4 q^{4i} t^{4i+4}}{(1-t)^4}-\text{ec.}\right)$ $= q^i(1-qt)t^i(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2 - (1-q)(1-qt)q^{2i}t^{2i+1} \times (1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^3 + (1-q)^2(1-qt)q^{3i}t^{3i+2}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^4 - (1-q)^3(1-qt)q^{4i}t^{4i+3}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^5 + \text{ec.}$ Per trovare quindi il coefficiente di t^{x+i} si rifletta, che riguardo al primo termine della funzione così sviluppata, la parte del coefficiente ricercato sarà $q^i(x+1) - q^{i+1}x = q^i((1-q)x+1)$, essendo facile a vedersi che a ciò si richiede di prendere i due coefficienti di t^x, e di t^{x-1} nella serie $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^2$ e moltiplicarli rispettivamente per q^i, e q^{i+1}. Con simil norma applicando le cose dette nel precedente numero 24. si vedrà, che il coefficiente di t^{x+i} in $-(1-q)(1-qt)q^{2i}t^{2i+1}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^3$ è $-(1-q)q^{2i\frac{(x-i+1)(x-i)}{2}} + (1-q)q^{2i+1\frac{(x-i)(x-i-1)}{2}} =$ $-(1-q)q^{2i\frac{(x-i)}{2}} \times (x-i-1+2) + (1-q)q^{2i+1\frac{(x-i)}{2}}(x-i-1) =$ $-(1-q)q^{2i\frac{(x-i)}{2}}((1-q)(x-i-1)+2)$.

Proseguendo si troverà il coefficiente di t^{x+i} in $(1-q)^2(1-qt)q^{3i}t^{3i+2}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^4$ espresso da

$$(1-q)^2 q^{3i\frac{(x-2i+1)(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}} - (1-q)^2 q^{3i+1} \times \frac{(x-2i)(x-2i-1)(x-2i-2)}{2.3} =$$

$$(1-q)^2 q^{3i\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}}(x-2i-2+3)$$

$$-q(1-q)^2 q^{3i\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}}(x-2i-2)=$$

$$(1-q)^2 q^{3i\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}}((1-q)(x-2i-2)+3).$$

Parimenti il coefficiente di t^{x+i} in $-(1-q)^3(1-qt)\times$ $q^{4i}t^{4i+3}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^5$ sarà

$$-(1-q)^3 q^{4i\frac{(x-3i+1)(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}}$$

$$+(1-q)^3 q^{4i+1\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)(x-3i-3)}{2.3.4}}=$$

$$-(1-q)^3 q^{4i\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}}(x-3i-3+4)$$

$$+q(1-q)^3 q^{4i\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}}(x-3i-3)=$$

$$-(1-q)^3 q^{4i\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}}((1-q)(x-3i-3)+4).$$

Sarà dunque il ricercato coefficiente di t^{x+i} nella funzione generatrice della totale richiesta probabilità:

$$q^i((1-q)x+1)$$

$$-(1-q)q^{2i\frac{(x-i)}{1.2}}((1-q)(x-i-1)+2)$$

$$+(1-q)^2 q^{3i\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{1.2.3}}((1-q)(x-2i-2)+3)$$

$$-(1-q)^3 q^{4i\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{1.2.3.4}}((1-q)(x-3i-3)+4)+\text{ec.}$$

conformemente a quanto ritrovò (1) il Sig. Laplace risolvendo lo stesso problema. È intanto evidente, che se in quest' ultima formola si ponga $x-i$ in luogo di x si avrà da essa la probabilità totale per ottenere l'evento composto al colpo x o prima, cioè al colpo x, o per qualunque altro de' precedenti fino all' i^{esimo} inclusivamente. Sarà pertanto questa nuova espressione

(1) V. Laplace. Opera citata pag. 249.

$$(\mathrm{H})..\left\{\begin{array}{l} q^i((1-q)(x-i)+1) \\ -(1-q)\,q^{2i}\,\frac{(x-2i)}{1.2}((1-q)(x-2i-1)+2) \\ +(1-q)^2 q^{3i}\,\frac{(x-3i)(x-3i-1)}{1.2.3}((1-q)(x-3i-2)+3) \\ -(1-q)^3 q^{4i}\,\frac{(x-4i)(x-4i-1)(x-4i-2)}{1.2.3.4}((1-q)(x-4i-3)+4) \\ +\text{ec.} \end{array}\right.$$

la quale come la precedente nelle particolari applicazioni deve essere continuata finchè i fattori, che essa contiene diventino nulli o negativi. Per farne una s'immagini il giuoco conosciuto dai francesi sotto il nome di *Croix ou Pile*, e si cerchi la probabilità totale per ottenere dentro sette colpi l'evento composto di tre favorevoli a *Croix*, cioè sia $x=7$, $i=3$. Essendo pure per la natura del giuoco stesso $q=1-q=\frac{1}{2}$ si troverà la probabilità totale espressa da

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot 4+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3-\left(\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^6=\tfrac{47}{128}.$$

26. L'espressione (H) del numero precedente può considerarsi come l'integrale di una equazione contenente differenze ordinarie, cioè costanti ed insieme variabili, la quale ha inoltre un coefficiente funzione di una delle variabili come si vedrà in seguito. Di fatto prendendo a considerare in altro aspetto il problema del numero precedente, ed indicando per $z'_{x,i}$ la probabilità totale per ottenere entro gli x colpi l'evento composto di i eventi semplici, con più facile raziocinio verrà a stabilirsi una relazione fra $z'_{x,i}$ ed altre funzioni simili. A ciò si perviene riflettendo potere l'evento composto verificarsi in ciascuno dei colpi x, $x-1$, $x-2$, ... i esimo cioè generalmente nel colpo $x-m$. esimo supposto m numero intero che non escluda lo zero, ed in ogni caso tale che $x-m$ non sia minore di i. Si troverà quindi la probabilità dell'evento composto al colpo $x-m$ osservando, che nell'ipotesi relativa il colpo $x-m-i$. esimo deve essere contrario, corrispondendo-

gli la probabilità $1-q$, essendo poi tutti i colpi dallo $x-m-i+1.^{esimo}$ fino allo $x-m.^{esimo}$ comprensivamente ad amendue gli estremi favorevoli all' evento semplice, cosicchè la probabilità corrispondente al loro seguito sia espressa da q^i. Inoltre poichè non dee verificarsi l' evento composto prima del colpo $x-m$, varrà pel seguito dei colpi precedenti ad $x-m-i$ la probabilità contraria all'evento composto dentro il numero dei colpi $x-m-i-1$, la quale verrà espressa da $1-z'_{x-m-i-1,i}$. Dunque la probabilità di verificarsi l'evento composto al colpo $x-m^{esimo}$ sarà $(1-q)q^i(1-z'_{x-m-i-1,i})$. Posto ora successivamente $m=0$, $=1$, $=2$ ec. fino ad $m=x-i-1$ in questa espressione, essa darà la probabilità dell' evento composto in ciascuno dei colpi $x.^{esimo}$, $x-1.^{esimo}$, ec. fino all' $i+1^{esimo}$ inclusivamente; e siccome $z'_{x,i}$ è la somma delle probabilità parziali per la verificazione dell' evento in ciascuno dei colpi $x.^{esimo}$, $x-1.^{esimo}$, $x-2.^{esimo}$, ec. $i.^{esimo}$, così si avrà l' equazione:

$$z'_{x,i}=(1-q)q^i\Big((1-z'_{x-i-1,i})+(1-z'_{x-i-2,i})+(1-z'_{x-i-3,i})$$
$$+\text{ ec. }+(1-z'_{0,i})\Big)+q^i$$

essendo q^i, come è evidente, la probabililà per la verificazione dell' evento composto al colpo i^{esimo}, la quale non può ridursi all' espressione generale $(1-q)q^i(1-z'_{x-m-i-1,i})$. Se quindi nell' equazione si fa decrescere la x di una unità nascerà l' altra

$$z'_{x-1,i}=(1-q)q^i\Big((1-z'_{x-i-2,i})+(1-z'_{x-i-3,i})+\text{ec.}+(1-z'_{0,i})\Big)+q^i,$$

la quale sottratta dalla precedente dà

(K) . . . . . $z'_{x,i} - z'_{x-1,i} = (1-q)q^{i}(1-z'_{x-i-1,i})$

equazione dotata delle condizioni esposte al principio di questo numero, e di cui l' integrale dev'essere appunto l'espressione (H) del numero precedente, come potrebbe verificarsi colle opportune sostituzioni. Intanto l' equazione (K) è una di quelle, di cui la soluzione sfugge ai metodi conosciuti dal calcolo delle differenze, la quale però come molte altre analoghe può guidare ad una risoluzione dipendente dal calcolo delle funzioni generatrici. È prezzo ora dell' opera l' indagare quale altra forma possa ricevere l' equazione (K) subordinatamente a tale intendimento, per ricavarne eziandio il metodo da tenersi per altri problemi, che presentino somiglianti condizioni. Osservando perciò, che qualora si indichi per $z_{x-m,i}$ la probabilità parziale per condurre l' evento composto generalmente al colpo $x-m^{esimo}$ essendo m tale, che riceva tutti i valori da o fino ad $x-i$ inclusivamente per amendue gli estremi, si ha $z'_{x-m,i} = z_{x-m,i} + z_{x-m-1,i} + z_{x-m-2,i} + \text{ec.} + z_{i,i}$, può quindi l' equazione (K) ridursi all' altra seguente

(I) . . $z_{x,i} = (1-q)q^{i}(1 - z_{x-i-1,i} - z_{x-i-2,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$.

Col mezzo di questa formola a cui potrebbe eziandio applicarsi il metodo già seguito per ritrovare la funzione generatrice di z_x nella equazione (G) del numero precedente, giova richiamando l' esempio adotto sul fine del numero stesso ritrovare il valore di $z'_{x,i}$ nell' ipotesi cioè di $x=7$, $i=3$, $1-q=q=\frac{1}{2}$. Si ha pertanto $z'_{7,3} = z_{7,3} + z_{6,3} + z_{5,3} + z_{4,3} + z_{3,3}$. Ora essendo $z_{3,3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, ed avendosi dalla formola (I) $z_{7,3} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^7$, e $z_{6,3} = z_{5,3} = z_{4,3} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ sarà

$z'_{7,3} = \frac{47}{128}$ come si era già trovato in altra maniera.

27. Dalla formola (I) del numero precedente può ricavarsi la (G) del num.° 25, locchè per altro non sembra malgrado parecchj tentativi potersi fare in un modo abbastanza diretto. Però dall' equazione (I) si vede facilmente potersi ricavare le seguenti:

$$z_{x-1,i} = (1-q)\,q^i(1 - z_{x-i-2,i} - z_{x-i-3,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$$

$$z_{x-2,i} = (1-q)\,q^i(1 - z_{x-i-3,i} - z_{x-i-4,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$$

$$z_{x-3,i} = (1-q)\,q^i(1 - z_{x-i-4,i} - z_{x-i-5,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$$

. . . . . .

. . . . . .

(L) . . . . $z_{x-i,i} = (1-q)q^i(1 - z_{x-2i-1,i} - z_{x-2i-2,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$,

e deducendo da queste

$$\frac{z_{x-1,i}}{q^i} = (1-q)(1 - z_{x-i-2,i} - z_{x-i-3,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$$

$$\frac{z_{x-2,i}}{q^i} = (1-q)(1 - z_{x-i-3,i} - z_{x-i-4,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$$

$$\frac{z_{x-3,i}}{q^i} = (1-q)(1 - z_{x-i-4,i} - z_{x-i-5,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$$

ec. ec.

se si sostituiscano opportunamente questi valori nell'equazione (I) si avrà

$$z_{x,i} = (1-q)q^i\left(\frac{z_{x-1,i}}{q^i} + q(1 - z_{x-i-2,i} - z_{x-i-3,i} - \text{ec.} - z_{i,i}) - z_{x-i-1,i}\right)$$

$$= (1-q)\,q^i\left(\frac{z_{x-1,i}}{q^i} + q\,\frac{z_{x-2,i}}{q^i} + q^2(1 - z_{x-i-3,i}\right.$$

$$\left. - z_{x-i-4,i} - \text{ec.} - z_{i,i}) - z_{x-i-1,i} - q\,z_{x-i-2,i}\right) =$$

$$(1-q)q^i\left(\frac{z_{x-1,i}}{q^i} + \frac{q z_{x-2,i}}{q^i} + \frac{q^2 z_{x-3,i}}{q^i}\right.$$

$$+ q^3(1 - z_{x-i-4,i} - z_{x-i-5,i} - \text{ec.} - z_{i,i}) - z_{x-i-1,i}$$

$$-qz_{x-i-2,i}-q^2z_{x-i-3,i}\Big)=(1-q)q^i\Big(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}$$

$$+\frac{qz_{x-2,i}}{q^i}+\frac{q^2z_{x-3,i}}{q^i}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{q^{i-1},z_{x-i,i}}{q^i}$$

$$+q^i(1-z_{x-2i-1,i}-z_{x-2i-2,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

$$-(z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i})\Big)$$

e ponendo $z_{x-i,i}$ in luogo del suo valore dato dall' equazione (L) sarà

$$z_{x,i}=(1-q)q^i\Big(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}+\frac{qz_{x-2,i}}{q^i}+\frac{q^2z_{x-3,i}}{q^i}\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{q^{i-1}z_{x-i,i}}{q^i}\Big)+q^iz_{x-i,i}-(1-q)q^i(z_{x-i-1,i}$$

$$+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i})=(1-q)(z_{x-1,i}$$

$$+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}\ldots\ldots\ldots+q^{i-1}z_{x-i,i})+q^iz_{x-i,i}$$

$$-(1-q)q^i(z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i})$$

ovvero

$$z_{x,i}-q^iz_{x-i,i}=(1-q)(z_{x-1,i}+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}\ldots\ldots+q^{i-1}z_{x-i,i})$$

$$-(1-q)q^i(z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i}).$$

Se ora si pone $z_{x-1,i}+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-i,i}$ $=V_{x,i}$ sarà $z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+q^2z_{x-i-3,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i}$ $=V_{x-i,i}$, e l'equazione precedente prenderà questa forma

$$z_{x,i}-q^iz_{x-i,i}=(1-q)V_{x,i}-(1-q)q^iV_{x-i,i}$$

ovvero ponendo $x+i$ in luogo di x, e dividendo tutto per q^{x+i}

$$\frac{z_{x+i,i}}{q^{x+i}}-\frac{z_{x,i}}{q^x}=\frac{1-q}{q^{x+i}}V_{x+i,i}-\frac{1-q}{q^x}V_{x,i}$$

cosicchè integrando i due membri dell' equazione secondo la differenza i della variabile x riesce $\frac{z_{x,i}}{q^x} = \frac{1-q}{q^x} V_{x,i}$ ossia ancora

$$z_{x,i} = (1-q)(z_{x-1,i} + qz_{x-2,i} + q^2 z_{x-3,i} + \text{ec.} + q^{i-1} z_{x-i,i})$$

come si era trovato in altro modo al numero 25. Non sembra qui inopportuno soggiungere, che a giustificare pienamente la ritrovata equazione occorre di tener conto della costante introdotta dall' integrazione per cui indicandosi con C_i una funzione arbitraria di i si abbia $\frac{z_{x,i}}{q^x} + C_i = \frac{1-q}{q^x} V_{x,i}$ sicchè ponendo $x = i+1$ onde $V_{i+1,i} = q^i$, derivi $\frac{z_{i+1,i}}{q^{i+1}} + C_i = \frac{(1-q)q^i}{q^{i+1}}$, e perciò $C_i = 0$, essendo evidente che $z_{i+1,i} = (1-q)q^i$. Dunque annullandosi la costante nella fatta supposizione sarà come prima $z_{x,i} = (1-q)V_{x,i}$ poichè d' altronde non potrebbe la costante determinarsi nella supposizione di $x = i$, per la quale non sussistendo l' equazione (I) del numero precedente, non può neppure sussistere qualunque altra che possa derivarsene.

28. Un metodo eguale a quello, che si è tenuto per la soluzione del problema precedente serve a risolverne un altro che fu pure proposto dal Laplace (1), e di cui sembra opportuno di recare qui la soluzione da esso lui datane con qualche rischiarimento, che ne renderà facile l' intelligenza per avventura difficile a chiunque si accingesse a meditarla nella citata opera della Teoria analitica delle probabilità. Il problema, che ora proponesi colle parole stesse del mentovato Autore è il seguente:

„ Un nombre $n+1$ de joueurs jouent ensemble aux con-
„ ditions suivantes. Deux d' entre eux jouent d'abord, et celui

(1) V. Laplace. Opera sopra citata pag. 238.

„ qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour „ n'y rentrer qu' après que tous les autres joueurs ont joué; „ ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui per- „ dent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux „ premiers joueurs qui a gagné, joue avec le troisième, et „ s' il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et „ ainsi de suite jusqu' à ce qu' il perde, ou jusqu' à ce qu' „ il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier „ cas, la partie est finie. Mais si le joueur gagnant au pre- „ mier coup, est vaincu par l' un des autres joueurs, le vain- „ queur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jus- „ qu' à ce qu' il soit vaincu, ou jusqu' à ce qu' il ait gagné „ de suite tous les joueurs; le jeu continue ainsi jusqu' à ce „ qu' il y ait un joueur qui gagne de suite tous les autres, ce „ qui finit la partie, et alors le joueur qui la gagne, emporte „ tout ce qui a été mis au jeu. „

Ciò posto si offrono in un solo due problemi, l' uno dei quali riguarda il determinare la probabilità, che può indicarsi per z_x, che il giuoco o la partita finisca precisamente al colpo x^{esimo}, cioè che accaduto questo colpo uno qualunque de' giuocatori abbia superati gli altri n vincendo per n colpi di seguito. L' altro problema si riferisce alla ricerca della probabilità totale, che il giuoco sia terminato dentro x colpi, potendo finire nel colpo x^{esimo}, od in alcuno de' precedenti. Considerando quindi innanzi all' altro il primo degli accennati problemi è facile il riflettere che z_x sarà la somma di tutte le probabilità composte derivanti dalla doppia supposizione, che il giuocatore fortunato abbia vinto n colpi di seguito terminati col colpo x^{esimo}, e che sia entrato in giuoco al colpo $x-n+1^{esimo}$ vincendo in questo contro un altro, che può aver vinto precedentemente un solo colpo oppure due, tre, quattro ec. fino ad $n-1$ colpi di seguito. Si avranno dunque

altrettante probabilità parziali componenti colla lor somma il valore di z_x quante sono le unità in $n-1$. Indicando ora per P la probabilità, che il giuocatore superato nel colpo $x-n+1^{esimo}$ abbia vinto precedentemente a questo m colpi di seguito, essendo m non <1, e non $>n-1$, $P \times \frac{1}{2^n}$ esprimerà generalmente la probabilità parziale del terminarsi la partita al colpo x^{esimo}. Ma se la partita terminasse col colpo $x-m^{esimo}$ sarebbe $z_{x-m} = P \times \frac{1}{2^{n-m}}$, e $P = z_{x-m} . 2^{n-m}$, poichè se il giuocatore superato al colpo $x-n+1^{esimo}$ avesse continuato a vincer sempre, la partita sarebbe terminata m colpi prima, perciò l' esposta probabilità parziale sarà espressa da $\frac{z_{x-m} . 2^{n-m}}{2^n}$; e facendo m successivamente $=1, =2, =3$, ec. $=n-1$, e sommando le probabilità parziali, che ne derivano, si avrà anche secondo le cose già dette

$$(M) \ldots z_x = \frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1}.$$

Ora si vede che indicando per u la funzione generatrice di z_x, quella di $\frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} \ldots + \text{ec.} + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1}$ deve essere $u \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{2^2} t^2 + \frac{1}{2^3} t^3 \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} t^{n-1} \right)$, e queste due funzioni sarebbero pure eguali se l'equazione proposta sussistesse per ogni valore di x. Ma quando $x = n$ si ha $z_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, perchè dovendo finire la partita col colpo n^{esimo} qualunque sia il giuocatore che vinca nel primo, essendo pur certo, che di due giuocatori che cominciano il giuoco l'uno dee vincere avendo inoltre a suo favore la stessa probabilità che ha l'altro, basterà perciò, che quegli che ottiene favorevole il primo colpo ottenga anche gli $n-1$ successivi, e quindi la

probabilità z_n dovrà essere il prodotto della certezza per la probabilità di vincere per $n-1$ colpi di seguito, il quale appunto si esprime per $1 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$. D'altronde il secondo membro della stessa equazione divien nullo come è evidente nell' ipotesi di $x=n$. Dunque dalla funzione generatrice di z_x per eguagliarla a quella del secondo membro dell' equazione (M) si dovrà sottrarre il termine $\frac{t^n}{2^{n-1}}$ cioè si avrà $u - \frac{t^n}{2^{n-1}} = u\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2^2}t^2 + \frac{1}{2^3}t^3 \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}t^{n-1}\right)$

$= \frac{ut\left(\frac{t^{n-1}}{2^{n-1}} - 1\right)}{t-2}$ e quindi $u(t-2) - ut\left(\frac{t^{n-1}}{2^{n-1}} - 1\right)$

$= (t-2)\left(\frac{t^n}{2^{n-1}}\right)$, onde $u = \frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{1-t+\frac{t^n}{2^n}}$, che è la stessa formola trovata dal Sig. Laplace per l' espressione della funzione generatrice di z_x, la quale pure si riduce all' altra forma datale dallo stesso Autore ponendo $1-t=t'$, $\frac{t^n}{2^n}=t''$ cosicchè

sia $\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{1-t+\frac{t^n}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2^n}t''(2-t)}{t'+t''} = \frac{1}{2^n}t''(2-t)\left(\frac{1}{t'} - \frac{t''}{t'^2} + \frac{t''^2}{t'^3}\right.$

$\left. - \frac{t''^3}{t'^4} + \text{ec.}\right) = \frac{1}{2^n}t''\frac{(2-t)}{1-t}\left(1 - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{t^2}{1-t} + \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{t^{2n}}{(1-t)^2} - \frac{1}{2^{3n}} \times\right.$

$\left.\frac{t^{3n}}{(1-t)^3} + \text{ec.}\right)$. Ora che la funzione generatrice di z_x è stata così ridotta, per avere il valore di z_x basterà trovare generalmente il coefficiente di t^x in $\frac{t'^n(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$, potendo ciascuno dei termini della precedente espressione riferirsi, come è manifesto a

questa forma, dipendentemente dal porre successivamente $r=1$, $=2$, $=3$, $=$ ec. Pertanto il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ o ciò che è lo stesso in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}}(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^r$ qualora sia $r=3$, o comunque >3, si avrà sommando i coefficienti di t^{x-rn}, e di t^{x-rn-1} in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^r$, che si hanno per un' applicazione della formola generale trovata al numero 24, moltiplicati rispettivamente per $\frac{2}{2^{rn}}$, e per $\frac{-1}{2^{rn}}$. E sarà perciò il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ espresso da

$$\frac{2}{2^{rn}}\,\frac{(x-rn+r-1)(x-rn+r-2)\ldots\ldots(x-rn+1)}{1.2.3\ldots.(r-1)}$$

$$-\frac{1}{2^{rn}}\cdot\frac{(x-rn+r-2)(x-rn+r-3)\ldots\ldots(x-rn)}{1.2.3\ldots..(r-1)}$$

$$=\frac{(x-rn+2r-2)}{2^{rn}}\cdot\frac{(x-rn+r-2)(x-rn+r-3)\ldots\ldots(x-rn+1)}{1.2.3\ldots..(r-1)}.$$

Ora poichè quando si ha $r=1$, ovvero $r=2$ non vale questa formola pel coefficiente di t^x rispettivamente in $\frac{t^n(1-t)}{2^n(2-t)}$, ed in $\frac{t^{2n}(2-t)}{2^{2n}(1-t)^2}$, e si sa d' altronde come si è veduto altre volte, che il coefficiente di t^x nello sviluppo di $\frac{1}{1-t}$ è 1, ed in quello di $\frac{1}{(1-t)^2}$ è $x+1$, dunque il coefficiente di t^x in $\frac{t^n(2-t)}{2^n(1-t)}$ è $\frac{2-1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$, ed in $\frac{t^{2n}(2-t)}{2^{2n}(1-t)^2}$ è $\frac{2}{2^{2n}}(x-2n+1)-\frac{1}{2^{2n}}(x-2n)=\frac{x-2n+2}{2^{2n}}$. Perciò il cercato coefficiente totale di t^x in $\frac{1}{2^n}t^n\frac{(2-t)}{1-t}\left(1-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{t^n}{1-t}+\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{t^{2n}}{(1-t)^2}-\text{ec.}\right)$ sarà

$$z_x=\frac{1}{2^n}-\frac{(x-2n+2)}{2^{2n}}+\frac{(x-3n+1)}{1.2.2^{3n}}.(x-3n+4)$$

$$-\frac{(x-4n+1)(x-4n+2)}{1.2.3.2^{4n}}.(x-4n+6)+\text{ec.}$$

formola, in cui per ogni caso particolare, siccome osserva il Sig. Laplace, debbono prendersi tanti termini quante sono le unità intiere nel quoziente $\frac{x}{n}$, locchè è evidente se si rifletta, che ogni termine della trovata espressione contiene una differenza che in generale può indicarsi per $x-rn$, la quale, quando riesca quantità positiva $<n$, pone un limite inclusivo al numero de' termini da prendersi, essendochè risultando allora la differenza $x-(r+1)n$ quantità negativa non può più considerarsi come si è fatto per uno degli esponenti di t in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^r$ ove gli esponenti tutti sono necessariamente positivi. Secondo questa regola per altro si avrebbe posto $x=n$, $z_n=\frac{1}{2^n}$, mentre si sa dover essere $z_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. Questo apparente paradosso si dilegua col riflettere, che nella supposizione di $x=n$ non vi ha luogo a prendere il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ che nel caso di $r=1$, cioè per un solo termine della serie a cui è stata ridotta l' espressione della funzione generatrice di z_x. Quindi il coefficiente di t^x o di t^n in $\frac{t^n(2-t)}{2^n}(1+t+t^2\text{ ec.})$ non essendovi esponenti negativi nella serie $1+t+t^2+\text{ ec.}$ sarà $\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$ come dovea dimostrarsi.

Resta ora a sciogliersi il secondo problema col quale trattasi di determinare z'_x, per cui vuolsi esprimere la somma delle probabilità secondo le quali può rispettivamente la partita terminarsi dal colpo n^{esimo} fino allo x^{esimo} inclusivamente per amendue questi estremi. La funzione generatrice pertanto di z'_x sarà $u(1+t+t^2+t^3....+t^{x-n})$, giacchè essendo u la funzio-

ne generatrice di z_x tale dev' essere quella di z'_x, o ciò che è lo stesso di $z_x + z_{x-1} + z_{x-1} \ldots\ldots\ldots + z_n$. E poichè $u(1+t+t^2+t^3\ldots+t^{x-n}) = \frac{u(t^{x-n+1}-1)}{t-1} = \frac{u}{1-t} - \frac{ut^{x-n+1}}{1-t}$, con un raziocinio simile a quello, che fu praticato al numero 25. si proverà, che la funzione generatrice di z'_x si riduce ad $\frac{u}{1-t} = \frac{1}{2^n} t^n \frac{(2-t)}{1-t} \cdot \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{t^n}{(1-t)^2} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{t^{2n}}{(1-t)^3} - \frac{1}{2^{3n}} \cdot \frac{t^{3n}}{(1-t)^4} + \text{ec.} \right)$ rispetto alla quale prendendo in un modo analogo al già usato precedentemente nel trovare il valore di z_x i coefficienti di t^x in $\frac{t^{rn}}{2^{rn}} \cdot \frac{(2-t)}{(1-t)^{r+1}}$ fatto successivamente $r=2$, $=3$, $=4$ ec., ed osservando, che il coefficiente di t^x in $\frac{t^n}{2^n} \frac{(2-t)}{(1-t)^2}$ è $\frac{x-n+2}{2^n}$, si trova

$$z'_x = \frac{x-n+2}{2^n} - \frac{(x-2n+1}{1.2.2^{2n}} \cdot (x-2n+4)$$
$$+ \frac{(x-3n+1)(x-3n+2)}{1.2.3.2^{3n}} \cdot (x-3n+6) - \text{ec.}$$

espressione, la quale, come pure osserva il Sig. Laplace, si verifica anche nel caso di $x=n$, avendosi allora $z'_x = z_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Le precedenti considerazioni guidano il Sig. Laplace ad altre più difficili e specialmente collegate col maneggio di equazioni a differenze finite parziali. La risoluzione di queste in generale sarà quindi uno degli oggetti di altra memoria, nella quale si mostreranno anche, senza uscire dal calcolo dei finiti, gli usi più elevati, e le ulteriori applicazioni del metodo delle funzioni generatrici.