MEMORIA CIRCA LA DEVIAZIONE MERIDIONALE DE' GRAVI LIBERAMENTE CADENTI

Di Girolamo Saladini

Ricevuta il dì 9. Ottobre 1801.

1. Figuri il circolo (fig. 1.) APBQ il meridiano della Terra, dove s'innalza l'Edifizio LX, dalla cui cima X cada liberamente un grave. AMBK rappresenti l'Equatore, e PCQ sia l'asse di lui, che è l'istesso, che l'asse della Terra. Suppongo il Globo Terraqueo accostarsi moltissimo alla figura sferica conforme a ciò, che da tutti si ammette. La retta XLS sia la direzione del pendolo, ossia della gravità assoluta combinata colla forza centrifuga nata dalla *rotazione* diurna, che chiamo gravità *affetta*, ed ancor *combinata*. Questa propriamente è la direzione perpendicolare alla superficie delle acque stagnanti, e ai piani a questa paralleli, che sogliono chiamarsi *orizzonti* o *piani orizzontali*, e la direzione del pendolo si dice *linea verticale*; prescindo sempre dalle cagioni estrinseche ed accidentali, che potrebbero in qualche caso particolare recare alterazioni. La retta XOCD sia la direzione della gravità assoluta; cioè non combinata colla forza centrifuga. Se la Terra non è perfettamente sferica, e se gli strati non sono omogenei, non può questa direzione generalmente parlando passare pel centro della Terra. Convenendo per altro tutti gli Autori, che ànno trattato della figura della Terra, che se non è essa perfettamente sferica, pochissimo per altro ne differisca, come abbiamo di sopra accennato, siccome convengono, che gli strati di molto non si scostino dall'essere omogenei; potremo supporre, che la retta XO prolungata passi pel centro C senza timore d'alterazione sensibile nelle cose, che sarem per dire.

Mi

Mi sono di ciò assicurato ancor coll' esperimento, avendo ottenuto da' calcoli eseguiti in ambedue l' ipotesi gli stessi risultati, colla differenza, che se suppongasi non passare la retta XO pel centro, i calcoli riescono lunghi, e penosi. Essendo poi la direzione della forza centrifuga nel punto X normale all' asse PQ; poichè i corpi in vigore della rivoluzione diurna tendono a scostarsi dai centri de' circoli paralleli all' Equatore esistenti nell' asse terrestre; ne verrà in conseguenza da' principii di Statica, che i lati del Triangolo CSX, o di qualunque altro a lui simile, rappresentanti la direzione delle forze, che sollecitano il corpo X, ne rappresentino ancor la proporzione, cioè CX rappresenta la gravità assoluta, SX la combinata, CS la forza centrifuga.

II. La gravità assoluta in X si può in queste ricerche, in cui la differenza per essere picciolissima in riguardo ai tutti non induce variazione sensibile, eguagliare alla gravità assoluta in A, come costumasi dal Newton, Clerò, e da altri Matematici di somma penetrazione. La forza poi centrifuga in A comunemente si computa $\frac{1}{289}$ in circa rappresentando l' unità la gravità assoluta in A. Ma la forza centrifuga in A stà alla forza centrifuga in X, come CA stà alla distanza del punto X dall' asse della Terra eguale a GL per adequazione; cioè la forza centrifuga vicino la superficie della Terra seguita la ragione del coseno di latitudine; dunque chiamando l' angolo di latitudine $= \lambda$, avremo la forza centrifuga in X espressa per $\frac{\cos. \lambda}{289}$; ma nel triangolo CSX, essendo l' angolo ASL il vero angolo di latitudine $= \lambda$ come insegna l' Astronomia, da cui differisce pochissimo l' angolo ACL, ovvero ACO, avremo CX : CS, cioè $1 : \frac{\cos. \lambda}{289} :: \text{Sen.}\lambda :$

Sen. π, chiamando l'angolo in $X = \pi$. Sarà per tanto Sen. π $= \frac{\cos.\lambda \text{ sen.}\lambda}{289}$.

III. Per togliere ogni scrupolo, chiamo l'angolo $ACO = \varphi$, e il raggio della Terra $= r$, sarà la forza centrifuga in O alla forza centrifuga in A, come $r\cos.\varphi : r :: \cos.\varphi : 1$; onde la sua espressione sarà $\frac{\cos.\varphi}{289}$, e posta l'altezza dell'Edificio $LX = OX = a$, sarà $\frac{\cos.\varphi}{289} \times \frac{r+a}{r}$ la forza centrifuga in X, e posto come sopra l'angolo ASL di latitudine $= \lambda$, e l'angolo $X = \pi$, sarà nel triangolo SCX, CX : CS, cioè gravità assoluta a forza centrifuga, ossia $1 : \frac{\cos.\varphi}{289} \times \frac{r+a}{r}$, come $\text{sen.}\lambda : \text{sen.}\pi$; ma l'angolo esterno λ eguaglia i due interni $\varphi + \pi$, e perciò $\varphi = \lambda - \pi$; e $\cos.\varphi = \cos.(\lambda - \pi) = \cos.\lambda \cos.\pi + \text{sen.}\lambda \text{ sen.}\pi$; dunque sostituendo avremo $1 : \frac{[\cos.\lambda \cos.\pi + \text{sen.}\lambda \text{ sen.}\pi]}{289} \times \frac{r+a}{r} :: \text{sen.}\lambda : \text{sen.}\pi$, e perciò $\frac{[\cos.\lambda \text{ sen.}\lambda \cos.\pi + \text{sen.}\lambda^2 \text{ sen.}\pi]}{289} \frac{r+a}{r} = \text{sen.}\pi$; ma $\cos.\pi$ non differisce dall'unità per esser π un angolo di pochi minuti, perchè CS che rappresenta la forza centrifuga è piccolissima per riguardo a CX, che rappresenta la gravità assoluta. Dunque $\text{sen.}\pi = [\cos.\lambda \text{ sen.}\lambda + \text{sen.}\lambda^2 \text{ sen.}\pi] \frac{r+a}{289 . r}$,

$$\text{e perciò } \text{sen.}\pi = \frac{\cos.\lambda . \text{sen.}\lambda \times \frac{r+a}{r}}{289 - \text{sen.}\lambda \times \frac{r+a}{r}} =$$

$\frac{\cos.\lambda \text{ sen.}\lambda}{\frac{r}{r+a} \times 289 - \text{sen.}\lambda^2}$; ma la frazione $\frac{r}{r+a}$ per essere a

dis-

disprezzabile in riguardo al diametro della Terra, si può prendere senza timore d' errare per l' unità; ed essendo sen.λ^2 una frazione, si può anche essa disprezzare al confronto di 289. Dunque avremo con tutta sicurezza sen.$\pi = \frac{\cos\lambda \text{ sen.}\lambda}{289}$ come sopra.

IV. È proprietà nota del Circolo, che se si contino le ascisse dal centro, il rettangolo dell' ascissa nell' ordinata, allora sia massimo, quando il punto della periferia, corrispondente a tali coordinate, divida il Quadrante per metà, cioè quando sia sen. R = cos. R; sarà quindi in tal caso, cioè alla latitudine di 45°, sen. $\pi = \frac{\cos. R^2}{289} = \cos. \frac{\overline{45°}^2}{289}$, a cui corrisponde un angolo quasi di sei minuti primi.

Alla latitudine poi di 41° : 54′ l' angolo X di deviazione per poco anche esso si scosta da sei minuti primi.

V. Cada ora il grave liberamente dalla sommità X, e suppongasi con ciò liberato da qualunque vincolo colla Terra, nè più sia costretto a girare con essa, onde non risenta forza centrifuga alcuna; riterrà per altro in virtù della sua inerzia la velocità tangenziale eguale a quella, che compete al vertice X; con questa velocità di projezione normale al Meridiano APBQ combinata colla gravità assoluta costante, che sollecita il corpo per CX alla discesa, descriverà esso la Trajettoria XNT, che assumeremo per una Parabola Apolloniana, secondo la Teoria delle forze centrali, la quale esiste, come è palese nel piano del circolo OTD, che passa per le due direzioni, cioè della velocità tangenziale, e della gravità assoluta; e per ciò esso piano sarà normale allo stesso Meridiano APBQ. Il grave per tanto nel fine della caduta si ritroverà in un punto T della periferia del Circolo massimo OTD; e condotto il Meridiano QTM per lo punto T, l' arco MT sarà la misura della distanza dall' Equatore, in cui si ritrova il grave compita la caduta. Per dimostrare adunque

non esservi luogo a deviazione meridionale, fa d'uopo dimostrare, che quest' arco MT sia eguale all' arco LA distanza della base dell' Edificio da cui cadde il grave, dall' Equatore.

VI. A questo fine calo dal punto T sopra DO, in cui segansi scambievolmente il piano DTO, e il Meridiano APBQ normali trà loro, la perpendicolare TR, che sarà normale al meridionale stesso; e calata da R la perpendicolare RH sopra CQ, e congiunta HT, nascerà il piano RHT normale al Meridiano APBQ; ed RH sarà la comune intersecazione, a cui essendo QH perpendicolare, sarà perpendicolare ancora al piano RHT, e per ciò sarà normale ad HT; sarà adunque questo il cosseno, e CH il seno dell' arco MT preso il raggio della Terra per seno tutto. Prolungata HR fino che incontri il Meridiano APBQ in T, CH è ancora il seno dell' arco AT. Dunque AT, MT sono eguali; e per ciò all' uopo nostro conviene confrontare AT con AL, ovvero OT con OL, e dimostrarli eguali.

Dal punto L calata LG normale a CQ che tagli CO in Z, e chiamata l' altezza della caduta LX $= a$, la gravità affetta, che si può confondere in questo caso coll' assoluta, per essere picciolissima la differenza loro, posta $= 1$, la forza centrifuga in X $= f$, avremo $1 : f :: a : af =$ LZ; inoltre nel triangolo LZO, chiamato l' angolo LZO $= \phi$, sarà $1 :$ sen. $\phi :: ZL = af : LO = af$ sen. ϕ.

VII. Sia ora t il tempo della caduta, s lo spazio percorso equabilmente colla velocità tangenziale eguale a quella del vertice X in un secondo; sarà ts lo spazio percorso colla stessa velocità nel tempo t; or questo spazio eguaglia la retta RT per la Teoria delle Trajettorie; esprimeremo per tanto TR per ts; e posto al solito il raggio della Terra $= r$, sarà RO $= \frac{t^2 s^2}{2r}$, giacchè RT rispetto a $2r$ ritrovasi disprezzabile. Nel triangolo IRO essendo l' angolo IRO $=$ LZO $= \varphi$,

$= \phi$, sarà $1 : T.\phi :: RO = \frac{s^2 t^2}{2r} : OI = \frac{s^2 t^2 T.\phi}{2r}$.

Dimostreremo per tanto, che sia OL = OI, cioè af sen. ϕ $= \frac{s^2 t^2}{2r} T.\phi$.

Disegnando s, come si è detto, lo spazio percorso in un secondo colla velocità tangenziale del vertice X, sarà $\frac{s^2}{2PL} = \frac{s^2}{2r \cos.\phi} = f$ per la Dottrina della forza centrifuga; ed essendo cos. $\phi = \frac{\text{sen.}\phi}{T.\phi}$, sarà $\frac{s^2 T.\phi}{2r} = f$ sen. ϕ. Lo spazio percorso da un grave, che cada liberamente in un secondo, che è quello per cui disegniamo la gravità assoluta, da noi già si è posto = 1, il tempo della caduta per l' altezza a si dica t, sarà $1'' : t :: 1 : \sqrt{a}$; onde $t^2 = a$, e moltiplicando il primo membro dell' equazione quì sopra posta per t^2, ed il secondo per a, avremo finalmente $\frac{s^2 t^2 T.\phi}{2r} = fa$ sen. ϕ, cioè OI = OL come dovevasi dimostrare. Cadendo adunque il punto I nel punto L sparisce qualunque deviazione meridionale nella caduta libera de' gravi.

VIII. Fin quì non si è avuto riguardo alcuno alla resistenza dell' aria, da cui si sostiene porzione della gravità assoluta, e perciò si prolunga il tempo della discesa. Il Problema della caduta de' gravi per mezzi resistenti ha occupato ed occupa ancora i Matematici di prima sfera; ma le Teorie fissate in varie ipotesi di resistenza non sempre sono conformi a ciò, che osservasi in natura; rimane adunque in questa materia dell' oscurità e dell' incertezza. Sembra però che l' esperienza mostri, trattandosi d' altezze mediocri, e di corpi gravissimi, che la resistenza dell' aria non alteri di molto le leggi della caduta nel voto. Il Riccioli, Muschenbroek, ed altri di ciò ci assicurano; non mancano però alcu-

cuni, che il contrario sostengono, come il P. Dechales, che impugna apertamente le sperienze del Riccioli, portando in contrario le sue esperienze ripetute, come egli dice, più di mille volte sempre collo stesso successo; ma l' esperienze del Dechales a noi sono assai sospette. Se dovessimo attenerci ad esse, le sfere pesantissime si ridurrebbero cadendo per l' aria al moto equabile dopo aver percorsi piedi parigini 123; il che molto si scosta dalla regola, che si legge nel Newton, e nello Sgravesand per determinare questo *Spazio*. Princ. Mat. Lib. 3. Prop. 40. Sgravesand Physices Elementa Math. Lib. 3. Cap. 16. Scolio 7. Dunque supporremo nella discesa de' corpi pesanti per l' aria, che la gravità costante resti alterata di poco, e che la Trajettoria non differisca molto da una Parabola; quindi chiamato s al solito lo spazio percorso in un secondo colla velocità tangenziale, e t' il tempo della caduta, sarà la retta RT ancor in questo caso espressa per $t's$; onde l' arco OI verrà disegnato per $\frac{s s t'^2 T . \varphi}{2 r}$, la quale espressione non si potrà più eguagliare all' espressione af sen. $\varphi = \frac{s^2 T . \varphi . t^2}{2 r}$, la quale rimane inalterata in tutti i suoi elementi. Laonde chiamando D la deviazione meridionale avremo $D = \frac{s^2 T . \varphi}{2 r} (t'^2 - t^2)$ del grave cadente per un mezzo, che resista alla sua caduta.

IX. Abbiamo detto, che s disegna lo spazio percorso in un secondo colla velocità tangenziale del punto X; se dunque S disegni la velocità tangenziale dell' Equatore, sarà S cos. $\varphi = s$, e sostituendo sarà $\frac{S^2 \overline{\cos. \varphi}^2 T . \varphi}{2 r} \times (t'^2 - t^2) = S^2 \frac{\cos. \varphi \text{ sen.} \varphi}{2 r} \times (t'^2 - t^2)$ $= 0,053 \cos. \varphi \text{ sen. } \varphi (t'^2 - t^2) = D$. Pongo $\frac{S^2}{2 r} = 0,053$. Compiendosi la rotazione della Terra in ore 23°: 56'

56′ : 4″, cioè in 86164″; in un secondo di tempo si percorrono 15, 0, 4″ d' Equatore; ed eguagliando ciascun secondo d' Equatore 96 piedi parigini, assumo il raggio dell' Equatore di piedi Parigini 19613790, ne viene, che in un secondo si percorrano piedi parigini 1444 da ciascun punto dell' Equatore, con questi dati si ritrova subito $\frac{S^2}{2r} = 0,053$.

X. Il Sig. Guglielmini in un Opuscolo stampato in Roma nel 1789, il quale diede in seguito occasione al Sig. Bonati di pensare alla deviazione meridionale, proponendosi un' altezza di 340 piedi parigini, e fondandosi sulli esperimenti del Sig. Desaguliers, stabilisce il tempo della discesa d' un grave per tale altezza nell' aria di $5''\frac{1}{4}$; indipendentemente poi dalla resistenza dell' aria il tempo della caduta sarebbe di $4''\frac{3}{4}$.

Posto ciò si ricerchi la deviazione meridionale per mezzo della formola sopra stabilita. La latitudine di Roma si pone eguale a 41° : 54′; da cui defalcati 6′, sarà l' angolo $\varphi = 41°, 48'$; onde sen. φ cos. $\varphi = 0,5$; il quadrato di $5''\frac{1}{4}$ meno il quadrato di $4''\frac{3}{4}$ si ritrova $= 5$; fatta la sostituzione, si otterrà $0,053$ sen. $\varphi \times$ cos. $\varphi\ (t^2 - t^1) =$ Pollici uno, e linee sette.

XI. Lo stesso Autore nel Libro del moto diurno della Terra pubblicato in Bologna nel 1792 ci assicura, che un globo di piombo del diametro d' un pollice parigino consumava nel discendere liberamente dall' altezza di piedi 241 minuti secondi $4''\frac{1}{5}$; quando senza la resistenza dell' aria avrebbe impiegato soltanto 4″. La latitudine della Torre degli Asinelli si pone 44° : 30′, e defalcando 6′ rimane $\varphi =$ 44° : 24; ed il prodotto sen. φ cos. $\varphi = 0,5$; e la differen-

za

za de' due quadrati dei tempi 1, 64; introdotti questi valori nella formola, abbiamo un mezzo pollice in circa di deviazione meridionale.

XII. Esperienza del Signor Newton. Newt. Princ. Mat. Prop. 39. Lib. 2. Scolio. Un globo di vetro ripieno d'aria del diametro di cinque dita di Londra, il cui peso era 483 grani, cadde dall' altezza di 220 piedi di Londra in minuti secondi otto, e dodici terzi. Questo istesso globo nel voto, come tutti gli altri gravi, per la Teoria Galileana dee cadere dalla stessa altezza in secondi 3'' e terzi 42''' conforme il calcolo fatto dallo stesso Newton, ed i suoi Commentatori le Sieur, e Jaquier. La latitudine di Londra è $54° = \lambda$, onde $\text{sen.}\lambda \frac{\cos.\lambda}{289}$ sen. π, 0, 001645, e $\pi = 6'$ in circa; e perciò $\varphi = \lambda - \pi = 53° : 54'$, e sen. φ cos. $\varphi = 0, 476$; la differenza de' quadrati de' tempi $= 53, 5$; introdotti questi valori nella formola, si ritrova la deviazione meridionale Piedi 1, Pollici 4, e linee due.

XIV. Esperienze del Sig. Desaguliers riportate dal Newton nel luogo sopra citato. Una Vessica del Diametro di pollici inglesi 5, 3 cadeva dall' altezza di piedi 272 inglesi in minuti secondi 18'', 5. Nel vacuo cadde dalla stessa altezza, come tutti gli altri gravi, a norma de' calcoli fatti nello sperimento superiore dal Newton, e da' suoi Commentatori in minuti secondi 4'', 115.

Una palla di Piombo di libbre due Romane cadeva dalla istessa altezza in minuti 4'', 250. La differenza de' quadrati de' tempi nel primo caso 325, 3; nel secondo caso 1, 13; sen. φ cos. $\varphi = 0, 476$, fatta la solita sostituzione nella formola della deviazione meridionale, avremo nel primo caso una deviazione di piedi Inglesi otto, e nel secondo caso di piedi Inglesi 0, 03.

XV. Quando i gravi, che cadono da mediocri altezze sono pesantissimi l' esperienze riescono più sicure, poichè meno risentono l' influsso delle cause estrinseche alteranti; ma

la

la differenza de' tempi della caduta nel voto, e nell' aria è sì picciola, che qualunque errore nell' osservazione, e ne' dati su cui si stabiliscono i calcoli, benchè sia minimo, può portare un divario non disprezzabile ne' risultati. Se poi li corpi sono leggeri si prolunga di molto il tempo della caduta per l' aria, da cui nasce una deviazione meridionale assai grande. Ma al contrario i corpi leggerissimi cedono alle più picciole impressioni, per cui deviano enormemente dal perpendicolo, e immergono gli esperimenti in un mondo di difficoltà e d' incertezze; oltre che in questa ipotesi venendo di molto alterata la gravità, non potendosi neppure per adequazione considerare per costante, non potremo con sicurezza confondere le Trajettorie con la Parabola.

XV. Altra considerazione si aggiugne (fig. 2) molto interessante. Sia C il centro della Terra, ed XC la direzione della gravità assoluta, ed MXN della gravità combinata. La gravità specifica del corpo cadente sia 1, quella del fluido sia n; il peso assoluto del grave si dica P, sarà il peso del fluido di egual volume nP; dunque il corpo in X verrà spinto da due forze una P per la direzione NX; poichè il fluido come aderente alla Terra risente la forza centrifuga, e premendo per la direzione della gravità combinata colla forza centrifuga spinge in su il corpo immerso per la direzione MXN. Facciasi 1 : n così CX : XN, e condotta CO eguale, e parallela ad NX, e congiunta XOF, sarà questa la direzione della gravità da combinarsi colla velocità tangenziale; onde la Trajettoria non passerà più per CX, ma per XO. L'angolo poi CXO non è sempre disprezzabile. Sia per esempio la gravità specifica del corpo cadente alla gravità specifica del fluido come 2 : 1; sarà CX : CO : : sen. FOC : sen. CXO : : 2 : 1; ma gli angoli sono come i seni trattandosi di angoli picciolissimi. Dunque l' angolo FOC = FXM sarà doppio dell' angolo CXO, = CXM angolo di deviazione primiera; dunque in questo caso l' angolo di deviazione sarà il doppio di quello, che si otterrebbe, se la gravità specifica del flui-

do fosse spregevole in confronto di quella del grave cadente; il che se sussiste, potrebbe dar luogo ad esperienze d' altro genere.

Negli esperimenti presi dal Newton coi corpi cadenti in vasi ripieni d' acqua, e la cui gravità specifica non differiva di molto dalla gravità specifica dell' Acqua, per quanta diligenza usasse, si accostavano essi a' lati del vaso, e alle volte vi urtavano prima di giungere al fondo; onde prescrive, che per avere esperimenti di cui potersi fidare (esaminava egli l' alterazione che soffrono i gravi, che discendono in mezzi resistenti) si procuri, che le due gravità specifiche, cioè del solido, e del fluido, non si accostino di molto all' eguaglianza. *Ideoque pondus globi in aqua debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur*, sono sue parole (Lib. 2 Prop. 40 Schol.). Alle cagioni, di cui egli sospetta potersi attribuire le sovraccennate irregolarità, potrebbesi forse aggiungere ancora questa deviazione? Ma non giova inoltrarsi in queste ricerche, che richieggono molte speculazioni, e molto tempo.

Ciocchè abbiamo fin quì dimostrato ha luogo nella supposizione, che il grave mentre cade sia totalmente staccato dalla Terra, onde non risenta in conto alcuno la forza centrifuga, ritenendo soltanto la velocità tangenziale in vigore dell' inerzia. Ma se la cosa andasse altrimenti, come alcuni sospettano, e se la causa della diurna rotazione modificasse la di lui velocità mentre discende, onde fosse costretto a rotare anche esso con quella velocità, che conviene al luogo dove ritrovasi; cosa di cui io per altro non saprei formare idea, ruinerebbero i fondamenti, su cui abbiamo appoggiato i nostri calcoli.

LET-

LETTERE DEL CH. DOTT. BONATI AL CANONICO SALADINI.

Ferrara 15. Settembre 1797.

Ho avuto la vostra Memoria sopra la deviazione meridionale de' gravi cadenti. Vi dissi nell' ultima mia, che anche nel voto io trovo sempre una deviazione meridionale. Ora vedo, che questa da Voi si esclude, ma di una maniera, che non contradice alla mia dimostrazione, perchè questa porta (trattandosi di altezze di 200, o 300 piedi) ad un deviamento sì piccolo, che ha potuto sfuggire alla vostra dimostrazione, che non è rigorosa, perchè alcune piccole differenze da Voi si trascurano, come in tanti casi si pratica.

Obbligatiss., Divotiss. Serv.
ed Amico
Teodoro Bonati.

Ferrara 16. Settembre 1797.

A. C. V' accorgerete, che CAQ dev' esprimere un quadrante (fig. 3.) di un Meridiano terrestre. Rappresenterò qui la gravità assoluta colla XZ, e la forza centrifuga colla XD, lati del parallelogrammo ZD, delle quali forze la gravità combinata è XL altezza della torre che è normale alla superficie regolare della Terra in L. La Trajettoria del grave cadente da X sia la XNT prossimamente una Parabola apolloniana dell' asse XZ*a*, il cui piano è da concepirsi normale al piano CALQ. L' arco LE è descritto colla GL raggio del parallelo della base L della torre, cosicchè anche il piano GLE è da concepirsi normale al piano CALQ. Quindi i due piani *a*XN, GLE si tagliano in Z punto, sul quale insisto-

no unite l' ordinata parabolica ZN, e la circolare ZE ambe perpendicolari al piano CALQ.

Proverò ZN > ZE. Col raggio PX descrivo l' arco XM del parallelo del punto X. Presa XB = XD = LZ e condotta l' ordinata BM, sarà XM il descritto dalla sommità X della torre, mentre il grave cadrebbe da X in B animato dalla sola forza centripeta XB eguale alla centrifuga XD, e mentre cadrebbe da X in Z spinto dalla sola gravità assoluta, ed in conseguenza mentre descrive l' arco parabolico XN dell' ascissa XZ animato dalla gravità, e dall' inerzia, la quale lo allontana uniformemente dal piano CALQ colla velocità, ch' ebbe partendo da X; cosicchè Voi vedete, che dev' essere ZN = XM. Ora noi abbiamo i due seni versi XB, LZ per costruzione eguali; e perchè in oltre il raggio PX è maggiore del raggio GL sarà BM > EZ. Ma ho detto ZN = XM, ed è XM > BM, e BM > ZE. Dunque ZN > ZE.

Ma il punto E è sulla superficie della terra. Dunque il grave arriva in N non avendo ancora toccato terra.

Sia T il punto della sua Trajettoria, nel quale incontra la terra; si vede, che la porzione XZN della Parabola cade tutta a tramontana del parallelo della base L della torre; e che tutto il tronco parabolico ZNTR cade a mezzodì dello stesso parallelo. Dunque T è più meridionale della base L; onde una deviazione meridionale (prescindendo dalle resistenze) sempre v' è.

Nel caso nostro PX supera GL di assai poco; e di poco anzi pochissimo, XM supera BM. Egli è quindi, che il punto T cade presso che in N. A Voi che avete assunto PX come eguale alla GL, e la XM come eguale alla BM, dovea appunto risultare una deviazione meridionale = o.

Con pienissima stima sono vostro

Devotiss., ed Obbligatiss. Serv.
ed Amico Vostro
Teodoro Bonati.

RISPO-

RISPOSTA DEL CANONICO SALADINI AL CHIARISSIMO PROFESSORE BONATI.

Bologna 9. Ottobre 1797.

A. C. Rispondo alla vostra gratissima de' 16. del passato, in cui con somma penetrazione ed eleganza al vostro solito discorrete della deviazione meridionale de' gravi cadenti nel voto. Certamente, parlando a tutto rigore, questa deviazione dee ammettersi, qualunque poi essa siasi, trattandosi ancora d'altezze minime al confronto del raggio della Terra; ed io in ciò sono bene d'accordo con Voi. Ma Voi dovete concedere essere essa affatto insensibile più di quello, che si crede. La prova, che ne recai nella Memoria inserita negli Atti di Siena lo fa vedere bastantemente, mi astenni dal calcolo, riputandolo superfluo, il quale mi è piaciuto presentemente intraprendere per sottoporlo al vostro acuto discernimento.

Prima d'ogn' altra cosa determino la differenza delle due ordinate ZE, ZN da voi dimostrate diseguali, la prima esistente nel piano del parallelo LE, descritto col raggio GL, la seconda nel piano della Parabola XN, ambedue perpendicolari al piano del meridiano ALQ, intersecandosi nell' ordinata comune al punto Z. Poiche XD, BX, ZL debbono essere eguali, le quali non sono che di poche linee, come in seguito dimostreremo; i due rettangoli $2GL \times ZL - \overline{ZL}^2$, e $2PX \times BX - \overline{BX}^2$ avranno tra loro la istessa proporzione, che le due rette GL, PX; e la ragione subduplicata d'esse sarà eguale a quella delle due ordinate ZE, $BM = XM = ZN$; non fò conto alcuno della differenza tra XM, BM, essendo d'un ordine maggiore delle differenze, che siamo per valutare, come dimostro nella Geometria degli Infinitesimi; siccome non fò conto d'altre differenze, quando non mi alterano sen-

sensibilmente il valore della quantità che determino. Avremo per tanto $ZE : ZN :: \sqrt{GL} : \sqrt{PX}$. Sia $GL = 1$, $\frac{PX - GL}{GL} = \delta$; sarà $PX = 1 + \delta$, $\sqrt{PX} = 1 + \frac{\delta}{2}$ e $\sqrt{GX} - \sqrt{GL} = \frac{\delta}{2}$; onde $ZN - ZE : ZE :: \frac{\delta}{2} : 1$, e $ZN - ZE = \frac{\delta ZE}{2}$. Suppongasi la latitudine ASL di 45°, da cui ricavasi l' angolo SX*a* di 6′ minuti, un tantino meno, come vedesi nella Memoria citata. Il raggio della terra sia Piedi parigini 19747351, e l'altezza della mole LX, da cui cade il grave piedi 300, ciò posto si ritrova $GL = 13961377$, e PX piedi 13961589, e $\frac{\delta ZE}{2} = \frac{ZE}{131710}$. Resta da determinare ZE. La caduta teoretica di 300 piedi, porta 4″, 45 di tempo, il quale pochissimo differisce dal tempo della caduta reale; in questo tempo dal punto L si percorrono piedi 4530, ossia linee $652320 = ZE$. Dunque $\frac{ZE}{131710} = 5$ linee in circa; differenza tra le due ordinate ZN, ZE.

Sia ora T il punto, in cui la Parabola raggiunge la Terra; si cali da esso all'asse AX la normale TR, e pel punto R si conduca *g*RO parallela a GL, che tagli SX in Y, e si prenda $Xb = RY$, e si conduca l' ordinata bm. Sia il parametro della Parabola $= 2p$, $XR = x$, $XK = LX$, essendo la loro differenza di secondo ordine per la Geometria degli Infinitesimi, $= a$; aK, che può liberamente confondersi col raggio della Terra $= r$; $z = RK$. Avremo l' Equazione $2px = 2rz - z^2$; ma $z = x - a$. Dunque $x^2 - 2rx - 2a + 2p = -2ra - a^2$; ed $x = r + a - p \pm \sqrt{r^2 + p^2 - 2rp - 2ap}$; e posto $r - p = q$, sarà $x = a$

+

$+ q \pm \sqrt{q^2 - 2ap}$; ed essendo $2ap$ picciolissima al confronto di q^2, sarà $x = a + q \pm (q - \frac{ap}{q})$; il segno + confà al caso nostro; sarà per tanto $x = a + \frac{ap}{q}$, e $z = RK = \frac{ap}{r-p}$.

Nel triangolo ZLX, chiamo $XZ = y$, $LZ = ny$; posta la gravità assoluta alla forza centrifuga come $1 : n$, $LX = KX = a$, e l' angolo SLZ eguale all' angolo di latitudine $ASL = \phi$, avremo l' Equazione $y^2 = n^2 y^2 + a^2 + 2a \cos.\phi ny$; $a \cos.\phi$ è l' intercetta tra il punto L, e la perpendicolare calata dal punto X sopra ZL prodotta. Essendo n^2 un numero picciolissimo; l' Equazione si riduce a $y^2 - 2nya\cos.\phi = + a^2$, ed $y = na \cos.\phi \pm \sqrt{n^2 a^2 \cos.\phi^2 + a^2} = na\cos.\phi \pm a$. Il segno positivo è quello, che fa al caso nostro. Dunque $ZK = na\cos.\phi$. Passiamo al calcolo numerico di $\frac{ap}{r-p} = RK$, e di $na\cos.\phi = ZK$.

Posto il raggio della Terra come sopra = 19747351 Piedi parigini; in un secondo si percorrono da ciascun punto del parallelo della latitudine di gradi 45° piedi 1018, il cui quadrato diviso per piedi 15 spazio, che si percorre dal grave in un secondo, avremo il quoto, che diviso per metà determina il semiparametro $= p$ della nostra Parabola, eguale a 34544 piedi parigini; e fatta la sostituzione nella formola $\frac{ap}{r-p}$, si ritrova RK = 75, 6 linee. La proporzione della gravità assoluta alla forza centrifuga nella latitudine di 45°, adoperando il raggio della Terra sopraesposto si ritrova di 2177, 377 : 5, 34, ossia di 100000 : 245, perciò avremo $n = 0,00245$; inoltre abbiamo $\cos.\phi = 0,707$, ed $a = 300$ piedi; eseguite le sostituzioni si ritrova $ZK = an\cos.\phi = 74,83$ linee. Onde $RK - ZK = RZ = 0,77$ linee.

Mol-

Molto delicato è il calcolo per determinare RZ; da questa si potrebbe passare a determinare YL, e perciò LO, essendo nel triangolo YLO rettangolo in L noto l'angolo OYL = ASL di latitudine; ma sarà più sicuro espediente non servirsi della determinazione di RZ, che per assicurarla spregevole al paragone di RX, e di ZX; poichè ogni picciola differenza nell' espressione del raggio terrestre, della gravità assoluta, della forza centrifuga, delle linee trigonometriche ec. porta variazione sensibile nei rapporti dell' espressione di ZR; ma in ogni caso si scopre ZR picciolissima e disprezzabile al confronto di RX; dal che deducesi, che la differenza tra RY, ZL sia ancor essa disprezzabile in riguardo di ZL; ed essendo ZL di alquante linee, d'altrettante sarà RY; quindi ancor RO dovrà essere di alquante linee, e disprezzabile in proporzione di gO, come $bX = Ry$ lo è di PX. Essendo pertanto $2gO \times RO - \overline{RO}^2 = \overline{RT}^2$, $2PX \times bX - \overline{bX}^2 = \overline{bm}^2 = \overline{RT}^2$; sarà $2gO \times RO - \overline{RO}^2 = 2PX \times bX - \overline{BX}^2$, e $gO \times RO = PX \times bX$ per adequazione. Dunque $gO : PX :: bX = RY : RO$, e $PX - gO : gO :: RO - RY = YO : RY$, ed $\frac{YO}{RY} = \frac{PX - gO}{gO} < \frac{PX - CL}{CL} < \frac{2}{131710}$, ed $YO < \frac{2RY}{131710}$. In un secondo in vigore della forza centrifuga alla latitudine di gradi 45° si percorrono linee 5, 34, ed in 4'', 45 tempo della caduta di piedi 300 si percorrono linee 106; avrassi perciò $YO < \frac{2 \times 106}{131710}$, cioè < di 0, 0016 di linea; ed OL < di 0,001136 di linea; essendo YO : OL : : 1 : sen.φ angolo di latitudine.

Ecco adunque dimostrato non solamente la deviazione meridionale de' gravi cadenti da altezze picciole per riguardo al diametro terrestre, spregevole anche essa; ma inoltre disprezzabile al segno, che si può contare quasi nulla, come già provai nella mia Memoria inserita negli Atti dell'Accademia di Siena, e che non vi sia perciò speranza da pote-

Fig. II.

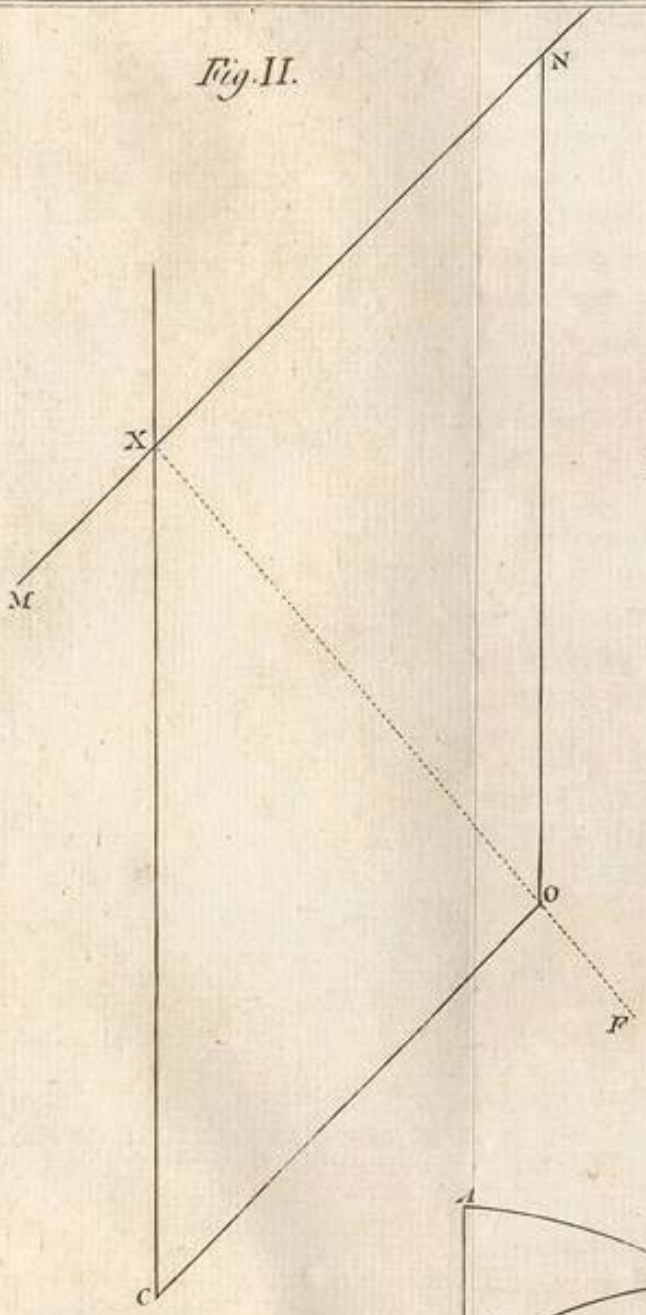


Fig. I.

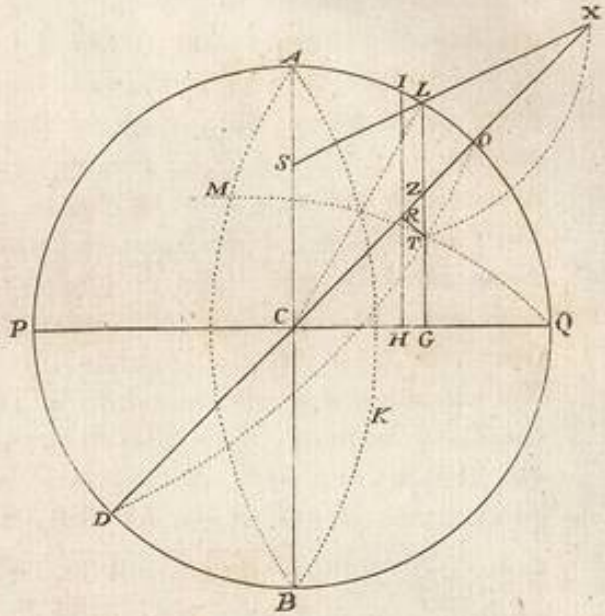
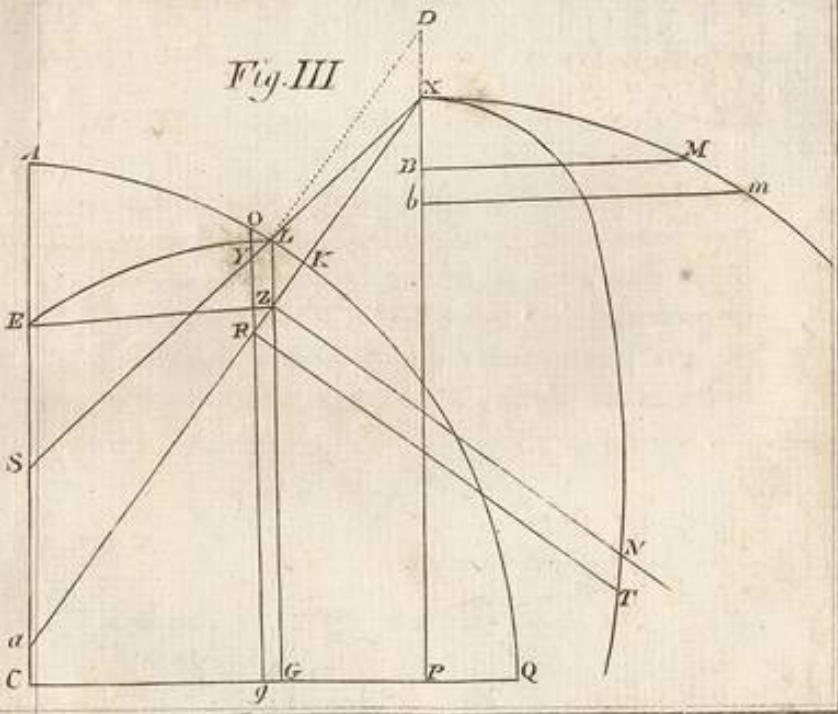


Fig. III



tere scegliere altezza tale di caduta, onde risulti la deviazione meridionale sensibile, come ho sempre sostenuto prescindendo dalla resistenza del mezzo per cui cade il Corpo.

Ed in attenzione del vostro autorevole giudizio, mi confermo al solito

Vostro Obbligatiss. Servo,
e Amico vero
Girolamo Canonico Saladini.