SUL MOTO DELL' ACQUA
NEI CANALI
MEMORIA

DEL SIG.

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI

Ricevuta adì 17. *Dicembre* 1823.

1. La teoria del moto delle acque correnti è stata trattata dagli Idraulici Italiani dopo che il Galileo fece conoscere le leggi della gravità e del moto uniformemente accelerato. Ma la scienza del calcolo e la sua applicazione alla Meccanica essendo poco avvanzate in allora, quegli Idraulici si dovettero giovare di alcune particolari considerazioni per investigare qualche regola o qualche principio da seguire nelle loro operazioni. Quindi alcuni paragonarono il moto dell' acqua in un fiume declive a quello di un grave sopra un piano inclinato. Altri, appoggiandosi al principio di Torricelli, che l' acqua che sorte da un piccolo foro in un vase ha la velocità che acquisterebbe liberamente cadendo dall' altezza del livello sul foro, considerarono la velocità di una corrente come generata dalla pressione dell' acqua sovraincombente. Altri infine combinarono questi principj, composero delle altre ipotesi, e diedero così origine a quei varj trattati, che, poi riuniti in una sola edizione, formano la conosciuta *Raccolta degli Autori del moto delle acque*. Questi trattati fanno onore ai nobili sforzi di quegli ingegni che li composero, ma si comprende abbastanza l' imperfezione di queste parziali ipotesi al solo enunciarle, e quindi a quanta aberrazione possono andar soggette le conseguenze che ne risultano.

2. Intanto che gli Idraulici Italiani col mezzo della sintesi si occupavano del moto delle acque considerato direttamente in un fiume, gli Oltramontani andavano applicando l' Analisi Algebrica ad alcuni casi del movimento dei fluidi. Daniele Bernoulli trasportò il principio delle forze vive al movimento dell' acqua e compose il suo Trattato d' Idrodinamica opera in cui brilla colla semplicità dei mezzi la fecondità delle conseguenze. Giovanni Bernoulli (1) e Maclaurin (2) risolvettero in seguito con altri metodi gli stessi problemi, e pervennero agli stessi risultati che furono da poi generalizzati e dimostrati più semplicemente dal d'Alembert nel suo *Traité des fluides*. La soluzione però di tutti questi problemi risguarda il moto che una massa fluida concepisce secondo la direzione di una sola linea, e tale che tagliando una sezione perpendicolare a questa linea i punti situati in questa sezione sono tutti dotati di una stessa velocità, il qual movimento chiamasi dagli Idraulici *lineare*.

3. Clairaut fu il primo che diede le equazioni dell' equilibrio di una massa fluida animata in tutti i suoi punti da forze qualunque (3), e d' Alembert, applicando il suo principio che riconduce le leggi del movimento dei corpi a quelle del suo equilibrio, offrì nel suo *Traité de la resistance des fluides* le equazioni rigorose e generali del movimento. Eulero presentò in seguito queste equazioni dedotte dallo stesso principio ma colla notazione semplice delle differenziali parziali (4). Finalmente Lagrange riducendo i fluidi al loro vero e naturale concetto di un ammasso di molecole slegate, indipendenti le une dalle altre e perfettamente mobili, dedusse nell' ultima parte della Meccanica analitica le equazioni del loro movimento dagli stessi principj che le equazioni del movimento dei solidi; e la semplicità e la generalità con cui

(1) Nouvelle Hydraulique. Nella Raccolta delle sue Opere.

(2) Traité des fluxions.

(3) Théorie de la figure de la terre an. 1743.

(4) Memoires de l'Académie de Berlin. an 1755.

è trattata quest' ultima parte la rendono uno dei più bei rami dell' eminente opera dell' Italiano Geometra. Dopo quest' epoca la determinazione rigorosa del moto dei fluidi diventò una difficoltà di pura analisi, ma essa è tanto grande che non si è ancora potuta vincere che in qualche caso particolare.

4. In mancanza quindi di una soluzione più completa gli Idraulici continuarono a valersi nella teoria del moto delle acque della soluzione che loro offeriva la considerazione del moto lineare. Ma una disparità grandissima si elevò fra i risultati del calcolo e quelli dell' esperienza. Secondo il calcolo del moto lineare un fluido che scendesse lungo un canale inclinato all' orizzonte dovrebbe continuamente accelerarsi ed abbassare l' altezza del suo pelo sul fondo. Ora le esperienze instituite diligentemente prima da Bossut (1), in seguito da Du-Buat (2) ed in questi ultimi tempi da molti altri, provano che stabilito che sia il corso, l' acqua si muove colla stessa velocità in tutta la lunghezza del canale. Per spiegare questa differenza fu messa in campo la resistenza degli attriti col fondo e colle sponde, e l'adesione delle molecole fra loro. Du-Buat fu il primo che ridusse a formola queste resistenze (3). L'Ingegnere Girard seguendo alcune idee di Columb, produsse un'altra formola composta di due termini, uno proporzionale al quadrato della velocità, l' altro alla velocità semplice ed amendue inversamente proporzionali al raggio medio, o sia all' area della sezione divisa pel perimetro bagnato dall' acqua (4). Prony determinò i coefficienti numerici di questa formola con più esattezza servendosi di trentuna esperienze di Bossut e Du-Buat (5); ed il lavoro più grande per questa determinazione

(1) Traité d' Hydrodynamique.

(2) Principes d'Hydraulique par M. le Chevalier Du-Buat.

(3) Principes d' Hydraulique. Par. I. Sec. I. Chap. 7.

(4) Girard, Essai sur le mouvement des eaux courantes. Paris 1804. Rapport sur le projet du Canal de l'Ourcq. Paris. 1803.

(5) Prony, Recherches sur la Theorie des eaux courantes

fu eseguito dal Sig. Eytelwein Membro dell'Accademia di Berlino, alla quale fece concorrere novantuna esperienze, che abbracciano una grande diversità nei valori dei tre elementi, velocità, pendenza, e raggio medio (1). La corrispondenza di questa formola fu pure comprovata in Italia dal Prof. Bidone con alcuni esperimenti instituiti nei canaletti dello Stabilimento Idraulico di Torino (2), e dagli Ingegneri Pontificj nella Scuola diretta dal Prof. Venturoli con cinque altri esperimenti, tre sul Po fatti da Teodoro Bonati, e due eseguiti da loro stessi uno sul Po e l'altro sul Tevere (3). Si venne così mediante questa formola di resistenza a rappresentare il moto dell'acqua ne' canali in una grande varietà di circostanze, ma quantunque questa corrispondenza di risultati porti seco qualche presunzione a favore della detta formola, essa non lascia però di essere un pò empirica. L'ipotesi del moto lineare è troppo ristretta per svelarci le vere leggi del moto dei fluidi, e bisognerebbe almeno dimostrare che quella specie d'ondeggiamento che affetta quasi sempre il moto delle acque allorchè discendono, non altera sensibilmente la velocità nella direzione del canale.

5. Abbandonata in questi ultimi tempi la soverchia limitazione che porta seco l'ipotesi del moto lineare, alcuni Idraulici Italiani cercarono la soluzione completa di qualche caso di moto a due coordinate. È noto che decomposta la velocità di ciascun punto di una falda fluida che si muove in un piano secondo due coordinate x, y, e rappresentate con p e q le velocità componenti, nel caso che $pdx+qdy$ sia una differenziale esatta, la determinazione del moto si riduce all'integrazione dell'equazione

(1) Memorie della R. Accademia di Berlino. Parte Mat. an. 1814-1815.

(2) Bidone, Expériences sur le remou et sur la propagation des ondes. Mem. de l'Académie de Turin. Tom. XXV.

(3) Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella Scuola degli Ingegneri Pontificj d'acque e strade per l'anno 1821.

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)=0$$

e determinata la ϕ per mezzo di quest' equazione si hanno subito le velocità espresse da

$$p=\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \qquad q=\left(\frac{d\phi}{dy}\right).$$

L' equazione di second' ordine colle differenziali parziali di cui si tratta è la prima che hanno integrata i Geometri, ed il suo integrale è

$$\phi=F(x+y\sqrt{-1})+f(x-y\sqrt{-1})$$

F ed f essendo gli indici di due funzioni arbitrarie delle quantità comprese fra le parentesi.

La difficoltà del problema resta così ridotta alla determinazione di queste due funzioni arbitrarie, le quali dipendono in parte dallo stato iniziale del moto ed in parte dalle linee esterne lambite dal fluido. Supponendo che le linee esteriori lambite dal fluido siano due linee rette, il Prof. Venturoli nel terzo volume della seconda edizione de' suoi *Elementi di Meccanica, ed Idraulica*, anno 1809, ha determinato il primo le due funzioni F ed f (1) ed ha dato una soluzione rigorosa del movimento dei fluidi in quest' ipotesi. La principale proprietà del moto di un velo fluido circoscritto da due linee rette alla quale ha condotto questa soluzione consiste in ciò; che se dal punto d' incontro delle due rette limiti si descrive con un raggio qualunque un arco di cerchio, tutti i punti fluidi situati su quest' arco hanno la stessa velocità, e questa velocità è in ragione inversa del detto raggio. In una interessante Memoria pubblicata dopo (2), il detto Professore ha estesa la sua soluzione al moto secondo tre coordinate,

(1) Vedi anche il II. Volume della terza edizione degli Elementi di Meccanica ed Idraulica dello stesso Prof. Venturoli al parag. 786. e seg.

(2) Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella Scuola degli Ingegneri Pontificj d' acque e strade per l' anno 1821.

dalla quale risulta un' esatta teoria dell' efflusso dai vasi conici, ed una evidente spiegazione della specie d' imbuto che si forma alla superficie dell' acqua sovraincombente al foro per cui sgorga, imbuto osservato prima da Bossut e per ispiegare il quale si era ricorso ad uno di que' precarj modi, che in questo caso fu la pressione della colonna d' aria sovraincombente.

6. La surriferita soluzione del moto del velo fluido fra due linee rette, la prima che si è rigorosamente ottenuta pel moto secondo due dimensioni, rimaneva però ancora sterile quando essa divenne feconda di applicazioni fra le mani del Sig. Tadini. Questo distinto Idraulico, dopo essere dal canto suo arrivato alla stessa soluzione, ne fece una felice applicazione alla misura delle acque correnti coll' invenzione del suo Regolatore, e ravvicinò i risultati teoretici ad alcuni fatti che ci svela il moto delle acque correnti (1). Così mostrò per esempio, come la sua teoria s' accorda a dare un maggior acceleramento dell' acqua verso il fondo che in superficie, quando quest' ultima diviene molto declive, ciò che accade sotto gli archi dei ponti; provò la formazione del filone quando vi è obbliquità nelle sponde, e fece vedere che esso si accosta più alla sponda che è meno obbliqua coll' asse della corrente. Perchè queste conseguenze siano legittime, si esigge che il pelo d' acqua della corrente si disponga in una superficie, piana. In varj casi la sola ispezione del pelo d' acqua ci convince abbastanza che per tratte corte questa supposizione poco si allontana dal vero, onde anche per prossimamente vere si dovranno ritenere le conseguenze che ne furono dedotte.

7. Questo fu già un vantaggio ottenuto dalla nuova soluzione. Ma l' ipotesi che la superficie del pelo d' acqua sia un piano, contiene ancora qualche cosa d'arbitrario, volendo

(1) Del Movimento e della Misura delle acque correnti Memoria Idraulica di Antonio Tadini. Milano 1816.

i dati del problema che null'altro si verifichi a questa superficie che la condizione di una pressione costante su tutti i punti. Quella ipotesi mal si converrebbe ad un lungo corso d'acqua, e tutti i quesiti idraulici in cui l'incognita è appunto la pendenza del pelo, rimangono insolubili senza la cognizione della curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d'acqua. Pel compimento della Teoria del moto delle acque anche nel caso più semplice, di un canale di forma parallelepipeda rettangolare, aperto superiormente, colle sponde verticali e col fondo poco inclinato all'orizzonte, resta ancora a desiderarsi la soluzione del problema del detto moto nella pura condizione, che la superficie del pelo si disponga in modo che la pressione sia in ogni punto costante ed eguale a quella dell'Atmosfera. L'oggetto di questa Memoria è di toccare questo problema nelle parti più accessibili colle attuali teorie idrauliche.

Per formarsi un' idea chiara della natura di questo problema e delle diverse circostanze che ne determinano l'applicazione, convien distinguere due casi, che con volgare espressione si indicano, dicendo nell'un caso che l'acqua va per pressione, e nell'altro caso che l'acqua va per caduta.

Il primo caso si riscontra ordinariamente nei tratti di fiume vicino al loro sbocco in un altro fiume o nel mare, ne' tronchi di canale sostenuti da chiuse, ne' canali navigabili sostenuti da sostegni. In tutte queste tratte l'acqua presenta una superficie liscia, inalterabile, il suo moto si fa con una tranquillità rimarchevole, le scabrosità e gli ostacoli sul fondo non alterano sensibilmente la superficie, l'acqua seguente subentra a rimpiazzare la precedente, in modo che si ha l'immagine di un corpo che cambia continuamente di materia senza cambiare di forma. Se nel caso che il fondo sia declive, si esplora l'altezza del pelo d'acqua sul fondo, si trova ben spesso, che essa va crescendo, e che la velocità va diminuendo più si discende al basso. Queste variazioni sono così sensibili, che il problema, data la portata la larghezza e la pendenza

trovare l' altezza e la velocità, che si rinviene trattato riguardo ai canali navigabili, in cui la comoda navigazione retrograda esigge che il moto sia placido e lento, non può trovare applicazione nei canali declivi, non riscontrandosi un' altezza ed una velocità costante che nei canali orizzontali.

Il secondo caso del movimento dell' acqua si osserva allorchè lo sbocco ed in generale le circostanze agli estremi del canale sono tali, che l'acqua non può avere quella velocità ed altezza di pelo che gli competerebbe perchè avesse luogo il movimento del primo caso. In questo caso la superficie dell' acqua si presenta tutta ondeggiata, le concavità e convessità cambiano continuamente di luogo e di grandezza, tutte le scabrosità del fondo e delle sponde si manifestano alterando la superficie, le onde che si formano si contrastano spesso e si urtano vicendevolmente distruggendo una parte della loro velocità (1). L' altezza del pelo d' acqua e la velocità progressiva si trovano secondo gli esperimenti, ne' tronchi regolari presso che costanti, ad eccezione delle tenui variazioni che vi producono le onde.

I due diversi movimenti che l'osservazione ci mostra corrispondono in teoria, il primo al caso in cui le differenziali relativamente al tempo sono nulle, ed allora il movimento si dice *progressivo permanente*, il secondo al caso in cui le differenziali relativamente al tempo sussistono, e chiameremo questo movimento *progressivo ondeggiato*.

8. La soluzione del problema nel caso del moto progressivo ondeggiato è soggetta a gravi difficoltà che restano ancora a vincersi e che meritano di esercitare l' ingegno dei più esperti Geometri. Non così astruso è il problema nel caso del moto progressivo permanente. La velocità, l' altezza della lama d' acqua, la curva direttrice della superficie cilindrica

(1) Vedi la pag. 85. della già citata Memoria Idraulica del Sig. Tadini; ed una interessante nota alla pag. 232.

del pelo si troveranno per lo più completamente determinate nel seguito di questa Memoria in modo che se ne potranno fare delle facili applicazioni. Se l' altezza verticale dell'acqua nella sezione data all' origine della corrente è minore del doppio dell' altezza dovuta alla velocità parallela al fondo nella stessa sezione, risulta che la lama d'acqua va sempre più assottigliandosi in un canale declive più si discende verso le sezioni inferiori. Se invece l' altezza della lama d' acqua nella sezione all' origine è maggiore del doppio dell' altezza dovuta alla velocità nella sezione medesima, allora la lama d'acqua aumenta in altezza più si discende, ed aumenta in modo che anche il pelo d'acqua nelle sezioni inferiori si trova più elevato di livello che nelle sezioni superiori. La curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d' acqua è rispettivamente nei due casi rappresentata da due rami di una linea di terz' ordine, e vi esiste in amendue i casi la proprietà che la differenza di livello da una sezione qualunque superiore ad una inferiore è reciprocamente eguale alla differenza delle altezze dovute alle velocità nelle sezioni medesime.

9. Questi risultati aprono la via ad una riflessione concernente le resistenze d' attrito o d' adesione. Gli Autori che hanno instituite delle esperienze sul moto dell' acqua che discende per canaletti artificiali nei quali il fondo e le sponde non opponevano scabrosità ed ostacoli rilevanti, non hanno fatto sufficiente parola dello stato della superficie dell' acqua per assicurarsi, che le formole del moto permanente sono rigorosamente applicabili a questi esperimenti, nel caso in cui l'altezza della lama d' acqua non arrivava al doppio dell'altezza dovuta alla velocità. Ma quando l' altezza della lama d'acqua eccede il doppio dell'altezza dovuta alla velocità, dannosi certamente delle circostanze in cui la superficie del pelo d' acqua è liscia e senz' onde, e le formole del moto permanente sono applicabili , e l' esperimento che abbiamo riportato alla pag. 224. della *Storia dei proggetti e delle opere per la Navigazione interna del Milanese dell' Ing. Giuseppe Bruschetti*

era appunto in queste circostanze. Secondo questo esperimento il pelo d'acqua ha manifestato una pendenza in un senso cioè una vera declività, mentre per la teoria avrebbe dovuto assumere una piccola pendenza in senso contrario. Questa disparità in luogo di poter essere spiegata da una resistenza che abbia ritardato il moto, esiggerebbe anzi l'influenza di una forza acceleratrice che ne lo abbia sollecitato. Un' inavvertenza però può aver contribuito ad alterare i dati dell'esperimento. All'epoca in cui fu eseguito l'esperimento le mie idee non essendo ancora complete, non ho insinuato che l'altezza e la velocità fosse esplorata in luoghi ove con tutto rigore non apparisse agitazione nell'acqua. L'altezza e la velocità nella sezione superiore fu quindi misurata in un luogo non abbastanza lontano dal sito ove l'acqua con un salto entrava nel canale, perchè sulla minuta trovasi l'annotazione che ogni agitazione non era ancora estinta e che la superficie era un pò affetta da onde. Il tempo ci procaccierà altri esperimenti, e voglio sperare che gli Idraulici avvertiti dell'importanza, porranno attenzione nell'informarci delle circostanze che devono assicurare l'applicazione rigorosa delle formole del moto permanente. Se i nuovi esperimenti d'accordo coi precedenti ci confermeranno un ritardo dell'acqua, quando l'altezza dovuta alla velocita è maggiore della metà dell'altezza della lama d'acqua, ed un'accelerazione quando è minore, allora il fatto sarà avverato e si potrà senza esitazione occuparsi della causa di questi fenomeni. Ma sino a tanto che resta il dubbio che il corso dell'acqua possi essere alterato da onde fra loro contrastanti, è evidente che avanti di ammettere un effetto molto sensibile delle resistenze in una materia tanto fluida come l'acqua, bisognerebbe avere una teoria del moto progressivo ondeggiato colla quale apprezzare l'influenza delle piccole onde giacchè ricordandoci del precetto Newtoniano *non plures admittendae sunt causae quam quae verae sunt et phaenomenis explicandis sufficiunt.*

EQUAZIONI FONDAMENTALI

Del moto dell' acqua ne' canali con sponde piane, verticali e parallele.

10. La difficoltà che presentava la traduzione dei problemi di meccanica in equazioni differenziali è totalmente sparita da qualche tempo, e principalmente dopo che Lagrange nell' esimia sua Opera della Meccanica analitica ha date le formole più semplici e più generali, dedotte con un metodo uniforme dal solo principio delle velocità virtuali per la soluzione di qualunque problema d'equilibrio e di moto. Quest'Opera deve essere d'altronde tanto conosciuta e per le mani di tutti quelli che fanno professione di meccanica ed idraulica, che il riferire le dimostrazioni delle equazioni differenziali di questa sorta di problemi è ormai divenuta una cosa superflua. Partirò dunque direttamente dalle formole che si trovano alla pagina 320. e seg. del secondo Tomo della Meccanica analitica come da cose abbastanza note.

Il canale essendo supposto nel nostro caso colle sponde piane verticali e parallele, il moto dell'acqua si farà in esso secondo un piano parallelo alle sponde, e prese le coordinate x e z in uno di questi piani potremo considerare le coordinate y come costanti e quindi nulle le differenziali relativamente ad esse. Ciò premesso rappresenti g la gravità ζ l'angolo, che la direzione della medesima fa col fondo del canale e $z = \alpha$ l'equazione di questo fondo; posto

$$\lambda' = -gx\cos.\zeta + \frac{d\phi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\phi''^2$$

$$\lambda'' = -g\sin.\zeta + \frac{1}{2}\frac{d\phi''}{dt}$$

$$\lambda''' = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dtdx^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi''}{dx^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\phi''\left(\frac{d^2\phi''}{dx^2}\right)$$

ecc.

Si avranno per determinare φ' e φ'' e l'ordinata z della superficie del fluido le tre equazioni

$$(1)\qquad \varphi'' - \frac{da\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{da^2\frac{d\varphi''}{dx}}{dx} + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\qquad \lambda' + \lambda'' z + \lambda''' z^2 + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\qquad \left(\frac{d\lambda'}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) + \varphi''\lambda''$$

$$+ z\left[\left(\frac{d\lambda''}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda''}{dx}\right) + 2\varphi''\lambda''' - \frac{d^2\varphi'}{dx^2}\lambda''\right]$$

$$+ z^2\left[\left(\frac{d\lambda'''}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda''}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'''}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right)\right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)\lambda''' - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right)\lambda'' + 3\varphi''\lambda^{iv}\right] + \text{ec.} = 0$$

Eliminando z dalle due ultime equazioni e sostituendo per λ', λ'', λ''' ec. le loro espressioni, la risultante e la prima equazione non conterranno più che le due funzioni incognite φ' e φ'' e le loro differenziali. Si potrà quindi con queste equazioni determinare le dette incognite e da queste rimontare ai valori di λ', λ'', λ''' ec., i quali valori posti in seguito nella seconda equazione in z, la medesima rappresenterà la superficie superiore e libera del fluido. Cogli stessi valori di φ' e φ'' avremo anche le velocità p ed r secondo gli assi delle x e z e la pressione λ di un punto qualunque dalle formole

$$p = \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right) + z\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

$$r = \varphi'' - z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right)$$

$$\lambda = \lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda'''.$$

Tutte queste formole suppongono che la serie

$$\varphi' + z\varphi'' - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) - \frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

sia convergente. Ora questa serie è convergente quando le

le differenziali $\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right)$ sono successivamente più piccole, o quando z si mantiene sempre piccola per ogni valore che gli compete. Il primo di questi casi ha luogo quando l' inclinazione del canale è piccola ed il moto è permanente, ed andiamo a sviluppare questo caso nel seguito di questa Memoria.

Del moto permanente dell' acqua in un canale col fondo piano e poco inclinato all' orizonte.

11. Il moto dell' acqua è ridotto allo stato di permanenza quando la velocità e la pressione si mantengono costanti per uno stesso punto del canale variando il tempo. In questo stato le funzioni φ' e φ'' devono dunque essere indipendenti dal tempo e le differenziali di queste funzioni relativamente al tempo nulle. Ma siccome giusta la convenzione dell' articolo 20. Sez. XI. della Meccanica analitica deve intendersi che la funzione $\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)$ abbracci, oltre la differenziale della funzione φ', un' altra funzione arbitraria $\frac{dT}{dt}$ del tempo, che nel nostro caso può essere una costante, perciò si dovrà porre $\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)$ eguale ad una costante k.

Ciò osservato, prendiamo l' asse delle x sul fondo stesso del canale, l' equazione di questo fondo diverrà per una tale posizione dell' asse

$$z = a = 0$$

e l' equazione (1) darà

$$\varphi'' = 0.$$

Per questi valori di $\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)$ e φ'', trascurando i termini dell'ordine di $\left(\frac{d^3\varphi'}{dt^3}\right)$, le espressioni di λ', λ'', λ''', ec. si riduranno a

(4) $$\lambda' = -gx\cos.\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2$$

(5) $$\lambda'' = -g\sin.\zeta$$
$$\lambda''' = 0$$

e le equazioni (2) e (3) diverranno

(2)' $$\lambda' + z\lambda'' = 0$$

(3)' $$\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) - z\lambda''\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) = 0\,.$$

Eliminando z da queste due equazioni si ottiene

$$\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) + \lambda'\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) = 0$$

la quale ha evidentemente per integrale

(6) $$\lambda'\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right) = c$$

c essendo una costante arbitraria.

Introdotta in quest' equazione per λ' la superiore espressione segnata (4) si trova per determinare $\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)$ la seguente

(7) $$\left(-gx\cos\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = c$$

la quale risoluta dà

(8) $$\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right) = \gamma\sqrt[3]{\left[c + \sqrt{\left(c^2 + \frac{8}{27}\left(k - gx\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]}$$
$$+ \gamma^2\sqrt[3]{\left[c - \sqrt{\left(c^2 + \frac{8}{27}\left(k - gx\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]}$$

γ rappresentando una delle radici terze dell' unità.

Determinato $\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)$ in funzione di x si hanno subito entro ai limiti d' approssimazione ai quali ci siamo arrestati, e che riconosceremo in appresso, la velocità e la pressione espresse da

(9) $$p = \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)$$

(10) $$r = -z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$$

$$(11) \qquad \lambda = -gx\cos.\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 - gz\,\text{sen.}\,\zeta$$

e l'equazione della curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d'acqua sarà

$$(12) \qquad z = \frac{-gx\cos.\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2}{g\sin.\zeta}$$

per cui si conosceranno tutte queste quantità in funzione di x per mezzo della trovata espressione di $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$.

12. Per l'applicazione di queste formole bisogna prima di tutto determinare i valori delle costanti arbitrarie che vi sono comprese, servendoci dei dati che l'esperienze instituite sul canale possono direttamente farci conoscere. Perciò osservo che dalle tre equazioni (6), (2)' e (4) si ricava

$$(13)' \qquad c = gz\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)\sin.\zeta$$

$$k = gz\sin.\zeta + gx\cos.\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2.$$

Scrivendo p in luogo di $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ queste equazioni divengono.

$$(13) \qquad c = gzp\sin.\zeta$$

$$(14) \qquad k = gz\sin.\zeta + gx\cos.\zeta - \frac{1}{2}p^2.$$

Se ora si chiama v la velocità parallela al fondo, e $-a$ l'altezza perpendicolare al fondo del pelo d'acqua (anteponiamo il segno — all'altezza a perchè secondo la supposizione della Meccanica analitica le coordinate sono prese positivamente dall'alto in basso e questa altezza si trova nel nostro caso dalla parte opposta) in una sezione data ove porremo l'origine delle coordinate e nella quale sia in conseguenza $x = 0$. Sostituendo questi valori le due equazioni (13) e (14) ci danno

(15) $$c = -gav \sin.\zeta$$

(16) $$k = -ga \sin.\zeta . - \frac{1}{2} v^2$$

colle quali le costanti c e k restano conosciute.

In luogo di una delle due quantità a e v si può anche introdurre la portata del canale, perchè se si chiama Q questa portata ed l la larghezza del canale, a motivo che p è indipendente da z e perciò costante nella stessa sezione si ha

(17) $$Q = lav.$$

Onde eliminando a o v dalle precedenti equazioni risulta

(18) $$k = -g\left(\frac{Q \sin.\zeta}{lv} + \frac{v^2}{2g}\right) = -ga \sin.\zeta - \frac{Q^2}{2l^2a^2}$$

(19) $$c = -\frac{gQ \sin.\zeta}{l}$$

per cui date due delle tre quantità a, v e Q spettanti ad una sezione saranno conosciuti i valori delle due costanti arbitrarie e potremo colle formole sopra ritrovate determinare gli accidenti del moto in tutto il resto del canale.

13. Vediamo ora quali proprietà fisiche del moto dell'acqua si contengono sotto il simbolo di queste espressioni algebriche.

La velocità p parallela al fondo del canale risultando giusta le equazioni (8) e (9) indipendente da z ciò ci mostra, come abbiamo già osservato anche sopra, che quando il moto è permanente ed è soddisfatto il criterio d' integrabilità della formola $pdx + rdz$, questa velocità è costante, entro i limiti dell' approssimazione adottata, per ogni punto di una stessa sezione.

La velocità r perpendicolare al fondo varia invece giusta l' equazione (10) proporzionalmente all' altezza z, e se si riflette che le coordinate e le velocità sono contate positivamente dall' alto in basso, si riconosce che essa sarà diretta in basso se $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$ sarà positivo, e diretta in alto se $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$ sarà negativo.

Se si contrassegna con z' l' ordinata o l' altezza del pelo d' acqua perpendicolare al fondo per distinguerla dall' altezza variabile z di un punto qualunque, e si elimina k dalle equazioni (11) e (12) si ricava il seguente valore della pressione

(20) $$\lambda = g(z'-z)\sin.\zeta.$$

Ma $(z'-z)\sin.\zeta$ è l' altezza verticale della colonna d' acqua sovraincombente al punto z, dunque nel moto permanente la pressione di un punto qualunque è eguale al peso della colonna fluida che gli corrisponde verticalmente che è ciò che ha luogo pei fluidi in quiete.

Sostituendo nell' equazione (13) per c il suo valore (15) si ricava primieramente

(21) $$zp = -av.$$

Moltiplichiamo un membro e l' altro di quest' equazione per l e sostituiamo al prodotto lav la portata Q, risulterà

(22) $$-lzp = Q.$$

Quest'equazione, dandoci il prodotto della larghezza nell'altezza nella velocità sempre costante ed eguale alla portata, corrisponde alla nota legge del Castelli, che si trova così dimostrata nel nostro caso relativamente alla velocità parallela al fondo.

Si metti nell' equazione (14) per k il suo valore segnato (16), ne risulterà la seguente

$$(z'+a)\sin.\zeta + x\cos.\zeta = \frac{p^2}{2g} - \frac{v^2}{2g};$$

$a\sin.\zeta + x\cos.\zeta$ è l' altezza verticale, del pelo d' acqua della sezione o all'origine delle coordinate sulla soglia della sezione x, e $z'\sin.\zeta$ è l' altezza verticale del pelo d' acqua sulla soglia relativa nell' ultima di queste sezioni ma presa negativamente; perciò $(z'+a)\sin.\zeta + x\cos.\zeta$ sarà la differenza di livello del pelo d'acqua dalla sezione o, alla sezione qualunque x, ma è noto che $\frac{v^2}{2g}$ e $\frac{p^2}{2g}$ rappresentano le altezze dovute alle velocità in queste stesse sezioni, dunque chiamando ϖ la pendenza del pelo ed h' ed h queste altezze, si avrà

(23) $$\varpi = h - h'$$

Cioè *la differenza di livello del pelo in due diverse sezioni è reciprocamente eguale alla differenza delle altezze dovute alle velocità.*

14. Passiamo alla figura della superficie del pelo d'acqua. Eliminando dall' equazione (12) $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ col valore che si ricava dall' equazione (13)', introducendo per le costanti c e k le loro espressioni (15) e (16), ed ordinando i termini per rapporto a z', risulta

$$(24)\qquad z'^3+x\cot.\zeta.z'^2+\frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta+\frac{v^2}{2g}\right)z'^2-\frac{a^2v^2}{2g\sin.\zeta}=0$$

Quest' equazione appartiene ad una linea di terz' ordine specie decimaterza (*) la quale sottoposta ai noti metodi si trova che ha quattro rami infiniti, due che hanno per asintoto la linea istessa che rappresenta il fondo, o sia l' asse delle x e due una retta orizzontale rappresentata dall' equazione

$$(25)\qquad z'=-x\cot.\zeta-\frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta+\frac{v^2}{2g}\right).$$

Ma per conoscere vie meglio la natura di questa curva, consideriamo il valore z' che si ricava dall' equazione (13)' dopo aver posto per $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ la sua espressione in x data dalla formola (8), e dopo aver introdotto i valori (15) e (16) delle due costanti c e k. Con queste sostituzioni si ha

$$(26)\quad \frac{1}{z'}=\frac{\gamma}{av}\sqrt[3]{\left[gva\sin.\zeta+\sqrt{\left(g^2v^2a^2\sin.^2\zeta-\frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta+\frac{v^2}{2g}+x\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]}+\frac{\gamma}{av}\sqrt[3]{\left[\left(gva\sin.\zeta-\sqrt{\left(g^2v^2a^2\sin.^2\zeta-\frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta+\frac{v^2}{2g}+x\cos.\zeta\right)^3\right)}\right)\right]}$$

la qual formola dà tre valori per $\frac{1}{z'}$, secondo che si fa

(*) Euler. Introductio in analysin infinitorum. Tom. II. pag. 122. Edizione di Losanna.

$\gamma = 1$, $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\gamma = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Onde distinguere quale fra questi valori di γ è quello che fa pel nostro caso, osservo che la precedente equazione comincia a dare per $\frac{1}{z'}$ tre valori reali, qualunque dei tre valori di γ si adotti, quando si ha

$$(27) \qquad g^2 v^2 a^2 \sin.^2\zeta - \frac{8}{27} g^3 \left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta \right)^3 = 0$$

o sia

$$x \cos.\zeta = \frac{3}{2} \left(\frac{v^2 a^2 \sin.^2\zeta}{g} \right)^{\frac{1}{3}} - a\sin.\zeta - \frac{v^2}{2g}.$$

A questo valore di x corrispondono per z' i tre valori seguenti, secondo che si pone $\gamma = 1$, $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\gamma = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

$$(28) \qquad z' = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 v^2}{g\sin.\zeta} \right)^{\frac{1}{3}}, \; z' = -\left(\frac{a^2 v^2}{g\sin.\zeta} \right)^{\frac{1}{3}}, \; z' = -\left(\frac{a^2 v^2}{g\sin.\zeta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

e lo stesso valore di x sostituito nell'equazione (25) dell'asintoto dà

$$z' = -\frac{3}{2} \left(\frac{a^2 v^2}{g\sin.\zeta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Da ciò ne risulta la seguente costruzione. Sia, fig. I, il fondo del canale rappresentato dalla retta AB, e l' asintoto (25) dall' orizzontale CD. Se dal punto O origine delle coordinate si prende una porzione OX eguale all' ascissa $\frac{1}{\cos.\zeta} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{v^2 a^2 \sin.^2\zeta}{g} \right)^{\frac{1}{3}} - a\sin.\zeta - \frac{v^2}{2g} \right)$ e dal punto X si guida ZXZ' perpendicolare al fondo, divisa la porzione XI compresa fra l' asse delle x e l' asintoto in tre parti eguali, segnato XE eguale a due di queste terze parti, e fatto XF = $\frac{1}{2}$ XE, i punti E ed F saranno su la curva e potranno con-

siderarsi come le origini dei quattro rami suddetti. L'angolo ζ è l'angolo che la verticale prolungata in basso fa colla retta che rappresenta il fondo del canale: quando il canale è declive: detta π la semicirconferenza, ζ sarà $< \frac{\pi}{2}$, e quindi cos. ζ positivo. Se dunque partendo dal punto X facciamo che x varii nella direzione delle coordinate positive, la quantità

$$g^2v^2a^2 \sin.^2\zeta - \frac{8}{27} g^3 \left(a \sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x \cos.\zeta \right)^3$$

diventerà negativa, e si sa che in questo caso la formola (26) dà tre valori reali per $\frac{1}{z'}$. Se si pone

$$(29) \qquad \cos.\beta = \frac{gva \sin.\zeta}{\sqrt{\frac{8}{27} g^3 \left(a \sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x \cos.\zeta \right)^3}}$$

e si prende per β un angolo $< \pi$, i tre valori di $\frac{1}{z'}$ sono

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{1}{z'} = \frac{2}{av} \sqrt{\frac{2}{3} g \left(a \sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x \cos.\zeta \right)} \cos. \frac{\beta}{3} \\ \frac{1}{z'} = \frac{2}{av} \sqrt{\frac{2}{3} g \left(a \sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x \cos.\zeta \right)} \cos. \frac{2\pi+\beta}{3} \\ \frac{1}{z'} = \frac{2}{av} \sqrt{\frac{2}{3} g \left(a \sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x \cos.\zeta \right)} \cos. \frac{4\pi+\beta}{3}. \end{cases}$$

Dal che si vede che, essendo v ed a quantità positive sarà altresì $\beta < \frac{\pi}{2}$ e quindi la seconda e la terza di queste radici saranno negative.

Fatto $x = \infty$ risulta $\cos.\beta = 0$, e quindi $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\cos. \frac{\beta}{3} = \cos. \frac{\pi}{6}$, $\cos. \frac{2\pi+\beta}{3} = \cos. \frac{5\pi}{6}$, $\cos. \frac{4\pi+\beta}{3} = -\frac{1}{3} \cos.\beta$. I due primi valori di $\frac{1}{z'}$ diverranno dunque infiniti quando $x = \infty$ e sarà $z' = 0$, cioè i due rami, quello che ha l'origine in F ed uno di quelli che hanno l'origine in E anderanno acco-

standosi alla retta AB dalla parte delle ascisse positive come ad un asintoto.

La terza radice, sostituendo per cos. $\frac{4\pi+\beta}{3}$ il terzo del valore di cos.β preso negativamente dà

$$\frac{1}{z'} = -\frac{\sin.\zeta}{a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta}$$

e quindi

$$z' = -x\cot.\zeta - \frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\right).$$

Questo valore di z' è quello che risulta dall' equazione (25) dell' asintoto CD; il terzo ramo adunque all' infinito si confonderà con questa retta.

Se invece, partendo dal punto X, consideriamo che l' ascissa x varii nella direzione delle ascisse negative, la quantità

$$g^2v^2a^2\sin.^2\zeta - \frac{8}{27}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3$$

diventerà positiva, e quindi la formola (26) darà, come è noto, un solo valore reale per $\frac{1}{z'}$ e questo valore sarà quell° che corrisponde alla radice $\gamma = 1$. Da questa parte delle ascisse si estenderà dunque soltanto il ramo che ha l'origine in F e siccome fatto $x = -\infty$, si ricava dalla stessa formola

$$z' = -x\cot.\zeta - \frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\right)$$

perciò questo ramo si accosterà, come ad un asintoto, alla retta CD data dall' equazione (25).

Tutte queste circostanze sono rappresentate dai rami della fig. I, supponendo che questi rami all' infinito abbiano a confondersi colle due rette AB, CD. Di questi rami è evidente che quelli che possono rappresentare la superficie dell' acqua nel canale, sono i due soli EB, ED, perchè gli altri due si trovano sotto la superficie del terreno. Le coordinate di questi due rami sono date dalla seconda e dalla terza delle

tre radici (30) dell' equazione (24) del pelo d' acqua, che saranno perciò le sole radici che bisognerà adottare.

15. Onde distinguere quale di queste due radici, o sia quale dei due rami EB, ED converrà impiegare secondo i diversi casi, si osservi che al punto X appartenente all' ascissa x data dall' equazione (27) corrisponde nei due detti rami secondo le equazioni (8) e (9), la velocità

$$p = \frac{d\varphi'}{dx} = \left(gva\sin.\zeta \right)^{\frac{1}{3}}$$

e secondo ciò che abbiamo ritrovato sopra, equazioni (28), l' ordinata

$$z' = -\left(\frac{a^2 v^2}{g\sin.\zeta} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Paragonando queste equazioni, si avrà dunque nella stessa sezione

$$-z'\sin.\zeta = \frac{p^2}{g} = 2h,$$

cioè sarà l' altezza verticale dell' acqua espressa da $-z'\sin.\zeta$ eguale a $2h$ che rappresenta il doppio dell' altezza dovuta alla velocità nella stessa sezione.

Discendendo lungo il canale l' altezza $-z'\sin.\zeta$ va sempre diminuendo nel ramo EB, ed aumentando nel ramo ED, e viceversa la velocità dell' acqua va aumentando nel ramo EB e diminuendo nel ramo ED, se dunque nella sezione data all' origine delle coordinate, sarà

$$a\sin.\zeta < \frac{v^2}{g}, \text{ o sia} < 2h,$$

sussisteranno le circostanze del ramo EB che sarà quello che converrà adottare impiegando la seconda delle tre formole (30). Se invece sarà

$$a\sin.\zeta > \frac{v^2}{g}, \text{ o sia} > 2h,$$

la curva direttrice della superficie del pelo d'acqua sarà rappresentata dal ramo ED cui corrispondono le ordinate che si ottengono dalla terza delle tre formole (30).

16. Se si instituiscono delle considerazioni simili nel caso che il canale sia acclive cioè nel caso in cui cos. ζ sia negativo, si troverà che i quattro rami della curva sono in questo caso rappresentati dalla figura II, la quale in non altro differisce dalla figura I, se non che i rami che prima erano dalla parte delle ascisse positive ora sono passati dalla parte delle ascisse negative e viceversa. Egualmente che nel caso del fondo declive i soli due rami EA, EC possono rappresentare la superficie del pelo d' acqua , la quale sarà rappresentata dal ramo EA, se nella sezione data sarà, $a \sin. \zeta < \frac{v^2}{g}$ o sia $< 2h$, e dal ramo EC se invece nella sezione si avrà $a \sin. \zeta > \frac{v^2}{g}$ cioè $> 2h$.

17. Tutte le formole che abbiamo ritrovate nei numeri precedenti per rappresentare il moto dell' acqua in un canale sono, come si è avvertito al numero 10, dedotte nella supposizione che le equazioni (2) e (3) siano soddisfatte almeno prossimamente dai soli primi termini, che abbiamo conservati. Per verificare quando questa supposizione sussiste, osservo che tutti i termini che abbiamo trascurati contengono delle potenze e delle differenziali della quantità $\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right)$. Ora colla successiva differenziazione dell' equazione (7) e con alcune riduzioni che somministra la formola (12), si trova.

$$\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right) = p\cos.\zeta \frac{1}{z'\sin.\zeta + 2h}$$

$$(31) \qquad \left(\frac{d^3\phi'}{dx^3}\right) = 2p\cos.^2\zeta \frac{z'\sin.\zeta - h}{(z'\sin.\zeta + 2h)^2}$$

$$\left(\frac{d^4\phi'}{dx^4}\right) = 6p\cos.^3\zeta \frac{z'\sin.\zeta(z'\sin.\zeta - h) + 6h^2}{(z'\sin.\zeta + 2h)^3}.$$

Ne' canali la pendenza del fondo è rare volte $> \frac{1}{100}$ della

lunghezza, onde sarà quasi sempre cos. $\zeta < \frac{1}{100}$; le potenze e le differenziali della quantità $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$ saranno quindi successivamente più piccole, come contenenti un moltiplicatore di potenza di cos. ζ successivamente più alta, a meno che la quantità componente i divisori non abbia un valor molto piccolo e comparabile a cos. $\zeta^{\frac{1}{2}}$. Al numero 15. abbiamo visto che al punto E si ha $-z'\sin.\zeta = 2h$, e quindi $z'\sin.\zeta + 2h = 0$, e che questa quantità cominciando dal punto E va acquistando un valore che cresce più si allontana da detto punto: se dunque il tronco di canale di cui si considera il moto apparterrà ad una tratta d' alcuno dei rami EB, ED della figura I, o dei rami EA, EC della figura II. a qualche distanza dal punto E, la quantità $z'\sin.\zeta + 2h$ non sarà più piccola, ed i termini trascurati saranno almeno dell' ordine di 0,0001 frazione trascurabile per questa sorta di questioni di pratica, e le formole ritrovate saranno applicabili a tutti questi casi.

Dopo i valori già ritrovati degli elementi del moto dell' acqua d'un canale, sarebbe facile lo spingere innanzi le approssimazioni ai termini successivi, ma stimiamo inutile di riportare le formole che ne risultano, perchè esse non troverebbero quasi mai uso nella pratica, e d'altronde ciascuno può ritrovarli da se senza altra difficoltà che quella della lunghezza dei calcoli.

18. Per mostrare con un esempio l' applicazione di queste formole richiameremo un esperimento che abbiamo riferito in una nota alla pagina 223 della *Storia dei progetti e delle opere per la Navigazione interna del Milanese di Giuseppe Bruschetti* (Milano dai tipi di Giovanni Bernardoni MDCCCXXI.). Preferiamo tanto più volontieri quest'esempio, perchè ciò servirà a rettificare uno sbaglio ivi occorso essendosi fatto uso del valore di z che risulta facendo $\gamma = 1$ nella formola (26) in luogo del valore di z che risulta dalla terza delle tre formole (30).

L'esperimento fu eseguito dal Sig. Ispettore Carlo Parea alla mia presenza sul tronco del canale di Pavia compreso fra la Conchetta e la conca al Lambro pochi giorni dopo lo spurgo annuale. Colla livellazione si è primieramente indagata la pendenza del fondo del canale per una tratta di metri 2025, che fu ritrovata di $0^m,537$. L'ultima sezione di questa tratta era alle portine della conca al Lambro, e presa l'altezza dell'acqua sulla soglia delle portine risultò di metri 1,494. Esplorata la velocità dell'acqua nelle vicinanze di questa sezione con due galleggianti uno semplice e l'altro composto, non si trovò nelle due esplorazioni una diversità di velocità che eccedesse i limiti degli errori delle esperienze, e la velocità per un medio fu eguale a $0^m,324$ per minuto secondo sessagesimale.

Con questi dati calcoliamo colle formole premesse quale deve essere l'altezza del pelo d'acqua e la velocità all'altra estremità della tratta, cioè 2025 metri superiormente alle portine della conca al Lambro per confrontarle con quelle effettivamente misurate.

L'altezza dovuta alla velocità $0^m,324$ osservata nelle vicinanze delle portine alla conca al Lambro essendo appena di $0^m,00535$, sarà $2h'=0,0107$ e quindi molto minore dell'altezza del pelo d'acqua $a \sin. \zeta = 1,494$. onde il ramo che rappresenterà la curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d'acqua sarà il ramo ED, e la formola da adottarsi per calcolare z' sarà la terza delle tre formole segnate (30).

Ciò osservato, non si avrà più che a sostituire nelle formole (29), (30) per $a \sin. \zeta$, v e g i loro valori che sono

$$a \sin. \zeta = 1,494 \qquad v = 0,324 \qquad g = 9,8088$$

e porre $x \cos. \zeta = -0,537$, perchè, come è facile l'intendere colla considerazione di un semplice triangolo rettangolo, $x \cos. \zeta$ rappresenta la pendenza del canale ma presa negativamente.

Con questi dati il calcolo della formola (29) dà primieramente

$$\log. \cos. \beta = 9{,}47819 \qquad \beta = 72.^{\circ}29', 9.$$

ed in seguito dalla terza delle tre formole (30) si ricava

$$-z' \sin. \zeta = 0{,}949.$$

e con questi valori di $z' \sin. \zeta$ ed i surrifferiti di $a \sin. \zeta$ e v le formole (13) e (15) somministrano

$$p = 0,510.$$

Colla misura diretta si è ritrovato nella stessa sezione l'altezza verticale dell'acqua o sia $-z' \sin. \zeta = 1{,}027$, e la velocità p data dai galleggianti fu di $0^{m},474$. La differenza fra il calcolo e l'osservazione è di $\frac{1}{13}$ del totale valore. Ma questa differenza ha ciò di notabile, che la teoria dà la differenza di livello del pelo d'acqua dalla sezione inferiore alla superiore

$$(z' + a) \sin. \zeta + x \cos. \zeta = 0{,}008$$

mentre l'esperienza ha dato

$$(z' + a) \sin. \zeta + x \cos. \zeta = -0{,}070.$$

Per cui il pelo che secondo la teoria avrebbe dovuto avere una piccola acclività ha invece manifestato coll'esperienza una sensibile declività.

La quantità $z' \sin. \zeta + 2h$ che forma i denominatori delle formole (31) essendo per tutta la tratta del canale compresa fra i due valori 1,483 e 0,923, è evidente che il diffetto di corrispondenza ritrovato fra il calcolo e l'esperienza non può provenire dalle quantità trascurate. Non ci resta dunque che richiamare ciò che fu detto alla fine del numero 9.

Aggiunta

1. Questa aggiunta contiene un' estensione della teoria esposta nella Memoria precedente. Le formole che ivi furono ritrovate sono fondate sulla supposizione che le velocità p ed r di una molecola fluida qualunque secondo l'asse delle x e secondo l'asse delle z siano tali che la quantità $pdx + rdz$ formi una differenziale esatta. Quantunque questa supposizione sia ordinariamente ammessa e possa sussistere in molti ca-

si del movimento dell' acqua nei canali, credo non inutile il far vedere come si ottenga una facile soluzione del problema anche prescindendo da una tale restrizione.

A tale effetto richiamo le formole degli articoli 9. 10. . . 15 della Sez. XI. della seconda parte della Meccanica analitica, facendo in esse la velocità q e tutte le differenziali relativamente al tempo nulle, pel motivo che quivi non si considera che il moto in un piano e già ridotto allo stato di permanenza. Queste formole, fatta la densità $\Delta = 1$, sono

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dr}{dz} = 0 \qquad \text{(G)}$$

$$p\,\frac{dA}{dx} + r\,\frac{dA}{dz} = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$p\,\frac{d\lambda}{dx} + r\,\frac{d\lambda}{dz} = 0 \qquad \text{(K)}$$

$$d\lambda - dV = \left(p\,\frac{dp}{dx} + r\frac{dp}{dz}\right)dx + \left(p\,\frac{dr}{dx} + r\frac{dr}{dz}\right)dz \qquad \text{(L)}$$

Se si pone con Lagrange, art. 14.

$$(1) \qquad p = \frac{da}{dz}$$

l' equazione (G) diventa

$$\frac{d^2a}{dzdx} + \frac{dr}{dz} = 0$$

la quale è integrabile relativamente a z, e dà

$$(2) \qquad r = -\frac{da}{dx}.$$

Con questi valori di p ed r, le equazioni (I), (K), (L) somministrano

$$\frac{da}{dz}\,\frac{dA}{dx} - \frac{da}{dx}\,\frac{dA}{dz} = 0 \qquad \text{(I)}'$$

$$\frac{da}{dz}\,\frac{d\lambda}{dx} - \frac{da}{dx}\,\frac{d\lambda}{dz} = 0 \qquad \text{(K)}'$$

$$d\lambda - dV = \left[\frac{da}{dz}\,\frac{d^2a}{dzdx} - \frac{da}{dx}\,\frac{d^2a}{dz^2}\right]dx + \left[\frac{da}{dx}\,\frac{d^2a}{dzdx} - \frac{da}{dz}\,\frac{d^2a}{dx^2}\right]dz \qquad \text{(L)}'.$$

Siccome il primo membro di quest' ultima equazione è una

differenziale esatta, converrà che tale lo sia anche il secondo membro. Si avrà così l'equazione

$$\frac{da}{dz}\,\frac{d^3a}{dz^2dx}-\frac{da}{dx}\,\frac{d^3a}{dz^3}=\frac{da}{dx}\,\frac{d^3a}{dx^2dz}-\frac{da}{dz}\,\frac{d^3a}{dx^3}$$

la quale ammette una prima integrazione coi metodi conosciuti (vedi Lacroix n.° 745 e 752), e dà

$$(3)\qquad \frac{d^2a}{dz^2}+\frac{d^2a}{dx^2}=\pi'(a)$$

$\pi'(a)$ indicando una funzione arbitraria di a. Anche l'equazione (L)', s'integra in seguito, e si ha

$$(4)\qquad \lambda-V=\frac{1}{2}\,\frac{da^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\,\frac{da^2}{dx^2}-\pi(a)$$

$\pi(a)$ essendo la funzione primitiva di $\pi'(a)$.

Sarebbe difficile l'ottenere in generale un integrale dell'equazione (3) dal quale si potesse trarne qualche partito per le applicazioni che formano il nostro oggetto, ma nel caso attuale in cui si suppone che l'inclinazione del fondo del canale all'orizzonte sia piccola, risulta, come si verificherà in appresso, anche la velocità $\frac{da}{dx}$ molto piccola e le sue differenziali successive relativamente ad x di un ordine continuamente inferiore. Questa circostanza ci permette, trascurando soltanto delle quantità di second'ordine, di ridurre l'equazione (3) alla seguente

$$\frac{d^2a}{dz^2}=\pi'(a)$$

la quale ha evidentemente per integrale

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\,\frac{da^2}{dz^2}=\pi(a)+\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ dinotando la funzione arbitraria di x portata dall'integrazione.

Supponendo le ascisse positive prese nella direzione della corrente, la velocità $\frac{da}{dz}$ sarà positiva, quindi, adottando il segno $+$, si avrà

(6) $$\frac{da}{dz} = \sqrt{2(\pi(a) + \phi(x))}\,.$$

Da questa equazione si ritrae

$$z = \int \frac{da}{\sqrt{2(\pi(a)+\phi(x))}} + \psi(x)$$

l' integrale dovendo essere preso considerando a soltanto per variabile, e $\psi(x)$ essendo un' altra funzione arbitraria di x.

Rappresentiamo con $\Pi(\phi(x), a)$ la funzione primitiva di $\frac{1}{\sqrt{2(\pi(a)+\phi(x))}}$, sarà

(7) $$z = \Pi(\phi(x), a) + \psi(x)$$

dalla quale si potrà viceversa ricavare.

(8) $$a = \amalg(\phi(x)\,,\, z - \psi(x))$$

$\amalg$ indicando la funzione che risulta pel valore di a colla risoluzione della precedente equazione (7).

Trascurando le quantità di second' ordine l'equazione (4) diviene

(9) $$\lambda - V = \frac{1}{2}\frac{da^2}{dz^2} - \pi(a)$$

la quale col mezzo dell' equazione (1) si può anche trasformare nella seguente

(10) $$\lambda - V = \phi(x).$$

Quest' ultima equazione ed una delle due precedenti (7) ed (8) risolvono per approssimazione il problema del moto di un fluido nel caso considerato, che si muova in un piano verticale limitato da una retta poco inclinata all' orizzonte, perchè da esse si può dedurre le velocità e la pressione di un punto qualunque della massa fluida non che l' equazione della curva del pelo.

Infatti le equazioni (7) ed (8) colla loro differenziazione ci danno

(11) $$\frac{da}{dz} = \sqrt{2(\pi(a) + \phi(x))}$$

(12) $$\frac{da}{dx} = -\sqrt{2(\pi(a) + \phi(x))}\,[\,\Pi'(\phi(x), a)\phi'(x) + \psi'(x)\,]$$

o vero

$$(13) \qquad \frac{da}{dz} = \Pi_{,}(\varphi(x), z - \psi(x))$$

$$(14) \qquad \frac{da}{dx} = \Pi'(\varphi(x), z - \psi(x))\varphi'(x) - \Pi_{,}(\varphi(x), z - \psi(x))\psi'(x)$$

dove Π' e $\Pi_{,}$ indicano le funzioni prime di Π e Π relativamente a $\varphi'(x)$ e $\Pi_{,}$ la funzione prima di Π relativamente a z, $\varphi'(x)$ e $\psi'(x)$ le funzioni prime di $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

Le due prime formole sono più generali perchè danno le espressioni delle velocità $\frac{da}{dz}$ e $\frac{da}{dx}$ indipendentemente dalla risoluzione dell' equazione (7); le seconde hanno il vantaggio di far conoscere il valore di queste velocità direttamente in funzione di x e z.

La pressione λ di un punto qualunque si avrà dall'equazione (10), mettendo per V il suo valore dato all'articolo 23. ed osservando che nel nostro caso si ha $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\xi = \frac{\pi}{2} - \zeta$, si otterà

$$(15) \qquad \lambda = -gx\cos.\zeta - gz\sin.\zeta + \varphi(x).$$

L' equazione della superficie libera del fluido si ottiene eguagliando a zero questo valore di λ, ciò che dà

$$(18) \qquad z = \frac{\varphi(x) - gx\cos.\zeta}{g\sin.\zeta}.$$

Non ci resta dunque altro che determinare la forma delle funzioni arbitrarie $\pi(a)$, $\varphi(x)$ e $\psi(x)$.

2. Queste funzioni possono essere determinate per mezzo della cognizione dello stato del fluido nella prima sezione, e dalle condizioni che le molecole sulla superficie del fondo e sulla superficie libera del fluido si muovano costantemente su queste due superficie le quali due condizioni sono espresse dalle due equazioni (I)', (K)'.

I.° La cognizione dello stato del fluido nella prima sezione determina la forma della funzione $\pi(a)$. Supponiamo in fatti che in questa sezione, che risguarderemo come l' imbocca-

tura del canale e per la quale supporremo $x=0$, il fluido sia introdotto con una velocità parallela all'asse delle x, che pei diversi punti della sezione sia espressa dalla funzione $F'(z)$. Si avrà per questa sezione

$$(19) \qquad \frac{da}{dz} = F'(z)$$

e quindi indicando con $F(z)$ la funzione primitiva di $F'(z)$

$$(20) \qquad a = F(z)$$

ommetto la costante abitraria che può considerarsi compresa nel valore di a.

Da questa equazione si può trarre il valore di z espresso per a, che indicheremo per

$$(21) \qquad z = \mathfrak{F}(a)$$

onde sostituendo risulterà

$$(22) \qquad \frac{da}{dz} = F'(\mathfrak{F}(a)).$$

Questo valore di $\frac{da}{dz}$ rappresenta la velocità nella direzione dell' asse delle x nella sezione all' incile, e dovrà perciò soddisfare all' equazione (5) facendo in essa $x=0$, avremo così

$$\frac{1}{2} F'^2(\mathfrak{F}(a)) = \pi(a) + \phi(0)$$

la funzione $\pi(a)$ sarà dunque espressa da

$$(23) \qquad \pi(a) = \frac{1}{2} F'^2(\mathfrak{F}(a)) - \phi(0).$$

Con questa espressione di $\pi(a)$, la formola che abbiamo espressa con $\Pi(\phi(x), a)$ sarà data da

$$(24) \qquad \Pi(\phi(x), a) = \int \frac{da}{\sqrt{2(\phi(x) - \phi(0) + F'^2(\mathfrak{F}(a))}}.$$

Siccome questa funzione, che presentemente è di forma determinata, deve essere fatta di a e della differenza $\phi(x) - \phi(0)$, la rappresenteremo perciò d'ora innanzi per maggior chiarezza con $\Pi(\phi(x) - \phi(0), a)$, in questo modo le due equazioni (7), (8) diverranno

(25) $z = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), a) + \psi(x)$

(26) $a = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), z - \psi(x))$

II.° La forma della funzione $\psi(x)$ si determina facilmente per mezzo dell'equazione (I)' che inchiude la condizione che le molecole che si trovano sul fondo si muovano costantemente in esso. Per ciò si osservi che il fondo del canale essendo nel nostro caso una linea retta sulla quale abbiamo preso l'asse delle x, la sua equazione sarà $A = z = 0$, e la sua differenziale

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz}\frac{dz}{dz} = 0$$

Eliminando A dall'equazione (I)' si ottiene

$$\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{da}{dx} = 0$$

Quest'equazione integrata somministra

$$a = c$$

c essendo una costante arbitraria.

Se dunque facciamo nell'equazione (25) $z = 0$ la medesima dovrà essere soddisfatta da $a = c$. Per vedere cosa dinota la costante c si rifletta che $\frac{da}{dz}$ rappresentando la velocità del fluido parallela all'asse delle x, il prodotto $l\frac{da}{dz}$, (l dinota la larghezza del canale) rappresenterà la funzione prima della quantità d'acqua che passa per una sezione del canale, e quindi l'integrale la esteso da $z = 0$ ad una ordinata qualunque z dovrà eguagliare in generale la quantità di fluido che nell'unità di tempo passa in quella parte della sezione compresa tra il fondo e l'orizzontale condotta all'altezza z. Quando quest'ordinata è quella del fondo, pel quale $z = 0$, questa quantità di fluido è nulla, si ha dunque $la = 0$ e quindi dalla precedente equazione $c = 0$. L'equazione (25) diverrà così per le particelle che si trovano sul fondo

$$0 = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0) + \psi(x)$$

dalla quale si ricava la forma della funzione $\psi(x)$ data per mezzo di $\varphi(x)$ nel seguente modo

$$\psi(x) = -\Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

Onde sarà in generale

$$(27) \quad z = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), a) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

$$(28) \quad \frac{da}{dz} = \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathfrak{F}(a))}$$

$$(29) \quad \frac{da}{dx} = -\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathfrak{F}(a))}\,[\Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), a) - \Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), 0)]\,\varphi'(x)$$

o vero

$$(30) \quad a = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

$$(31) \quad \frac{da}{dz} = \Pi_{,}(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

$$(32) \quad \frac{da}{dx} = \Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)\,\varphi'(x) + \Pi_{,}(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)\Pi'(\varphi(x) - \varphi(0),)\varphi'(x)$$

III.° Queste formole contengono ancora la funzione incognita $\varphi(x)$ la quale si determina colla condizione che le particelle che sono una volta sulla superficie libera del fluido, si conservano costantemente in essa, la qual condizione è espressa dall' equazione (K)'. Eliminando λ da quest' equazione per mezzo della differenziale dell' equazione $\lambda = 0$ rappresentante la superficie del fluido, e che è

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda}{dz}\frac{dz}{dx} = 0$$

si ottiene

$$\frac{da}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{da}{dx} = 0$$

la quale ha per integrale

$$a = c$$

dove c dinota una costante arbitraria.

Precedentemente abbiamo visto che la rappresenta la quantità di acqua che passa nella porzione di sezione com-

presa fra il fondo e l'ordinata condotta all'altezza z. Allorchè l'ordinata z appartiene alla superficie del fluido la porzione compresa corrisponde all'intiera sezione ed la equivale alla portata del canale. Si avrà così, dinotando con Q la portata, $la = Q, a = \frac{Q}{l}$, e la precedente equazione darà parimenti $c = \frac{Q}{l}$.

Se dunque nell'equazione (27) si pone $a = \frac{Q}{l}$ l'ordinata distinta con un apice ed espressa da

$$(33) \qquad z' = \Pi\left(\varphi(x) - \varphi(0), \frac{Q}{l}\right) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

apparterrà alla superficie del fluido. Ma a questa superficie abbiamo visto sopra, equazione (18), che si ha

$$z' = \frac{\varphi(x) - gx\cos.\zeta}{g\sin.\zeta}.$$

Paragonando quindi questi due valori si otterrà

$$(34) \qquad \varphi(x) - gx\cos.\zeta =$$

$$g\sin.\zeta\left[\Pi\left(\varphi(x) - \varphi(0), \frac{Q}{l}\right) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)\right].$$

Se in questa equazione si fa $x = 0$, resta

$$(35) \qquad \varphi(0) = g\sin.\zeta\left[\Pi\left(0, \frac{Q}{l}\right) - \Pi(0, 0)\right],$$

si conoscerà così il valore della costante $\varphi(0)$: allora la precedente equazione non conterrà più che la variabile x e la funzione $\varphi(x)$, e sarà atta a dare la forma di questa funzione in quantità determinate e cognite.

La forma delle funzioni, che entrano nelle espressioni delle velocità $\frac{da}{dz}$, $\frac{da}{dx}$, e della pressione λ date dalle formole (28), (29), (31), (32), (15), essendo così tutte determinate, i valori di queste quantità saranno pienamente conosciuti ed il problema sarà completamente risoluto. Le equazioni (18) e

(33) rappresenteranno poi la superficie cilindrica sotto cui si dispone il pelo d'acqua, e si può osservare che l' equazione di questa superficie si ottiene anche indipendentemente dalla forma della funzione $\phi(x)$, poichè se nell' equazione (33) si mette il valore di $\phi(x)$ tratto dall' equazione (18), risulta.

$$(36) \qquad z' = \Pi\left(gz' \sin.\zeta + gx \cos.\zeta - \phi(0), \frac{Q}{l}\right) - \Pi(gz'\sin.\zeta + gx\cos.\zeta - \phi(0), 0)$$

la quale rappresenta pure l' equazione della superficie libera del fluido.

3. Avanti di passare alle conseguenze che risultano dalle ritrovate equazioni, m' arresto con qualche osservazione su una difficoltà che potrebbe presentarsi nel determinare le funzioni arbitrarie. La determinazione della funzione $\pi(a)$ espressa dalla formola (23) suppone la risoluzione algebrica dell' equazione (20). Quando quest' equazione fosse irresolubile, mancherebbe la cognizione della funzione $F'(\mathfrak{F}(a))$, e quindi l' integrale della formola

$$(a) \qquad \int \frac{da}{\sqrt{2(\phi(x)-\phi(0))+F'^2(\mathfrak{F}(a))}}$$

riescirebbe impraticabile e la forma della funzione Π indeterminata. Ma si può eseguire sulla formola (24) una trasformazione mediante la quale essa diviene di forma determinata ancorchè l' equazione (20) sia irresolubile. Infatti posto $\mathfrak{F}(a)=\omega$ si ha $a=F(\omega)$, $da=F'(\omega)d\omega$, e $F'(\mathfrak{F}(a))=F'(\omega)$. Con queste posizioni l' integrazione della formola (24) si può far dipendere dall' integrazione della formola

$$\int \frac{F'(\omega)d\omega}{\sqrt{2(\phi(x)-\phi(0))+F'^2(\omega)}}$$

la quale non suppone nè la risoluzione dell' equazione (20) nè l' integrazione della formola (19).

Indicando con $\overline{\Pi}(\phi(x)-\phi(0),\omega)$ l' integrale di quest' ultima formola, il sistema delle due equazioni

$$a = F(\omega)$$

$$z = \overline{\Pi}\,(\,\varphi(x) - \varphi(0), \omega\,) + \psi(x)$$

terrà luogo dell' equazione (7) e quindi in vece delle equazioni (27), (28) e (29) risulteranno le seguenti

$$(27)' \quad z = \overline{\Pi}(\varphi(x) - \varphi(0), \omega) - \overline{\Pi}(\varphi(x) - \varphi(0), \omega')$$

$$(28)' \quad \frac{da}{dz} = \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathcal{F}(a))}$$

$$(29)' \quad \frac{da}{dx} = -\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathcal{F}(a))}\,[\,\overline{\Pi}'(\varphi(x) - \varphi(0), \omega)$$
$$- \Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), \omega')\,]\,\varphi'(x)$$

e per determinare $\varphi(0)$ e $\varphi(x)$ avremo

$$(35)' \quad -\varphi(0) = g \sin.\zeta\,(\,\overline{\Pi}\,(0, \omega_{,}) - \overline{\Pi}\,(0, \omega'))$$

$$(34)' \quad \varphi(x) - gx \cos.\zeta = g \sin.\zeta\,[\,\overline{\Pi}\,(\varphi(x) - \varphi(0), \omega_{,})$$
$$- \Pi\,(\varphi(x) - \varphi(0), \omega')]$$

dove ω', ed $\omega_{,}$ rappresentano le due quantità $\mathcal{F}(0)$ ed $\mathcal{F}\left(\frac{Q}{l}\right)$, le quali quantità eguagliano le coordinate del fondo e della superficie nella sezione data all' origine delle coordinate.

Volendo con queste formole determinare le velocità e la pressione di un punto assegnato della corrente e corrispondente alle coordinate x, z, s' incomincerà col dato valore di x a ricavare il valore di $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ per mezzo dell' ultima equazione (34)' e della sua differenziale. Col valore di $\varphi(x)$ e dell' ordinata z si avrà il valore di ω dall' equazione (27)'. Ciò fatto i secondi membri delle equazioni (28)', (29)', e (15) saranno composti di quantità tutte cognite e daranno le velocità e la pressione del punto assegnato della corrente.

Un' altra trasformazione che può essere utile in molti casi, e che riduce la quantità sotto il segno $\int$ nella formola (a) ad un semplice radicale quadratico tutte le volte che la derivata prima della funzione inversa di $F'(z)$, o sia la funzione $'\mathcal{F}'(\omega)$ risulta una quantità razionale, è la seguente. Posto $F'(\mathcal{F}(a)) = \omega$, ed indicando con $'\mathcal{F}(\omega)$ la funzione che risulta colla risoluzione considerando $\mathcal{F}(a)$ per incognita, si ha $\mathcal{F}(a) = '\mathcal{F}(\omega)$ e quindi $a = F('\mathcal{F}(\omega))$, e rappresentando con $'\mathcal{F}'(\omega)$ la funzione

prima di $\mathfrak{F}'(\omega)$, $da = \mathfrak{F}'(\omega)\omega d\omega$, onde sostituendo la formola (a) si ridurrà a

$$\int \frac{\mathfrak{F}'(\omega)\omega d\omega}{\sqrt{2(\phi(x)-\phi(0))+\omega^2}}.$$

In questo caso se si dinota con $\overline{\Pi}(\phi(x)-\phi(0),\omega)$ l'integrale di quest' ultima funzione, il sistema delle due equazioni

$$a = F(\mathfrak{F}(\omega))$$
$$z = \overline{\Pi}(\phi(x) - \phi(0), \omega) + \psi(x)$$

terrà luogo dell' equazione (7), ed interpretando ω nella significazione ultimamente assegnata, e quindi ponendo

$$\omega' = F'(\mathfrak{F}(0)) \qquad \omega_{,} = F'\left(\mathfrak{F}\left(\frac{Q}{l}\right)\right)$$

le stesse formole (27)' (28)', (29)' risolveranno il problema anche per questa trasformazione.

4. Esposte le formole generali del movimento permanente e continuo di un fluido che si muove in un canale rettangolare poco inclinato all' orizzonte, passiamo a dedurre da queste formole alcuni teoremi che sussistono in generale qualunque sia la legge che regna fra le velocità dei diversi punti della sezione all' origine.

I. Se indichiamo con $x_{,}$, $z_{,}$, $a_{,}$ le quantità analoghe ad x, z, a ma appartenenti ad un' altra sezione, l'equazione (5) che sussiste per tutte le sezioni in generale, darà anche la seguente

$$\frac{1}{2}\frac{da_{,}^2}{dz_{,}^2} = \pi(a_{,}) + \phi(x_{,}).$$

Da questa equazione sottraendo la stessa (5) si ha

$$(b) \quad \frac{1}{2}\frac{da_{,}^2}{dz_{,}^2} - \frac{1}{2}\frac{da^2}{dz^2} = \pi(a_{,}) - \pi(a) + \phi(x_{,}) - \phi(x).$$

Supponiamo che sia $a = a_{,}$, sul fondo per esempio (vedi il numero 2.) si ha in tutte le sezioni $a = a_{,} = 0$, ed alla superficie $a = a_{,} = \frac{Q}{l}$, resterà

$$\frac{1}{2}\frac{da_{,}^2}{dz_{,}^2} - \frac{1}{2}\frac{da^2}{dz^2} = \phi(x_{,}) - \phi(x)$$

Ma l'equazione (18) ci dà

$$\varphi(x) = gx\cos.\zeta + gz\sin.\zeta$$
$$\varphi(x_{,}) = gx_{,}\cos.\zeta + gz_{,}\sin.\zeta$$

dunque sostituendo risulterà

$$\frac{1}{2g}\frac{da_{,}^2}{dz_{,}^2} - \frac{1}{2g}\frac{da^2}{dz^2} = (x_{,} - x)\cos.\zeta + (z_{,} - z)\sin.\zeta$$

Ora $\frac{da}{dz}$ rappresentando in generale la velocità parallela al fondo della molecola corrispondente alle coordinate x, z, sarà come è noto, $\frac{1}{2g}\frac{da^2}{dz^2}$ l'altezza dovuta alla velocità parallela al fondo della detta molecola. Dinotiamo in generale con h quest' altezza, osservando di più che $(x_{,}-x)\cos.\zeta+(z_{,}-z)\sin.\zeta$ equivale alla differenza di livello della superficie della corrente dalla sezione x alla sezione $x_{,}$, differenza che per brevità indicheremo con ϖ, si avrà

$$h_{,} - h = \varpi$$

la qual formola ci dà il teorema che *La differenza delle altezze dovute alle velocità parallele al fondo di due molecole poste sul fondo o sulla superficie, od in generale corrispondenti a due eguali valori di a, equivale alla differenza di livello della superficie del fluido dalla seconda alla prima sezione.*

II. Col teorema precedente possiamo paragonare le velocità parallele al fondo di due molecole poste in due diverse sezioni: se nell' equazione (b) poniamo $x = x_{,}$, ciò che la riduce a

$$(c) \qquad \frac{1}{2}\frac{da_{,}^2}{dz_{,}^2} - \frac{1}{2}\frac{da^2}{dz^2} = \pi(a_{,}) - \pi(a)$$

potremo instituire un confronto fra le velocità di due molecole poste nella stessa sezione. Facciasi per esempio $a_{,} = \frac{Q}{l}$ ed $a = 0$, per cui $\frac{da_{,}}{dz_{,}}$ sia la velocità di una molecola alla superficie, e $\frac{da}{dz}$ la velocità di una molecola sul fondo, si

avrà

$$h_{,} - h = \frac{1}{g}\left(\pi\left(\frac{\Omega}{l}\right) - \pi(0)\right)$$

la quale equazione ci somministra il teorema che *La differenza delle altezze dovute alle velocità delle molecole poste sulla superficie o sul fondo è costante in tutta la lunghezza del canale:* ed in generale l'equazione (*c*) ci mostra che *La differenza delle altezze dovute a due molecole poste in una sezione qualunque e corrispondente a due eguali valori di a è parimenti costante.*

III. Un altro teorema che si deduce dalle formole ritrovate e che sussiste in generale nel grado d' approssimazione entro il quale ci siamo contenuti è, che la pressione di una molecola fluida qualunque risulta eguale come se il fluido fosse stagnante. Infatti eliminando $\phi(x)$ fra le due equazioni (15) e (18) e contrassegnando come si è detto di sopra con un apice il valore appartenente alla superficie del valor variabile z, si trova

$$\lambda = g(z' - z)\sin.\zeta.$$

Ora $(z'-z)\sin.\zeta$ è l'altezza variabile della colonna sovraincombente alla molecola che corrisponde all'ordinata z dunque *La pressione di una molecola qualunque è eguale al peso della colonna fluida che gli sta sopra, che è ciò che vale pei fluidi in quiete.*

5. Le formole dei numeri precedenti sono state ricavate colla supposizione che la velocità $\frac{da}{dx}$ perpendicolare al fondo del canale sia piccola, e che la differenziale $\frac{d^2a}{dx^2}$ sia di un ordine ancora inferiore, cioè dell' ordine del quadrato di $\frac{da}{dx}$ ed al principio del numero 1. abbiamo promesso di verificare che questa supposizione è legittima almeno in un gran numero di casi. Per ciò fare richiamo l' equazione (31) scrivendo in essa per semplicità Π in luogo di $\Pi[\phi(x) - \phi(0)$.

$z - \Pi(\varphi(x) - \varphi(o), o)]$, Π in luogo di $\Pi(\varphi(x) - \varphi(o), o)$, e φ in luogo di $\varphi(x)$, si avrà

$$\frac{da}{dx} = \Pi'\varphi' + \Pi_{,}\Pi'\varphi'$$

e differenziando e conservando le notazioni di Lagrange

$$\frac{d^2a}{dx^2} = \Pi''\varphi'^2 + 2\Pi_{,}'\Pi'\varphi'^2 + \Pi_{,,}\Pi'^2\varphi'^2 + \Pi'\varphi'' + \Pi_{,}(\Pi''\varphi'^2 + \Pi'\varphi'').$$

Ora l'equazione (34), posto $1 - g\sin.\zeta\,(\Pi'(Q:l) - \Pi'(o)) = D$, dà

$$\varphi' = \frac{g\cos.\zeta}{D}$$

$$\varphi'' = \frac{g\sin.\zeta(\Pi''(Q:l) - \Pi''(o))\varphi'^2}{D}.$$

Dunque eccettuati i casi in cui qualcuna delle quantità $\frac{\Pi_{,}}{D}$, $\frac{\Pi_{,}\Pi'}{D}$, $\frac{\Pi''}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}'\Pi'}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,,}\Pi'^2}{D^2}$, $\frac{\Pi'\Pi''(Q:l)}{D^2}$, $\frac{\Pi'\Pi''(o)}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}\Pi''}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}\Pi'\Pi''(Q:l)}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}\Pi'\Pi''(o)}{D^2}$ diventi molto grande, il valore di $\frac{da}{dx}$ sarà dell'ordine di $\cos.\zeta$, e quello di $\frac{d^2a}{dx^2}$ dell'ordine di $\cos.^2\zeta$. Ne' canali naturali od artificiali de' quali occorre all'Architetto Idraulico di considerare il moto delle acque, la pendenza del fondo del canale rappresentata da $\cos.\zeta$ è sempre molto piccola; così in questi canali si verificherà quasi sempre la supposizione ammessa da principio.

6. L'applicazione delle formole date ai casi speciali non presenta più che le difficoltà dell'integrazione di funzioni con una sola variabile, e della risoluzione di equazioni con una sola incognita. Queste integrazioni e risoluzioni dipenderanno dalla natura della funzione $F'(z)$ che rappresenta la velocità di un punto qualunque corrispondente all'ordinata z in una sezione data, nella quale abbiamo posta l'origine delle ascisse e l'incile del canale.

Se si prende per la funzione $F'(z)$ una costante, il che corrisponde al caso che l'acqua si introduca nella sezione all'incile con una velocità costante in tutti i punti, si ricasca

nelle formole che abbiamo ritrovato nella Memoria premessa fondata sulla supposizione che $pdx+rdz$ sia una differenziale esatta. Questa supposizione analitica corrisponde dunque alla condizione fisica che l' acqua entri nella tratta di canale che si considera, con una velocità eguale in tutta l'estensione della sezione all' origine.

Per trattare un caso più generale, supponiamo che l'acqua si presenti alla prima sezione con una velocità parallela al fondo che creschi o cali proporzionalmente all' altezza z di modo che, v rappresentando la velociaà sul fondo ed ε un coefficiente costante, questa velocità sia espressa dalla formola $v+\varepsilon z$. In quest' ipotesi sarà

$$F'(z) = v + \varepsilon z$$

e quindi

$$a = F(z) = vz + \frac{1}{2}\varepsilon z^2$$

senza costante perchè deve essere $a = 0$ quando $z = 0$. Di quì si ricaverà, equazioni (21) e (23),

$$z = -\frac{1}{\varepsilon}(v \pm \sqrt{v^2 + 2\varepsilon a}) = \mathcal{F}(a)$$

$$F'^2(\mathcal{F}(a)) = v^2 + 2\varepsilon a \quad \text{e} \quad \pi(a) = \frac{1}{2}v^2 + \varepsilon a - \varphi(0)$$

e quindi, equazione (24)

$$\Pi(\varphi(x) - \varphi(0), a) = \int \frac{da}{\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0)) + v^2 + 2\varepsilon a}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2 + 2\varepsilon a}$$

Sarà così secondo le formole (27), (30), (28), (29).

$$z = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0)) + v^2 + 2\varepsilon a} - \sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0)) + v^2}\right]$$

$$a = z\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0) + v^2} + \frac{1}{2}\varepsilon z^2$$

$$\frac{da}{dz} = \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2} + \varepsilon z$$

$$\frac{da}{dx} = \frac{z\varphi'(x)}{\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0)) + v^2}}.$$

Avremo in seguito per determinare $\varphi(x)$ l'equazione sussistente alla superficie

$$\varphi(x)-gx\cos.\zeta=\frac{g\sin.\zeta}{\varepsilon}\left[\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+v^2}+\sqrt{2\varepsilon Q:l}\right.$$
$$\left.-\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+v^2}\right]$$

se si pone

$$\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+v^2}=\omega$$

d' onde risulta

$$\varphi(x)=\varphi(0)+\frac{\omega^2-v^2}{2}.$$

Si avrà per determinare ω l' equazione

$$(c)\quad \left(\frac{\omega^2-v^2}{2}+\varphi(0)-gx\cos.\zeta\right)=\frac{g\sin.\zeta}{\varepsilon}\left(\sqrt{\omega^2+2\varepsilon Q:l}-\omega\right)$$

la quale liberata dal radicale monta soltanto al quarto grado ed è perciò risolubile algebricamente: in seguito si avrà per la superficie

$$(d)\quad z'=\frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\omega^2+2\varepsilon Q:l}-\omega\right]=\frac{2Q}{l\left[\sqrt{\omega^2+2\varepsilon Q:l}-\omega\right]}$$

e per un punto qualunque

$$a=z\omega+\frac{1}{2}\varepsilon z^2$$

$$(e)\quad \frac{da}{dz}=\omega+\varepsilon z$$

$$\frac{da}{dx}=z\frac{d\omega}{dx}.$$

Eliminando ω fra l' equazioni (c) e (d) si trova

$$\frac{1}{2}\left(Q:l-\frac{1}{2}\varepsilon z'^2\right)^2-z'^2\left(\frac{v^2}{2}-\varphi(0)+gx\cos.\zeta\right)=g\sin.\zeta.z'^3.$$

Se si chiama $-a$ l' altezza z' del pelo d' acqua nella prima sezione e si osserva che per questa sezione si ha $x=0$, $\omega=v$, $Q:l=-va+\frac{1}{2}\varepsilon a^2$, colle sostituzioni si trova

$$\varphi(0)=-ga\sin.\zeta$$

onde sarà

$$\frac{1}{2}\left(Q:l-\frac{1}{2}\varepsilon' z^2\right)-gz'^2\left(\frac{v^2}{2g}+a\sin.\zeta+gx\cos.\zeta\right)=g\sin.\zeta.z'^3$$

Quest' equazione appartiene ad una linea di quart' ordine del genere CXLIII. (1), la quale ha quattro rami infiniti che si estendono dalla parte delle ascisse positive due iperbolici di cui l' asintoto è rappresentato dall'equazione $z'^2=\frac{Q}{2lgx\cos\zeta}$ e due parabolici dell'asintoto dato da $z'^2=\frac{8g}{\varepsilon}x\cos.\zeta$. Un solo dei rami corrispondenti a ciascun asintoto si troverà dalla parte delle ascisse negative che sono le sole che corrispondono alle curve situate sopra il terreno, così due soli rami potranno rappresentare la curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d' acqua.

Se la differenza fra la velocità del fondo e della superficie, come spesso può risultare dagli esperimenti, sarà piccola, il coefficiente ε sarà pure piccolo, allora trascurando il quadrato di ε, ed impiegando la surriferita espressione di $Q:l$ la precedente equazione si potrà ridurre a

$$z'^3+x\cot.\zeta z'^2+\frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta+\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon a}{v}\right)\right)z'^2=$$
$$\frac{a^2}{\sin.\zeta}\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon a}{v}\right)$$

la quale è affatto simile a quella segnata (24) nella Memoria, ad eccezione che l' altezza $\frac{v^2}{2g}$ è quì rimpiazzata da $\frac{v^2}{2g}\left(1-\frac{\varepsilon a}{v}\right)$. Con questa leggiera modificazione tutte le conseguenze dedotte nei numeri 14. 15. e 16. della Memoria saranno applicabili al caso più generale che ora consideriamo. L' equazione (*e*) poi ci mostra che la stessa legge di velocità che esiste nella sezione all' origine sussiste in tutto il corso del canale.

(1) Euler. Introductio in analysin infinitorum. pag. 149. Edizione di Losanna.