RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE GENERALE COMPLETA DI SECONDO GRADO A TRE INDETERMINATE

MEMORIA

DI GEMINIANO POLETTI

PRESENTATA

DAL SIG. CONTE GIOVANNI PARADISI SOCIO

nel dì 27. *Gennajo* 1819.

ED APPROVATA

DAL SOCIO SIG. PROFESSOR BORDONI

Fra gl' industriosi cultori della scienza de' numeri occupa altissimo seggio l' immortale Lagrange. Questo sublime spirito con acute viste, con ingegnosi artifizii, con dirette dimostrazioni cotanto arricchì una parte di questo vastissimo campo, che proseguendola a coltivare dura cosa non sarebbe raccorre in essa nuovi frutti. E in vero assaissimo mi hanno giovato e le sottili quistioni intorno varie proprietà de' numeri da lui disputate, e le profonde disquisizioni da lui fatte sovra le equazioni indeterminate di secondo grado, per giugnere alla soluzione dell' equazione generale completa parimente di secondo grado a tre indeterminate. Risoluzione che non priva di novità estimo, e la quale è scopo de' ragionamenti, e calcoli che passo ad esporre.

§. 1. L' equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate, mentre si voglia risolverla in numeri razionali, si può ridurre ad una forma più semplice.

L' enunciata equazione è

(H) $au^2+buv+cv^2+du+ev+fw^2+gvw+huw+iw+k=0$

esprimendo i coefficienti a, b, c, ec. k numeri interi, ed u, v, w le tre indeterminate. Risolta per u si troverà

$$2au+bv+hw+d=\sqrt{[(bv+hw+d)^2-4a(cv^2+ev+fw^2+gvw+iw+k)]}$$

ove le u, v, w dovendo rappresentare numeri razionali è mestieri, che la quantità sotto il vincolo radicale

$$(bv+hw+d)^2-4a(cv^2+ev+fw^2+gvw+iw+k)=(b^2-4ac)v^2+2(bh-2ag)vw$$
$$+2(bd-2ae)v+(h^2-4af)w^2+2(hd-2ai)w+d^2-4ak$$

sia un numero quadrato. Chiamato adunque questo z^2, e fatto per abbreviazione

$$b^2-4ac=\alpha$$
$$bh-2ag=\beta$$
$$bd-2ae=\gamma$$
$$h^2-4af=\delta$$
$$hd-2ai=\varepsilon$$
$$d^2-4ak=\varphi,$$

avremo

I.ª $$2au+bv+hw+d=\pm z$$
$$z^2=\alpha v^2+2\beta vw+2\gamma v+\delta w^2+2\varepsilon w+\varphi.$$

Parimente sciolta questa ultima equazione per rispetto alla v ricaveremo l' altra

$$\alpha v+\beta w+\gamma=\sqrt{[(\beta w+\gamma)^2-\alpha(\delta w^2+2\varepsilon w+\varphi)+\alpha z^2]}$$

la razionalità della quale vuole che l' espressione

$$(\beta w+\gamma)^2-\alpha(\delta w^2+2\varepsilon w+\varphi)+\alpha z^2=(\beta^2-\alpha\delta)w^2$$
$$+2(\beta\gamma-\alpha\varepsilon)w+\gamma^2-\alpha\varphi+\alpha z^2$$

uguagli un quadrato che diremo y^2. E quindi otterremo

II.ª $$\alpha v+\beta w+\gamma=\pm y$$
$$y^2=Aw^2+2Bw+C+\alpha z^2$$

essendo

$$A=\beta^2-\alpha\delta$$
$$B=\beta\gamma-\alpha\varepsilon$$
$$C=\gamma^2-\alpha\varphi.$$

In fine risolvendo per rapporto alla w l' equazione

$$y^2=Aw^2+2Bw+C+\alpha z^2$$

ci risulterà

$$A\omega + B = \sqrt{(B^2 - A(C + az^2) + Ay^2)}.$$

E poichè il primo membro è razionale, nulla s'oppone di designarne con x^2 il secondo, e così essa equazione si convertirà nelle due seguenti

$$\text{III.}^a \qquad A\omega + B = x$$

$$(\pi) \qquad x^2 = Ay^2 - Aaz^2 + B^2 - AC.$$

Onde apertamente scorgesi che l'equazione completa generale di secondo grado a tre indeterminate è stata trasformata nella equazione (π) di forma più semplice della (H).

§. 2. Quali condizioni si debbano soddisfare, acciocchè le u, v, ω acquistino valori in numeri interi atti a verificare la equazione (H).

Dalle equazioni I^a, II^a, III^a del §.° precedente traesi

$$u = \frac{\pm z - h\omega - bv - d}{2a}$$

$$v = \frac{\pm y - b\omega - \gamma}{a}$$

$$\omega = \frac{\pm x - B}{A}.$$

Perchè adunque le u, v, ω esprimano numeri interi occorre: 1° che le x, y, z acquistino parimenti de' valori in numeri interi, i quali verifichino la (π): 2° che $\pm x - B$ sia un multiplo di A: 3° che sia divisibile esattamente per a l'espressione $\pm y - \beta\omega - \gamma$: e 4° che $2a$ sia divisore esatto di $\pm z - h\omega - bv - d$. A cagione delle quali condizioni, posciachè si avranno trovati tutti li possibili valori in numeri interi delle indeterminate x, y, z, converrà: che quelli della x in tutto od in parte dieno $\frac{\pm x - B}{A}$ numero intero: che i valori della ω combinati con quelli della y rendano intero $\frac{\pm y - b\omega - \gamma}{a}$: e che altresì i ricavati valori delle ω, v, assieme con quelli della z producano quoti esatti nella divisione $\frac{\pm z - h\omega - bv - d}{2a}$.

§. 3. Egli è manifesto che domandandosi la soluzione della (H) in numeri semplicemente razionali, in questo caso non si ha da soddisfare altra condizione, che quella di esprimere con analoghi numeri le x, y, z.

§. 4. Risolvere in numeri razionali, o interi l' equazione indeterminata

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

essendo A, B, C numeri interi.

Attribuito a una qualunque delle indeterminate x, y, z un valore razionale, od intero, ne risulterà una equazione di secondo grado a due indeterminate.

Infatti se diasi alla indeterminata z un valore razionale $\frac{d}{D}$, in questo caso si dovrà risolvere l'equazione della forma $Dx^2 = Ey^2 + F$. E dato che vi si attribuisca un valore intero G, l' equazione da sciogliersi sarà $x^2 = Ay^2 + BG^2 + C$. Ora non avremo da superare assai difficoltà per ottenere la risoluzione di queste equazioni, perchè basterà applicarvi i metodi di Lagrange (*).

Ma siffatte risoluzioni della proposta sono alquanto imperfette. 1.° Perchè ad ogni valore attribuito a cagion d' esempio alla z si ottiene una particolare equazione in x, y; e quindi riesce il calcolo sommamente laborioso. 2.° Perchè (e questa è più salda ragione) l' assegnato valore della z è arbitrario, e non già desunto dai rapporti, che legano questa indeterminata colle altre due. Per le quali ragioni crederemmo di non far cosa inutile rivolgendoci ad investigare la soluzione diretta della proposta equazione, pel qual fine passeremo a trattare le seguenti questioni.

§. 5. Data l' equazione

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

(*) Mem. de Berlin an. 1767.

nella quale A, B, C sono numeri interi, e le x, y, z dinotano numeri fratti razionali, trasformarla in un' altra, che abbia i suoi coefficienti non divisibili esattamente per numeri quadrati

Siccome le x, y, z esprimono frazioni razionali, così far potrassi $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$, $z = \frac{z'}{t'}$, dove scorgesi che t' dinota il comune denominatore delle x, y, z. Quindi dall'equazione data si otterrà l' altra

$$x'^2 = Ay'^2 + Bz'^2 + Ct'^2.$$

Ora dicansi h'^2, k'^2, l'^2 i più grandi divisori quadrati, che rispondentemente appartengono ai coefficienti A, B, C; e facciasi $A = h'^2A'$, $B = k'^2B'$, $C = l'^2C'$. Sostituiti questi valori nella precedente equazione, si otterrà

$$x'^2 = A'h'^2y'^2 + B'k'^2z'^2 + C'l'^2t'^2.$$

E posto $h'y' = y''$, $k'z' = z''$, $l't' = t''$, si avrà

$$x'^2 = A'y''^2 + B'z''^2 + C't''^2,$$

ove i numeri A', B', C' sono sibbene interi, ma non divisibili per numeri quadrati.

§. 6. Quindi chiaro apparisce che avremo risolta in numeri razionali l' equazione (π), tostochè saremo giunti a risolvere in numeri interi l' equazione della forma $x^2 = Ay^2 + Bz^2 + Ct^2$, rappresentando A, B, C numeri interi non divisibili per quadrati. All' effetto di ottenere la qual risoluzione, vuolsi primamente rivolgere le nostre indagini allo scioglimento del seguente problema.

§. 7. Risolvere in numeri interi l' equazione

$$\text{(I)} \qquad x^2 + Ay^2 = z^2 + Ct^2,$$

esprimendo le x, y, z, t numeri primi tra loro, ed A, C due numeri interi.

Pongasi

$$z^2 + Ct^2 = s$$

essendo s una nuova indeterminata, si avrà

$$x^2 + Ay^2 = s.$$

Denominisi poi ω il massimo comun divisore tra x, y; e θ quello fra z, t; talchè sia $x = \omega x_{(1)}$, $y = \omega y_{(1)}$, $z = \theta z_{(1)}$, $t = \theta t_{(1)}$.

Sostituiti questi valori delle x, y, z, t nelle due ultime equazioni, avremo

$$x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = \frac{s}{\omega^2}$$

$$z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = \frac{s}{\theta^2},$$

dove $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ esprimono due numeri primi tra loro, e medesimamente lo dinotano $z_{(1)}$, $t_{(1)}$. Inoltre dovendo essere $\frac{s}{\omega^2}$, $\frac{s}{\theta^2}$ due numeri interi; per ciò, fatto $s = \omega^2 s'$, $s = \theta^2 s''$, si otterranno le equazioni

$$(1) \qquad x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = s'$$

$$(2) \qquad z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = s''$$

$$(3) \qquad s' = \frac{\theta^2 s''}{\omega^2},$$

l'ultima delle quali ci mostra che ω^2 debb' essere divisore esatto di $\theta^2 s''$. Ora nè ω, nè alcuno de' suoi divisori semplici, i quali diremo ω', ω'', ω''' ec., può dividere θ. Imperciocchè vogliasi $\theta = \mu\omega$, ovvero $\theta = \mu'\omega'$ ec. si avranno le equazioni

$$x = \omega x_{(1)},\ y = \omega y_{(1)},\ z = \mu\omega z_{(1)},\ t = \mu\omega t_{(1)}$$

$$x = \omega'\omega''\omega''' \ldots x_{(1)},\ y = \omega'\omega''\omega''' \ldots y_{(1)},\ z = \mu'\omega' z_{(1)},\ t = \mu'\omega' t_{(1)};$$

le quali tantosto ci appalesano che le x, y, z, t non sarebbero prime tra loro; il che è contro la supposizione. Onde conchiudesi che se debb' essere s' un intero, converrà che ω^2 divida esattamente s''. Poniamo adunque $s'' = \omega^2 s'''$, l' equa-

zione (3) ci darà $s' = \theta^2 s'''$, e le equazioni (1), (2) addiveranno

$$(4) \qquad x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = \theta^2 s'''$$

$$(5) \qquad z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = \omega^2 s''' .$$

Dal che apertamente si comprende, che la soluzione della proposta ha nelle equazioni (4), (5) i suoi fondamenti. Ma si osservi che ciascuno dei numeri θ, s''', θ^2, $\theta^2 s'''$ dev' essere divisore esatto di $x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)}$: e che trovato s''' dalla (4), l' equazione (5) ci presenta da cercare soltanto le indeterminate $z_{(1)}$, $t_{(1)}$, ω, essendo i numeri ω, ω^2 fattori di $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)}$. Le quali osservazioni ci scuoprono, che sì la soluzione della (4), come quella della (5) hanno base in alcuni principj sviluppati dal celeberrimo Legendre nella sua Opera *Essai sur la théorie des nombres;* principj in massima parte ricavati dalle investigazioni numeriche del sommo Lagrange. E perchè giova ch' essi siano conosciuti, acciò che chiare appariscano le predette soluzioni, per questo ci avvisiamo semplicemente rammentarli, il leggitore potendo all' uopo ricorrere alle Opere dei due sullodati Geometri, quantunque volte amasse apprenderne le loro dimostrazioni.

§. 8. Qualunque divisore della formola $z^2 + at^2$, nella quale z, t esprimono due numeri primi tra loro, ed a dinota un numero intero positivo o negativo, può essere rappresentato dalla formola quadrativa

$$py'^2 + 2qy't + rt^2 ,$$

i cui numeri p, q, r sono dati dalla seguente equazione $\frac{q^2 + a}{p} = r$ (*).

(*) Legendre. Essai sur la théor. des nomb. (136), (137) Ed. 1.ª

Dal rinomato Lagrange si è poi dimostrato (*) che la formola indeterminata $py'^2 + 2qy't + rt^2$ può essere trasformata in un' altra simigliante, nella quale il coefficiente $2q$ riducesi ad aver valore minore di ciascuno de' coefficienti estremi p, r, quando avvenisse mai ch' esso li eccedesse, senza che per ciò rimanga distrutta l' equazione di condizione $rp - q^2 = a$. Per lo che eseguita che sia l' enunciata riduzione si conchiude (**).

1.° Che ogni divisore dell' espressione $z^2 + at^2$, mentre sia $a > 0$, può essere rappresentato dalla formola $py'^2 + 2qy'y'' + ry''^2$: avendosi $rp - q^2 = a$, $2q < p$ ed r; e per conseguenza $q < \sqrt{\frac{a}{3}}$.

2.° Che ogni divisore di $z^2 - a't^2$ può esprimersi da $py'^2 + 2qy'y'' - ry''^2$: essendo p, q, r dati dall' equazione $rp + q^2 = a'$, ed essendo pure $2q < p$ ed r; onde risulta $q < \sqrt{\frac{a'}{5}}$.

In amendue i sopraddetti casi le y', y'' debbono essere due numeri primi tra se. La qual condizione ci conduce ad affermare, che ogni numero compreso nella formola $py'^2 + 2qy'y'' \pm ry''^2$ è necessariamente divisore della formola $z^2 + at^2$ (***).

Gioverà pure avvertire, che ogni divisore quadrativo $py'^2 + 2qy'y'' - ry''^2$ della formola $z^2 - a't^2$ debb' essere accoppiato col suo inverso $ry'^2 + 2qy'y'' - py''^2$. Le quali due formole ponno divenire identiche: e questo accade, quando a' abbia tal valore che dipendentemente da esso si possano determinare due numeri h, k, che verifichino l' equazione $h^2 - a'k^2 = 1$ (****).

§. 9. Dichiariamo i menzionati principj con qualche esem-

(*) Mem. de Berlin. an. 1773.
(**) Legendre Op. cit. (138).
(***) Lo stesso (139).
(****) Lo stesso (90).

pio, il quale ci servirà in appresso a vie meglio schiarire l' equazione, che ci siamo proposti di risolvere.

Abbiansi a trovare i divisori quadrativi della formola $z^2 + 89t^2$.

Le condizioni che si deggiono soddisfare (§. precedente) sono: $pr - q^2 = 89$, $2q < p$ ed r; e $q < \sqrt{\frac{89}{3}}$ ossia < 6. Onde si avranno i seguenti risultati

1.° Sia $q = 0$, si avrà $pr = 89$; quindi $p = 1$, $r = 89$

2.° Sia $q = 1$, ne verrà $pr = 90$; onde $\begin{cases} p = 3, & r = 30 \\ p = 5, & r = 18 \\ p = 6, & r = 15 \\ p = 9, & r = 10 \\ p = 45, & r = 2 \end{cases}$

3.° Sia $q = 2$, sorgerà $pr = 93$, il qual numero non è decomponibile in due fattori > 4.

4.° Sia $q = 3$, sarà $pr = 98$; e perciò $p = 7$, $r = 14$.

5.° Sia $q = 4$, si avrà $pr = 105$, numero che non contiene fattori > 8.

6° Sia $q = 5$, si otterrà $pr = 114$, dal qual numero non si può ricavare alcun fattore > 10.

Adunque disegnati i chiesti divisori colle lettere A', B', C' ec., saranno

$$\begin{aligned}
A' &= y'^2 + 89y''^2 \\
B' &= 3y'^2 + 2y'y'' + 30y''^2 \\
C' &= 5y'^2 + 2y'y'' + 18y''^2 \\
D' &= 6y'^2 + 2y'y'' + 15y''^2 \\
E' &= 9y'^2 + 2y'y'' + 10y''^2 \\
F' &= 45y'^2 + 2y'y'' + 2y''^2 \\
G' &= 7y'^2 + 6y'y'' + 14y''^2.
\end{aligned}$$

E di quì si conchiude che la formola $z^2 + 89t^2$ ha sette divisori quadrativi.

§. 10. Altre proprietà concernenti li divisori quadrativi della formola $z^2 + at^2$ sono state poste in lume dal Legendre nella citata Opera, alla quale può opportunamente riportarsi chiunque ami esserne pienamente istruito. Soltanto avvertiremo che per li casi delle particolari soluzioni delle equazioni, le quali è scopo nostro lo svolgere, potranno essere utili le tavole che il prelodato Autore ha compilate, che contengono i divisori quadrativi della formola $t^2 \pm cu^2$, quando c rappresenta un numero nè quadrato nè divisibile per alcun quadrato, le quali si trovano inserite alla fine di essa Opera, essendo contraddistinte coi numeri III, IV, V, VI (*).

§. 11. Oltre il metodo semplicemente enunciato (§. 8) di trovare i divisori quadrativi della formola $z^2 \pm at^2$, apertamente vedesi, ch' è mestieri per la risoluzione delle equazioni (4), (5), (§. 7) conoscer eziandio quello, mediante il quale si determinano i divisori quadrativi della medesima formola, che includono il prodotto di parecchi divisori similmente quadrativi; il perchè indicheremo la soluzione dei due seguenti problemi relativi ai detti divisori (**).

I.° Dell'espressione $z^2 + at^2$ dati i due divisori quadrativi

$$\Delta = p'y'^2 + 2qy'y'' + ry''^2$$
$$\Delta' = p'y_1'^2 + 2q'y_1'y_1'' + r'y_1''^2,$$

trovare il divisore quadrativo del prodotto $\Delta\Delta'$.

Si avrà

$$\Delta\Delta' = pp'\,Y^2 + 2\phi\,YY' + \psi Y'^2,$$

essendo

$$Y = (y' \pm ny'')(y_1' - n'y_1'') \pm \psi y''y_1''$$
$$Y' = (py' + qy'')y_1'' \mp (p'y_1' + q'y_1'')y'';$$

e determinandosi le quantità n, n', ϕ, ψ dalle seguenti equazioni

(*) Per la formazione delle indicate tavole veggasi l' Op.e cit.e (213).

(**) Per la dimostrazione del primo veggasi l' Op. cit. di Legendre (362) (363).

$$(\alpha) \qquad pn \mp q = p'n' + q'$$

$$(\beta) \qquad \varphi = pn \mp q = p'n' + q'$$

$$(\gamma) \qquad \psi = \frac{\varphi^2 + a}{pp'},$$

ove in questa ultima dovrà essere pp' divisore esatto di $\varphi^2 + a$.

Notisi che a cagion del doppio segno esistente nell' equazione (α) il problema considerato generalmente ha due soluzioni: però non è suscettibile di averne più di due.

II.° Posto che i dati divisori quadrativi sieno simili ed espressi da

$$\Delta = py'^2 + 2qy'y'' + ry''^2$$
$$\Delta' = py_1'^2 + 2qy_1'y_1'' + ry_1''^2,$$

determinare parimente il divisor quadrativo del prodotto $\Delta\Delta'$.

Ne' valori precedenti sostituiscansi p, q, r alla vece di p', q', r', si otterrà il prodotto

$$\Delta\Delta' = p^2 Y^2 + 2\varphi YY' + \psi Y'^2,$$

dove sarà

$$Y = (y' - ny'')(y_1' - ny_1'') - \psi y'' y_1''$$
$$Y' = p(y'y_1'' + y_1'y'') + 2qy''y_1'':$$

e le equazioni (β), e (γ) si convertiranno nelle altre

$$\varphi = np + q, \quad \psi = \frac{\varphi^2 + a}{p^2}.$$

Ma abbiamo enunciato che è $rp - q^2 = a$ (§. 8), per conseguente ne verrà

$$\psi = \frac{r + 2nq}{p} + n^2.$$

Per tanto determinati i più piccoli valori, che soddisfanno all'equazione $r = mp - 2nq$ ricavata dal porre $\frac{r+2nq}{p} = m$ numero intero, si sarà adempiuto ad ogni condizione, e si avrà

$$\varphi = q + np, \quad \psi = m + n^2.$$

Il prodotto $\Delta\Delta'$ ha eziandio un valore della forma $z^2 + at^2$, che si determina nel seguente modo.

Facciasi $py' + qy'' = x$, $py_1' + qy_1'' = x'$, si avrà

$$\Delta\Delta' p^2 = (x^2 + ay''^2)(x'^2 + ay_1''^2),$$

e da quì

$$\Delta\Delta' = \frac{(xx' - ay''y''_1)^2 + a(xy_1'' + x'y'')^2}{p^2}.$$

Ora nella quantità $xx' - ay''y''_1$ sostituiti i valori delle x, x', e quello di $a = rp - q^2$ si otterrà

$$\Delta\Delta' = (py'y_1' + qy'y_1'' + qy_1y'' + ry''y''_1)^2 + a(y'y''_1 - y_1'y'')^2,$$

che è il cercato prodotto.

§. 12. Da ciò che si è detto nel §. precedente non è disagevole lo scorgere, come si debba procedere qualora abbiasi da determinare il quadrato di un dato divisore quadrativo. Perciocchè in questo caso Δ' diventa identico a Δ; onde avrassi pure una sola forma, perchè avendosi $y'y_1'' - y_1'y'' = 0$, l' ultimo valore di $\Delta\ \Delta'$ del §. precedente non serba più la forma quadrativa.

§. 13. In generale, siccome può esprimersi il prodotto di due dati divisori quadrativi uguali o disuguali con una formola della medesima natura, la quale è parimente un divisor quadrativo, così ne segue, che si potrà eziandio trovare un divisore quadrativo eguale al prodotto di parecchi altri divisori quadrativi. E se trattasi soltanto della forma de' prodotti, si potranno questi determinare facilmente senza darci briga di cercare il valore delle indeterminate inclusevi: il che rende il problema assai più semplice, attesochè basta operare sopra i coefficienti, i quali offrono un numero limitato di combinazioni.

Disegnati poi colle lettere A', B', C', ... i differenti divisori quadrativi pertinenti a una data formola $z^2 + at^2$, e determinate, col mezzo del metodo sopra enunciato, le formole rispondenti ai diversi prodotti A'A', A'B', A'C',....; B'B', B'C'...., se rinvengasi il prodotto A'B' di forma eguale a C', e quello di A' C' sì della forma D', come della forma E', si scriverà $A'B' = C'$, $A'C' = \left\{ \begin{matrix} D' \\ E' \end{matrix} \right.$; e lo stesso sarà notato per gli altri

prodotti. Essendo determinati i prodotti concernenti le combinazioni a due a due, col mezzo di essi si ricaveranno quelli, che spettano alle combinazioni a tre a tre, e così di seguito. E quì avvertiremo che l'espressione $B' B'$ è diversa da B'^2. Perocchè colla prima dinotiamo il prodotto di due simili divisori quadrativi avente soltanto le indeterminate diverse, e colla seconda rappresentiamo il quadrato del divisore B', e conseguentemente abbiamo i due fattori B', B' identici tanto ne' coefficienti, quanto nelle indeterminate. Sovra di che rammenteremo di nuovo che B'^2 è suscettibile di una sola forma, e $B' B'$ ne può acquistar due.

Premesse le sopraddette cose intorno ai divisori quadrativi della formola $z^2 + at^2$, passeremo col soccorso di esse a condurre in pieno lume le risoluzioni delle equazioni (4) e (5).

§. 14. Risolvere in numeri interi l' equazione

$$(4) \qquad x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = \theta^2 s'^2,$$

essendo A un numero intero.

Egli è manifesto che avremo risoluta l' equazione proposta, qualora saremo giunti ad esprimere le $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, θ, s'^2 in funzioni intere d' indeterminate independenti. Il che sarà da noi fatto nel seguente modo.

Primamente si determinino tutti li divisori quadrativi della formola $x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)}$ col metodo indicato nel §. 8; e dicansi $A', B', C', D', \ldots$. Dappoi a cagione che il secondo membro della proposta rappresenta il prodotto del quadrato dell' indeterminata θ per l' altra indeterminata s'^2, si cerchino (§.i 11, 12, 13) i prodotti ch' esprimono tutte le possibili combinazioni A'^2A', A'^2B',....; B'^2A', B'^2B',... ; C'^2A'.... Ciò trovato, si segnino quelli che hanno la forma $x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)}$: è chiaro che quanti saranno essi prodotti altrettante soluzioni si otterranno della data equazione. In seguito si uguagli ciascuno dei

marcati prodotti al primo membro della proposta. Da siffatte equazioni si ricaveranno i valori delle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$ in funzione delle indeterminate indipendenti inchiuse nei suddetti prodotti. I quali uguagliando eziandio $\theta^2 s'''$ manifestamente scorgesi, che i loro divisori semplici quadrativi esprimeranno rispondentemente i valori delle θ, s'''; e quindi anche le θ, s''' saranno funzioni delle sopraddette indeterminate indipendenti. E in tal guisa rimane sciolta la (4), la quale soluzione schiariremo più sotto con un esempio.

§. 15. In adesso denominati D, $D_{(1)}$, $D_{(2)}$ ec. i valori della s''', che si ritraggono colla risoluzione dell'antecedente problema, e sostituiti questi valori nella equazione (5) si otterranno le equazioni $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D\omega^2$, $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D_{(1)}\omega^2$, $z_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D_{(2)}\omega^2$ ec., le quali saranno tante, quanti sono i valori che può acquistare la s'''. Da quì poi apertamente scorgesi, che per ottenere la soluzione di queste ultime equazioni, basterà mostrare come se ne sciolga una qualunque; stantechè sono tutte della medesima forma: il che tosto passiamo a fare.

§. 16. Risolvere in numeri interi l'equazione

$$(6) \qquad z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)} = D\omega^2,$$

essendo C, D due numeri interi.

Poichè $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ sono numeri primi tra loro (§. 7.); perciò lo dovranno altresì essere $t_{(1)}$, D: come apertamente vedesi. Quindi si potranno sempre determinare due numeri n, r tali, d'aversi $z_{(1)} = nt_{(1)} + Dr$. Ora sostituito nell'equazione proposta il valore di $z_{(1)}$, si otterrà

$$\left(\frac{n^2+C}{D}\right) t^2_{(1)} + 2nt_{(1)}r + Dr^2 = \omega^2,$$

dove essendo $t_{(1)}$, D due numeri primi tra se, dovrà essere

n^2+C divisibile esattamente per D: per tanto posto $n^2+C=Dm$, si avrà

$$(7) \qquad mt^2_{(1)} + 2nt_{(1)}r + Dr^2 = \omega^2,$$

la qual equazione ha il secondo membro privo del fattore costante D. E perchè hassi $n^2 - Dm = -C$, ne segue che il primo membro dell' equazione (7) è un divisore quadrativo della formola $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)}$ (§. 8).

Altronde chiaramente vedesi, che si avranno da risolvere tante equazioni (7), quanti saranno i valori di n che rendono $\frac{n^2+C}{D} = m$ numero intero: i quali valori sono compresi tra o, e $+\frac{1}{2}D$, siccome è noto dalla risoluzione dell' equazione di secondo grado a due indeterminate. Che se niuno dei valori di n soddisferà la predetta condizione, allora si conchiuderà essere la proposta insolubile.

Ma supponiamo che si sieno trovati due valori di m, n, che verifichino la condizione $\frac{n^2+C}{D} = m$ numero intero; e dicansi h, k. L' equazione da risolversi sarà

$$(8) \qquad ht^2_{(1)} + 2kt_{(1)}r + Dr^2 = \omega^2,$$

il cui primo membro rappresenta un divisore quadrativo della formola $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)}$, come già è detto. Laonde per iscioglierla si cerchino dapprima tutti i divisori quadrativi della formola $z^2_{(1)} + Ct^2_{(1)}$ (§. 8), e si disegnino colle A_1, B_1, C_1 ec. Dappoi si trovino i prodotti che rispondono ai quadrati A^2_1, B^2_1, C^2_1, ec. (§.i 11, 12), e si notino quelli che risultano della stessa forma del primo membro della proposta. Fatto ciò, si uguagli ciascuno di siffatti prodotti ad esso primo membro $ht^2_{(1)} + 2kt_{(1)}r + Dr^2$, e si paragonino tra loro i pri-

mi coi secondi membri delle equazioni risultanti. Da questo confronto si ricaveranno per $t_{(1)}$, r dei valori espressi dalle indeterminate indipendenti comprese nei mentovati prodotti dei divisori quadrativi; i quali valori soddisferanno appunto allo scioglimento della proposta equazione. Ma anche questa soluzione sarà da noi posta in maggiore lume con un esempio, che quì sotto esporremo.

§. 17. Ora tutta si scuopre la soluzione della (I). Conciossiachè vedemmo ch' essa dipendeva dalla determinazione delle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, $z_{(1)}$, $t_{(1)}$, ω, θ soggette alle condizioni espresse dalle equazioni (4) e (5), le quali abbiamo appunto risolute nei §.^{i} 14, 15 e precedente.

§. 18. Ma a vie meglio chiarire le soluzioni dei problemi sviluppati in essi paragrafi, proponiamoci di risolvere in numeri interi la seguente equazione

$$x^2 + 89y^2 = z^2 + 41t^2.$$

Abbiamo $A = 89$, $C = 41$, e la proposta rimane decomposta nelle altre due equazioni (§. 7.)

$$(4)' \qquad x^2_{(1)} + 89y^2_{(1)} = \theta^2 s'''$$

$$(5)' \qquad z^2_{(1)} + 41t^2_{(1)} = \omega^2 s'''.$$

Ora vediamo come si risolva la (4)', e poscia scioglieremo la (5)'.

Si determinino tutti i divisori quadrativi della formola $x^2_{(1)} + 89y^2_{(1)}$. Essi di già si trovarono nel §. 9, e sono i seguenti

$$\begin{aligned}
A' &= y'^2 + 89y''^2 \\
B' &= 3y'^2 + 2y'y'' + 30y''^2 \\
C' &= 5y'^2 + 2y'y'' + 18y''^2 \\
D' &= 6y'^2 + 2y'y'' + 15y''^2 \\
E' &= 9y'^2 + 2y'y'' + 10y''^2 \\
F' &= 45y'^2 + 2y'y'' + 2y''^2 \\
G' &= 7y'^2 + 6y'y'' + 14y''^2.
\end{aligned}$$

Indi si cerchino i quadrati di questi divisori, adoperando

il metodo sopraccennato nel §. 11, dietro l'osservazione fatta nel §. 12; e ci risulterà $A'^2 = A'$, $B'^2 = E'$, $C'^2 = C'$, $D'^2 = E'$, $E'^2 = C'$, $F'^2 = A'$, $G'^2 = F'$. La riflessione pure fatta nel § 13 ci fa discernere, che le formole esposte nel citato §. 11 danno eziandio i valori de' prodotti A'^2B', A'^2C', ec. B'^2B', B'^2C',....; C'^2D'.... Quindi eseguiti a questo effetto gli opportuni calcoli, troveremo

$A'^2A' = A'$	$B'^2A' = E'$	$C'^2A' = C'$	$D'^2A' = E'$	$E'^2A' = C'$	$F'^2A' = A'$	$G'^2A' = F'$
$A'^2B' = F'$	$B'^2B' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ G' \end{matrix} \right.$	$C'^2B' = \left\{ \begin{matrix} D' \\ G' \end{matrix} \right.$	$D'^2B' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ G' \end{matrix} \right.$	$E'^2B' = \left\{ \begin{matrix} D' \\ G' \end{matrix} \right.$	$F'^2B' = F'$	$G'^2B' = D'$
$A'^2C' = D'$	$B'^2C' = \left\{ \begin{matrix} E' \\ F' \end{matrix} \right.$	$C'^2C' = \left\{ \begin{matrix} A' \\ C' \end{matrix} \right.$	$D'^2C' = \left\{ \begin{matrix} E' \\ F' \end{matrix} \right.$	$E'^2C' = \left\{ \begin{matrix} A' \\ C' \end{matrix} \right.$	$F'^2C' = D'$	$G'^2C' = E'$
$A'^2D' = G'$	$B'^2D' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ G' \end{matrix} \right.$	$C'^2D' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ G' \end{matrix} \right.$	$D'^2D' = \left\{ \begin{matrix} D' \\ G' \end{matrix} \right.$	$E'^2D' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ G' \end{matrix} \right.$	$F'^2D' = G'$	$G'^2D' = B'$
$A'^2E' = C'$	$B'^2E' = \left\{ \begin{matrix} A' \\ C' \end{matrix} \right.$	$C'^2E' = \left\{ \begin{matrix} E' \\ F' \end{matrix} \right.$	$D'^2E' = \left\{ \begin{matrix} A' \\ C' \end{matrix} \right.$	$E'^2E' = \left\{ \begin{matrix} E' \\ F' \end{matrix} \right.$	$F'^2E' = C'$	$G'^2E' = C'$
$A'^2F' = B'$	$B'^2F' = C'$	$C'^2F' = E'$	$D'^2F' = C'$	$E'^2F' = E'$	$F'^2F' = B'$	$G'^2F' = A'$
$A'^2G' = E'$	$B'^2G' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ D' \end{matrix} \right.$	$C'^2G' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ D' \end{matrix} \right.$	$D'^2G' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ D' \end{matrix} \right.$	$E'^2G' = \left\{ \begin{matrix} B' \\ D' \end{matrix} \right.$	$F'^2G' = E'$	$G'^2G' = G'$

I quali risultati ci scuoprono quelle combinazioni, che producono la forma A'. E siccome queste si riducono alle sette seguenti A'^2A', B'^2E', C'^2C', D'^2E', E'^2C', F'^2A', e G'^2F'; così siam autorizzati a conchiudere, che altrettante sono le soluzioni della (4)'.

Per mettere poi in chiaro i valori che appartengono alle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, θ, s''', sviluppiamo una delle predette risoluzioni. Scelgasi quella corrispondente alla combinazione B'^2E'. Avendosi adunque $B'^2E' = \theta^2 s'''$, vale a dire $B' = \theta$, $E' = r'''$, sarà

$$\theta = 3y'^2 + 2y'y'' + 30y''^2$$

$$s''' = 9y_1'^2 + 2y_1'y_1'' + 10y_1''^2.$$

Inoltre essendo $B'^2 = E'$, ne verrà

$$\theta^2 = 9Y^2 + 2YY' + 10Y'^2,$$

il secondo membro della qual equazione, come si è asserito, è stato determinato colle formole del §. 11, avendo in vista che i divisori esprimenti θ erano identici, onde avremo

$$Y = y'^2 - 10y''^2,\ Y' = 6y'y'' + 2y''^2.$$

In adesso se moltiplicasi il valore di θ^2 per quello di s''', siccome il prodotto debb' essere della forma $x^2_{(1)} + 89y^2_{(1)}$, così si ricaverà (§. 11. n.° II quando $\Delta\Delta'$ ha la forma di $z^2 + at^2$)

$$\theta^2 s''' = (9Yy_1' + Yy_1'' + Y'y_1' + 10Y'y_1'')^2 + 89(Yy_1'' - Y'y_1')^2.$$

Quindi confrontato il secondo membro di questa equazione col primo della (4)', si otterrà

$$x_{(1)} = 9Yy_1' + Yy_1'' + Y'y_1' + 10Y'y_1''$$

$$y_{(1)} = Yy_1'' - Y'y_1',$$

ossia

$$x_{(1)} = 9(y'^2 - 10y''^2)y_1' + (y'^2 - 10y''^2)y_1'' + 6(y'y'' + 2y''^2)y_1' + 10(6y'y'' + 2y''^2)y_1''$$

$$y_{(1)} = (y'^2 - 10y''^2)y_1'' - (6y'y'' + 2y''^2)y'.$$

Ora facciamo $y' = 0$, $y'' = 1$, come pure per maggior speditezza $y_1' = 0$, $y_1'' = 1$, risulterà $\theta = 30$, $s''' = 10$, $x_{(1)} = 10$, $y_{(1)} = -10$.

Passiamo adesso alla soluzione dell' equazione (5)'. Poichè hassi $s''' = 10$, la (5)' diventerà

$$(6)' \qquad z^2_{(1)} + 41\, t^2_{(1)} = 10\omega^2,$$

la quale si converte nell' altra (§. 16.)

$$(7)' \qquad mt^2_{(1)} + 2nt_{(1)}r + 10r^2 = \omega^2,$$

essendo $z_{(1)} = nt_{(1)} + Dr$, $\frac{n^2+41}{10} = m$. Pertanto fatto $n = \pm(1, 2, 3, 4, 5)$, il valore di $n = 3$, darà $m = 5$; e quindi si avrà da risolvere l' equazione

$$(8)' \qquad 5t^2_{(1)} + 6t_{(1)}r + 10r^2 = \omega^2,$$

il cui primo membro esprime un divisore quadrativo della formola $z^2_{(1)} + 41t^2_{(1)}$ (§. 16). Ma sono i suoi fattori quadrativi (§. 8)

$$A_1 = z'^2 + 2z'z'' + 42z''^2$$
$$B_1 = 2z'^2 + 2z'z'' + 21z''^2$$
$$C_1 = 5z'^2 + 6z'z'' + 10z''^2$$
$$D_1 = 3z'^2 + 2z'z'' + 14z''^2$$
$$E_1 = 6z'^2 + 2z'z'' + 7z''^2 ;$$

per conseguente si otterranno gli altri risultati (§. 11, 12) $A_1^2 = A$, $B_1^2 = A_1$, $C_1^2 = B_1$, $D_1^2 = C_1$, $E_1^2 = C_1$. Dal che scuopresi, ch'essendo il primo membro dell' ultima equazione della forma C_1, per ciò sarà essa suscettibile di due soluzioni, secondochè si porrà $\omega = D_1$, $\omega = E_1$. Teniamo addietro alla prima, e facciamo

$$\omega = 3z'^2 + 2z'z'' + 14z''^2 ,$$

con le formole del §. 11 si troverà

$$\omega^2 = 5Y^2 + 6YZ + 10Z^2 ,$$

dov' è

$$Y = -z'^2 + 4z'z'' + 6z''^2$$
$$Z = \quad z'^2 + 2z'z'' - 4z''^2 .$$

Perciò avremo

$$t_{(1)} = -z'^2 + 4z'z'' + 6z''^2$$
$$r = z'^2 \quad + 2z'z'' - 4z''^2 :$$

ed inoltre

$$z_{(1)} = 3t_{(1)} + 10r .$$

In adesso se poniamo $z'=1$, $z''=2$, otterremo $\omega = 63$, $t_{(1)} = 31$ $z_{(1)} = -17$, valori, che verificano la (5)'.

Ma abbiamo (§. 7.)

$$x = \omega x_{(1)},\ y = \omega y_{(1)},\ z = \theta z_{(1)},\ t = \theta t_{(1)} ;$$

conseguentemente pel caso sviluppato traesi

$$x = 630,\ y = -630,\ z = -510,\ t = 930 .$$

I quali valori sostituiti nella proposta rendono il primo membro identico al secondo.

Con calcoli analoghi potremo ottenere i valori delle

x, y, z, t, che danno tutte le altre soluzioni di cui la proposta è suscettibile.

Così rimane risoluta anche con esempio l'equazione (I). Ora vediamo come si debba procedere per isciogliere la stessa equazione, dato che il primo termine del secondo membro abbia coefficiente.

§. 19. Risolvere in numeri interi l'equazione

$$\text{(II)} \qquad x^2 + Ay^2 = Bz^2 + Ct^2,$$

esprimendo x, y, z, t numeri primi tra loro, ed A, B, C numeri interi dati non divisibili per quadrati.

Dalla data equazione si trae l'altra

$$B(x^2 + Ay^2) = z'^2 + C_{(1)}t^2,$$

essendo $z' = Bz$, $C_{(1)} = BC$. E fatto

$$x^2 + Ay^2 = s,$$

si ottiene

$$z'^2 + C_{(1)}t^2 = Bs.$$

Nominato poi ω il massimo comun divisore tra x, y; e θ quello tra z', t, pongasi

$$x = \omega x_{(1)},\ y = \omega y_{(1)},\ z' = \theta z_{(1)},\ t = \theta t_{(1)}.$$

Inoltre fatto $\frac{s}{\omega^2} = s'$, $\frac{s}{\theta^2} = s''$, facilmente si comprende che s' sarà numero intero, e che lo sarà parimente s'', attesochè B non è divisibile per numero quadrato. Quindi avremo

$$x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = s'$$

$$z^2_{(1)} + C_{(1)}t^2_{(1)} = Bs''$$

$$s' = \frac{\theta^2 s''}{\omega^2}:$$

l'ultima delle quali equazioni per le stesse ragioni addotte nel §. 7, ci fa conoscere che $\frac{s''}{\omega^2}$ è un numero intero. Per tanto chiamato esso s''', si otterranno le equazioni

$$(9) \qquad x^2_{(1)} + Ay^2_{(1)} = \theta^2 s'''$$

$$(10) \qquad z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)} = B\omega^2 s'''.$$

Ma posciachè l' equazione (9) ha la medesima forma di quella che trattammo nel §. 14; per conseguenza potremo risolverla collo stesso metodo, approfittando eziandio delle tavole compilate da Legendre già menzionate nel §. 10, per essere A non divisibile per numero quadrato. Sciolta così la (9) dicansi $D_{(1)}$, $D_{(2)}$, ec. i valori pertinenti alla s''': è palese che avremo a risolvere successivamente le equazioni

$$(11) \quad \begin{cases} z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)} = BD_{(1)} \omega^2 = B_{(1)} \omega^2 \\ z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)} = BD_{(2)} \omega^2 = B_{(2)} \omega^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dov' è $B_{(1)} = BD_{(1)}$, $B_{(2)} = BD_{(2)}$, ec. ed esprimono le $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ numeri primi tra loro. Ora vediamo come il metodo esposto nel §. 16 valga eziandio a sciogliere la prima delle precedenti equazioni, giacchè all' uopo potremo medesimamente operare sovra ciascuna delle altre.

La condizione or ora dichiarata che sieno le $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ numeri primi tra se, conduce a conchiudere $t_{(1)}$ primo a $B_{(1)}$: come non è malagevole il comprendere. Laonde esisteranno sempre dei valori per le due indeterminate n, r, che soddisferanno all' equazione

$$(12) \qquad z_{(1)} = nt_{(1)} + B_{(1)} r.$$

Sostituito questo valore nella prima delle (11), si otterrà

$$\left(\frac{n^2 + C_{(1)}}{B_{(1)}}\right) t^2_{(1)} + 2nt_{(1)} r + B_{(1)} r^2 = \omega^2.$$

Ma $t_{(1)}$, $B_{(1)}$ sono numeri primi tra loro; dunque dovrà esse-

re $n^2 + C_{(1)}$ divisibile per $B_{(1)}$: e fatto $\frac{n^2+C_{(1)}}{B_{(1)}} = m$, si avrà

$$(13) \qquad m t^2_{(1)} + 2n t_{(1)} r + B_{(1)} r^2 = \omega^2 .$$

Risultamento che ci mostra, essere il primo membro divisore quadrativo della formola $z^2_{(1)} + C_{(1)} t^2_{(1)}$, perchè hassi $n^2 - B_{(1)} m = - C_{(1)}$ (§. 8).

Pure è manifesto che si avranno a risolvere tante equazioni (13), quanti saranno i valori di n, che rendono $\frac{n^2+C_{(1)}}{B_{(1)}}$ numero intero; i quali valori sono compresi tra o, e $+ \frac{1}{2} B_{(1)}$.

Supponiamo che siansi trovati due valori f, g rispondenti ai numeri m, n, che avverino la condizione $\frac{n^2+C_{(1)}}{B_{(1)}} = m$ numero intero: in questo caso l'equazione da risolversi sarà

$$f t^2_{(1)} + 2g t_{(1)} r + B_{(1)} r^2 = \omega^2,$$

ch'è della stessa forma della (8). Onde se per iscioglierla si segua il metodo esposto nel §. 16, basterà: 1.° trovare tutti i divisori quadrativi della formola $z^2_{(1)} + C t^2_{(1)}$, che disegneremo colle A_1, B_1, C_1, ... (§. 8): 2.° cercare col metodo succennato nei §.i 11, 12 i quadrati A^2_1, B^2_1, C^2_1 ec.: e 3.° contrassegnare tutte quelle formole, le quali saranno risultate di forma simile alla $f t^2_{(1)} + 2g t_{(1)} r + B_{(1)} r^2$. Ciò fatto ponendo ciascuna delle notate formole uguale al primo membro dell' ultima equazione, giugneremo ad esprimere le $t_{(1)}$, r, ω, con indeterminate independente; e quindi mediante l'equazione (12) anche la $z_{(1)}$.

In adesso riflettendo che è $z = \frac{z'}{B}$, chiaro apparisce che

i valori delle x, y, z, t, che verificano la (II), sono $B\omega x_{(1)}$, $B\omega y_{(1)}$, $\theta z_{(1)}$, $B\theta t_{(1)}$. Ma col risolvere l'equazione (9) abbiamo determinati i valori delle $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, θ, e collo sciogliere l' equazione (10) abbiamo trovati i valori delle $z_{(1)}$, $t_{(1)}$, ω; perciò rimane completamente risoluta la data equazione (II).

Vuolsi pure osservare, che la condizione di essere C non divisibile per alcun numero quadrato diverso dall' unità ci autorizza di moltiplicare la proposta equazione (II) pel coefficiente C, invece di moltiplicarla per B: ed i casi particolari ci appaleseranno a quale di essi coefficienti dovremo dare la preferenza.

§. 20. Risolvere in numeri razionali l' equazione

$$\text{(III)} \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

disegnando x, y, z le indeterminate, ed A, B, C numeri interi dati.

Tantosto vedesi che la soluzione di questa equazione si ricava da quanto è stato ragionato e calcolato nei §.i 5 e precedente.

§. 21. Niun ostacolo parimente s' incontrerà, alloraquando si vorrà risolvere in numeri razionali l'equazione completa generale di secondo grado a tre indeterminate. Imperocchè chiaramente si scorge, che per ottenere siffatta risoluzione non si avrà a far altro, che seguire i ragionamenti ed i calcoli esposti ne' §.i 1, 3, 5 e 19.

§. 22. Sin quì ci siamo condotti discutendo la soluzione in numeri razionali dell' equazione

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C.$$

Ora passeremo ad investigare come si possa risolvere essa equazione in numeri interi, giacchè è da questa soluzione, che vedremo potersi dedurre l' altra pure in numeri interi della equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate. Ma innanzi ogni altra cosa fia bene dimostrare la seguente proposizione.

§. 23. L' equazione indeterminata

$$x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

ove A, B, C sono numeri interi dati, al pari di quella di secondo grado a due indeterminate, ammette la soluzione in numeri interi di tante differenti equazioni della stessa forma, quanti sono i divisori quadrati del coefficiente C, e dove in ciascuna le tre indeterminate rappresentano numeri primi fra loro.

Infatti dicasi δ il massimo comun divisore tra x, y, z, sicchè abbiasi $x = \delta x'$, $y = \delta y'$, $z = \delta z'$, si otterrà

$$x'^2 - Ay'^2 - Bz'^2 = \frac{C}{\delta^2},$$

il primo membro della qual equazione esprime un numero intero, e conseguentemente fa di mestieri che lo rappresenti altresì il secondo. Pertanto fatto $C = \delta^2 C'$, ne verrà

$$x'^2 = Ay'^2 + Bz'^2 + C',$$

dove x', y', z' sono numeri primi fra se. Ponendo adunque successivamente δ^2 uguale ai divisori quadrati di C, rimane palese che si avranno tante equazioni della stessa forma della data, quanti sono i divisori quadrati di C, e che le indeterminate contenutevi esprimeranno numeri primi fra loro.

Fermato questo, vuolsi inoltre mostrare, come si risolva l' equazione $x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C$ in un caso particolare: poichè facendo ciò, siamo d'avviso, che ci riuscirà più agevole il mettere in chiaro la soluzione generale di essa equazione.

§ 24. Risolvere in numeri interi l' equazione

$$\text{(IV)} \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

dove sono x, y, z numeri primi fra loro, i coefficienti A, B, C numeri interi, ed A divisore di B, o viceversa B di A.

Disegnato con ω il massimo comun divisore tra y, z, e posto

$$(14) \qquad y = \omega y', \; z = \omega z',$$

otterremo

$$x^2 - C = A\omega^2 (y'^2 + Qz'^2),$$

essendo $Q = \frac{B}{A}$ numero intero. Inoltre facciamo

$$(15) \qquad y'^2 + Qz'^2 = \tau,$$

avremo

$$(16) \qquad x^2 - C = A\omega^2\tau,$$

dove tantosto vedesi, che ω^2 non può uguagliare i divisori quadrati di C, per esprimere x, y, z numeri primi tra se; e che $x^2 - C$ debb' essere divisibile esattamente per A. Pertanto si cerchino i valori interi sì positivi come negativi della x, che rendono $\frac{x^2-C}{A}$ numero intero, i quali, come si è già altra volta rammentato, sono compresi tra o, e $+\frac{1}{2}$ A. Succedendo che non n'esista alcuno che avveri essa condizione, conchiuderemo non potersi risolvere la (IV): e trovandone uno o più, procederemo oltre calcolando nel seguente modo.

Dicansi a', a'', a''', ec. i trovati valori della x, e pongasi

$$\frac{a'^2-C}{A} = P'$$

$$\frac{a''^2-C}{A} = P''$$

$$\frac{a'''^2-C}{A} = P'''$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

saranno P', P'', P''', ec. numeri interi positivi o negativi. Trovati poi tutti li divisori quadrati di ciascuno dei numeri P', P'', P''', ec., e denominati f'^2, g'^2, h'^2, ec. i divisori quadrati di P'; f''^2, g''^2, h''^2, ec. quelli di P''; f'''^2, g'''^2, h'''^2, ec. gli altri di P''', e così in seguito; potremo fare

$$P' = f'^2 p'_1 = g'^2 p'_2 = h'^2 p'_3 = \text{ec.}$$

$$P'' = f''^2 p''_1 = g''^2 p''_2 = h''^2 p''_3 = \text{ec.}$$

$$P''' = f'''^2 p'''_1 = g'''^2 p'''_2 = h'''^2 p'''_3 = \text{ec.}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ,$$

dove p'_1, p'_2, p'_3, ec., p''_1, p''_2, p''_3, ec., p'''_1, p'''_2, p'''_3, ec., ec.

saranno numeri interi positivi o negativi. Ora poichè hassi dalla (16)

$$\frac{x^2-C}{A}=\omega^2\tau\,,$$

agevolmente vedesi, che il secondo membro di questa ultima equazione dovrà uguagliare i valori di P', P'', P''', ec. Onde si avrà

$$\omega^2\tau=f'^2p'_1=g'^2p'_2=h'^2p'_3=\text{ec.}$$

$$\omega^2\tau=f''^2p''_1=g''^2p''_2=h''^2p''_3=\text{ec.}$$

$$\omega^2\tau=f'''^2p'''_1=g'''^2p'''_2=h'''^2p'''_3=\text{ec.}$$

. . . . . .

Dal che risulta

$$\omega=f',\ g',\ h',\ \text{ec.},\ f'',\ g'',\ h'',\ \text{ec.},\ f''',\ g''',\ h''',\ \text{ec.},\ \text{ec.}$$

$$\tau=p'_1,\ p'_2,\ p'_3,\ \text{ec.},\ p''_1,\ p''_2,\ p''_3,\ \text{ec.},\ p'''_1,\ p'''_2,\ p'''_3,\ \text{ec.},\ \text{ec.}$$

Sostituiti poi questi valori di τ di mano in mano nell' equazione (15) si otterranno le equazioni

$$(17)\quad\begin{cases} y'^2+Qz'^2=p'_1\,,\ y'^2+Qz'^2=p'_2\,,\ y'^2+Qz'^2=p'_3\,,\ \text{ec.} \\ y'^2+Qz'^2=p''_1\,,\ y'^2+Qz'^2=p''_2\,,\ y'^2+Qz'^2=p''_3\,,\ \text{ec.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{cases}$$

le quali potremo sciogliere col metodo insegnatoci da Lagrange (*).

Trovati adunque i valori della x dipendentemente dalla condizione $\frac{x^2-C}{A}$ numero intero; indi quelli di ω mediante i divisori quadrati dei numeri P', P'', P''', ec., e per ultimo quelli di y', z' risolvendo le ultime equazioni (17); resteranno altresì determinati i valori delle y, z mediante le equazioni (14).

Ma dilucidiamo anche questa soluzione con un esempio.

(*) Mem. de Berlin. an. 1767.

§. 25. Sia proposta da risolversi in numeri interi l' equazione

$$x^2 = 11y^2 - 33z^2 - 217,$$

dove 11 è divisore di 33.

Poichè il numero 217 non ha alcun fattore che sia quadrato tranne l' unità, potremo sciogliere l' equazione proposta riguardando x, y, z numeri primi tra loro. Avendo adunque $Q = -\frac{33}{11} = -3$, le equazioni (15), (16) addiverranno

$$y'^2 - 3z'^2 = \tau$$

$$x^2 + 217 = 11\omega^2\tau,$$

essendo $y = \omega y'$, $z = \omega z'$. Si cerchino adesso i numeri x, che rendono $\frac{x^2+217}{11}$ numero intero, si troverà per x il numero 5. Quindi sarà $P' = 22$, il qual numero non avendo alcun fattore quadrato infuori dell' unità, hassi $P' = 1^2 . 22 = \omega^2\tau$; onde si ritrae $\omega = 1$, $\tau = 22$, i quali risultati ci danno la prima delle (17)

$$y'^2 - 3z'^2 = 22.$$

Ora risolta questa ultima equazione col noto metodo, troveremo che la soddisfanno $y' = 7$, $z' = 3$; e perciò avremo $x = 5$, $y = 7$, $z = 3$.

§. 26. Passiamo adesso a risolvere in numeri interi l' equazione

$$\text{(V)} \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

dove x, y, z esprimono numeri primi fra loro, ed i coefficienti A, B, C al solito numeri interi.

Si trovi il massimo comun divisore di A, B, che diremo F, talchè sia $A = FM$, $B = FN$: inoltre si nomini qui pure ω il massimo comun divisore tra y, z, e facciasi

$$\text{(18)} \qquad y = \omega y', \; z = \omega z'.$$

Sostituiti questi valori di A, B, e delle x, y nell' equazione (V), sorgerà

$$x^2 - C = F\omega^2 (My'^2 + Nz'^2),$$

dove M, N sono numeri primi fra loro, ed è ancora y' primo a z'. Ora se poniamo

$$(19) \qquad My'^2 + Nz'^2 = \tau',$$

si avrà

$$(20) \qquad x^2 - C = F\omega^2\tau',$$

nella quale equazione tosto vedesi, che debb' essere $\frac{x^2-C}{F}$ numero intero. Laonde col cognito metodo si trovino tutti i valori della x (dato che n' esistano), i quali rendono x^2-C divisibile esattamente per F. Di poi seguendo le traccie de' calcoli esposti per la risoluzione della (16) (§. 24), si determinino i valori che competono sì ad ω come a τ'. Appresso chiamati questi ultimi π', π'', π''', ec., i quali come si è veduto nel §. 24 ponno essere positivi o negativi, si sostituiscano nella (19), e si otterranno le equazioni

$$(21) \quad \begin{cases} My'^2 + Nz'^2 = \pi', \; My'^2 + Nz'^2 = \pi'', \\ My'^2 + Nz'^2 = \pi''', \; \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

che, come immediatamente si scorge, sono tutte della medesima forma. Perlocchè basterà mostrare come si trasformi la prima di esse in altra equazione pure di secondo grado, e la cui risoluzione si possa immediatamente dedurre da cognito metodo.

A tal effetto si trovi il massimo comun divisore tra M, π', e chiamato G, facciasi $M = GM_1$, $\pi' = G\pi_1$. Collocati questi valori nella prima delle equazioni (21), e divisa per G, si otterrà

$$M_1 y'^2 + \frac{N}{G} z'^2 = \pm \pi_1,$$

ove si è messo il doppio segno a π_1, perchè, come si è detto, π' può essere positivo ovvero negativo. Ma abbiamo già osservato che M, N sono numeri primi fra se, per conse-

guente z' dovrà essere divisibile esattamente per G. Pertanto si faccia

$$(22) \qquad z' = Gz'',$$

e per più brevità posto $NG = N_1$, l' ultima equazione colla sostituzione di questi valori addiverrà

$$M_1 y'^2 + N_1 z''^2 = \pm \pi_1 :$$

nella quale y', z'' sono primi fra loro, altramente non lo sarebbero y', z': come pure M_1, π_1 essendo primi tra se, ne segue che M_1 è primo a qualsiasi fattore di π_1. Le quali condizioni ci conducono a conchiudere z'' primo a π_1: perciocchè se questo si negasse, le y', z'' dovrebbero avere un massimo comun divisore; il che non è. Quindi si potranno sempre determinare per le due indeterminate n, z''' de' valori in numeri interi, che verifichino l' equazione

$$(23) \qquad y' = nz'' + \pi_1 z''' :$$

il qual valore della y' messo nell' ultima equazione ci darà

$$\left(\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}\right) z''^2 + 2M_1 n z'' z''' + M_1 \pi_1 z'''^2 = \pm 1.$$

Ma poscia chè si è provato che z'', π_1 esprimono numeri primi fra loro, per conseguenza $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ dovrà essere numero intero, la quale quantità possiamo altresì ridurre a maggiore semplicità.

Infatti, siccome M_1, π_1 sono numeri primi tra loro, così sarà sempre possibile trovare due numeri λ, v, che soddisfacciano all' equazione $M_1 \lambda - \pi_1 v = 1$. Ora moltiplicando per λ l' espressione $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$, e mettendo $\pi_1 v + 1$ alla vece di $M_1 \lambda$, la formula precedente si convertirà nell' altra $\lambda n^2 + \frac{n^2 + N_1}{\pi_1} v$. Il qual risultamento ci manifesta, che la questione

di cercare dei numeri interi n, che rendano $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ numero intero, si riduce a trovare medesimamente dei numeri interi per n, che dieno $n^2 + N_1 v$ divisibile esattamente per π_1, i quali presi sì positivamente come negativamente sono contenuti fra o, e $+ \frac{1}{2}\pi_1$.

Posto adunque ch' esistano dei valori interi di n, che sostituiti nella divisione $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ dieno un quoto esatto, che nomineremo H, ed inoltre fatto $2M_1 n = K$, $M_1 \pi_1 = L$, l'ultima equazione diventerà

$$(24) \qquad Hz''^2 + Kz''z''' + Lz'''^2 = \pm 1;$$

alla quale potremo applicare il metodo di Lagrange (*), tanto per iscoprire se sia solubile, quanto, nel caso del sì, per determinare i valori delle z'', z'''. Egli è pure facile comprendere, che tante saranno le equazioni (24) che dovremo risolvere, quanti sono i numeri interi n che soddisfanno alla condizione di rendere $\frac{M_1 n^2 + N_1}{\pi_1}$ numero intero.

Risolute pertanto le equazioni (24), e trovati così i valori delle z'', z'''; le equazioni (23), (22) ci daranno quelli di y', z': ed essendosi pure ottenuti colla soluzione della (20) i valori delle x, ω; mediante le equazioni (18) si avranno subito i valori delle y, z; ed in tal modo resterà sciolta l'equazione (V)

§. 27. Illustriamo la soluzione esposta nel §. antecedente proponendoci di risolvere in numeri interi l'equazione

$$x^2 = 65y^2 - 182z^2 - 69.$$

Abbiamo $A = 65$, $B = -182$, $C = -69$; onde ne viene $F = 13$, $M = 5$, $N = -14$; e le equazioni (19), (20) diventano

(*) Mem. de Berlin. an. 1768.

$$5y'^2 - 14z'^2 = \tau'$$
$$x^2 + 69 = 13\omega^2\tau'.$$

Ora fra i numeri che rendono $\frac{x^2+69}{13}$ numero intero, havvi $x = 3$; perciò risulta $\omega = 1$, $\tau' = \pi' = 6$. Divenendo adunque la prima delle equazioni (21)

$$5y'^2 - 14z''^2 = 6;$$

sorge $G = 1$, $M_1 = 5$, $\pi_1 = 6$; cosicchè avendosi dalla (22)

$$z' = z'',$$

si conchiude che la z' è identica alla z''. Altronde l'equazione (23) risulta

$$y' = nz'' + 6z'''.$$

Trovato poi che il valore $n = 2$, ci dà $\frac{5n^2-14}{6} = 1$, ne viene $H = 1$, $K = 20$, $L = 30$; e quindi l'equazione (24) diventa

$$z''^2 + 20z''z''' + 30z'''^2 = 1.$$

Per isciogliere poi questa equazione si faccia

$$z'' = u - 10z''',$$

e messovi questo valore si convertirà nell' altra

$$u^2 - 70z'''^2 = 1,$$

la quale ammette una infinità di soluzioni (*), ed una se ne ha, come tosto si vede, facendo $u = 1$, $z''' = 0$. Per il che ricavasi $z' = 1$, $y' = 2$; e quindi risulta $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Altre soluzioni si avranno della data equazione, trovando altri valori delle u, z'''.

§. 28. Ora non troveremo alcuna difficoltà nel risolvere in numeri interi l' equazione

$$\text{(VI)} \qquad x^2 = Ay^2 + Bz^2 + C,$$

A, B, C essendo numeri interi dati qualsivogliano. Poichè apertamente si scorge, che la soluzione di questa equazione è tutta riposta in ciò che abbiamo detto ne' §. 23 e 26.

(*) Legendre Op. cit. (32).

§. 29. Per ultimo, si osservi l'equazione (π) ottenuta dalla trasformazione della (H) (§. 1), e si vedrà ch'è della medesima forma della (VI); cosicchè si potrà risolvere in numeri interi col metodo mostrato nel § antecedente. Da qui poi, e dalle condizioni che abbiamo dichiarate nel §. 2, si ha la risoluzione in numeri interi dell'equazione generale completa di secondo grado a tre indeterminate.