DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRAICHE DETERMINATE PARTICOLARI DI GRADO SUPERIORE AL QUARTO

MEMORIA

Di Paolo Ruffini .

Ricevuta il di 21. Ottobre 1801.

Dopo avere dimostrata impossibile la soluzione delle Equazioni algebraiche determinate generali di grado superiore al quarto (Ruffini Teor. delle Equaz. Cap. 13.°) non resta che di fissar l'attenzione sulle Equazioni particolari . Nella nostra Teoria , seguendo le tracce dell'immortale Lagrange , abbiamo nel Cap. 15.° veduto che un' Equazione data di grado maggiore del quarto può abbassarsi opportunamente alla sua soluzione, mentre sia determinabile un qualche particolare rapporto fra le sue radici : in seguito dopo aver fattes su questo punto delle considerazioni generali , abbiamo determinati alcuni casi particolari , ne' quali può attualmente ottenersi una simile riduzione Cap. 20.°; ma tutto questo non giunge , anzi è ben lontano dal determinare in tuta la sua estensione quanto concerne la soluzione, e l'abbassamento delle Equazioni algebraiche determinate

Proposta un' Equazione particolare, e di grado maggiore del quarto, converrebbe saper conoscere

1.º I casi, in cui questa non è capace di abbassamento opportuno alla sua soluzione.

2.º I casi, ne' quali può essa opportunamente abbassarsi. 3.º Finalmente i metodi pratici, per cui possiamo ottenere attualmente un simile abbassamento, e per cui possiamo in seguito dalle radici della Equazione ridotta dedurre le radici della proposta. Se giungere si potesse ad ottenere lo scioglimento di questo Problema in tutte le accennate tre parti; allora è chiaro, che sarebbesi pienamente soddisfatt a quanto riguarda la soluzione algebraica delle Equazioni, e potrebbesi dire perfezionato questo ramo troppo impertante delle Matematiche. Nella presente Memoria, stabiliti a principio i fondamenti necessarii a sciogliere l'accennato Problema, vedremo in seguito fin dove ci sia permesso di spingere rapporto ad esso le nostre ricerche, e di arrivare con le nostre determinazioni.

PARTE PRIMA.

1. Rappresenti la

(A) $x^n+Ax^{m-1}+Bx^{n-2}+ec.+Px^{n-6}+ec.+V=0$ una qualunque Equazione algebraica determinata particolare , e i suoi coefficienti A, B, C, ec. siano tante quantità commensurabili. Ora o il primo suo membro ha dei fattori razionali, o no; se gli à, a tale Equazione attribuisco il nome di Equazione composta, altrimenti le do quello di semplice . La $x^3-38x-1z=0$ ci dà Γ esempio di m' Equazione composta, poichè il suo primo membro è risolubile nei due fattori x+6, x^3-6x-2 ; Γ altria $x^3-15x+4=0$ ci dà Γ esempio di un' Equazione semplice, non contenendo il suo primo membro fattore alcuno commensurabile .

2. Poiche coi noti principj dell' algebra una qualunque Equazione composta può sempre dividersi in tante semplici quanti sono i fattori razionali del primo suo membro ; noi fisseremo l' attenzione solamente sulle Equazioni semplici , e supponendo che la (A) sia tale, stabilito m>4, supporremo , che questa Equazione sia capace di un abbassamento opportuno alla sua soluzione . Il rapporto particolare , che per la seconda di queste ipotesi esister deve fra alcune , ottutte le radici della (A) (Cap. 13.°, 15.° Teor. delle Equaz.) venga , como nel (n° 3ai-, Teor. delle Equaz.) espres-

so per

(B) $f(x')(x'')(x'') \dots (x^{(\lambda-1)})(x^{(\lambda)}) = K$.

Ciacchè poi cercando immediatamente, o mediatamente da questa quantità K il valore di z', sappiamo dal citato Cap. 15.º, che si deve necessariamente cadere iu un'Equazione, di cui sono radici alcune, o tutte le x', x", x", ec. x(h), sia

 $x^{\mu} + tx^{\mu-1} + zx^{\mu-1} + ec. + u = 0$ una tale Equazione. Dovendo finalmente i coefficienti t. z. ec. u dipendere da Equazioni, delle quali conoscasi immediata-

mente, o mediatamente la soluzione, e nelle quali i coefficienti siano funzioni della K , supponghiamo , che il coefficiente u sia radice della

(D) $u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + ec. = 0$,

e che questa Equazione sia appunto dotata delle qualità ora accennate .

3. Il valore K dovrà essere quantità sempre determinabile dipendentemente da Equazione, che noi sappiamo risolvere . Imperciocchè essendo questa K per ciò, che si è detto nel citato Cap. 15.º, quella quantità appunto, per mezzo della quale restano immediatamente, o mediatamente determinate alcune , o tutte le radici della (A) ; se essa fosse indeterminabile, sarebbero indeterminabili ancora queste radici, il che è contro la supposizione.

4. Se esiste un' Equazione di relazione (B) opportuna alla soluzione della (A), nella quale la K sia quantità irrazionale, sempre esisterà ancora un'altra Equazione di re-

lazione ,

 $F(x')(x'')(x'') \dots (x^{k}) = H,$

in cui la quantità H sarà commensurabile, e pel cui mezzo la (A) potrà abbassarsi di grado opportunamente alla sua soluzione .

Suppongo $f(x')(x'')(x'') \dots (x^{(\lambda)}) = y$, sostituisco nel-Ia (B), e tolti dalla equazione y = K gli irrazionali, sia (II) $y'' + Ey^{n-1} + Cy^{n-2} + ec. = H$

l' Equazione , che da questa operazione risulta . Si collochi

ora nella (II) in luogo della y il suo valore, e chiamisi (I) il risultato, che ne nasce. Giò fatto, essendo pel (finum. 3) attualmente determinabile il valor K, sanà attualmente solubile l'equazione (II), ed $\gamma'=K$, ne sarà ta radice; ora essendo la (I) identica con la (II), e la (B) identica con la $\gamma'=K$, è chiaro che si dovra poter ottenere il valor della (B) dalla (I); ma la (B) per la ipotesi è opportuna alla soluzione della (A); dunque la (I), essendo tale, che può sempre da essa ottenersi attualmente questa (B), dovrà dirsi ella pure opportuna alla soluzione medesima; ma nell'accennata (I) il secondo membro II è razionale. Dunque ec.

In conseguenza di quanto abbiamo ora dimostrato, riterremo in avvenire, quando non si avverta il contrario, che nella Equazione di rapporto (B) atta alla soluzione dela (A) (n.º 2) la quantità cognita K sia sempre razionale.

Diremo poi risultati primitivi quelli, che si ottengono dalle permutazioni primitive, secondarii quei, che nascono dalle permutazioni secondarie.

 $F(x')(x'')\dots(x^{(r-1)}(x^{(r)})$, la quale conservi uno stesso valore determinabile: dalla K, che chiamerò H, e lo conservi costantementé, e solamente sotto quelle permutazioni , per cui nella (B) la $f(x)(x'')(x''')\dots(x''')$ si conserva = K . Potendo essere $\pi=\lambda$, $\pi<\lambda$, $\pi>\lambda$.

1. Abbiasi = x; in simil caso, supposto, che tutti i risultati, i quali, provenendo dal primo membro della (B) per le nostre permutazioni si primitive, che secondarie, conservano il valore K, siano di numeso n, prendansi le radidici a', x', ce. x^(v), e con esso si formi una funzione ad arbitrio, tale però che cambi di valore ad una qualunque permutazione fra loro; e chiamata questa

(III) $\phi(x')(x'') \dots (x^{(n-1)})(x^{(n)}) = y$, se ne cerchi dalla (B) il valore. Esegnite nella (III) tutte le permutazioni, che corrispondono ai precedenti n risultati, chiaminsi y', y'', y''', ec., le funzioni , che ne provengono , e saranno queste pure di numero n. Formiamo ora un'Equazione.

(II) $y^s + Ey^{s-1} + Cy^{s-1} + ec. = H.$

di cui siano radici le funzioni y', y", cey ("); i coefficienti di questa sappiamo dal Cap. 15.º Teoria delle Equaz essere funzioni razionali della K, e però da essa determinabili razionalmente. Supposta pertanto determinata una tale Equazione, colloco in essa in luogo della y il suo valore (III), chiamo

(E) F (x) (x"),... (x"-1) (x"-1) (x (s)) = H il risultato, che ne viene; e questo io dico, che sarà una funzione tale appunto, che si conserverà = H per tutte, e sole le permutazioni si primitive, che secondarie, per cui la (B) conserva il valor K.

Facciamo di fatti nel primo membro della (E) una per-

mutazione qualunque, quella per esempio di F (x') (x') . . . $(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$ in $F(x^{(\pi-1)})(x)$ $(x^{(\pi)})(x')$; facciasi la permutazione medesima nella (III), e si sostituisca la funzione $\phi(x^{(x-1)})(x^i)$. . . $(x^{(x)})(x^{(y)})$, che si ottiene , nella (II) invece della y . Come dalla sostituzione nella (II) della (III) è nata la F (x') (x") $(x^{(\pi-1)})(x^{(\pi)})$, è chiaro , che dalla sostituzione della ϕ $(x^{(x-1)})(x)$. . . $(x^{(x)})(x'')$ dovrà nascere la F $(x^{(x-1)})(x')$ $(x^{(x)})(x'')$: dunque si otterrà lo stesso risultato, o eseguendo una data permutazione nel primo membro della (E), od eseguendo la permutazione medesima nella (III), e sostituendo la funzion che ne viene, nella (II). Ora o la nuova funzione ϕ $(x^{(\pi-1)})(x')$ (x(x))(x") . corrisponde ai risultati nati dalla (B) per le supposte permutazioni primitive, e secondarie, e però non è che il valore di una delle y', y", ec. y("), o non vi corrisponde; se si, allora essendo essa una radice della (II) , farà verificare questa Equazione , e però avremo F $(x^{(v-1)})(x')$, ... $(x^{(v)})(x'') = H$, se nò, non essendone radice, non potrà darci F $(x^{(\pi-1)})(x')$. . . $(x^{(\pi)})(x') = H;$ ma questa funzione non è che il risultato, il quale ricavasi dalla F (x') (x'') $(x^{(\tau-1)})(x^{(\tau)})$ per la permutazione ultimamente supposta. Dunque essendo essa = H, ogniqualvolta corrisponda ai risultati, che nascono dalla (B) per le supposte permutazioni primitive, e secondarie, e non avendo tal valore, mentre non vi corrisponda, ne segue che in questo primo caso avremo ottenuto quanto è stato richiesto nell' enunciato del Problema .

2.° Che se si abbia $\pi < \lambda$, oppure $\pi > \lambda$: nel primo di questi due casi riduco la (III) alla forma $\phi(x')(x') \dots (x^{(\alpha-1)}(x^{(\alpha)}) + c (x^{(\alpha+1)}) + c \dots + x^{(\alpha)}) = H$, nel secondo riduco la (B) alla forma f(x')(x')(x'')

 $\langle v \rangle^{2\lambda} + o \left(x^{(k+1)} + \text{ec.} + x^{(e)} \right) = K$, opero come precedentemente, ed otterrò nella maniera medesima la (E) la quale, come nel caso $1.^{\circ}$, vedremo essere dotata delle proprietà cercate nel nostro Problema. Se K è razionale, è chiaro che ancora H è razionale.

 γ . Supponghiamo $\pi < \lambda$. In tale ipotesi potremo espiremere la (B) per f(x') (x'') (x''') (x'''')... ($x^{(5)}$) ($x^{(5)}$)... ($x^{(5)}$) = K, e la (E) per F(x') (x'')... ($x^{(5)}$ -1)($x^{(5)}$)+ e ($x^{(7+1)}$)+ ec. + $x^{(5)}$) = II. Ora o le permutazioni primitive, per cui la (B) conserva il valor K son tali, che nessuna delle radici le quali occupano i primi π lucghi, può in alcuno dei risultati secondarii passare per loro mezzo ad occupar veruno dei $\lambda - \pi$ lucghi ulteriori, e vicevera, cosicchè per es, i luoghi occupati nel primo risultato dalle x', x'', x''', ec. $x^{(5)}$ ono pessono per le supposte permutazioni primitive venir occupati dalle $x^{(7+1)}$ ec., e viceversa $x^{(5)}$ oppure sono tali, che possono le $\lambda - \pi$ radici ulteriori passare nei luoghi delle prime π , come se si abbia per esempio.

 $f(x') (x') \dots (x^{(n-1)})(x^{(n)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(k)}) = f(x') (x') \dots (x^{(n+1)})(x^{(k)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(n+1)}) \dots \dots (x^{(n+1)}) \dots (x^{(n+1)}$

In amendue questi casi si verificherà sempre, che per le permutazioni medesime fia le radici, per cui là (B) mantiene il valor K, ancora la (E) manterrà il valore H (Problema prec.); ma nel caso secondo succederà, che mentre alcuni risultati rapporto alla (B) procedevano da permutazioni primitive, i corrispondenti riguardo alla (E) dipenderamo da permutazioni secondarie, come apparisce nel supposto esempio, potichè

 $\begin{array}{l} \mathbb{F}\left(x'\right)(x'') \ldots \left(x^{(q-1)}\right)(x^{(q)}) + 0 \left(x^{(q+1)} + \operatorname{ec.} + x^{(h)}\right), \\ \mathbb{F}\left(x'\right)(x'') \ldots \left(x^{(q+1)}\right)(x^{(h)}) + 0 \left(x^{(q-1)} + \operatorname{ec.} + x^{(q)}\right), \\ \operatorname{ossia} \mathbb{F}\left(x'\right)(x'') \ldots \left(x^{(q-1)}\right)(x^{(q)}), \ \mathbb{F}\left(x'\right)(x'') \ldots \left(x^{(q+1)}\right)(x^{(h)}) \operatorname{so}, \\ \operatorname{ossia} \mathbb{F}\left(x'\right) \times \left(x''\right) \ldots \left(x^{(q-1)}\right)(x^{(q)}), \\ \operatorname{ossia} \mathbb{F}\left(x'\right) \times \left(x''\right) \ldots \left(x^{(q-1)}\right)(x^{(h)}) \operatorname{so}, \\ \operatorname{ossia} \mathbb{F}\left(x'\right) \times \left(x''\right) \ldots \left(x''\right) \times \left(x''\right) \times$

la (B), e finttanto il secondo dei risultati della (B) procede dal primo per una permutazion primitiva, e il secondo dei risultati della (E), contenendo le radici a (c+1), a (b) non esistenti nel primo, nasce da questo per una permutazione secondaria.

Nel primo poi dei casi cra supposti, per poce che si considerino le precedenti forme della (B), e della (E), è fincile a vedersi, che le permutazioni le quali son primitive rapporto alla (E) son primitive ancora riguardo alla (B), e quelle che son secondarie relativamente alla prima di queste Equazioni, son secondarie eziandio rapporto alla seconda. Anzi a cagione della porzione o ($x^{(r+1)} + ec. + x^{(V)}$), che sempre avanisce, i risultati in quest' ultimo caso, che si hanno dalla (E) per le supports permutazioni primitive pottano cessere in minor numero dei risultati provenienti per la stessa ragione dalla (B), ma non mai in numero maggiore; e lo stesso si dice dei risultati, che si ottengono per le permutazioni secondarie.

Che se si abbia $\pi=\lambda$, allora vodremo agevolmente, che quelle, le quali sono permutazioni primitive, o secondarie nella (U), sono corrispondentemente primitive, o secondarie nella (E), e il numero dei risultati, che nascono per le permutazioni primitive, sarà lo stesso riguardo ad amendue le (B), (E); e lo stesso sarà il numero dei risultati provenienti per le permutazioni secondarie.

Se finalmente $\pi > \lambda$, si applicherà alle nostre Equazioni di relazione ciò stesso che abbiamo asserito nel caso di $\pi < \lambda$, rovesciando però il discorso, e applicando alla (B) quello, che si è detto della (E), ed alla (E) ciò che abbiam detto data (E).

8. Finora abhiamo supposto, che la (III) sia una finzione tale, che cambi di valore a qualunque permutazione fra le x', x', ec. x^(c). Suppongasi presentemente, che cesa si prenda in modo, che conservi lo stesso valore sotto alcune.

permutazioni . In questa ipotesi la (E) conserverà il valor H non solamente per tutte le permutazioni, per cui la (B) mantiene il valor K , ma potrà conservarlo ancora per quelle permutazioni, per cui non cambia di valore la (III); e per conseguenza in questo caso il numero dei risultati che provenienti dalla (E) sono = H, potrà essere maggiore del numero dei risultati, che nascono dalla (B), e sono = K.

9. Supponghiamo per esempio, che avendosi nella (A)

m = 8, l' Equazione di relazione (B) divenga.

x' x'' + x''' x''' = K

e che per le permutazioni secondarie abbiansii soli due risultati x' x'' + x''' x''' = K, x'' x''' + x''' + x'''' = K.

1.º Volendosi in questa ipotesi la soluzione del precedente problema, cominciam dal supporre # = 2, e potendo dare alla funzione (III) una forma qualunque, purchè sia tale che cambi di valore ad una permutazione qualsivoglia (n.º 6) . supponghiamo y = x' - x''. Eseguendo in questa le dovute permutazioni, poichè abbiamo y = x' - x'' + o(x''' + x''')pel (2.º n.º 6) otterremo pei valori della y i risultati y'=x'-x''+o(x'''+x''')=x'-x'', y''=x''-x'+o(x'''+x''')=x''-x',y'''=x'''-x'''+o(x'+x'')=x'''-x''', y'''=x'''-x'''+o(x'+x'')=x'''-x'''' $y^{v} = x^{v} - x^{v} + c(x^{v''} + x^{v''}) = x^{v} - x^{v}, y^{v'} = x^{v'} - x^{v} + c(x^{v''} + x^{v''}) = x^{v'} - x^{v}$ $y^{v,i} = x^{v,i} - x^{v,i} + o(x^v + x^{v,i}) = x^{v,i} - x^{v,i}, y^{v,i} = x^{v,i} - x^{v,i} + o(x^v + x^{v,i}) = x^{v,i}$

Formo ora l' Equazione $y^{8} + Ey^{7} + Gy^{6} + ec. = H$

determino mediante il (Cap. 15. Teor: delle Equaz:) dalla x' x" + x" x" = K il valore dei coefficienti E, G, ec. e nella Equazione in y così determinata colloco la quantità x' - x", mi risulterà in tal modo l'Equazion di rapporto $(x'-x'')^8 + E(x'-x'')^7 + C(x'-x'')^6$ ec. = H. Ora in questa per la natura della funzione supposta x' - x" i coefficienti delle potenze dispari 7, 5, ec. divengono evidentemente zero : danque tale Equazione diverrà (x' x'') 8 + G(x' - x'') 6 + ec. = H, ossia corrispondentemente alla (E) F $(x' - x'')^2 = H$, e questa, rinovati i discorsi del (n.º precedente), vedremo restare la medesima, e cambiarsi a quelle permutazioni istesse, per cui rimane la medesima, e si cambia la x' x'' + x''' x'' = K.

2.° Vogliasi
$$\pi=3$$
, e nella (III) vogliasi $y=\frac{x'-x''}{x'''}$.

Essendo $y = \frac{x' - x''}{x''} + c x''$, col fare le necessarie per-

mutazioni , corrispondentemente al primo risultato x' x'' + x''' x''' = K otterremo

$$y = \frac{x' - x'}{x''} + 0 \ x'' = \frac{x'' - x'}{x''}, \ y'' = \frac{x'' - x'}{x''} + 0 x'' = \frac{x'' - x}{x''},$$

$$y'' = \frac{x' - x'}{x'} + 0 \ x'' = \frac{x' - x'}{x''}, \ y'' = \frac{x'' - x''}{x''} + 0 \ x'' = \frac{x'' - x''}{x''},$$

$$y'' = \frac{x'' - x''}{x'} + 0 \ x'' = \frac{x'' - x''}{x''}, \ y''' = \frac{x'' - x'''}{x'} + 0 \ x'' = \frac{x'' - x''}{x''},$$

$$y''' = \frac{x'' - x''}{x''} + 0 \ x'' = \frac{x'' - x''}{x''}, \ y'''' = \frac{x'' - x'''}{x''} + 0 \ x'' = \frac{x'' - x'''}{x''},$$

In egual modo si otterranno corrispondentemente al risultato secondo $x^{\mu} x^{\mu} + x^{\mu} x^{\mu} = K$ altri otto valori della y, e con questi uniti a quelli faccio un' Equazione.

 $y^{16} + Ey^{15} + Cy^{14} + ec. = H$

i coefficienti della quale determinerò come precedentemente dalla x'x' + x'' + x'' = K. Giò fatto pongo in luogo della y il valore $\frac{x'-x''}{x'''}$, e ricaveremo così un' Equazione

$$\mathbb{F}\left(\frac{x'-x''}{x'''}\right)=\mathbb{H}$$

corrispondente alla (E) e dotata delle condizioni richieste dal Problema del (n.º //).

3.° Sia $\pi = 4$, ed y = ax' + bx'' + cx''' + dx'''. Gol? eseguire le solite permutazioni, riguardo al primo risultato x' x'' + x'' x''' = K, ci verrà

 $\begin{array}{lll} y'=ax'+bx''+cx'''+dx'', y''=ax'+bx+cx'''+dy'',\\ y''=ax'+bx''+cx'''+dx'', y''=ax'''+bx''+cx''+dx'',\\ y'''=ax'''+bx'''+cx''+dx', y''=ax'''+bx'''+cx'+dx'',\\ y''''=ax'''+bx'''+cx''+dx', y'''=ax'''+bx''+cx'+dx'',\\ Altrettanti valori della y otterremo riguardo al risultato secondo x''x''+x'''x''''=K. dunque, proseguito su questi il calcolo come precedentemente, ci risulterà in fine un'Equazione di relazione$

 $F\left(ax' + bx'' + cx''' + dx'''\right) = H,$ che soddisfa alle condizioni del Problema.

4.º Supponghiamo $\pi = 5$, ed $y = \frac{ax' + bx'' + cx''' + dx'''}{x^{\circ}}$.

Ridotta in questo caso la x' x" + x" x" = K alla x'x'' + x'''x'' + ox'' = K, eseguisco nella y le permutazioni tutte, per cui la quantità x' x" + x" x" + o x" mantiene il proprio valore. Ciò facendo rapporto alle prime quattro radici x', x", x", x", otterremo evidentemente gli otto valori della y espressi nel caso 3.º divisi tutti per xº; ora la xº nella x' x" + x" x' = K può permutarsi in tutte le radici x", x", x", senza che si cambi il valor K; dunque effettuando questa permutazione della xº nelle xº, xº", xº" in ciascuno degli accennati otto valori della y, si otterranno 4.8 = 32 risultati, e questi saranno i valori tutti della y, che corrispondono al primo risultato x' x" + x" x" = K : corrispondentemente al secondo $x^a x^a + x^{a''} x^{a'''} = x^a x^{a'} +$ xº" xº" + ox' = K si otterranno altri 32 valori della y e da tutti questi 64 insieme uniti dopo il solito calcolo ricaveremo per l'Equazione di rapporto domandata la

 $F(\frac{ax' + bx'' + cx''' + dx'''}{x''}) = H.$

5.° Se si vuole $\pi=0$, ed y=ax'+bx''+ec.+px''', ridotta la x'x''+x''xy''=K alla x'x''+x''xy''+ec.+px'''xy''+ec. (x''x'''+x''''x''') $\equiv K$, esquisco sulla y' le permutazion tutte per cui la x'x''+x'''x'''+ec. (x''x'''+x'''x''')

mantiene il valor K , proseguo il solito calcolo , e la funzione infine ottenuta

 $F(ax' + bx'' + ec. + nx^{v''}) = H$

ci scioglierà il nostro Problema .

6.º Finalmente se in uno qualunque dei casi ora considerati, la funzione y si suppone, giusta il (n.º8) tale, che cambi di valore per qualche sua permutazione particolare;

se per esempio nel caso 2.º supponesi $y = \frac{x' x'''}{x''} = \text{funzio-}$

ne, la quale non cambiasi alla mutazione di x' in x"; allora la Equazione di relazione infin ricavata, nel nostro esempio, la $F\left(\frac{x'x'''}{x''}\right) = H$ manterrà il proprio valore non solo sot-

to le permutazioni, sotto cui non cambia il proprio la x' x" + x" x', ma lo manterrà eziandio sotto delle altre.

Considerando questi casi , vedesi che a norma delle riflessioni fatte nel (n.º 7) nel caso 3.º i risultati secondarii provenienti dalla F (ax' + bx'' + cx''' + dx'') = H tanti sono , quanti sono i secondarii , che nascono dalla x'x'' + x'''x'' = K, che simili risultati nei casi 1;° 2;° 4;° 6;° sono in numero maggiore; essendo quattro nel caso 1.º, ed otto nei casi 2;º 4;º e 6;º, e che finalmente non ve n'à che un solo nel caso 5.°.

Nel caso 4° la F $(\frac{ax'+bx''+cx'''+dx''}{2})$ conserva il

valor H per quelle permutazioni medesime, per cui la x'x'' + x'''x'' = x'x'' + x'''x'' + ox'' mantiensi = K; ora in quest' ultima funzione le permutazioni delle x', x", x", x" fra loro sono disgiunte dalle permutazioni della xo nelle xo, xoo, xoo, ed inoltre questa xº è moltiplicata per lo zero : dunque, in essa i risultati che nascono dal cambiamento dell' accennata x" nelle x", x", x"" possono considerarsi come non esistenti: lo stesso non può già dirsi dei risultati , che per le permutazioni medesime nascono dalla F $(\frac{ax'+bx''+cx'''+\frac{dx'''}{2}}{2})$;

le permutazioni fra le x_i, x''_i, x'''_i, x''' sono bensi qui pure separate dalle permutazioni della x'' nelle x'', x''', x'''', na non essendo la x'' moltiplicata per lo zero, i risultati corrispondenti a queste ultime permutazioni non si potranno considerare come non essenti, e per conseguenza potrem dire giusta il $(n^o, 7)$, che il numero dei risultati provenienti dalla F $(\frac{x''+c-dx''}{x''})$ = II per le permutazioni

sì primitive che secondarie è sempre maggiore del numero di quelli , che nascono dalla $x'x''+x'''x^{\gamma}=K$.

10. Sonovi dei casì, nei quali quantunque si verifichi P Equazione (B), pure non può essa, come tale, servire all'opportuno abbassamento della (A); e questi casi devono succedere, ogniqualvolta cercando dalla (B) il valore della x trovasi la (C), oppure la (D) di grado necessariamente non < m, ovvero trovasi dipendente da altre Equazioni, il grado delle quali è necessariamente non < m. Tali casi pertanto si avvano e

1.° Allorquando la (B) pel valore particolare delle radici, o per la forma della funzione diviene giusta il (n.° 3. Teor. delle Equa.) $f(x', x'', x''', \dots, x^{(m)}) = K$.

2.º Mentre, posto $\lambda = 2$, ovvero = 3, ovvero = , ec., la (B) è tale, che risulta corrispondentemente

30

3.º In generale mentre, avendo λ un valore qualunque, dal primo membro della (B) si ottiene con le permutazioni secondarie, quando $\lambda < m$, e con le primitire, quando $\lambda = m$, un numero per lo meno m di risultati, i quali tutti siano = K, e ne' quali entrino o contemporaneamente, o successivamente in egual modo tutte le m radici x', x'', x'', ec. $x^{(m)}$.

Nel caso a.º prese per maggiore semplicità a considerare le funzioni , che formano di sopra la terza fila , in cui $\lambda = 4$, o si vuole nella (C) $\mu = 4$, o $\mu < 4$, oppure $\mu > 4$. Sia $\mu = 4$, in questa supposizione nella maniera medesima , con cui la $u' = x' \times x'' \times x''$ dipende da K = f(x')(x'')(x''')(x''') vedesi , che dipendono ancora dalla stessa K, a cui si uguagliano le funzioni tutte della terza fila , le $u' = x'' \times x'' \times x''$ x''' ec. Dunque essendo di numero me la funzioni accennate , di grado m risulterà necessariamente l' Equazione (D). Che se abbiamo $\mu < 4$, supposto per esempio $\mu = 2$, onde abbiasi $u = x' \times x''$ cliamati u' i valori di u, che possono determinarsi dalla f(x')(x'')(x'')(x'') (x''), chiamati u'' quelli , che dipendono dalla f(x')(x'')(x'')(x'')(x'') (ecos di seguito , se vogliumo che per esempio $x' \times x'' \times x'' \times x''$

Tomo IX. M m m

quantità u, caderemo in un' Equazione $u'^2 + pu' + q' = 0$, in cui uno qualunque dei coefficienti, per esempio il coefficiente p essendo = -(x'x'' + x'' x'') per la ragione sitessa , che abbiamo accennata nella ipotesi di $\mu = 4$, non potrà in conseguenza della (B) essere determinabile, che di-

pendentemente da un' Equazione di grado m.

Finalmente nel caso generale per le qualità supposte nella f(x') (x'') (x'') $(x)^{(b)}$ non essendovi ragione, per cui siano determinabili dipendentemente dal valore K comune a tutt' i risultati supposti, piuttosto i valori della u, che corrispondono al primo , che non gli altri valori , i quali son corrispondenti agli altri risultati, ne segue , come di sopra, che, o la stessa Equazione (D), o la Equazione, da cui immediatamente , o mediatamente procede uno qualunque dei coefficienti della (D), sarà essenzialmente di un grado non

< m.

11. Supponghiamo che cercando immediatamente dalla (B) il valore della x, ottengasi per essa delle Equazioni di grado non < m. In tale ipotesi si determini la (E) (numeri 6, 8), e.si osservi, se questa (E) va ella pure seggetta; qualunque siasi, il numero x, alla condizione medesima, che abbiam supposta nella (B), o nò. Se nò, si verificherà bene-

sì, cho la (B) non può, come tale, servire alla cercata riduzione della (A); ma però potremo da essa determinare una mova Equazione di relazione, la quale potrà darci l'abbassamento richiesto. Che se poi sotto qualunque valore del numero π , la (E) non meno della (B) resta sempre compresa sotto gli accennati casì del (n.º precedente), allora diremo che la (B) nè nello stato in cui si ritrova, nè ridotta in qualsivoglia maniren potrà mai servire ad abbassare opportunamente l'Equazione proposta.

12. Acciocché la (B) sia opportuna alla soluzione della (A), o dovrà dunque esser tale immediatumente, dandoci il valore della x per Equazioni di grado < m, o dovrà esserio mediatamente, potendosi da essa determinare un'altra Equazione (E) capace di somministrarci il valore della medesima x nell' accenuata maniera. Noi per la necessaria riduzione della (A) dovendo tener conto solamente dei rapporti, che ne sono o immediatamente, o mediatamente opportuni, trance sono o immediatamente, o mediatamente opportuni, trance</p>

lasceremo gli altri.

13. Riflettendo sulla natura delle permutazioni primitive, veggo che per queste può la (B) conservare il valor K in conseguenza della forma della funzione, come nell' esempio del (n.º 9), in cui la x' x" + x" x' mantiene il valor K pei cambiamenti di x' in x", di x" in x's, e per l' altro simultaneo di amendue le x', x" nelle x", x'"; oppure essa (B) mantiensi = K pel valore particolare delle radici, come nella ipotesi che, posto $x' + ax''^2 + bx'''^3 = K$, vogliasi ancora x' + ax" + bx" = K. Nel primo di questi due casi quelle permutazioni istesse, che lasciano = K il primo risultato f(x')(x'')(x'') $(x^{(\lambda)})$, pei (numeri 97, 93. Teor. delle Equaz.) lasceranno = K ancora tutti i risultati secondarii, ma nel caso secondo può questo verificarsi e nò (numero 93. Teor. delle Equaz.) : nell' esempio di x' x" + x" x" = K, ancora il risultato secondario $x^* x^* + x^{*''} x^{*'''} = K$ dovrà necessariamente conservare il proprio valore per quelle permutazioni medesime, per cui lo

Rapporto poi alle permutazioni secondarie vedremo facilmente potersi dire, che queste non riguardano mai la forma della funzione. Se la z' x'' - x''' conserva il valor K, cambiandosi nella z'' x'' - x''' x''', ciò non dipende, nè perchè il prodotto $x' \times x''$ riesce il medesimo, tanto dicendosi z' x'', che dicendosi z'' x'', nè perchè la somma x' x'' + x''' x''' resta la medesima, mentre si scrive x'' x''' x''

x' x" .

14. Tanto le permutazioni primitive, come le secondario, per cui la (B) conserva il valore K, possono esserei in un nunero uguale, e maggiore di uno. La soltia funzione si si + si' ** s'' del (n.º 9) mantiene il valor K per una permutazione composta, ossia per due semplici primitive, per quella cioè di s' in s'', e per l'altra di s' s' in s'' ** s' e mantiene il valore medesimo per una sola secondaria, cioè per quella di tatte le radici *, s', s', s' s' nella s', s', s'', s''.

La funzione F $(\frac{x'-x''}{x'''})$ del (caso a.º n. 9) conserva il valor H per una sola permutazione primitiva, cioè per quella di x' in x'', e lo conserva per tre permutazioni secondarie, per quella cioè di x'' in x'', onde da y' nasce il risultato y''', per quella di x' in x'', di x'', in x'' e di x'' in x', onde, da y' ottienesi y'', e per la terza delle x', x'', x'' corrispondentemente mente.

x", x", x", per cui y' ci produce il risultato y's. Ouando poi una permutazion primitiva riguarda la forma della funzione, essa in allora ci darà necessariamente tanti risultati della (B) uguali a K, quante volte può replicarsi fra le radici, che entrano nella medesima, ma nelle permutazioni primitive riguardanti il valore particolare delle radici, e nelle permutazioni secondarie non può asserirsi lo stesso. Se nella precedente $x' + ax''^2 + bx''^3 = K (n.° 13) si vuo$ le, che le radici sian tali, che si abbia x' + ax" + bx' = K, replicando su questo secondo risultato la permutazione medesima semplice, come si vede, del 1.º genere (n.º 257. Teor. delle Equaz.), il risultato nuovo x"+ax"+bx", che ne viene, potrà essere, e non essere = K. Così, supposto m=6, $\lambda=3$, se si vuole, che in conseguenza delle permutazioni secondarie dalla f(x')(x'')tx''' = K abbiasi f(x')(x'')(x'') = K, f(x')(x'')(x'') = K, f(x')(x'')(x'') = K, potendo questi risultati esser nati dalla f(x')(x'')(x''') =f(x')(x'')(x'') + o x'' x'' x'' per una permutazione semplice fra le x''', x''', x''', x''', cosicche si abbia f(x') (x'') $+ o x^{o} x^{o'} x''' = f(x')(x'')(x''), f(x')(x'')(x'') + o x^{o'} x''' x''' =$ f(x')(x'')(x''), f(x')(x'')(x'') + ox'''x'' x'' = f(x')(x')(x''),può succedere che quest' ultimo risultato f(x')(x''), quantunque nato da una permutazione medesima, sia, e non sia esso pure = K.

15. Supponghiamo, che una data funzione f(x)(x')(x'').

t non si cambi di valore per una qualunque permutazione riguardante la forma della funzione, e che dipendentemente da questa vogliasi il valore di un'altra funzione qualivoglia φ(x')(x'')...-y. Effettuata in quest' ultima, e replicata quanto si può la permutazione, per cui abbiamo supposto che la prima delle funzioni date conservi il proprio valore, e chiamato ni il numero dei risultati che ne vengono, pel (n.º 147. Toor. delle Equaz.) sappiamo, che la y dipenderà da un' Equazione y' + yy' + ec. + h = o, in cui ciascuno dei coefficienti, per esempio il coefficiente.

avrà tanti valori diversi, quanti sono i diversi valori della t; e cadauno dei valori di h sarà determinabile razionalmente, e immediatamente dal valore corrispondente della t.

16. Supponghiamo ora, che sotto una data permutazione qualunque siasi semplice, o composta, la t conservi il proprio valore in conseguenza del valore particolare delle radici x', x'', x''', ec., e chiamati t', t'' t''' ec. $t^{(a)}$ i risultati tutti , che quindi si hanno fra loro uguali , vogliasi riconoscere, come dipendentemente da essi possiamo ottenere i valori y', y", y", ec. y'a) corrispondenti della y . A tal fine osservo, che pel (n.º 151. Teor, delle Equaz.) una sola Equazione $y'' + gy''^{-1} + ec. + h = o$ tutti può riunire gli accennati valori della y, e non resta che da esaminarsi la determinazione dei coefficienti g. ec. h. Per maggiore semplicità suppongasi, che la precedente x' + ax"4 + bx"1 sia la funzione data = t che vogliasi $y = \frac{x' - x''}{x''}$, e che la permutazione supposta sia semplice, e sia fra tutte e tre le radici x', x", x". In simile ipotesi o tutti e tre i valori $x'+ax''^2+bx'''^3=t', x''+ax'''^2+bx'^3=t'', x'''+ax''^2+bx''^3=t''',$ provenienti dalla permutazione ripetuta quanto si può, sono uguali fra loro, o no; se lo sono, allora nella corrispondente Equazione y3 + gy2 + cc. + h = o ciascuno dei coefficienti g, ec. h essendo = f(y', y'', y''') avrà un solo valore dipendente razionalmente dal valore t'=t''=t''', e potrà da esso determinarsi , come è stato indicato nei (n. 147 , 151 Teor, delle Equaz.). Che se non tutti e tre i valori t', t'', t''' sono fra loro uguali, se abbiamo soltanto t' = t''in tal caso ai due risultati t', t" corrisponderà bensi l'Equazione $y^{x} + gy + h = 0$, in cui $y' = \frac{x' - x''}{x'''}$, $y'' = \frac{x'' - x'''}{x'}$, ma i coefficienti g, h non saranno determinabili dalla t', il coefficiente h' non avrà già due valori uguali corrispondenti ai due t' = t", ma avendo tutti e tre i valori h', h", h", tra lor differenti, la stessa difficoltà, che ho incontrata nel cercare il valore v' dipendentemente da t'. l'incontucrò egualmente cercandone il valore h'. Ciò non ostante potremo anche in questo caso ottenere dipendentemente da t' il chiesto valore di h', ma converrà operar come segue : facciasi con le t', t" una funzione della forma f(t', t") per esempio la somma $t' + t'' = x' + x'' + a(x''^2 + x'''^2) + b(x'''^3 + x'^3)$, chiamisi questa T, e dipendentemente da essa si cerchi il valore di h . Come alle quantità t' , t" , t" corrispondono le y', y'', y''', così alle T' = t' + t'', T'' = t', + t''', T''' = t'' + t'''corrisponderanno le altre h' = y'y'', h'' = y'y''', h''' = y''y'''e ciascuna di queste seconde potrà ricercarsi col solito metodo (n.º 144. Teor. delle Equaz.) dalla corrispondente delle prime. È vero che a cagione di t'= t" risulta T" = T", e però che la determinazione delle h", h" dalle T", T" incontrerà lo stesso inconveniente, che incontrava la determinazione della y', e della h', mentre queste quantità cercavansi dalla t'=t''; ma nel caso presente a noi non importa di determinare, che il valore h' = y'y'', e questo può sempre aversi da T', non avendo T' alcun valore uguale.

Consideriamo il caso in generale. Chianato n il numero di tutti i risultati, che si hanno dalla t, ripetendo la supposta permutazione, quanto è mai possibile, o abbiamo il precedente numero $\alpha=n$, o abbiamo $\alpha< n$. Se $\alpha=n$, allora ciascum coefficiente g, ec. h, per esempio l'ultimo h, potrà aversi dalla t come vien insegnato aci (numeri

147, 151. Teor. delle Equaz.), ma se $\alpha < n$, è necessaria una variazione. Supposto difatti attualmente a < n, e supposto per maggior chiarezza, che la permutazione sia semplice del 1.º genere, e che si abbia $t' = f(x')(x'')(x'') \dots$ $(x^{(n-1)})(x^{(n)}), t'' = f(x'')(x''')(x''') \dots (x^{(n)})(x'), t'' =$ $f(x''')(x''')(x'')\dots(x')$, ec., onde replicandosi essa quanto si può , t' ci somministri t' , t" ci dia t" , t" ci dia t', ec. t(e-t) produca t(e), t(e) si cambi in t(s+t), e così di seguito fino a t'a); e in egual modo y' si cambi corrispondentemente in y", y" in y", y" in y's, ec., y (x-1) in y (x), y (x) in y (+1), ec. fino ad y (n); eseguiscasi attualmente in t', ed in $h' = \pm y' y'' y''' \cdot \dots \cdot y^{(n-1)} y^{(n)}$ la permutazione supposta, e fermiamoci a considerarne i primi risultati . A cagione di t" per la ipotesi = t' potrem dire, che t' conserva per questa prima operazione il proprio valore, ma non potremo già dire lo stesso di h': mutandosi perciò y' in y", y" in y", y" in y'", ec. y(e-1) in y (e), ed y'a) in y'a+1), il valore di h diverrà y" y" y'v y (x) y (x+1) valore, il quale è ben diverso dal primo y' y" y" ..., $y^{(n-1)}$ $y^{(n)} = h'$. Proseguendo tanto in t, che in h la nostra permutazione, mentre da t ottenghiamo t'" = t', la h diventerà y" y' y y (x+1) y (x+2) valore , come vedesi, differente dall' altro y' y" y" $y^{(a-1)}$ $y^{(a)} = h$; lo stesso si ritrova in seguito. Ora, accioechè a norma dei (numeri 147 , 151 Teor. delle Equaz.) potesse da t' ottenersi razionalmente il valore h', bisognerebbe che questa funzione h' non cambiasse di valore a quelle permutazioni medesime fra le x', x", x", ec., per cui non cambiasi la t, ma ciò non succede, dunque il metodo dei citati (numeri 147 , 151 , Teor. delle Equaz.) non potrà nella ipotesi di a < n servirci per determinare h' immediatamente da t'. Fac-

Facciamo con le t', t", t", ec. t(e) una funzione della forma f (t', t", t", ec. t(a)), per esempio la somma t' + $t'' + t''' + ec. + t^{(a)}$, chiamisi questa T', e cerchiamo da essa il valore h'. Poiche, essendo per la ipotesi le quantità t(a+1), t(a+1), ec. t(n) di valor differente dal valore delle t' = $t'' + t''' = ec. = t^{(e)}$, il risultato T' = t' + t'' + t''' + ec. +t(a), mentre non abbiansi nuove supposizioni, è diverso dagli altri tutti $T'' = t' + t'' + t'' + ec. + t^{(a+1)}, T''' = t'$ + t" + t" + ec. + t(+1) ec., cosicchè dalla T non può con le permutazioni prodursi altro risultato a lui uguale; poichè le y", y", ec. y(a), y(a+1), ec. y(a) sono nate dalla y', come le t'', t''', ec. t(a), t(a+1), ec. t(a) dalla t'; e poichè finalmente $h'=\pm y'y''y'''\cdots y'''$ è una funzione delle v', v", v", ec. v(a) affatto simile alla funzione T' delle t', t", t", ec. t(a); è chiaro, che dipendentemente dalla T' la quantità l'avrà in conseguenza delle sole precedenti supposizioni un solo valore, e quindi che potrà determinarsi da essa T' col solito metodo. Dunque nell' ipotesi fatta, affine di avere il valore delle y', y", y", ec. y adici della Equazione $y'' + gy''^{-1} + ec. + h = 0$, dovremo cercare il valore dei coefficienti g, ec., h non già dal valore t', ma bensì dall' altro T' in generale = $f(t', t'', t''', ec. t^{(a)})$.

L'esposto metodo poi vedesi facilmente, che avrà sempre luogo, qualunque siasi la natura, e qualunque il nume o delle permutazioni per cui produconsi le quantità tra loro uguali t', t'', t''', ec. t^(e). Imperciocchè se tali permutazioni si volessero di un numero > 1, o si volessero composte (n.º 256. Teor. delle Equaz.); allora ripetendosi contemporaneamente o esse per intiero, o qualcuna delle loro componenti (n.º 258. Teor. delle Equaz.) sopra dei risultati t', t'', t''', ec. t^(e), e sopra degli altri y', y'', y''', Tomo LX.

Nnn ec.

ec. $y^{(a)}$, tanto i primi, quanto i secondi fra questi non farebbero che mutassi corrispondentemente fra loro, o cambiarsi nelle $t^{(a+1)}$, $t^{(a+2)}$, ec. $t^{(c)}$, $y^{(a+1)}$, $y^{(c+1)}$, ec. $y^{(c)}$; e per conseguenza le funzioni T, k, mentre non abbia luogo qualche nuova supposizione, sotto la medesima permutazione o si conserverebbero amendue dello stesso valore, o si

cambierebbero contemporaneamente.

17. Nel (n.º prec.) ho detto, che i valori T", T", ec. della T sono tutti diversi dal valore T', mentre non esista qualche nuova supposizione diversa dalle precedenti . Ponghiamo ora che abbia luogo questa nuova supposizione, e che in conseguenza di certi particolari valori delle x', x", x". ec., o della forma della funzione alcuni dei risultati T", T", ec. siano = T; questa circostanza sembra intorbidare il metodo precedente; ma vedremo non esser ciò vero, poichè se dessa accade nella funzione $T \equiv t' + t'' + t''' + ee + t^{(s)}$ vedremo potersene sempre determinare un'altra f(t', t', t", t(x)), nella quale il risultato corrispondente a T' sarà disuguale da tutti i risultati corrispondenti a T", T", ec., e la quale per conseguenza potrà giusta il (n.º prec.) servire in vece della $t' + t'' + t''' + ec. + t^{(a)}$ alla determinazion razionale dei coefficienti g , ec. h . Supponghiamo pertanto, che eseguite nella $t \equiv f(x)(x')(x'')...$

tutte le possibili permutazioni, di numero p siano i risultati s', s'', s'', ec. s'^0), che ne vengono; supponghiamo, che, facendo le permutazioni tutte nella $T = s' + s'' + s''' + ec. + s''^0$, chiamisi q il numero dei risultati T', T'', T'', ec. $T^{(r)}$, che se ne anno, onde sia $q = \frac{p(p-1)(p-a)...(p-(s-1))}{1.2.3...\alpha}$; e supposto finalmente per maggiore semplicità di scrivere $s' + s'' + s''' + ec. + s''^0 = T_1, s'^2 + s'' + s''' + ec. + s''^0 = T_2$

 $s' + s'' + s''' + ec. + s'''' = T1, s'^2 + s''^2 + s'''^2 + ec. + s''^2 = T2,$ $s'^3 + s''^3 + s''^3 + ec. + s'^4 = T3, ec., s'' + s''' + s''' + ec. + s'^4 = T(t),$ sia $T'(s) = s^n + s^{nn} + s^{nn} + ec. + s^{(n-s)s} + s^{(n-s)s} + s^{(n-s)s} + s^{(n-s)s}$ $T'(s) = s'' + s''' + s'''' + ec. + s^{(a-2)s} + s^{(a+2)s} + s^{(a+2)s} + s^{(a+2)s}$ $T'''(s) = z'^s + z''' + z'''s + ec. + z'^{(\alpha-3)s} + z^{(\alpha-3)s} + z'^{(\beta)s} + z'^{(\beta+1)s}$ $T^{*}(s) = t'^{s} + t'^{s} + t''^{s} + ec. + t^{(\gamma)s} + t^{(\gamma+1)s} + t^{(\gamma+2)s} + t^{(\gamma+3)s}$ $T^{(q)}(i) = \epsilon^{(q-a+1)i} + \epsilon^{(q-a+2)i} + \epsilon^{(q-a+3)i} + ec. + \epsilon^{(q-3)i} + \epsilon^{(q-2)i}$ + r(q-1) + r(q), rappresentandosi dalla , i successivi numeri 1, 2, 3, 4, ec. Ciò fatto, suppongasi, che posto , = 1, la Ti sia tale, che divengano fra loro uguali i due risultati T'1, T"1, avendosi perciò t' + t" + t" + ec. + $z^{(a-3)} + z^{(a-2)} + z^{(a-1)} + z^{(a)} = z' + z'' + ec. + z^{(a-3)} +$ $t^{(a+1)} + t^{(a+2)} + t^{(a+3)}$, risulterà $t^{(a-2)} + t^{(a-1)} + t^{(a)} =$ $\varepsilon^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+1)} + \varepsilon^{(n+2)}$, e quindi a cagione di $\varepsilon^{(n-1)} = \varepsilon^{(n-1)}$ $= s^{(\alpha)}$, avremo $3s^{(\alpha)} = s^{(\alpha+1)} + s^{(\alpha+2)} + s^{(\alpha+3)}$, Equazione, nella quale ciascuna delle quantità e(e+1), e(e+1), e(e+3) per la ipotesi è disuguale dalla p(a). Ora o si vuole, che supposto successivamente : = 2, 3, 4, ec., un' uguaglianza a questa simile abbia luogo ancora in altre delle Ta, T3, T4, ec., o no; se si vuole, io dico, che ciò non potrà succedere tutt'al più, che in quattro delle medesime; imperciocchè se si volesse, che accadesse in cinque, per esempio nelle prime cinque, venendone T'1 = T'1, T'2 = T"2, T'3 = T"3, T'4 = T''4, T'5 = T''5, otterrebbesi $3s^{(\alpha)} = s^{(\alpha+1)} + s^{(\alpha+2)} +$ $s^{(a+2)}$, $3t^{(a)2} = s^{(a+1)2} + s^{(a+2)2} + s^{(a+3)2}$, $3t^{(a)3} = s^{(a+1)3} + t^{(a+1)3}$ $z^{(a+2)3} + z^{(a+3)3}$, $3z^{(a)4} = z^{(a+1)4} + z^{(a+2)4} + z^{(a+3)4}$, $3z^{(a)5}$ $= t^{(a+1)5} + t^{(a+2)5} + t^{(a+2)5}$, e però con quattro incognite $t^{(a)}$

essere $s^{(\omega)}$ uguale ad alcuna delle $s^{(\omega+1)}$, $s^{(\omega+1)}$, ec. può risultare identica all' altra, il che è impossibile. Giò dunque essendo, escludiamo dalle nostre considerazioni quelle funzioni, nelle quali à luogo l'esposta uguaglianza, e supposto tali essere le prime quattro T_1 , T_2 , T_3 , T_4 , nelle altre, che rimangono, T_5 , T_6 , ec. essa non portà più verificarsi.

Supponghiamo, che nella T5 succeda un' altra uguaglianza diversa dalla precedente, e al risultato T'5 sia per esempio uguale l' altro T"5, onde risulti t'5+ t"5+ t"5+ ec + t(-3)5 + t(a-2)5 + t(a-1)5 + t(a)5 = t'5 + t''5 + t''5 + $ec + t^{(n-3)5} + t^{(n-2)5} + t^{(\beta)5} + t^{(\beta+1)5}$, ossia $2t^{(n)5} = t^{(\beta)5}$ $t^{(\beta+1)}$, in cui cadauna delle $t^{(\beta)}$, $t^{(\beta+1)}$ è disuguale dalla t (a). In questo caso esistendo nella Equazion risultata le tre quantità e(a), r(b), e(b+1), potranno bensì esistere tra le funzioni T5, T6, T7, ec. tre di loro, nelle quali succeda l'eguaglianza medesima, ma non ne potranno esistere di più. e la ragione ne è la stessa, che quella del caso precedente. Supposto pertanto, che tale uguaglianza si verifichi nelle funzioni T5, T6, T7, onde risulti T'5 = T"5, T6 = T"6. T'7 = T"7, in tutte le altre T8, T9, ec., che rimangono, non potrà aver più luogo nè la prima delle uguaglianze supposte, nè la seconda, cioè nè la T' = T", nè la T' = T".

Vogliasi ora , che nella T8 i due risultati T3, T°8 sian uguali fra loro: avendosi perciò $4r^{668} \equiv r^{58} + r^{5+19}, + r^{5+19}, + r^{5+19} + r^{5+19}$, viene ad ottenersi un' Equazione, nella quale esistono le cinque quantità r^{60} , r^{60} , ec. r^{5+19} , e cadauna delle r^{60} , ec. r^{5+19} è differente dalla r^{60} : dunque tra le funzioni T8, T9, ec. ne potrauno esisterè cinque, le quali ammettano simile eguagliatuza; ma per quanto abbiam detto poé anzi non potendone esistere di più, suppongliamo, che tali siano le cinque funzioni T8, T9, ec. ron potra necedere ne la lateriori T13, T14, T15, ec. non potra succedere ne la

prima, nè la seconda, nè la terza delle uguaglianze accen-

Proseguendo nella stessa maniera, vedesi facilmente, che se succedono nella Ti3, o nelle funzioni, che seguono, delle uguagliane unore fra i risultati T*, T*, ce. ed il primo T*, potremo sempre determinare delle unzioni ulteriori, nelle quali non abbiano luogo nè questa, nè alcuna delle uguaglianze precedenti.

18. Formata la fanzione T(*) giusta il (n.º prec.), e supposta tale, che nè in essa, nè in alcuna delle ulteriori T(*+1), T(*+2) ec. il risultato T uguagli sleuno degli altri T", T", T", ec., il che, per quanto si è detto nel (n.º prec.), può sempre farsi; osserviamo poter succedere un muovo accidente ; il quale pei nostri raziocinii, e i nostri calcoli sarà ben di evitare: potrebbe accadere, che la T(*) conservasse il proprio valore per qualche nuova permutazione, sotto cui non lo conservava la t. Se per esempio, avendosi *=1, ed α = 2, sia t' = x" + x" *, t" = x" *

x''' + x''', risultando T $i = i' + i' = x'^2 + x''' + x''' + x''' + x'''$, questa funzione conserverà il proprio valore pel cambiamento di x' in x'', e di n x'', e per quello di x' in x'', e di n x'', e per quello di x' in x''', e di n x'', per mutazioni , sotto cui non lo conservavano le i', i''. In egual modo ritenuto a = 2, se sia e = 3, se varianta una delle radici enbiche immaginarie della unità, e se sia $e' = x' + \omega x'' + \omega^2 x'''$, $e'' = x'' + \omega x'' + \omega^2 x'''$, $e'' = x'' + \omega x'' + \omega^2 x'''$, $e'' = x''' + \omega x'' + \omega^2 x'$

Per formare con le t', t'', t''', ec. $t^{(c)}$ la $T'(t) = t'' + t''' + t''' + ec. + t^{(c)}$, non dobbiamo che elevare alla potenza $t^{(c)}$ somma in questa somma poi, mentre fannosi delle permutazioni fra le t', t'', t''', ec. non può la T'(t) conservare il proprio valore se non perchè sotto di esse

1.º O ciascuna delle quantità s', s'', s''', ec. s'e'e rimane la medesima senza cangiarsi in altre, come si vede nel secondo esempio.

2.º O perchè le r', r'', r''', ec. r'(a), si cambiano in altre uguali , o disuguali da esse , la cui somma risulta

= T'(1), come apparisce nell' esempio primo.

Ora nella nostra T (i), può bensì accadere l'accennato accidente per la prima delle esposte ragioni, come nell'esempio secondo; ma non potrà accadere per la seconda ragione, come nell'esempio primo. Imperciocche, se accadesse per questa seconda ragione, sotto una data permutazione le t', t'', t'', e. t'', e. t''), si dovrebbero o in tutto o in parte cambiare in altre da lor disuguali, e la somma di tutti i

19. Prendiamo dunque a considerare piuttosto l'altro caso, e cerchiamo di determinare, quando ha luogo il nostro accidente per la prima delle ragioni accennate. Supposto perciò $t^a = H$, e chiamato $t^{(a+1)}$, ciò che diventa t' per quella permutazione fra le x', x", x", ec., che fa cambiare essa t', e lascia la t' del valore medesimo, dovrà essere questa quantità t'a+1) disuguale da t', e dovrà essere $t^{(a+1)i} = H$; dunque, risultando tanto t', quanto $t^{(a+1)}$ radici della Equazione to = H, per la natura di questa dovrà essere t'(α+1) = ω t', chiamata ω quella tra le radici ssime dell'unità, che corrisponde ai valori t', t(x+1); e per conseguenza, se accade l'indicato caso, la t' dovrà esser tale, che moltiplicata nello stato, in cui si trova, per una determinata radice ssima dell'unità, somministrerà l'altro risultato t(x+1). Nell' esempio precedente, moltiplicato il valore $t' = x' + w x'' + w^2 x'''$ per w, e per w^2 , otterremo $t^{(a+1)} = x''' + \omega x' + \omega^2 x'' = \omega t', t^{(a+2)} = x'' + \omega x''' + \omega^2 x$ $= \omega^2 t'$.

Rappresenti la lettera & uno qualunque dei numeri primi, che a norma del (n.º prec.) oltrepassano il valoro 1, e questi numeri primi supposto essere per esempio i seguenti 11, 13, 17, 19, 23, ec., rappresenti corrispondentemente o' una delle radici undecime dell' unità, o'' ne esprima una delle radici decime terze, o'' una delle decime settime,

w'e una delle decime none, ec. Ciò posto, supponghiamo la t' tale, che cambiandosi di valore sotto certe permutazioni , e producendosi in corrispondenza i risultati $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, $t^{(\alpha+3)}$, $t^{(\alpha+4)}$, ec. tutti da t' disuguali, le sue potenze t'11, t'13, t'17, ec. sotto le permutazioni medesime conservino rispettivamente il loro valore per modo, che si abbia $t^{11} = t^{(\alpha+1)11}$, $t^{'11} = t^{(\alpha+2)11}$, $t^{'13} = t^{(\alpha+3)13}$, $t^{'17}$ = t(a+4)17, ec.; in questa ipotesi, estraendo le radici, dovrà risultare $t^{(\alpha+1)} = \omega' t'$, $t^{(\alpha+2)} = \omega'' t'$, $t^{(\alpha+3)} = \omega'' t'$. $t^{(c+4)} = \omega^{\prime\prime\prime} t'$, ec. Ora in queste Equazioni niuna delle $\omega', \omega'', \omega'', \epsilon$, ec. può essere = t, perchè se fosse per esempio $\omega'' \equiv 1$, ne verrebbe $t^{(\omega+2)} = t'$, il che è contro la supposizione: per conseguenza niuna delle $t^{(\alpha+1)}$, $t^{(\alpha+2)}$, ec. notrà essere uguale ad un'altra delle medesime, perchè se ciò fosse, se per esempio si avesse $t^{(a+1)} = t^{(a+1)}$, oppure $t[s+1] = t^{(u+1)}$, risulterebbe rispettivamente ω' $t' = \omega''$ t', ω' $t' = \omega'''$ t', e però $\omega' = \omega''$, $\omega' \equiv \omega'''$, il che è impossibile, giacchè per la natura delle radici dell'unità è impossibile, che una di queste radici di un dato grado un'altra ne uguagli dello stesso, o di grado diverso, mentre esse non siano uguali all'unità, e mentre i loro gradi vengano espressi da' numeri primi, come di fatti si è supposto nel nostro caso. Ma se le quantità t 4+1, t(4+2), ec. sono tutte disuguali fra loro, il numero delle precedenti Equazioni $t^{'11} = t^{(\alpha+1)11}$, $t^{'11} = t^{(\alpha+2)11}$, $t^{'13} = t^{(\alpha+2)13}$, ec. deve essere finito, perchè è finito il numero p di tutti i risultati provenienti dalla t per le permutazioni fra le x', x", x", ec. Dunque potendosi la serie dei numeri primi 11, 13, 17, 19, 23, ec. estendere all'infinito, ne segue, che potrò sempre determinare una potenza Yesima della t' la quale superi tutte quelle, in cui succedono l'esposte uguaglianze. Lo stesso si didice della t", della t", ec. Dunque essendo sempre determinabile una funzione T $(\zeta) = t'^{\zeta} + t''^{\zeta} + t'''^{\zeta} + \text{ec.} + t'^{(s)}^{\zeta}$ tale che ciascuna delle t's, t"s, t"s, ec. non conservi il proprio valore se non che sotto quelle permutazioni medesime, sotto delle quali lo conservano le t', t", t", ec., se supporremo che essa T (() sia attualmente determinata in tal modo ; verrà così preso di mezzo affatto l'accidente accennato nel (n.º 18).

20. Dunque potendosi sempre determinare una funzione $T = f(t', t'', t''', ec. t^{(e)})$ tale che abbia il risultato T' disuguale da tutti gli altri T", T", ec. (n.º 17), e tale che non mantenga il proprio valore per altre permutazioni diverse da quelle , sotto cui mantiene il proprio la t (n. 18, 19); noi supporremo, che la T, la quale deve servire e per isciogliere il Problema del (n.º 16), e per le considerazioni da farsi in seguito, sia realmente determinata con le condizioni ora indicate .

In conseguenza di quanto abbiamo detto nei (n. 16, e segg.) converrà correggere, o almeno esprimere meglio, quanto si espone nei (n. 151, 152. Teor. delle Equaz.)

21. Ritenute le supposizioni del (n.º 16), e formata giusta il (n.º prec.) la funzione T' = f(t', t'', t''', ec. t'''); in questa io dico, che le permutazioni, per cui essa mantiene il proprio valore, possono considerarsi tutte come riguardanti la forma della funzione. Eseguiscasi nella T' una qualunque permutazione riguardante il valore particolare delle radici, e vengano in essa comprese per esempio le x', x" x"; per simile permutazione la t, supposto che contenga alcune, o tutte le x', x", x", non potrà già rimanere identicamente la stessa, poichè la permutazione non riguarda la sua forma, ma dovrà cambiarsi in una delle altre t", t", ec. t(p); e lo stesso si dice di tutte quelle tra le t", t", ec. t(x), in

000 cui Tomo IX.

cui esistono le accennate x', x'', x''' . Ora per fare tale permutazione nella T' = $f(t', t'', t''', ec. t^{(n)})$ dovendosi essa eseguire contemporaneamente in tutte quelle tra le t', t", t", ec. t(a), che contenendo le x', x", x", la possono ammettere; osservo, che per simile operazione queste t', t", t", ec. t(a) o si cambiano promiscuamente fra loro. senza produrre nuovi risultati, come nel caso che la t' produca la t", la t" produca la t", la t", la t', e la t' somministri di nuovo la t' restando come si trovano le altre to, to, ec. t(a), perchè prive delle x', x", x"; oppure nel mentre che alcune delle t', t", t", ec. t(a) si cambiano fra loro, da una, o da più delle altre che rimangono, produconsi dei risultati da' loro diversi, come nella ipotesi, che cambiatasi la t' nella t", la t" nella t", la t" produca il nuovo risultato t(a+i), la t" produca l'altro t(a+i), e le altre to, to, ec. to o si cambino fra di loro o non contenendo le x', x", x", si mantengano nel loro stato . Nella seconda di queste due supposizioni la f(t', t'', t''', ec. t(")) divenendo f (t", t"', t(a+1), t(a+1), tv, ec. t(a)) produrrà un altro valore della T; ma quest' altro valore pel (n.º prec.) non può essere = T'; Dunque in questa seconda supposizione la permutazione supposta non producendo un risultato uguale al primo, uscirà dalla nostra considerazione. Nella ipotesi prima poi la $f(t', t'', t''', ec. t^{(e)})$ è tale, che rimane la medesima, ancorchè le quantità t', t", t", ec. t(") le quali per la supposta permutazione cambiansi reciprocamente fra loro, avessero un valore qualunque (2. n.º 3. Teor. delle Equaz.); ma questo è chiaro che non può succedere, se non nel caso, che la permutazione riguardi la forma della funzione, Dunque ec.

Sia per esempio $t = x' + ax''^2 + bx'''^3 + c(x''^2 + x^{-2})$ + dx" = K, e sia questa funzione tale che facendo la permutazione semplice fra le x', x", x"', risulti

 $x' + ax''^2 + bx'''^3 + c(x''^2 + x''^2) + dx''^4 = K$ $x'' + ax''^2 + bx'^3 + c(x'^2 + x'^2) + dx''^4 = K$ e permutando fra loro le x', x", dal primo di questi due risultati, si abbia

 $x' + ax''^{2} + bx'''^{3} + c(x^{2/2} + x^{2/2}) + dx'^{2/4} = K$ dal secondo

 $x'' + ax''^2 + bx'^3 + c(x^{v'^2} + x^{v^2}) + dx^{v^4} = K$ In conseguenza di ciò, espressi con le t', t", t", t" simili

risultati, avremo

 $T' = t' + t'' + t''' + t''' = 2(x' + x'') + 2a(x''^2 + x'''^2)$ $+2b(x'^3+x'''^3)+4cx''^2+2c(x''^2+x'''^2)+2d(x''^4+x''^4)=4K$ e questa funzione vedesi, che mentre non mantiene il valore 4 K alla permutazione semplice delle x', x", x" fra di loro, lo conserva poi alla permutazione fra le x'o, xo, e lo conserva dipendentemente dalla forma della funzione.

22. Pertanto la T' determinata giusta i (n. prec. 1) goderà delle proprietà

1.º Di non conservare il proprio valore per alcun' altra permutazione tra le x', x", x", ec., che sia diversa dalle permutazioni, per cui mantiene il proprio la t'.

2.º Che le permutazioni, sotto delle quali la T' non si cambia, ponno essere in numero minore di quelle, per cui non si cambia la t': così nell' esempio precedente la funzione supposta conserva il proprio valore K per tre permutazioni, la prima fra le x', x', x'', la seconda fra le x'', x'', la terza fra le x'o, x''; la funzione T' ottenuta non si conserva = 4K che per la permutazione sola fra le x', x"; permutazione, come vedesi per cui si mantiene dello stesso valore ancora la supposta funzione .

3.º Che le permutazioni tutte, per cui la T'non cambia valore, possono considerarsi, e sono riguardanti la forma 000 2 deldella funzione; il che non succede nella t.

4º Che il numero dei risultati fia loro uguali nella T pnö essere minore, ma non sarà mai maggiore del numero dei risultati fia loro uguali della t. Nel precedente esempio i risultati fia loro uguali della T sono due, quei della t sono otto.

5.º Che per conseguenza volendosi il valore di una funzione y=⊕ (x') (x'') dipendentemente dalla t, oppure dalla T; riescirà molto più semplice il cercarlo da quest' ultima funzione, che non dalla prima; e se cercandosi questa y dalla T si trovasse indeterminabile, perchè la T ci conducesse ad un' Equazione di grado necessariamente non < m; molto più si troverà indeterminabile la y, mentre se ne cerchi il valore dalla t..

PARTE SECONDA

23. Torniamo alla (B); e ritenute le supposizioni, che le (h) sia Equazione semplice, e che la K sia quantità razionale (n. 2, 4), nei risultati, che nasceado dalla (II) per le permutazioni secondarie replicate quanto si può conservano il valor K, io dice

1.º Che tutte si dovranno contenere successivamente le radici z', x'', z''', ec. $x^{(m)}$.

2.° Che tutte queste radici vi dovranno essere ripetute

un egual numero di volte. 1.º Supponghiamo per maggiere chiarezza, che i suppo-

sti risultati secondarii della (B) siano i seguenti (IV) f(x) (x'') x'') = ec. = K, e suppongliamo , se è possibile , the da essi restino escluse le radici $x'^{(n)}$, $x'^{(n-p)}$, ec. $x'^{(n-p)}$. Ciò posto , faccio il prodotto

 $x', x'', x''', \dots x^{(k)}$, lo chiamo u, e ne cerco dalla (B) if valore: restando questo sempre lo stesso a tutte le permutazioni fita le x', x'', x'', ec. $x^{(k)}$, resterà il medesimo a tutte le permutazioni primitive della (B), e però la u avrà un solo valore corrispondente al primo dei risultati (IV.), uno corrispondente al secondo, uno al terzo, e così di seguito. Dunque se tali risultati son di numero n, la u dipenderà da un' Equazione

(V) $u^n + gu^{n-1} + ec. = 0$.

(VI) $x^{\lambda}+t'x^{\lambda-1}+z'x^{\lambda-2}+cc.\pm u', x^{\lambda}+t''x^{\lambda-1}+z''x^{\lambda-2}+cc.\pm u''$, ec., che quindi provengono, se ne uguagli allo zero il prodotto, e supposto essere

(VII) $x^{\lambda n} + P x^{\lambda n - 1} + Q x^{\lambda n - 2} + ec. = 0$

l' Equazion, che ne nasce, i coefficienti P, Q, ec. di questa essendo funzioni razionali dei coefficienti della (V), saranno essi pur razionali.

Il primo dei risultati (VI) tutte contenendo evidentemente le radici, che esistono in u', sarà = $(x-x')(x-x'')(x-x'')\dots(x-x^{(\lambda)})$, il secondo tutte contenendo le radici esistenti in u', sarà = $(x-x'')(x-x'')(x-x'')\dots(x-x^{(\lambda+1)})$; ec., ma le radici esistenti in tutti i valori u', u'', u'', ec. sono precisamente le radici esistenti nei risultati (IV); dunsono precisamente le radici esistenti nei risultati (IV); dunsono precisamente le radici esistenti nei risultati (IV);

que, volendosi da questi (IV), e però dai valori u', u", u", ec. escluse le radici x(m), x(m-1), ec. x(m-u), simili radici rimarranno escluse eziandio dai risultati (VI), e per conseguenza l' Equazione (VII) conterrà tutte le radici della data (A) a riserva di queste ultime u + 1. Ora cerchiamo il massimo comun divisore tra i primi membri delle due Equazioni (A), (VII): dovendo tale comun divisore, per quanto abbiam ora detto, tutte e solamente contenere le radici x', x'', x''', ec. $x^{(m-\mu-1)}$, una, o più volte ripetute avrà un fattore, o sarà esso medesimo della forma x m-µ-1 + R $x^{m-\mu-z}$ + ec.; ma essendo amendue le Equazioni (A), (VII) razionali , anche questo fattore è razionale . Dunque , se fosse possibile, che nei risultati (IV) non si contenessero tutte le x', x", x", ec. x(m); la (A) avrebbe un fattore commensurabile, e per conseguenza non sarebbe più un' Equazione semplice, il che è contro la supposizione.

2.º Vogliasi, che nei risultati ($\overline{1V}$) le x', x'', x''', cc. $x^{(n)}$ si contengano un nutuero disuguale di volte, e suppongasi perciò, che le x', x'', x''', ec. $x^{(n)}$ vi restino comprese un numero di volte a, le altre $x^{(n+1)}, x^{(n+1)}, c$, c, $x^{(n)}$ numero diverso. Dovendo le radici esistenti nei risultati ($\overline{1V}$) esistere tutte, per quanto abbiamo ora detto, e replicate lo stesso numero di volte nelle quantità u', u', u'', cc., c quindi nei risultati ($\overline{1V}$), e nella Equazione (\overline{V} II), ne segue , che questa (\overline{V} II) per le proprietà delle radici nguali dovrà avere un fattore = $(x-x')(x-x'')(x-x'')\dots(x-x^{(n)})$ razionale, ma esso è fattore exiandio della (\overline{A}). Dunque ancora nella presente i potesi la (\overline{A}) averbe un fattore commen-

surabile contro la suppesizione. Dunque ec.

24. Quindi si deduce, n° che il numero λ delle radici esistenti in ciascuno dei risultati secondarii moltiplicati pel numero n dei risultati medesimi, cioè il prodotto λn è sem-

pre uguale, o multiplo dell' esponente m; onde rappresentando con a un numero intero positivo, in generale avremo $\lambda u = am$.

2.º Il precedente Teorema si verifica ancora sulla Equación di relazione (E) dedotta dalla (B) giusta i (n.º 6, 8). Danque, espresso con la lettera q i in numero dei risultati secondarii, che provenienti dalla (E) sono = Π , e rappresentato con la b un numero intero e positivo, avremo qui pure qq=bm.

3.º Dalle due Equazioni $\lambda n = am$, $\pi q = bm$, otterremo $b\lambda n = a\pi q$.

4.º Come nei risultati (IV), così nei prodotti u', u", u", e nei risultati (VI), e nella Equazione (VII) tutte esisteranno le radici x', x", x", cc. x'*, e ripetute cadauna un egual numero di volte.

25. Tutte eseguendo nella (B) le permutazioni si primitive, che secondarie, per cui essa conserva il valor K, io dico, che nei risultati quindi ottenuti entro ciascuno dei luoghi indicati dalle parentesi si conterranno successivamente tutte le radici a'. x''. x'', ec. x'''.

Se ciò sì nega, supponghiamo, che in cadauno per esempio dei primi tre luoghi cio dei luoghi, che nella ($\mathbb{R}^{(n)}$) vengono occupati dalle x', x'', x'', non possa mai entrare la $x^{(n)}$. In tale ipotesi sia nella (\mathbb{R}) determinata giusta il ($n.^6$ 6) $\pi=3$, e divenga $\mathbb{F}(x')(x'')(x'')=\mathbb{H}$. Pel ($n.^6$ 6) questa funzione mantiene il valore \mathbb{H} solamente sotto quella permutazioni , per cui la (\mathbb{B}) mantiene il valor \mathbb{K} ; \mathbb{m}_a , in niuno dei risultati della (\mathbb{B}) uguali a \mathbb{K} si vuole, che la $x^{(n)}$ possa entrare nei primi tre luoghi dunque la stessa $x^{(n)}$ non potrà entrare ad occupare alcuno dei luoghi medesimi nepure nei risultati , che provengono dalla $\mathbb{F}(x')(x'')(x'')$ e sono uguali ad \mathbb{H} , \mathbb{m} gli accennati tre luoghi altro non

26. Facciamo nella (B) f(x) (x'') (x'') (x'') ... $(x^{65}) = t$, onde sia t = K, chiaminsi, come nel $(n, ^2 16)$; t', t'', t'', ec, tutti i risultati, che provengono dalla t nguali a K in consequenza delle permutazioni riguardanti il valore particolare delle radici , e si formi con queste una funzione

 $T' = f(t', t'', t'', ec. t^{(e)})$ dotata delle condizioni indicate nel (n.º 20). Giò fatto

1.° Avendosi $T' = t'^{\zeta} + t''^{\zeta} + t''^{\zeta} + \text{ec.} + t^{(e)\zeta}(\text{n. 10}),$ sarà $T' = \alpha K^{\zeta}$, ossia, fatto $\alpha K^{\zeta} = h$, avremo T' = h, essendo h quantità razionale.

2.º Questa funzione T' sarà dotata di tutte le proprietà

indicate nel (n.º 22).

3.º Poichè le permutazioni secondarie non riguardano mai la forma della funzione (n.º 13), ne viene, che la T'pel (3.º n.º 22) non resterà = h per alcuna di simili permutazioni, e quindi non avrà essa che un solo risultato secondario.

4.º Qualunque siasi il numero dei risultati secondarii di valore costante in una data Equazione di relazione; mentre abbian luogo le ipotesi del (n.º 23), dovendosi sul foro aggregato tutte, e sempre contenere le $x', x'', x''', ec. x^{(m)}$, pel (prec. 3.º) dovrà essere T' = f(x')(x'')(x''') ec. $(x^{(m)})$,

5.º Verificandosi ancora nella T'=h la proprietà del $(n.^\circ prec.)$; ne segue, che sotto le varie permutazioni, per cui questa Equazion si conserva, in ciascuno dei Inoglii

cennati dalle parentesi potranno entrare successivamente tut-

te le x', x", x", ec. x(m).

6.º Da quanto abbiam detto si deduce I. che la T' non può giammai esser tale che cambi di valore a qualunque permutazione ; II. che nella permutazione intera per cui la T' si conserva = h devono venir comprese tutte le x', x", x", ec, x(m); III. che questa permutazione non può mai essere solamente o semplice del 2.º genere, o composta del genere 1.º (n. 257, 259, Teor. delle Equaz.); poiche in tutti questi casi non tutti i luoghi della funzione accennati dalle parentesi potrebbero venire occupati da tutte le radici della (A) .

Prendiamo ad esempio la funzione x' x" + x" x" supposta nel (n.º q), e facciamo x' x'' + x''' x''' = t', x'' x''' $+ x^{v''} x^{v'''} = t''$; in questo caso vedesi che (deve essere > 1; poichè se facessimo $\zeta = 1$ ne verrebbe T' = t' + t' = x' x''+ x''' x''' + x'' x''' + x''' x''' = 2 K, funzione, la qualemanterrebbe il valore 2 K per delle permutazioni diverse da quelle, per cui la x' x" + x" x" si mantiene = K. Diasi adunque a ? il valor 2. e risulterà T' = t' + t'' = $(x' x'' + x''' x''')^2 + (x^2 x^{2''} + x^{2'''} x^{2'''})^2 = 2 K^2$, funzione, come vedesi, la quale non mantiene il proprio valore 2 K2 per delle nuove permutazioni. In guesta poi tutte si conterranno le 8 radici x', x", ec. x", non avrà luogo alcun risultato secondario, eseguendo la permutazione per intero vedremo, che ciascun luogo per esempio il primo verrà successivamente occupato da tutte le radici x', x'', x''', ec. x'''', e finalmente la permutazione intera rignarda tutte le 8 radici, e non è nè semplice del genere 2.°, nè composta del 1°., ma composta del 2.º

27. Supponshiamo, che la T' conservi il proprio valore per una permutazione composta del 3.º genere (n.º 259. Teor. delle Equaz.) che due siano le permutazioni componenti Tomo IX. Ppp

482 Della soluzione delle equazioni ecsemplici amendue del genere 1^{α} , che fiatto $m=\alpha+\beta+\gamma$, c (VIII) $T'=f(x')(x'')(x'')\dots(x^{(6)})(x^{(6+1)})(x^{(6+1)})(x^{(6+3)})(x^{(6+3)})(x^{(6+3+1)})\dots(x^{(6+3+1)})(x^{(6+3+1)})$, a prima permutazion componente riguardi le prime $\alpha+\beta$ radici, la seconda le ultime $\beta+\gamma$, onde le β radici

la prima permutazion componente riguardi le prime $\alpha+\beta$ radici , la seconda le ultime $\beta+\gamma$, nonde le β radici , la seconda le ultime $\beta+\gamma$, nonde le β radici $\alpha^{(+)}, \alpha^{(++)}, \alpha^{(++)}, \alpha^{(++)}, \alpha^{(++)}, \alpha^{(++)}$ nonde le β radici queste eseguiscasi pel (n.º 269. Teor. delle Equaz), portando la radice $x^{(++)}$ nell' ultimo luego , e avancando tutte le altre alla sinistra nello stato , in cui si trovano , cosicche si abbia $T = f(x)(x^n)(x^n) \dots (x^{(n)})(x^{(n+)})\dots (x^{(n+)})(x^{(n+)})\dots (x^{(n+)})$

Ciò supposto, io dico, che col mezzo delle due permutazioni accennate potremo sempre far passare ed esistere contemporaneamente negli ultimi y luoghi appartenenti alla seconda permutazione un numero y delle radici x', x', x'',

ec. x(m), qualunque esse siansi.

Chiaminsi $x^{(i+1)}, x^{(i+2)}, x^{(i+3)}$, ec. $x^{(i+3)}$ le γ radici, che si vogliono portare negli ultimi γ luoghi. Prendasi la prima $x^{(i+1)}$, ed esista essa tra le $\alpha + \beta$ radici della permutazione prima: poichè per essere tale permutazione semplice del i. genere, possiamo, replicando la medesima successivamente, condurre la $x^{(i+1)}$ in quello qualunque dei primi $\alpha + \beta$ luoghi, che a noi più piace (n. 262. Teor. del·le Equa:); conduciamola nel luogo $\alpha + i$ esimo, ove cioè nel risultato (VIII) esiste la $\alpha^{(i+1)}$ e ciò fatto si eseguisca la permutazione seconda; per essa ne verrà un risultato, che dirò T i il quale sarà = T, e conterrà evidentemente la $\alpha^{(i+1)}$ e lui limi luogo. Esista nel risultato T il a $x^{(i+4)}$ tra le prime $\alpha + \beta$ radici; replico in esso, come di sopra, la prima permutazione, finche questa $x^{(i+3)}$ giunga al luogo $\alpha + i$

x + resimo, e allora replico la permutazione seconda; ne pascerà un risultato T' 2 = T' 1 = T', il quale è chiaro, che conterrà la x(\$+1) nel luogo ultimo , e la x(\$+1) nell'antepenultimo . Farò l' operazione medesima riguardo alla $x^{(l+3)}$, se questa pure esiste in T'2 tra le prime $\alpha + \beta$ radici , e ci verrà egualmente un risultato T' 3 avente nell' ultimo luogo la x(3+3), nel penultimo la x(3+1), e nell' antepenultimo la x(F+1). Seguitando ad operare nella stessa guisa, se nei primi α + β luoghi dei successivi risultati T'3, T'4, ec. T' $(\gamma - \epsilon - 1)$ yanno esistendo le radici $x^{(\ell+4)}, x^{(\ell+5)}$ ec. x (1+7-1) vedesi, che otterremo in fine un risultato T' (v - 1), il quale conterrà negli ultimi v - 1 luoghi le radici x(\$+1), x(\$+2), ec. x(\$+\gamma-1)

Supponghiamo ora, che in T' $(\gamma - \epsilon)$ esista la $x^{(l+\gamma-\epsilon+1)}$ tra le ultime > radici della permutazione seconda; in questa ipotesi replico tale seconda permutazione, finchè la x(3+7-++1) venga ad occupare il luogo indicato dal numero α + β; allora mediante la permutazione prima porto la radice medesima fuori di questo in uno qualsivoglia dei luoghi 1.º, 2.º, ec. « esimo , e chiamo T' ($\gamma - i + 1$) il risultato , che ne deriva. Poiche nel portare la x(1+γ-+1) nel luogo α + βesimo, la permutazione seconda à portate negli ultimi luoghi delle radici diverse dalle $x^{(\delta+1)}$, $x^{(\delta+1)}$, ec. $x^{(\delta+\gamma-1)}$, ripeto nella funzione T' (v - ++ 1) la permutazione medesima, finchè tutte queste radici escano dai luoghi ultimi, e vi tornino le $x^{(l+1)}, x^{(l+2)}$, ec. $x^{(l+\gamma-s)}$, il che, è manifesto, che potrà sempre farsi. Ciò ottenuto, e chiamato T" (y-++1) il risultato, avremo in questo la $x^{(\beta+\gamma-s+1)}$ tra le prime $\alpha+\beta$ radici; dunque potrò toglierla, e condurla nell' ultimo luogo, come ho fatto di sopra delle altre x(f+1), x(f+2), ec. x(1+y-1); il risultato, che ne viene, chiamato T''' (y-1+1) Ppp 2

o contiene la $x^{(k+p-r+2)}$ tra le radici della prima, o tra quelle della seconda permutazione ; se esiste tra le ultime γ di quest' ultima, operando rapporto ad essa, come ho fatto riguardo alla $x^{(k+p-r+1)}$, la porto tra le prime x radici della permutazione prima, e trovato in seguito un risultato, $x^{(k+p-r+1)}$, ec. $x^{(k+p-r+1)}$, operando si questo nella solita maniera, faccio passare la $x^{(k+p-r+1)}$ nel luogo ultimo della funzione. Ora lo stesso si può praticare riguardo a tutte le altre radici $x^{(k+p-r+1)}$, $x^{(k+p-r+1)}$, $x^{(k+p-r+1)}$, $x^{(k+p-r+1)}$, $x^{(k+p-r+1)}$, il quale sarà = T, e il quale negli ultimi y luoghi tutte conterrà le radici $x^{(k+p)}$, $x^{(k+p)}$, Dunque ec. $x^{(k+p)}$). Dunque ec. $x^{(k+p)}$). Dunque ec. $x^{(k+p)}$.

Per maggiore facilità ho supposto, che la seconda permutazione si eseguisca portando la radice x^(a+1) nel luogo ultimo, e portando le altre tutte come si trovano verso la sinistra; il Teorema però ha luogo ancora che la permutazione seconda si eseguisca diversamente, e la dimostrazione ne

è la medesima.

Sia per esempio m = 9, $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, T' = f'(x')(x''), (x'')(x'')(x''), (x'')(x''')(x'''); per la prima permutazion componente sia

 $T' = f(x^{v})(x), (x'')(x''')(x'^{v}), (x^{v})(x^{v''})(x^{v''})(x'^{v})$

e per la seconda

T'=f(x')(x''), (x''')(x''')(x'''), (x''')(x'''')(x''''), e voglansi negli ultimi quattro luoghi della seconda permutazione portare le quattro rudici x', x'', x''', x''', x'''. Esistendo la x' tra le radici della prima permutazione, ed avendosi nel nostro esempio x''+1=x+1=3 porto nella terza classe, ossia luogo, questa radice, ed al risultato, che ne viene, f(x'')(x''), (x')(x'')(x''), (x'')(x'''), (x'''), (x''') applico la permutazione seconda, otterremo così T'=f(x''')(x''')(x'''), (x'''')(x''''), (x'''')(x'''')

In T 1 la x^{ω} esiste tra le radici della permutazion prima, la porto adunque col mezzo di questa uel terzo luggo, faccio sul risultato $f(x^{\omega})(x^{\omega}), (x^{\omega})(x^{\omega}), (x^{\omega}), (x^{\omega}), (x^{\omega}), (x^{\omega})$ la seconda permutazione, e ci verrà

T = f(x'') (x''), (x'') (x''), (x'''), (x''') (x') (x'')La x'''' in T' a è posta tra le dime quattro radici, ma non opportunamente; mediante adunque la permutazione seconda trasporto la x'''' nella quinta classe: nel risultato, che ne decire.

 $f(x')(x''), (x^{0})(x^{0''})(x^{0''}), (x'^{s})(x')(x'^{0})$

faccio passare tale radice in uno dei primi due luoghi, quindi nel risultato

 $T' = f(x^{w'})(x^{w''}), (x'')(x''')(x^{w}), (x'')(x'')(x''')$ tolgo dall' ultimo luogo la x''', onde avere

 $T^{"}3 = f(x^{"}) (x^{"})^{"}, (x^{"}) (x'') (x''), (x^{"}) (x''), (x'') (x''),$ e condotta in $T^{"}3$ la $x^{"}$ nella terza classe, rinovo la permutazione seconda : avremo in tal modo $T^{"}3 = f(x'') (x^{"}), (x'') (x''), (x'') (x''), (x''')$

Finalmente la z" essendo tra le cinque radici della prima permutazione, eseguisco sopra T"3 le prime operazioni, e pel risultato richiesto otterremo

 $T' A = f(x^{w_i})(x^w), (x^w)(x^{w_i})(x'^w), (x')(x^w)(x^{w_i}),$ ove infati si vede, che negli ultimi quattro luoghi sono state portate, ed esistono contemporaneamente le quattro radici x', x'', x''', x''', x''

28. Sia $m = \alpha + \beta + \gamma + \beta + \epsilon$, e sia (IX) $T = f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\alpha)}), (x^{(\alpha+\beta)}) \dots (x^{(\alpha+\beta)}), (x^{(\alpha+\beta+\gamma)}) \dots (x^{(\alpha+\beta+\gamma)}), (x^{(\alpha+\beta+\gamma+1)}) \dots (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\beta)}), (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\beta+\gamma+\beta)}), (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\beta+\gamma+\beta)}) \dots (x^{(\alpha+\beta+\gamma+\beta+\gamma+\beta)})$ Se la T mantienè il proprio valore per una permutazione composta del 3°, genere, dove tre siano le componenti, semplici tutte e tre del 1°. genere, la prima tra le prime $\alpha + \beta$ radici α seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le $\beta + \gamma + \beta$ radici α set β seconda tra le β

x(x+\$+x+x) ec. x(x+\$+x+\$+x); applicando a questo caso il precedente discorso, vedremo, che col mezzo delle supposte permutazioni potrò far venire negli ultimi > + I luoghi della permutazione seconda un numero y + 8 delle m radici x', x", x", ec. x'm), qualunque esse siansi, che potrò farne passare un numero > + 8 + 1 negli ultimi > + 8 + 1 luoghi delle due permutazioni seconda, e terza, ed un numero s negli ultimi s luoghi dell' ultima permutazione. Difatti che possiamo far venire negli ultimi > + & luoghi della permutazione seconda un numero y + 8 delle prime radici x', x", ec. x(4+6+7+3), questo il sappiamo dal Teorema precedente: che poi si possano far entrare nei > + 8 lucghi medesimi + J delle radici ulteriori x(x+3+x+5+1) x(x+3+x+5+1) ciò apparisce dal riflettere, che queste radici possonsi condurre mediante le ultime due permutazioni dalle classi dell' ultima nelle classi della penultima, e in seguito col mezzo delle permutazioni prima e seconda dalle classi di questa alle classi della prima. Anzi questa riflessione medesima quella si è, che unita al precedente Teorema ci fa conoscere la verità di quanto abbiamo ora asserito in tutta la sua estensione.

Lo stesso si dice se le permutazioni componenti siano quattro, cinque, ec.

29. Vogliasi dipendentemente dalla T = h il valore

della radice x'.

1.º Potendo la T conservare il valore h per delle permutazioni diverse, tutte però primitiva apparenenti a tutte le m radici $x', x'', x'', x'', c.c., x^{(m)}$, e riguardanti la forma della funzione (2.º, 3.º, 4.º, 5.º n.º 26); cominciamo dal supporre, che la permutazione, per cui si mantiene un tal valore h, sia semplice del 1.º genere, cosicchè si abbia pel (n.º 269. Teor. delle Equaz.)

 $T' = f(x)(x')(x'') \dots (x'^{(m-1)})(x^{(m)}) = f(x')$

 $f(x'')(x''')(x''')\dots(x''')\dots(x''')$ Per la natura delle permutazioni semplici del 1.º genere il luogo nella T' occupato dalla x' viene nei successivi risultati occupato da cadauna delle x", x", ec. x una sola volta (n.º 262. Teor. delle Equaz., 5.º .º 26). Ora abbiamo $x' = x' + o (x'' x''' \dots x^{(m-1)} x^{(m)}), e i valori di que$ sta funzione corrispondenti ai risultati della T' sono i seguenti $x' + o(x'' x''' \dots x^{(m-1)} x^{(m)}) = x', x'' + o(x'' x''' \dots x^{(m)} x')$ = x'', x''' + o(x''' x'' ... x' x'') = x''', ec. Dunque nonpotendo questi tutti per la supposta uguaglianza fra i risultati della T', che dipendere in egual modo dalla T' = h: ne segue, che essi medesimi, e però le m radici x', x", x", ec. x(m) dovranno dipendentemente dall'accennata T' = h restar collegate tutte insieme in una sola Equazione di grado m; e questa si vede, altro non essere che la data (A). Dunque questa prima supposizione non potrà da se sola servire alla richiesta determinazione della x'.

Pel (1.° n.° 10) lo stesso pienamente si dice, e si ottiene se abbiasi $T = f(x', x'', x''', \dots x^{(m)}) = h$.

a.º I. Poichè la permutazione, per cui la T' conserva il valor h non può essere nè semplice del 2.º genere, nè composta del 1.º (6.º n.º a6); supponghiamola composta del genere a.º, e fatto per maggiore chiarezza. m=12 sia per esempio T' = $[f(x')(x'')(x'')]^2 + [f(x'')(x'''), (x'')]^2 + [f(x'')(x''')]^2 = h$, supponendo che ciasenna delle funzioni componenti conservi il proprio valore per una medesima permutazione semplice del 1.º genere fra le tre radici, che vi si contengono.

Fra le radici della $[f(x)(x')(x')]^2$ esiste la x', e questa funzione per la ipotesi mantiene il proprio valore per una permuttazione sempluce del genere ι^* : dunque cercando dalla T = h il valore di essa x', vedremo, come nel (ι^*) prec.), che si dovrà in conseguenza della funzione

[f(x')(x")(x")] necessariamente cadere in un' Equazione di grado 3.°, che supporrò essere la $x^3 + t x^9 + z x + u = 0$; Equazione nella quale l'ultimo coefficiente u essendo $= -x'x''x''' = -(x'x''x''' + ox'^ox^ox^o' + ox^{o''}x^{o''}x'''$ + ox x x x x x, non cambierà di valore per la permutazione che riguarda cadauna delle funzioni componenti considerata da se. Ora eseguendo nella T', e nella u la permutazione, per cui una delle funzioni componenti si cambia nell'altra, mentre che la T' conserva sempre il proprio valore, la u acquista i gnattro valori fra loro diversi u'=-x'x"x", u"=-x'xxx", $u''' = -x^{v''} x^{v''} x'^s$, $u'^v = -x^s x^{s'} x^{s''}$. Dunque la u dipenderà da un' Equazione $u^5 + a u^3 + b u^4 + cu + d = 0$. in cui ciascun coefficiente essendo = f (u', u", u", u"). avrà un solo valore dipendentemente dalla supposta T' = h. e però sarà da lei indeterminabile per un' Equazione di primo grado .

II. Vogliasi che la T' si mantenga = h per una permutazione composta del 2.º genere, e in essa la prima permutazion componente sia semplice del genere 2.º, o composta del 1.°, come nella ipotesi, che essendo m=8, la T'=h divenga riguardo alla permutazion semplice del 2.º genere . $\left(\frac{x''x'''}{x'''} + \frac{x'''x'''}{x'}\right)\left(\frac{x'''x'''}{x''''} + \frac{x''''x''''}{x'''}\right) = h.$

In questo caso conservando la $\frac{x'}{a''y} + \frac{x''y}{a''}$ il proprio

valore solamente per la permutazione simultanea della a nella x", e della x" nella x", ne segue, che il luogo occupato dalla x' non può venire occupato nè dalla x", nè dalla x"; ma ciò è contro del (6.º n.º 26); e quello, che abbiamo ora detto della permutazione semplice del 2.º genere, dicesi egualmente della composta del 1.º Dunque la supposizione fatta non potrà aver luogo nella nostra T'.

III. Sia la prima permutazion componente essa pure composta del genere 2.º, e sia per esempio

$$\begin{split} \mathbf{T} &= (\mathbf{x}'x'' + \mathbf{x}''x''' + \mathbf{x}''x''')^{\frac{1}{2}} + (\mathbf{x}''x'''' + \mathbf{x}''x'' + \mathbf{x}'''x''')^{\frac{1}{2}} = h \,. \\ \text{Da quanto abbiamo detto vedesi facilmente, che la } \mathbf{x}' \text{ verm} \\ \mathbf{a} \text{ dipendere da un'} \text{ Equazione } \mathbf{x}^3 + p \, \mathbf{x} + q = \mathbf{c} \,, \text{ in cni il coefficiente } q \text{ potendo avere-i valori } \mathbf{x}' \mathbf{x}', \mathbf{x}'''x'', \mathbf{x}''x'', \text{ sarà radice di un' altra } \mathbf{q}^3 + t \, \mathbf{q}^3 + \mathbf{z} \, \mathbf{q} + \mathbf{u} = \mathbf{c} \,, \text{ il coefficiente } \mathbf{u} \text{ della quale dipenderà da una terza } \mathbf{u}^4 + a\mathbf{u} + b = \mathbf{c} \\ \text{determinable razionalmente dalla } \mathbf{T} = h \,, \mathbf{c} \text{ avente per radici le } \mathbf{u} = \mathbf{x}' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'', \mathbf{u}'' = \mathbf{x}'' \mathbf{x}''' \mathbf{x}'' \mathbf{x}'' \mathbf{x}''' \mathbf{x}'''' \mathbf{x}'''' \mathbf{x}''''''}. \end{split}$$

IV. Supponghiamo in generale pel (3.° n.° 3. Teor, delle Equaz.) (F) $T' = f[f(x')(x'')(x''') \dots (x^{(\mu)})] \cdot [f(x^{(\mu)})(x^{(\mu+2)})(x^{(\mu+3)}) \dots (x^{2\mu)}].$ $f(x^{(1\mu+1)}, (x^{(1\mu+2)}, (x^{(1\mu+3)}, ..., (x^{(3\mu)})], ..., 1 = h, e size$ f(x')(x'')(x''), ... $(x'^{\mu}) = f[(f(x')(x'')...(x^{(\kappa)})]$. $[f(x^{(n+1)})(x^{(n+2)})...(x^{(2n)})], [f(x^{(2n+1)})(x^{(2n+1)})...(x^{(2n)})]...],$ $f(x')(x'') \dots (x^{(n)}) = f[(f(x) \dots (x^{(n)})],$ $[f(x^{(\beta+1)})...(x^{(2\beta)})], [f(x^{(2\beta+1)})...(x^{(2\beta)})]...].$ In conseguenza di quest' ultima riga, cercando dalla T = h il valore x', formerò l'Equazione $x^{\ell} + g x^{\ell-1} + ec. + l = 0$. Essendo $t = \pm x' \cdot \dots \cdot x^{(3)}$, questo coefficiente avrà tanti valori, quante sono le $f(x)...(x^{(6)}), f(x^{(3+1)})...(x^{(23)}), ec.;$ supposto adunque essere queste funzioni di numero #, la quantità l'avrà m valori, e sarà quindi radice di un' Equazione $l^{\pi} + p l^{\pi-1} + ec. + q = 0$; il coefficiente $q = \pm$ I' I' I(x) avrà evidentemente tanti valori, quante sono le f(x') (x') $(x^{(a)})$, ec. della seconda riga . Dunque se , ci esprime il numero di somiglianti funzioni , la q dipenderà da un' Equazione $q' + tq'^{-1} + ec. + u = c$, il coefficiente a della quale sarà radice di un' altra avente un tanto grado, che chiamerò n, quante sono le funzioni componenti nella prima riga, cioè dell' Equazione u" + au"-1 + bu + ec. = o; quest' ultima poi sarà determinabile razionalmente dalla T' = h.

Tomo IX. Qqq Ot-

Ottenuta così l' Equazione in u razionale, la risolvo ; dal valore u' determino i valori corrispondenti dei coefficienti t, cc., che appartengono all' Equazione penultima, cioè alla $q' + t q^{-t-1} + ec. + u = c$, sostituisco questi già determinati in essa Equazione, la sciolgo , e dal valore q' trov oi l'valore di tutti i coefficienti dell'Equazione antepenultima, cioè della Equazione in l, sostituisco questi pure , sciolgo tale Equazione, e dal valore l determinati i coefficienti g', ec., la soluzione finalmente della x'' + g'x''' + cc. + l' = c ci darà il domandato valore della x'.

Se il numero delle precedenti righe è diverso dal tre, con metodo uguale potremo sempre giungere ad avere il va-

lore della x' .

V. Che se la f(x') (x'') (x'') . . . $(x^{(u)})$ conserva il proprio valore per una permutazione qualunque diversa dalla composta del 2, genere, allora supporto l' Equazione $x^u + tx^{u-1} + ec. + u = o$, ed il coefficiente u dipenderà da un' Equazione razionale $u'' + a u'''^{-1} + b u''^{-2} + cc. = o$. La stessa supposizione , e lo stesso metodo vedesì, che hamo luogo eziandio nel caso che la f(x') (x') (x'') . . . $(x^{(u)})$ conservi il proprio valore per una permutazione composta del a, genere ; ma il metodo precedente ci da il valore del la x' con Equazioni del lunior grado possibile.

VI. Avvertasi che, mentre la T conserva il proprio valore per una permutazione composta del genere \mathbf{a}^* , quelle radici, le quali entrano in una delle funzioni componenti, non possono entrare nelle altre. Se la \mathbf{x}^* , la quale nella \mathbf{r}^* centra nella prima funzion componente $f(x^*)(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^*)$... $(\mathbf{x}^{(a)})$, entrasse ancora nella seconda , cosicche questa seconda fosse $f(\mathbf{x}^*)$ ($\mathbf{x}^{(a+2)}$) $(\mathbf{x}^{(a+2)})$... $(\mathbf{x}^{(a)})$; allora contenendosi la \mathbf{x}^* in alcune, $\mathbf{0}$ in tutte le permutazioni, che riguardano fa seconda di tali funzioni; ne verrebbe che una delle radici, le

quali appartengono ad una permutuzione componente, entrerebbe ancora tra le radici di altre, e quindi la T manterrebbe il proprio valore per una permutazione composta non più del a.º, ma del 3.º genere (n.º 259. Teor. delle Equaz.) contro la supposizione. In conseguenza di ciò la (F) ci esprimerà in generale la forma della T, allorche questa funzione rimane = h sotto una permutazione composta del genere a.º

(X) $x^{\alpha+\beta} + n x^{\alpha+\beta-1} + \text{ec.} + q = 0$,

di eni saranno radici le x', x'', x''', ec. $x^{(a)}$, $x^{(a+b)}$, e di eni bisogna determinare i coefficienti. Preso perciò l' ultimo $g=\pm x''x''x''' \dots x^{(a+b)}$, io dico che cercandone il valore dipendentemente dalla supposta T=h caderemo necessiramente in un' Equazione di tanto grado, quante sono le combinazioni ad $\alpha \mapsto \beta$ ad $\alpha \mapsto \beta$ di tutte

le m quantità x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, cioè, supposto $m(m-1)(m-2),...,(m-(\alpha+\beta-1))$

 $\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(\alpha+\beta-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \dots (\alpha+\beta)} = \rho, \text{ in un' Equazione}$

(XI) $q^{p} + e q^{p-1} + ec. + g = 0$,

le radici della quale saranno tutti i ρ prodotti $\pm x' x''' x''' \dots$ $= x^{(e+\beta)} \pm x' x'' x''' \dots x^{(e+\beta+1)}, \pm x' x'' x''' \dots x^{(e+\beta+2)}, \text{ ec.}$ $+ y^{(e+1)} y^{(e+2)} y^{(e+3)} \dots y^{(e+\beta+2)}$

Qqq 2

Prendiamo di fatti uno qualsivoglia di questi prodotti, per esempio l'ultimo, che può dirsi generale, e osserviamo quali in esso mancano delle m radici w', x", x", ec. x(m); veggo, che vi mancano le x', x", x", ec. x(s), x(e+x+β+1) $x^{(a+a+\beta+z)}$, ec. $x^{(m)}$, e veggo che a cagione di essere $q=\pm$ $x' x'' x''' \dots x^{(n+\beta)}$, e di essere $m = \alpha + \beta + \gamma$, le radici mancanti son di numero y. Ciò dunque essendo, trovo giusta il (n.º 27) dalla T' un risultato T' (ω), il quale contenga le x', x', cc. x') x(+++++1) x(+++++1) ec. x(m) negli ultimi , luoghi; esso conterrà nei primi a + & le radiei x(+1), x(+1), x(+1), ec. x(+4), e pel citato (n.º 27) sarà identico con T'. Dunque il prodotto $\pm x^{(i+1)} x^{(i+2)} x^{(i+3)}$... x (1+x+8), quello essendo tra i valori della q che dipende da T' (w), dipenderà ancora in egual modo da T', e quindi sarà una radice della g' + e g'''' + ec. + g = o. Ora ciocche si è detto di tal prodotto, dicesi egualmente di tutti gli altri, che si possono fare con tutte le x', x", x", ec. $x^{(m)}$ prese ad $\alpha + \beta$ ad $\alpha + \beta$. Dunque ec.

Pertanto sapendosi, che l'esponente ρ della Equazione in q non può giammai essere < m, concluderemo, che la T = h nella supposizione ora fatta non potrà servirci mai da se sola alla determinazione della x', qualunque valore si at-

tribuisca ai numeri a, β, γ,

II. Siano tre le componenti della nostra permutazione re, cd espressa la T'siccome in (IX), la prima di queste appartenga alle prime $\alpha+\beta$ radici, la seconda alle $\beta+\gamma+\beta$ radici di mezzo, e la terza alie ultime $\beta+z$ rel modo sisteso, che abbiam supposto nel $(n^{\alpha}, 2\gamma)$. Pel $(1, 3^{\alpha})$ la α in conseguenza della prima permutazione componente dipenderà qui pine da un'Equazione (X), il coefficiente q della quale a cagione della permutazione seconda sarà radice di un'

un' altra (XI), in cui l'esponente ρ uguagliando il numero delle combinazioni ad $\alpha + \beta$ ad $\alpha + \beta$ delle radici tutte appartenenti alle prime due permutazioni sarà

 $= \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-1)(\alpha+\beta+\gamma+\delta-2)\cdots(\gamma+\delta+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot (\alpha+\beta)},$

e l'ultimo coefficiente g essendo = ± q' q'' q''' . . . q') sarà

 $= \pm \left(x' x'' x''' \dots x^{(a+\beta+\gamma+1)} \right), \text{ supposto}$

 $\sigma = \frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 1)(\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2) \cdots (\gamma + \delta + 1)}{1 \cdot (\alpha + \beta - 1)}$

Ora cercando dalla T'=h il valore del coefficiente g, con raziocinio uguale a quello che abbiam fatto nel (prec. I) per la determinazione del cofficiente q, si trova che in conseguenza della permutazione terza deve esso g dipendere da un' Equazione

(XII) $g^{\tau} + b g^{\tau-1} + ec. + d = 0$ avente l'esponente $\tau = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-(z+\beta+y+\delta-1)}{1, 2, 3, \dots, (z+\beta+\lambda+\delta)}$

Dunque non potendo mai risultare $\tau < m$, neppure la supposizione presente potrà da se sola essere atta alla determinazione della x'.

La stessa conseguenza con raziocinii uguali ricavasi, se le permutazioni componenti del 1.º genere siano quattro, cinque, ec.

III. Qualunque siansi le componenti della permutazione ora supposta, poiché esse sono sempre o semplici del 1.º genere per se medesime, o formate da tante semplici del genere istesso (n. 458, 259. Teor. delle Equaz.), potremo sempre supporre, che le componenti di tale permutazione siano infine semplici tutte del genere, le Ora il genere della permutazione supposta essendo il 3.º, le radici di una delle componenti debbono potersi frammischiare con quelle di un'altra, e pel (5.º n.º 26) in ciascuna delle classi della funzione T'debbono poter entrare successivamente tutte le ra-

dici x', x'', x''. ec. $x^{(n)}$, senza che si cambi il suo valore h. Dunque , supposto $\alpha+\beta+\gamma+J+\epsilon$ c. =m, potremo sempre considerare, che l' espressione (IX) ci ranppresenti la nostra T', e che tanto la prima delle permutazioni spettante alle radici x', x'', x'', ec. $x^{(r+\theta)}$, quanto la seconda appartenente alle $x^{(r+\theta)}$, $x^{(r+\phi)}$, ec. $x^{(r+\theta)+\beta}$, ec. os le altre successive sinno uttte semplici del 1.º genere; ma in conseguenza di simile considerazione questo caso riducesi al (prec. II). Dunque concluderemo , che , se la T conserva il proprio valore per una permutazione composta del genere 3.º , qualunque siansi le sue componenti, non potremo giammai dipendentemente dalla sola T'=h determinare il valore domandato della x'.

Dunque il nostro Problema non ammette soluzione, se non nel caso a.º; non potremo cioè ritrovare il valore della radice a' in conseguenza della sola T'=h, se non quando la T' conserva il proprio valore per una permutazione compo-

sta del 2.º genere.

3c. Giacchè non possiamo ottenere nei casi (1.°, e 3.°
n.° prec.) il valore della x' dalla T = k, cercandolo immediatamente, veggiamo, se si possa ottenere mediante una muova funzione tra le x', x', x'', ec. che supporrò essere \(\psi(x)'(x'')\) ... Chiamata y questa nuova funzione, converrà dunque cercare in primo luogo il valore della y dalla T = k, e in seguito da questa dedurre il valore della x'. Ora o si vuole altre non essere tale funzione, se non se il primo membro della (B), oppure della (C), o si vuole da esse diversa. Nel primo di questi due casi, tanto se esprimesi il primo membro della (B), oppure della (C), o il vuole da esse diversa. Nel primo di questi due casi, tanto se esprimesi il primo membro della (B), quanto quello della (E), la determinazione della y dalla T = h dipendera dalla soluzione di un' Equazione di 1.º grado, ma pei (n° 12, ° n° 2a) ne la (B) ne la (E) così determinate possone essere più opportune della T = h alla determinazione della

z'. Dunque questa prima supposizione non ci recherà alcun vantaggio per isciogliere il Problema del (n.º prec.)

Sia la y funzione diversa dai primi membri delle (B). (E). In tale ipotesi può questa mantenere il proprio valore per una, o più di quelle permutazioni componenti (I. II. III. caso 3.°), sotto cui mantiene il proprio la T', e può cangiarlo ad una qualsivoglia di simili permutazioni. Ora supposto che a norma del (II., e III. caso 3.º) la (IX) ci esprima la T', se la y conserva il suo valore solamente per la prima permutazion componente tra le prime a + \$ radici . la sua determinazione dalla T' = h è chiaro, non poter risultare più semplice della determinazione dalla stessa T'= h del precedente coefficiente q (caso 3.º) : se essa y non mutasi di valore per amendue le permutazioni componenti, che nella T' riguardano le prime α + β + γ + δ radici; allora tale funzione non potrà venire determinata per Equazioni di grado inferiore a quello, per cui si determina il precedente coefficiente g (II. caso 3.º), e così in progresso. Dunque risultando di un grado sempre troppo alto le Equazioni ultime, per cui nel (caso 3.º) si determinano le quantità q, g, ec., vedesi, che ancora la supposta y verrà a dipendere da Equazioni di troppo alto grado, e quindi che sarà dipendentemente dalla T' = h indeterminabile .

Che se la y vogliasi tale, che conservi il proprio valore per tutte le permutazioni , per cui la T si mantiene = h; allora la y sarà determinabile dalla T' = h col mezzo di un' Equazione di i.º grado: ma altro questo non essendo, che uno dei casi rappresentati dalla (E), o dalla (B), ne segue , che quanto abbiam detto poe' anzi della ricerca della x' dipendentemente dalle (E), (B), dicesi egualmente della ricerca medesima dalla y ora supposta .

Se la y è indeterminabile, allorchè conserva il proprio velore per una, o alcune delle permutazioni considerate di sopra, molto più lo sarà, se per simili permutazioni cangiasi sempre di valore; quest' ultima condizione aumentando il numero dei risultati della y fra loro diversi, che corrispondono ai varii risultati della T fra loro uguali, non potrà che

renderne meno facile la determinazione .

Potrebbe la v rappresentare quella funzione, che abbiam considerata nel (n.º 4) = K irrazionale, e da cui abbiam dedotta l' Equazione (I) avente il secondo membro H razionale. Se si cercasse questa y dalla (1), pel cit.º (n.º 4) s' incorrerebbe a dovere sciogliere l' Equazione (II); ma essa (I) altro non è che la (B), in cui K è quantità razionale (n.º 4); e d' altronde cercando dalla T' = h una data funzione qualunque, pel (5.º n.º 22) non si deve mai cadere a sciogliere Equazione di grado maggiore di quello. che di risulterebbe, cercando la funzione medesima dalla (B), ossia dalla (I). Dunque allorchè cerchiamo la nostra y dalla T' = h, non ci potrà per essa risultare Equazione di grado più alto del grado della (II); ma per quanto abbiam detto poc' anzi, allorchè la T' si mantiene = h per una permutazione composta del 3.º genere, la determinazione dalla T = h di una qualsivoglia funzione y viene sempre a dipendere dalla soluzione di un' Equazione di grado non < m : dunque nella supposizione fatta l'esponente della (II) sara essenzialmente non < m. e quindi essendo indeterminabile la $y' = f(x')(x'')(x''')\dots(x^{(N)}) = K$, in cui K è quantità irrazionale (n.º 4), pel (n.º 3) sarà ancora dipendentemente dalla y ora supposta inabbassabile la (A).

Quanto abbiamo detto presentemente, supponendo la \mathbb{T} conservarsi = h per una permutazione composta del 3.° genere, dicesì in egual modo, allorche la \mathbb{T} si mantiene = h per una permutazione semplice del 1.° genere. Dunque ogni qualvolta la x' è indeterminabile dalla $\mathbb{T} = h$, mentre se ne cerca il valore immediatamente, ne sarà indeterminabile ani cora, mentre se ne cerca il valore dipendentemente da un'

altra funzione .

31. Pertanto concluderemo, che il Problema del (n. 29)

non à solubile dipendentemente dalla sola T' = h. e però dalla (B), se non nel (caso 2.º n.º 29), cioè mentre la T' conservasi = h per una permutazione composta del 2,º genere; e simile soluzione si avrà risolvendo col metodo colà indicato le Equazioni successivamente ottenute, in ciascuna delle quali l'esponente per la natura delle permutazioni composte del genere 2.°, e pel (VI, caso 2.º n.º 29) vedesi facilmente dover essere < m . e > 1. L'ultima poi di tali Equazioni, cioe la u" + au"+ + ee. = o sappiamo essere razionale, avere l'esponente n uguale al numero delle funzioni componenti la nostra T', e l'incognita $u = \pm x' x'' x''' \dots x^{(\mu)}$.

Si potrebbe bensi ancora in questo (caso 2.º n.º 20) cercare il valore della x' mediante una nuova funzione y, come abbiamo accennato nel (n.º 30) rapporto al (caso 3.º); ma è facile a vedersi, che neppur quivi l' Equazione in y potrebbe risultare di grado inferiore al grado di quelle che abbiamo determinate nel (caso 2.º n.º 29), e però che quest'artifizio quantunque potesse riuscire opportuno, pure non ci apporterebbe alcun vantaggio nella soluzione del nostro Problema.

32. Prendendo anovamente a considerare il (caso 3.º n.º 29), non potrebbe egli darsi, che le Equazioni in q (I. caso 3.°) in g (II. caso 3.°), in y (n.° 30) risultate di grado non < m fossero riducibili ad altre di grado < m. la sotuzion delle quali potesse poi somministrarci il valore corrispondentemente delle q, g, y? Se questo succede, io dico, che dovra esistere un'altra Equazione di relazione tra le x', x", x", ec. x(m), la quale conservandosi tale per una permutazione composta del 2.º genere, potrà somministrarci la soluzione del nostro Problema indipendentemente dalla T = h, col metodo istesso del (caso 2.º n.º 29).

Supponghiamo difatti, che tra le Equazioni sovraccennate la (XI) del (I, caso 3,º n.º 29) sia riducibile ad altra Tomo IX. Rrr

opportuna alla sua soluzione di un grado che chiamerò c, grado per conseguenza, il quale dovrà essere < m, e > 1. Da quanto abbiam veduto finora sappiamo, che una tal riduzione non potrà accadere che dipendentemente da un rapporto particolare fra le q', q', q'' ec. q^{f_0} , il quale , eseguiti raziocinii, e i calcoli percedenti, potrà ridunsi ad un' Eqnazione T'' = l corrispondente alla T = h, e dottat di tutte le proprietà indicate nel $(n^2$ af). Ora per la ipotesi la (XI) è abbassabile ad altra Equazione di grado < m, e > 1, da cui possiamo in seguito ritrarre il valore della q, e > 1, da cui possiamo in seguito ritrarre il valore della q, e ciò dipendentemente dalla T'' = L' dunque la T'' pel (n, pec.) non potrà conservare il valore l che per una permutazione composta del 2. l genere, e dovrà perciò casere $T'' = f(q(q'')(q'') - (q^{(e)})][f(q^{(e+1)})(q^{(e+2)}) - (q^{(e+2)})]$, $f(q^{(e+2)})(q^{(e+3)})(q^{(e+3)})$.

 $[f(q^{(p-(a-1))}(q^{(p-(a-1))})(q^{(p-(a-3))})\dots(q^{(p)})]=t.$

Cerchiamo con le q', q', q'', oc. q'^0 dalla T' = l una nuova Equazione di rapporto, operando giusta il $(n^e, 6)$, e e sia questa la $F(q)(q')(q'') \cdots (q'^0) = L$. Tale Equazione, contenendo le a quantità q', q', q'', ec. q'^0 , avrà evidentemente tanti risultati secondarii = L, quante sono le funzioni componenti della T', cioè un numero e, e chiamati Q, Q', Q'' ec. Q^{00} simili risultati, avrenno

math Q, Q, Q c. Q similar instance, where $Q = F(q')(q'')(q''') \dots (q^{(a')}), Q'' = F(p^{(a+1)})(q'^{(a+1)})(q'^{(a+1)}), \dots (q^{(a)}),$ c. Q c. On pel $(I, \cos 3, 3, n, 2, a_2)$ $q' = \pm x' x'' x'' \dots x^{(a+\beta)}, q'' = \pm x' x'' x'' \dots x^{(a+\beta+1)}, q'' = \pm x' x'' x'' \dots x^{(a+\beta+1)},$ c. Dunque sostituendo nella Q' questi valori, otterremo

 (x(s)), ed X ciocchè diventa Q per la sostituzione fatta. ed n il numero delle radici della (A), che entrano nella X. Per eseguire una permutazione qualunque nella X è manifesto, che basta eseguirla in ciascuna delle funzioni sue componenti $\pm x'x''x''' \dots x^{(\alpha+\beta)}, \pm x'x''x''' \dots$ $x^{(\alpha+\beta+1)}, x'x''x'' \dots x^{(r+\beta+2)}$, ec.; ma le diverse permutazioni effettuate in questi prodotti non fanno che somministrarci i diversi valori della q. Dunque i varii risultati, che nascono dalla X per le varie permutazioni fra le x', x", x", ec. saranno uguali ai risultati che si hanno dalla Q per le permutazioni corrispondenti fra le q', q", q", ec., e però, futte nella X le permutazioni , che corrispondono ai valori precedenti Q', Q", Q", ec. Q(e), e chiamatine X', X", X", ec. X's) i risultati, avremo X' = Q', X" = Q", X" = Q", ec. $X^{(0)} = Q^{(0)}$, ed avremo $X' = X'' = X''' = ec. = X^{(0)} = L$. Ora osservando il valore dell'esponente p (I. caso 3,º n.º 29), vedesi, che la (XI) è quella Equazione medesima, che si ottiene dalla (A), mentre se ne cerca la trasformata in q col metodo generale delle trasformazioni, indipendentemente da qualsivoglia rapporto particolare fra le x', x", x", ec. onde le q', q", q", ec. q sono i valori tutti della q tra loro differenti . Dunque avendosi solamente un numero c di valori della Q uguali ad L, avremo ancora sotto tutte le possibili permutazioni fra le x', x", x", ec. un numero c solamente di risultati della X uguali ad L .

Ciò posto, riduciamo giusta il (n.º ao) le X' = X'' = ec. = L ad una funzione T'' = F (X', X'', X'', ec. X'^0) = H, e da questa cerchiamo il valore della x': operando siccome nel (V. caso 2.º n.º 29) formo l' Equazione $x'' + t \cdot x''^{n-2} + ec. + u = o$, e dalla T'' = H cerco il valore del coefficiente u; per quanto abbiam detto, otterremo per esso un' Equazione zazionale u' + $a \cdot u^{m-2} + ec. = o$,

in cui c < m, e > 1; ma ciò non può accadere, che mentre la T''' sia una funzione, la quale mantenga il valore H per una permutazione composta del 2.º genere (n. 29, 30, 31); e questa T'' = H, tale essendo, nel modo ora indicato può darci il valore della z'. Dunque ec.

Gli stessi raziocinii ci dimostrano la verità del nostro Teorema rapporto ancora alla (XII), ed a tutte le Equazioni, che infine ci risultano nella ricerca degli altri coeffi-

cienti.

Consideriamo presentemente l' Equazione , che nella determinazione della $\gamma = \phi(x')(x'')(x'') \dots$ dalla T' = h diventa pel (n.º 30) di un grado non < m, e supponghiamo, che nella nostra permutazione composta del 3.º genere (caso 3.º n.º 20) siano due soltanto le permutazioni componenti, onde la T' abbia la forma espressa in (VIII), e che la y cambiando di valore a qualunque permutazione venesa in conseguenza della prima componente nella (VIII) a dipendere da un' Equazione $y^{e+\beta} + Gy^{e+\beta-1} + ec. + Y = 0$. il coefficiente Y della quale sia radice di un' altra Y" + Y=-1 + ec. + u = o. Essendo due solamente le permutazioni, per cui la T' conservasi = h, l' Equazione in Y ascenderà al grado supposto # in conseguenza della permutazione seconda, sarà razionale, e pel (n.º 30) dovrà avere l'esponente # non < m. Sia pertanto questa Equazione in Y giusta l' enunciato del Teorema riducibile ad un' altra $V^{\lambda} + aV^{\lambda-1} + ec. = c$, in cui abbiasi $\lambda < m$, e > 1, e dalla cui soluzione possansi ricavare, i valori Y', Y", Y", ec., e veggiamo quali conseguenze da ciò si ritraggano. Cerchisi dalla funzione Y il valore della q = ±

cercons data intraone in the constant q cercons and intraone x x'' x''' . x'' x''' (I. caso 3.9 n.º 29). Sotto la prima permutazione componente tânto la q, quanto la Y conservano il proprio valore; per la seconda poi cangiansi tanto Γ una, quanto Γ altra, c in numero p dei differenti risultati della q non può essere maggiore del numero x dei risulti della q non può essere maggiore del numero x dei risulti della q non può essere

tati tra loro diversi della Y (n.º 3c). Dunque al ogni valore diverso della Y uno soltanto corrispondendone del la q, pel (n.º 144. Teor. delle Equaz.) potro ottenere q' da Y', q'' da Y', ec. sempre razionalmente. Ora i valori Y, Y', ec. vengono dedotti dalla soluzione della V\(^h + a V^{h-1} + ec. = e ; danque dalla 'soluzione dell' Equazione medesima venendo dedotti eziandio i valori q', q', ec., ne segue, che questa V\(^h + a V^{h-1} + ec. = e potr\(^h ancora considerarsi, come un' Equazione, a cui la (XI) si pu\(^h abbassare opportunamente alla propria soluzione: ma se la (XI) \(^h ecapace di simile abbassaremuto, abbiam veduto verificarsi il nostro Teorema. Dunque il Teorema medesimo si verificherà nacora, mentre sia opportunamente riducibile a grado inferiore l'Equazione, a cui dipende la supposta funzione y,

Qualunque siasi la γ , e qualunque il numero delle permutazioni componenti, per cui la T' si mantiene =h, con egual raziocinio troveremo essere sempre vera la nostra Pro-

posizione.

33. Quanto abbiamo asserito nel (n.º 31) si verifica adunque in tutta la generalità, e però dovrem dire, che nella ipotesi di (A) Equazione semplice, e di m > 4, la x' non è mai determinabile, se non nel caso, in cui abbia luogo un' Equazion di rapporto particolare fra le x', x", x", ec. x(m), la quale si conservi tale per una permutazione composta del a.º genere . Ora il Problema di ridurre l' Equazione (A) ad altra di grado inferiore, dalla cui soluzione, possa in seguito ottenersi la soluzione della stessa (A) è manifestamente identico al Problema del (n.º 29), preso in generale . Dunque non potremo mai abbassare una data Equazion semplice di grado > 4 opportunamente alla propria soluzione . se non nel caso che esista l' Equazion di rapporto ora indicata; ed esistendo riguardo alla (A) tale Equazione, la $u^{n} + au^{n-1} + ec. = 0$ in cui $u = \pm x' x'' x''' \dots x^{(a)}$ (n.º 31), ossia la (D), sarà l' Equazione ridotta, EquazioDella soluzione delle equazioni ec. ne, dalla soluzione della quale otterremo in seguito la soluzione della (A) col metodo del (caso 2.º n.º 29).

34. Una qualunque Equazione semplice (A) di grado > 4, il cui esponente sia numero primo, non è capace

di abbassamento opportuno alla sua soluzione.

Se la (A) supposta fosse capace dell' accennato abhassamento, pel (n° prec.) dovreblés verificarsi l' Equazione ridotta. Ora dovendo sella (Γ) intre esistere le m radici della (A) (A° n^* 26); essendo l'esponente n della (D) nguale al numero delle funzioni componenti essa (Γ) (n^* 31); in ciasanna di queste entrando un numero μ di radici (n^* 260. Teor. delle Equaz.); e finalmente non potendo alcuna di queste μ radici aver luogo contemporanemente in due delle funzioni componenti. (VI. caso $2.^\circ$ $n.^\circ$ 29), ne segue che dovrà essere $\mu n = m$, e però $n = \frac{m}{\mu}$; ma a cagione di m numero semplice, e di $\mu > 1$; e < m (n° 31), $\frac{m}{\mu}$ è necessariamente un numero rotto. Dunque, dovendo essere μ necessariamente numero intero, Γ Equazione $n = \frac{m}{\mu}$

sere n necessariamente numero intero , l' Equazione $n=\frac{m}{\mu}$ sarà impossibile , e per conseguenza ec.

35. Determinare se una data Equazione (A) è riducibile ad altra di grado inferiore atta alla propria soluzione -

= p, onde tal trasformata venga espressa dalla

cerco, se essa ha un fattor razionale di grado $\frac{nz}{r} = n$, o no;

se non lo à, e se, praticato riguardo agli altri fattori tutti di m ciò stesso, che abbiam fatto rapporto a u , troviamo non esistere mai in alcuna delle trasformate rispettive divisor razionale di grado corrispondente ad n; allora diremo nuovamente, che la data (A) non è abbassabile opportunamente alla propria soluzione. Che se questo fattore esiste, allora diremo, che l'Equazione data è attualmente riducibile a grado inferiore, e che la (D) ne è l' Equazione ridotta (n. 31, 33).

Che poi questa (D) sia atta alla soluzione della Equazione data, cioè che dalle sue radici possansi determinare le radici della (A) col mezzo di Equazioni di grado < m, vedesi facilmente dal (IV. caso 2.º n.º 20). Imperciocchè. supposta l' Equazione

(C) $x^{\mu} + tx^{n-1} + zx^{n-2} + ec. + n = 0$, se cerco, siccome nel (n.º 23), da ciascuno dei valori u'. u". ec. u(s) il valore di cadaun coefficiente t, z, ec., e chiamo

(H)
$$x^{\mu} + t' x^{\mu-1} + z' x^{\mu-1} + \text{ec.} + u' = 0,$$

 $x^{\mu} + t'' x^{\mu-1} + z'' x^{\mu-1} + \text{ec.} + u'' = 0,$
 $x^{\mu} + t^{(n)} x^{\mu-1} + z^{(n)} x^{\mu-2} + \text{ec.} + u^{(n)} = 0$

le Equazioni, che ci risultano, la soluzione della prima fra esse ci darà le radici x', x", x", ec. x(x), la soluzione della seconda ci darà le radici $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+1)}$, $x^{(\mu+3)}$, ec. $x^{(2\mu)}$ e così di seguito .

36. Il metodo istesso, che abbiamo indicato doversi seguire per isciogliere il Problema del (n.º prec.) ci servirà ancora per ottenere attualmente l' opportuno abbassamente del-

DELLA SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI CC. della (A), alloraquando essa ne è capace. Ogniqualvolta la y del (n.º 31) facciasi uguale ad una funzione delle x', x'', x''', ec. $x^{(\mu)}$, la quale conservi il proprio valore per tutte quelle permutazioni primitive, sotto cui nella (F) conserva il valor proprio la $f(x')(x'')(x'') \dots (x^{(\mu)})$; vedesi che sempre per la y, dipendentemente dalla T' = h, ci risulterà un' Equazion razionale di grado n, e quindi che infinite potranno essere le Equazioni ridotte, noi però fra queste sceglieremo la (D), come quella, che in generale riesco più semplice delle altre, e da cui con facilità maggiore potremo determinare i coefficienti della (C) . Il metodo generale poi delle trasformazioni (capo 4.º Teor. delle Equaz.) potrà darci la (G), da cui in seguito ottienesi la (D), e il metodo con cui si risolve il Problema del (n.º 142. Teor. delle Equaz.) ci somministrerà dipendentemente dalle radici u', u", ec. u(1) i coefficienti tutti in (H). Non sarà però inconveniente lo stabilirne degli altri, affinche poi nelle varie circostanze possiamo far uso di quelli, i quali possonci rendere i calcoli più brevi, e men laboriosi.

PARTE TERZA.

37. Ritenuta la maniera di scrivere supposta nel (Capo a.º Teor. delle Equaz.) per semplicità ulteriore supponghiamo $\Sigma x x' = \Sigma x x', \Sigma x x x' = \Sigma x x', \Sigma x x x x' = \Sigma x x', ec.$ $\Sigma_x x x = \Sigma_x x x$, $\Sigma_x x x x x = \Sigma_x x x$, $\Sigma_x x x x x x = \Sigma_x x x$, ec., pel (n.º 47. Teor. delle Equaz.) dovrà essere $\sum_{xy} = \sum_{x'} \sum_{x'$

$$\begin{split} & \Sigma_{\overline{x}\overline{3}'}^{-3'} = \frac{\Sigma_{\overline{x}'}\Sigma_{\overline{x}\overline{3}'}^{-2} - \Sigma_{\overline{x}''x'}}{3}, \\ & \Sigma_{\overline{x}\overline{4}'} = \frac{\Sigma_{\overline{x}'}\Sigma_{\overline{x}\overline{3}'}^{-1} - \Sigma_{\overline{x}''x\overline{3}'}}{4}, \\ & \Sigma_{\overline{x}\overline{5}'} = \frac{4}{5} \times \Sigma_{\overline{x}\overline{4}'}^{-1} - \Sigma_{\overline{x}''x\overline{3}'}^{-1}, \end{split}$$

$$\Sigma \overline{x6}' = \frac{\Sigma x' \Sigma \overline{x5}' - \Sigma x' \overline{x4}'}{6},$$

$$\Sigma \overline{x(\mu)'} = \frac{\Sigma x' \overline{\Sigma x(\mu-1)'} - \Sigma x'' \overline{x(\mu-2)'}}{\mu},$$

Dunque sostituendo successivamente, otterremo

$$\Sigma \overline{xx'} = \frac{(\Sigma x')^2 - \Sigma x^{2r}}{2},$$

$$\Sigma \overline{x \cdot 3}^r = \frac{(\Sigma x^r)^3 - \Sigma x^r \Sigma x^{3r} - 2\Sigma x^{3r} x^r}{2},$$

$$\Sigma \overline{x4}' = \frac{(\Sigma x')^4 + (\Sigma x')^2 \Sigma x^{2r} + 2\Sigma x' \Sigma x^{2r} x' + 2 \cdot 3\Sigma x' x' x'}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3\Sigma x' x' x'};$$

(I)
$$\Sigma \overline{x5}' = \frac{(\Sigma x')^5 - (\Sigma x')^3 \Sigma x^{3'} - 2(\Sigma x')^3 \Sigma x^{3'} x' - 2.3 \Sigma x' \Sigma x^{5'} - 2.3 \cdot 4 \Sigma x^{5$$

506 Della soluzione delle souazioni ec.

$$\Sigma_{x} \overline{6}' = [(\Sigma_{x'})^{6} - (\Sigma_{x'})^{6} \Sigma_{x}^{3} - 2(\Sigma_{x'})^{5} \Sigma_{x}^{3} \times (-2.3(\Sigma_{x'})^{5} \Sigma_{x}^{3} \times (-2.3(\Sigma_{x'})$$

ec.

$$\begin{split} \Sigma_{\overline{X}(\theta)} &= [(\Sigma_{X'})^{\mu} - (\Sigma_{X'})^{\mu-2} \Sigma_{X''}^{x'} - 2(\Sigma_{X'})^{\mu-3} \Sigma_{X''}^{x'} - 3.3(\Sigma_{X'})^{\mu-4} \Sigma_{X}^{x'} \times 1^{x'} - 2.3 \cdot 4.5(\Sigma_{X'})^{\mu-6} \Sigma_{X}^{x'} \times 1^{x'} - 2.3 \cdot 4.5(\Sigma_{X'})^{\mu-6} \Sigma_{X}^{x'} \times 1^{x'} - 2.3 \cdot 4.5(\Sigma_{X'})^{\mu-6} \Sigma_{X}^{x'} \times 1^{x'} - 2.3 \cdot 4.5 \cdot \dots \cdot 1^{\mu} - 1) \Sigma_{X}^{x'} \times 1^{\mu} - 2) \end{bmatrix}; \ 1.2.3 \cdot 4.5 \cdot \dots \cdot 1^{\mu} - 1 \cdot 2 \cdot 1^{\mu} \cdot 1^$$

In egual modo avendosi pei (n. 41, 46, 47 Teor. delle Equaz.)

 $\begin{array}{l} \Sigma \ x^{3\prime} \ x^{\prime} \ = \Sigma \ x^{3\prime} \ \Sigma \ x^{\prime} \ - \Sigma x^{3\prime} \ , \\ \Sigma \ x^{3\prime} \ x^{\prime} \ = \Sigma \ x^{3\prime} \ \Sigma \ x^{\prime} \ - \Sigma \ x^{3\prime} \ x^{\prime} \ . \end{array}$

(K) $\Sigma x^{1\prime} \overline{x3}^{\prime} = \Sigma x^{1\prime} \Sigma \overline{x3}^{\prime} = \Sigma x^{3\prime} \overline{x2}^{\prime}$,

 $\sum x x x x x = \sum x^{11} \sum x x^{2} = \sum x x^{2}$ $\sum x x x x x = \sum x^{2} \sum x x^{2} - \sum x x^{2}$

 $\sum x^{2r} \overline{x(q)}' = \sum x^{2r} \sum \overline{x(q)}' - \sum x^{3r} \overline{x(q-1)}'$

troveremo risultarci

 $\sum x^{1\prime} x^{\prime\prime} = \sum x^{1\prime} \sum x^{\prime\prime} - \sum x^{3\prime}.$

 $\Sigma_{x}^{x'}x_{2}^{-x'} = \Sigma_{x}^{x'}\Sigma_{x_{2}}^{-x'} = \Sigma_{x}^{y'}\Sigma_{x'}^{x'} + \Sigma_{x}^{4r}$

 $\Sigma x' x' x' = \Sigma x' \Sigma x' x x' - \Sigma x'' \Sigma x' + \Sigma x'' \Sigma x' - \Sigma x''$

 $\Sigma_x^{3'}\overline{x_4'} = \Sigma_x^{3'}\Sigma_x\overline{x_4'} - \Sigma_t^{3'}\Sigma_x\overline{x_3'} + \Sigma_x^{4'}\Sigma_x\overline{x_2'} - \Sigma_x^{5'}\Sigma_x' + \Sigma_x^{4'},$

 $\sum_{x} x' \times (q)' = \sum_{x} x'' \sum_{x} (q)' = \sum_{x} x'' \sum_{x} (q-1)' + \sum_{x} x'' \sum_{x} (q-2)'$ $\sum_{x} x'' \sum_{x} (q-3)' + \sum_{x} x'' \sum_{x} (q-4)' = e. + \sum_{x} x'^{(x+1)x} \sum_{x} x' + \sum_{x} x'^{(x+1)x}$, prendendosi in quest' ultima formola generale il segno superiore quando q è numero pari, l'inferiore, quando q è dispari.

38. Col mezzo delle Formole (1), (K), Γ andamento delle quali è assi chiaro, noi potremo trasformare la data (delle quali è assi chiaro, noi potremo trasformare la data (delle x', x'', x''', ce. x''o) combinate fra loro a due a due, oppure a tre a tre, oppure a quattro a quattro, e in generale a μ a μ.

Sup-

Supposto di fatti rappresentarsi dalla (G) la trasformata, vorliasi a cagione di esempio, che le sue radici, siano i prodotti tutti a quattro delle x', x", x", ec. x", e però che abbiasi u' = x' x'' x''' x''' , u'' = x' x'' x''' x'' , ec. $u^{(p)} = x^{(m-1)} x^{(m-1)} x^{(m-1)} x^{(m)}$. In questa ipotesi essendo

 $p = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{3}$, non restano a determinarsi che

i coefficienti M. N. P. O. ec.: a tal fine prendansi le prime tre delle (1) Equazioni , le prime due delle Equazioni (K), col loro mezzo si determinino le quantità

 Σ_{x2} , Σ_{x3} , Σ_{x}

 $\Sigma_{x4'} = \frac{(\Sigma_{x'})^4 - 6(\Sigma_{x'})^4 \Sigma_{x'}^{2^2} + 3\Sigma_{x'}^{2^2} \Sigma_{x'}^{2^2} - 6\Sigma_{x'}^{4^2} + 3(\Sigma_{x'}^{2^2})^2}{2}$

ossia a cagione di $\Sigma x 4 = \Sigma u^r$, otterremo

 $\sum u^{r} = \frac{(\Sigma x^{r})^{4} - 6(\Sigma x^{r})^{2} \sum x^{2r} + 8\Sigma x^{r} \Sigma x^{2r} - 6\Sigma x^{4r} + 3(\Sigma x^{2r})^{2}}{6}$

Quest' ultima è una formola, la quale facendo successivamente r = 1, 2, 3, ec., ci somministra i valori delle Σu , Σu^* , $\sum u^3$, $\sum u^4$, ec. espressi per le $\sum x$, $\sum x^2$, $\sum x^3$, ec., ma i valori delle Xx, Xx*, ec. col mezzo dei Teoremi Newtoniani ottengonsi espressi con i coefficienti A, B, C, ec. della data. Dunque sostituendo avremo ancora i valori delle Σu , Σu^2 , Σu^3 , ec. espressi con i coefficienti medesimi A. B. C. ec. Ora gli stessi Teoremi Newtoniani ci somministrano i valori dei coefficienti M, N, P, Q, ec. dipendentemente dalle \(\Sigmu_u, \Sigmu_u^*, \Sigmu_u^3\) ec. Dunque, sostituendo di nuovo, otterremo infine i valori delle quantità M, N, P, O, ec. espressi per le altre A, B, C, ec., e quindi determinata avremo la trasformata richiesta.

Lo stesso si dice, e si pratica, qualunque siasi nei prodotti rappresentati dalla u il numero u delle radici x', x", x", ec. che li compongono .

Sia per esempio $x^4 - 4x^3 - 28x + 13 = 0$ la data Equazione (A), e vogliasi, che nella Trasformata (G) sia u S s 8 2

= x'x''. In questo caso avendosi $p = \frac{4.5}{2} = 6$, la (G) diverrà

 $u^6 + Mu^5 + Nu^4 + Pu^3 + Ou^2 + Ru + S = 0$

e avendosi $\Sigma u' = \Sigma \overline{x_2}$, per la determinazione dei coefficienti M , N , P , ec. ci serviremo della prima delle formole (I), ponendo \(\Sigmu'\) in luogo di \(\Sigmu_{xz}\), ci serviremo cioè

della $\Sigma u' = \frac{(\Sigma x')^2 - \Sigma x^{\nu}}{2}$. Ora facendo successivamente

r = x, 2, 3, 4, ec. ci risulta in corrispondenza $\Sigma_u = \frac{(\Sigma_x)^2 - \Sigma_x^2}{2}$, $\Sigma_u^* = \frac{(\Sigma_x^*)^2 - \Sigma_x^4}{2}$, $\Sigma_u^2 = \frac{(\Sigma_x^3)^2 - \Sigma_x^6}{2}$,

 $\sum u^4 = \frac{(\sum x^2)^4 - \sum x^8}{2}$, ec., e dai Teoremi Newtoniani abbiamo

 $\Sigma u + M = 0$, $\Sigma u^2 + M\Sigma u + 2N = 0$, $\Sigma u^3 + M\Sigma u^2 + N\Sigma u + 3P = 0$, ec. Dunque sostituiti nelle prime di queste Equazioni in luogo delle \$\Sigmax, \$\Sigmax^2\$, \$\Sigmax^3\$, ec. i loro valori, ed ottenuti così i valori delle \(\Sigmu_u, \Sigmu_u^2, \Sigmu_u^3\), ec. espressi pei cofficienti - 4, 0, - 28, 13 della data, pongo essi nelle Equazioni seconde, da queste così ridotte determino successivamente i valori dei coefficienti M, N, P, ec., e così operando, otterremo M = o, N = 99, P = -992, Q = 1287, R = 0, S = 2197, onde $u^6 + 90u^4 - 902u^3 + 1287u^2 + 2197 = 0$ sarà l' Equazione domandata.

39. Vogliasi sapere se la precedente Equazione x4 - 4x3 -28x + 13 = 0 sia abbassabile opportunamente alla sua soluzione; e in caso che sì, quale ne sia la ridotta, e come dalle radici di questa potremo dedurre le radici della data.

Essendo la data un' Equazione semplice, ed essendo l' esponente 4 divisibile solamente per 2, non potrà essa abbassarsi che ad un' altra Equazione del grado 2.º (n.º 35). In conseguenza pertanto di ciò, che abbiam detto nel (n.º 36), suppongo il prodotto x' x'' = u, determino col metode insegnato la precedente u6 + 99u4 - 992u3 + 1287u2+ 2107

2197 = 0, osservo se questa ha fattor razionale di a.º grado, e trovando che lo ha realmente, tale essendo il trinomio $u^2-3u+13$, dirò, che l' Equazione data è attualmente abbassabile, e che $u^3-8u+13=0$ è l' Equazione ridotta, le cui radici sono $u=x^*x^*$, $u^*=x^{**}x^*$.

Presentemente dovendosi dai valori u', u'' dedurre gli altri x', x'', x''', x''', x''', formo pel $\binom{n-3}{2}$) Γ Equazione $x^2 \to tx + u = \circ$, ϵ dai valori della u dovrò cercare i corrispondenti della t. A tal fine osservo, che altro non essendo le radici della $x'' \to tx + u = \circ$ se non se due delle radici della Equazione data, il primo membro di questa dovrà essere divisibile esattamente pel primo di quella. Eseguisco pertanto simile divisione ϵ , e avuto l'avanzo guisco pertanto simile divisione ϵ , e avuto l'avanzo

guisco pertanto simile divisions, $x = (t^2u + 4tu - u^2 - 13)$, $-(t^2u + 4tu - u^2 - 13)$, poichè questo deye essere zero indipendentemente dal valore della x, faccio

 $t^3 + 4t^2 - 2tu - 4u + 28 = 0$, $t^2u + 4tu - u^2 - 18 = 0$.

Supponghiamo, che, risolta la prima di tali Equazioni, ottengasi t = F (u); ma in amendue queste Equazioni, allorquando si pone u = u', deve risultare t = t'; dunque, fatto u = u', la F (u') = t' dovrà essere radice non solamente della prima di esse, ma ancora della seconda, e però i loro primi membri dovranno essere divisibili entrambi esattamente per t - F (u'). In conseguenza di ciò, considerando la t come incognita, pratico su di loro l' operazione, che si usa a trovare il massimo comun divisore, estendo tale operazione, finchè mi risulta un divisore riguardo alla t di 1.º grado, pongo in questo u' in lnogo della u, lo uguaglio allo zero, e mi verrà un'Equazione, il cui primo membro sarà evidentemente il precedente binomio t - F (u'), e da cui per conseguenza ricavandosi t = F(u), si avrà t = t'; ma ciò stesso, che abbiam detto delle u', t' dicesi in egual modo delle u", t". Dunque se nella nostra Equazione porremo la u senza apice, la t = F(u) sarà tale, che in vece della u collocando u', ci verrà t' = F (u'), e collocandovi u", ci Efverrà t'' = F(u').

Effettuata nel nostro esempio l'operazion precedente, poichè pel divisore riguardo alla t di 1.º grado ci risulta la quantità — $(u^t - 13) t$ — $(4\mu^t - 28u)$, uguaglio quesano $8u - 4u^t$

sta allo zero, e riducendo avremo $t = \frac{28u - 4u^2}{u^2 - 13}$, onde sa-

rà $t'=\frac{28u'-4u'^3}{u^3-13}$, $t'=\frac{28u''-4u''^3}{u''^3-13}$. Poichè u', u'' sono le radici della ridotta $u^3-8u+13=0$, per maggiore semplicità eliminiamo col mezzo di questa la u' dalla t=

semplera eliminamo coi mezzo di questa la u data $t = \frac{28u - 4u^2}{u^2 - 13}$, avuto il risultato $t = \frac{26 - 2u}{4u - 13}$, collochiamo in

e per tal guisa otterremo

 $t' = \frac{18 - 2\sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{3}} = \frac{(3 - 4\sqrt{3})(18 - 2\sqrt{3})}{(3 - 4\sqrt{3})(3 + 4\sqrt{3})} = -\frac{78 - 78\sqrt{3}}{39} = -2 + 2\sqrt{3}.$ $= -2 - 2\sqrt{3}.$

Facciansi ora le dovute sostituzioni nella $x^s+tx+u=0$, e avute le due Equazioni $x^*-(a-2\sqrt{3})x+(4+\sqrt{3})=o$, a $x^*-(a-2\sqrt{3})x+(4-\sqrt{3})=o$, la soluzione della prima di esse ci darà il valore delle due radici x', x'', della Equazion data, la soluzione della seconda ci darà il valore delle altre x'', x''.

40. Passiamo al caso generale, e dipendentemente dalle u', u'', u'', ec. $u^{(\mu)}$ radici della ridotta (D) vogliansi determinare i valori corrispondenti della quantità t, x, y, u, ec. coefficienti della (C).

1.º Operando perciò come nel (n.º prec.), divido il primo membro della (A) pel primo della (C), e chiamo $Px^{n-1} + Qx^{n-2} + Rx^{n-2} + Sx^{n-2} + ec. + Y$ il residuo, che ne viene. Poiche la divisione deve risultare esatta, e deve però il risultato divenire. = o indipendentemente dalla x, vedesi, che i valori delle x, x, y, x, ec. n fra loro corrispondenti dovranno, mentre sian posti contempora-

neamente nei coefficienti P , Q , R , S , ec. Y , produrci le Equazioni

P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0, ec. Y = 0.

Ora i valori della u sono già determinati dalla (D) ; dunque non restando a determinaris che i corrispondenti delle t, s, y, v, o, ec., cominciamo dal porre nelle (L) il valore u', e dipendentemente da questo cerchiamo i valori t', z', y', v', ec. Fatta la sostituzione precedente poò succedere che qualcuma delle (L) divenga immediatamente zero in conseguenza della sola u', come nella ipotesi, o.h., essendo per esempio $\mathbf{P} = w(u)t^2 + \mathbf{v}^{*}(u)t^2 + \mathbf{v}^{*}$

Preudiamo in primo luogo a considerare quest' ultimo caso. Essendo le Equazioni (L) di numero μ , e tolta già la u, essendo di numero $\mu-1$ le incognite t, es, y, v, ec., che vi rimangono, da un numero $\mu-1$ di tali Equazioni per esempio dalle Q = o, R = o, S = o, ec. Y = o elimino l e $\mu-2$ incognite x, y, v, ec. lasciandovi la t, e otterrò così un' Equazione f(t)(u') = o. In segnito da un altro numero $\mu-1$ delle Equazioni medesime, compresavi la P = o, elimino le stesse $\mu-2$ incognite x, y, x, ec., e mi verrà

un'altra Equazione f'(t)(u) = 0. Ottenute queste

(M) f(c)(u) = c, f(t)(u) = c, supponghiamo in primo luogo, che le radici della (D) siano tutte disuguali fra loro; in somigliante ipotesi poiche lo stesso discorso, che abbiam fatto nel (n.º prec.) sulle due Equazioni in ϵ , ϵu ne cola estatuti, si applica egualmente alle (M); tolto dalla u' l'apice, cerco fra i primi due membri f(e)(u), f'(t)(u) il massimo comun divisiore, ponendo la ϵ come incognita, proseguo l'operazione fino ad ottenere un divisore, in cui la ϵ non superi il primo grado, faccio questo uguale allo zero, e mi verrà un'Equazione $\epsilon t = F(u)$, dalla quale, ponendo successivamente in luogo della u i vadila quale, ponendo successivamente in luogo della u i va

lori u', u", u", ec. u(s), per le ragioni accennate nel (n.º prec.) otterremo t' = F(u'), t'' = F(u''), t''' = F(u'''), ec. $t^{(n)} = F(u^{(n)})$.

Oul pure, operando siccome nel (n.º prec.), potremo col mezzo della (D) eliminare dalla F (u) tutti i termini, che contengono delle potenze della u di grado > n-1, e ciò fatto, è chiaro, che mi verrà un' Equazione della forma

(N)
$$t = \frac{au^{n-1} + bu^{n-2} + cu^{n-3} + ec}{\alpha u^{n-1} + \beta u^{n-2} + \gamma u^{n-3} + ec},$$

da cui si avranno i valori t', t'', t''', ec. t("), facendo successivamente u = u', u'', u''', ec. $u^{(n)}$.

2.º Tornando alle Equazioni (L), in cui esista u' in luogo della u, ponghiamo t' in luogo della t. In conseguenza di tale sostituzione qui pure, come di sopra, o qualcuna delle (L) diviene zero, o no: supponghiamo primieramente che no, e in questa ipotesi mediante un numero p-2 delle (L), per esempio mediante le R = o, S = o, ec. Y = o si tolgano le u - 3 quantità y, v, ec., si faccia l'eliminazione medesima col mezzo di altre u - 2 delle stesse Equazioni, per esempio col mezzo delle P = o, S = o, ec. Y = o, e avremo così le due Equazioni

f(z)(t')(u') = 0, f'(z)(t')(u') = 0.

Ora considerando in questa la z come incognita, e tolti dalle t', u' gli apici, cerco fra i loro primi due membri, il massimo comun divisore, estendendo l'operazione insino a che si abbia un divisore di 1.º grado, e uguagliato questo allo zero, avremo un' Equazione z = F(t)(u), nella quale sostituendo invece delle t, u i valori già ritrovati t', u'; t", u"; t"', u"'; ec. t(n), u(n), otterremo evidentemente $z' = F(t')(u'), z'' = F(t')(u''), z''' = F(t'')(u''), \text{ ec. } z^{(n)} = F(t^{(n)})(u^{(n)}).$

Col mezzo della (D), e col mezzo della Equazione in t. che potremo sempre determinare moltiplicando insieme i binomi $t-t', t-t'', t-t''', t-t^{(*)}$, se toglieremo dalla F(t)(u)

tutte le potenze delle t, u di grado >n-1, avremo nu Equazione della forma

(P) $z = t^{n-1}(au^{n-1} + bu^{n-2} + cc.) + t^{n-2}(au^{n-1} + bu^{n-2} + cc.) + t^{n-1}(au^{n-1} + \beta u^{n-2} + cc.) + cc.$

da cui otterremo nello stesso modo, che dalla z = F(t)(u);

tutti i successivi valori z', z'', z'", ec. z(1)

3.º Oltre delle quantità u', t' sostituiscasi nelle (L) in vece della z il valore z', e supponghiame ancor quivi, che per ciò solo niuna delle (L) si verifichi. Operando, ciò posto , nelle Equazioni risultate in matiera simile alle precedenti, ricaveremo un' Equazione y = F(z)(t)(u), la quale col mezzo delle Equazioni già ottenute in u, t, \approx potrà, come precedentemente, ridursi ad un'altra

 $(0) \qquad \qquad y = o(z)(t)(u)$

priva di tutte le potenze delle u, t, z di grado > n-1, e si la y = F (z) (ϕ) (u), the l'altra $y = \varphi$ (z) (v) (v) di dariano tutti i valori y, y'', y'', ee. y'^0 , mentre sostituiscansi in luogo delle z, t, u, successivamente i valori z', t, u, v, t'', t'',

Lo stesso si dice, e si pratica per la determinazione de-

gli altri coefficienti v, ec.

Abbiamo di sopra determinato il valore della z mediante i valori delle due quantità t, u, il valore della y mediante le tre z, t, u, e così in progresso, potevamo però determinare i valori di cadauna di queste z, y, ec. col mezo dei valori di una sola delle altre incognite, per esempio della sola u, e ciò operando rapporto a ciascuna delle z, y, ec. nel modo istesso, che abbiam tenuto, allor quando abbiamo cercato dalla sola u i valori della t. Il più delle volte però il calcolo, se non erro, riuscinà più fureve, mentre si esprimano i valori delle z, y, ec, col mezzo di più delle quantità accennate, che quando si esprimano col mezzo di una sola.

41. Suppongasi in secondo luogo, che due delle radici della (D) siano uguali fra loro, sia per esempio u' = u''. In questa supposizione la determinazione dei valori delle t, z, y, v, ec. corrispondenti alla u' = u'' porta necessariamente una variazione. Poiche per l'uguaglianza supposta fra le u', u" dallo stesso valore u' dipendono egualmente i due t', t", questi t', t" dovranno entrambi essere radici di amendue le Equazioni (M), e però i primi membri di esse dovranno entrambi essere divisibili per un trinomio t3 + V' 1 t $+ V' a \equiv (t-t')(t-t'')$, in cui a cagione di t', e di t" funzioni della u', i coefficienti V' 1 , V' 2 saranno essi pure due funzioni della stessa u'. Giò dunque essendo, nel cercare, come di sopra il massimo comun divisore fra i primi membri delle (M), proseguo l'operazione soltanto fino ad un divisore, nel quale la t ascende al 2.º grado, e questo uguagliato allo zero, altro non sarà che la

 $t^2 + V \cdot t + V \cdot 2 \equiv 0$, e ci darà quindi i due valori t', t", mentre si ponga u' in luogo della u, e poscia si risolva l' ottenuta Equazione (R).

Dalla determinazione delle t', t" passiamo a quella delle z' , z" : questi valori della z o cercansi dipendentemente dalla sola u', oppure dipendentemente dalla u', e dai valori insieme corrispondenti della t. Nel primo di questi due casi , vedremo come precedentemente , che operando , come si ê fatto riguardo alla t, ci verrà un' Equazione z'+V1z+V2=0, nella quale V1, V2 sono funzioni della u, e dalla cui soluzione, posto u' in vece di u, otterremo i cercati valori z', z". Nel caso secondo poi, mentre si ha u' = u", o ci risulta ancora t' = t", o nò : se nò, questi valori z', z" vedesi facilmente che si otterranno nel modo istesso del (n.º prec.); che se abbiamo t' = t"; allora cercando il massimo comun divisore fra i primi due membri delle (O) (n.º 40), ed estendendo il calcolo fino ad un risultato, in cui la z ascenda al grado 2.º, otterremo un' Equazione $z^2 + T_1z + T_2 = 0,$

i coefficienti T1, T2 della quale saranno funzioni di amendue le t, u, e le radici diverranno le z', z', mentre in luogo delle t, u vengano sostituiti i valori t', u'.

"Avvertasi, che cercando i valori della z dalla z' + Vz = o, gli otterremo hensi, ma non sapremo poi conoscere, quale tra essi sia quello che corrisponde a z', o quale il corrispondente a z', e quale per conseguenza sia z', quale z''.

Con egual razioeinio, e in egual modo troveremo potersi determinare i valori y', y'' della y, i valori v', v'' della v corrispondenti ad u' = u'', e così in progresso.

42. Sia in terzo luogo u'=u''=u'''. Applicandesi a questo caso gli stossi discorsi del (n°) rec.) vedremo , che i tre valori t', t'', t'' corrispondenti al solo u' dovendosi unire necessariamente in una sola Equazione di 3.º grado

(S) t² + V 1 t³ + V 2 t + V 3 = c, il primo membro di questa verrà determinato col proseguire la ricerca del massimo comun divisore fin i primi membri delle (M) sino ad un risultato, in cui 3 sia l'esponente della t. Relativamente poi alle z', z'', z''', alle y', y'', y''', ec. vedremo potersi avere la loro determinazione in maniere somigilianti alle acceninate nel (n.º prec.).

Che se i valori della u tra lovo uguali sone quatto, cinque, ec., i rispettivi quattro, cinque, ec. valori della t si uniramo in Equazioni di 4.º, di 5.º, ec. grado. La determinazione dei quattro, cinque ec. valori corrispondenti delle z. v. p. ec. si avvi come precedentemente.

43. Supponghiamo, che, essendo nella (D) l'esponente a numero pari, i valori della u siano tutti uguali fra loro a due a due. In questa ipotesi determinata come nel (n.º 41) l'Equazione (R), colloco successivamente nei coefficienti VI, Va in vece della u i valori u' = u', u'' = u'', u'' = u'', u'' = u'', u'' = u''', u'' = u''', lec., e avremo così dalla stessa (R) a due a due tutti gli n valori della t. In egual modo se, essendo n.-multiplo del 3, le radici della (D) sono fra loro uguali a tre a tre) collocan-

do successivamente nei coefficienti della (S) determinata come nel (n.º 42) i valori diversi della u in vece della u medesima; da essa ci risulteranno tutti gli n valori della t insieme congiunti a tre a tre . Lo stesso si dice , e si pratica negli altri casi a questi somiglianti. Che se finalmente i valori della u sono tutti uguali fra loro, i valori della t si uniranno tutti in una sola Equazione necessarismente di grado n , e questa si determinerà nella solita maniera . Per determinare poi i valori delle z , y , v , ec. nelle presenti ipotesi, le operazioni necessarie a farsi si deducono facilmente da quanto si è detto nei (n. 40 , e seg.).

44. 1.º Supponghiamo presentemente, che nel (1.º n.º 40) una delle P. O. R., S., ec. Y., per esempio la P diventi zero per la sola sostituzione di u' in vece di u. Scomparsa in questa ipotesi la prima delle Equazioni (L), resteranno le altre Q = o, R = o, S = o ec. Y = o in numero di $\mu = 1$ con le $\mu = 1$ incognite t, z, y, v, ec. Dunque con eliminare da esse le u - 2 quantità z, y, v, ec., combinandole in una qualunque maniera, non giungendo infine the ad una sola Equazione f'(t)(u') = 0, i valori della r ricavati da questa uniti agli altri z', y', v', ec. u' tutte faranno verificare le Equazioni (L), e però non saranno che tutti quei valori della t corrispondenti ad u', che vengono richiesti dal Problema (n.º 40). In questa supposizione adunque i valori della t domandati si otterranno dalla f(t)(u) = o senza la ricerca d'un massimo comun divisore.

2.º Cercando in seguito i valori della z; o si vegliono questi dipendentemente dalla sola u', o si vogliono dipendentemente dalla u', e insieme dai rispettivi valori della t: nel primo di questi casi otterremo i valori della z come si sono trovati nel (prec. 1.9) quei della t, eliminando cioè dalle u-1 Equazioni Q = o, R = o, S = o, ec. Y = o le incognite t, v, v, ec. , e trovando l' Equazion finale f(z)(u') = 0; nel caso secondo poi osservo, se per la sostituzione nelle Q , R , S , ec. Y dei valori della z determinati, alcuna di queste quantità diventa zero, o no, se no, otterremo i valori della z, eperando sulle μ — i Equazioni, come è stato indicato nei (n.º 40, e seg.) vicho se una di queste Q, R, S, ec. Y, per esempio la Q svanisce alla estituzione del valore t'; allora sulle μ — a Equazioni R = o, S = o, ec. Y = o, che restano, opero come nel (prec. r.°), eliminando le μ — 3 quantità γ , v, ec. e P Equazione finale f(z)(t')(u') = o ci darà tatti i valori della z corrispondenti alle u', t'.

Lo stesso deve eseguirsi nella ricerca dei corrispondenti

valori della y, della v, ec.

45. Suppongasi in terzo luogo, che alla sostituzione della u' due delle P, Q, R, S, ec. Y, per esempiole due P, Q sconpariscano, se è possibile, tostamente. In questo caso resteranno le μ → a Equazioni R = 0, S = 0, ce; Y = 0 con le μ → i neoguie t ε, z , y , v , ce, facendo adunque la precedente eliminazione, giungeremo ad una Equazion finale, in cui esisteranno due delle incognite a cennate. Sia f(ε)(2)(u') = 0 una tale Equazione; per la sua natura d' indeterminata una delle t, z resterà necessariamente arbituraria; tale pertanto supposto essere la t ε, troveremo primamente dalla f(ε)(t)(u') = 0 il valore della z, e in seguito troveremo come nel (n° prec.) il valore della celle altre y, v, ec. espressi per la t medesima, e per quantità note. Chiamati ε, y', v', ce. comiglianti valori, sostituiscensi nella (C), ed il risultato

(XIII.) $x^{\mu} + \varepsilon x^{\mu-2} + z^{\prime} x^{\mu-2} + y^{\prime} x^{\mu-3} + v^{\prime} x^{\mu-4} + c c. + u^{\prime}$ dovrà cesere un divisore esatto del primo membro della (A); ora ciò è fimpossible; poiche se il primo membro della (A) fosse divisibile esattamente per (XIII); allora potendo l'indeterminata z ricevere infiniti differenti valori, esso primo membro avrebbe rinfiniti divisori esatti diversi; il che a cagione di m numero finito è impossibile. Dunque sarà ancora impossibile , che due delle P, Q, R, S, cc. Y divengano zero per la sola supposizione di $u = u^{\prime}$. Lo stesso molto più si dimestra.

se per la ipotesi di u = u' si volesse, che tre, quattro ec.

delle accennate P, Q, R, S, ec. Y scomparissero. 46. Abbia luogo il caso primo del (2.º n.º 40), e si verifichi immediatamente una, o più delle Equazioni (L) per la sostituzione delle u', t' in vece delle u, t. Se delle indicate (L) non se ne verifica che una sola; allora essendo di numero \(\mu - 1 \) le Equazioni , e di numero \(\mu - 2 \) le incognite, che rimangono, otterremo i valori delle z, y, v, ec. operando come (n. 40, ec. 43) : se fra le P, Q, R, S, ec. Y quelle, che diventano zero, sono dne, avremo gli indicati valori delle z, y, v, ec., operando siccome nel (n.º 44). La supposizione poi , che sia maggiore di due il numero delle P , Q , R , S , ec. Y , che svaniscono alla sola supposizione di t = t', e di u = u' si dimostrerà assurda col fare lo stesso raziocinio del (n.º prec.).

Le conseguenze medesime, e le medesime operazioni si applicano egualmente alle altre incognite z , y , v , ec.

47. Date siano le due Equazioni

 $x^{6}-4x^{5}-2x^{4}+18x^{5}-8x^{2}-18x+0=0$ $x^{6}-2x^{5}+3x^{4}+x^{3}+3x-2x+1=0$

e vogliasi la lor soluzione.

Riguardo in primo luogo alla (XIV), operando come è stato indicato nei (n. 36 , 38) , troveremo , che fatto x' x" x" = u, essa è riducibile ad un' Equazione di 2.º grado $u^2 - bu + 0 = 0$, le cui radici u', u'' sono amendue = 3. Ciò essendo, divido il primo membro della (XIV) per $x^3 + tx^4 + zx + u$, ossia, poiche la u non ha che il valor 3, per $x^3 + tx^2 + zx + 3$. Dovendo la divisione risultare esatta, uguaglio allo zero i coefficienti delle x3, x, xº nell' avanzo corrispondenti ai coefficienti P, Q, Y del (n.º 40). e avremo

$$\begin{array}{c} z^{2} - (3t^{2} + 8t - 2)z + (t^{4} + 4t^{2} - 2t^{4} - 12t + 4) = 0 \ , \\ (\text{XVI.}) & (2t + 4)z^{3} - (t^{3} + 4t^{2} - 2t - 12)z + (3t^{3} + 12t + 12) = 0 \ . \\ & (6t + 12)z - (3t^{3} + 12t^{3} - 6t - 36) = 0 \ . \end{array}$$

Mediante la prima e la terza di queste Equazioni elimino la z. faccio l' eliminazione medesima, combinando le Equazioni seconda e terza, avuti i risultati

 $t^6 + 12t^5 + 44t^4 + 32t^3 - 124t^2 - 240t - 112 = 0$

 $t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 32t + 16 = 0$

trovo fra i loro primi membri il massimo comun divisore, e uguagliato questo allo zero, ci verrà per t l' Equazione $t^2 + 4t + 4 = 0$. Ora qui pure entrambe le radici t', t' hanno il valore medesimo - 2, e questo sostituito nelle precedenti tre Equazioni ci rende zero i primi membri delle seconde due, indipendentemente dalla z; dunque per quanto abbiam detto nei (num. 44, 46), avrò immediatamente i valori corrispondenti della z, col porre - 2 in luogo della t nella prima delle (XVI), e da ciò venendoci $z^{2} + 6z + 4 = 0$, e però $z' = -3 + \sqrt{5}$, $z'' = -3 - \sqrt{5}$, otterremo i sei valori della x nella (XIV), sciogliendo le due Equazioni $x^3 - 2x^2 - (3 - \sqrt{5})x + 3 = 0$,

 $x^{3} - 2x^{2} - (3 + \sqrt{5})x + 3 = 0$.

Invece della z vogliasi dalle precedenti (XVI) eliminare la t: combinando perciò fra loro le ultime due Equazioni, veggo, che mentre voglio col loro mezzo togliere la t, mi svanisce ancora la z. Ora che significa ciò? ciò mostra, che la verità di tali due Equazioni non dipende punto dalla z, e dipende soltanto dalla t: ma, se questo succede, sappiamo non poter accadere, che mentre la t abbia un tale valore, che per esso divenga zero ciascuno dei coefficienti delle potenze zo, zt, zt, ec. Dunque, chiamato t' l'accennato valore della t, dovendo cadauno di simili coefficienti essere divisibile esattamente per t-t', potrò trovare assai facilmente questo t', determinando fra due dei coefficienti accennati il massimo comun divisore, ed uguagliando questo allo zero . Esso t' è chiaro , che sarà il valore della t richiesto, ed è chiaro, che mentre vien questo determinato, vengono a determinarsi eziandio tutti gli altri valori della t', che corrispondono ad u'. Quello stesso, che abbiam detto nell'esposto esempio, vedesi che si dice egualmente in generale, e però che quando ha luogo l'accennato accidente, allora la déterminazione della incognita rispettiva, nel nostro

esempio della t, riesce molto più semplice.

L'altra Equazione (XV) altro non è che una delle così dette Equazioni reciproche, in cui per conseguenza abbiamo x' x'' = x''' x''' = x'' x''' = 1. Dunque, posto x' x''' = u, essa sarà riducibile ad un' Equazione in u di 3.º grado, nella quale ciascuna delle radici u', u", u" sarà = 1; ora questo valore i è già determinato : duoque non abbisognando di cercare la ridotta in u , divido immediatamente il primo membro della (XV) per $x^2 + tx + u$, o più semplicemente per x2 + tx + 1, determino il massimo comun divisore tra le due quantità $t^3+2t^4-t^3-2t^4+5$, t^4+2t^3-5t . le quali altro non sono che i coefficienti delle x1, xº nel residuo, e fatto uguale allo zero il divisor, che si ottiene, l' Equazione $t^3 + 2t^2 - 5 = 0$ ci darà i tre valori t', t'', t'''corrispondenti ad u' = u'' = u'' = 1, e la soluzione delle $x^{2} + t'x + 1 = 0$, $x^{2} + t''x + 1 = 0$, $x^{3} + t'''x + 1 = 0$ ci darà le radici della (XV).

L'operazione praticata presentemente rapporto alla (XV) è chiaro che può tenersi egualmente per l'abbassamento di

una data Equazione reciproca semplice qualunque.

48. Il metodo, che abbiamo stabilito per la determinazione dei coefficienti i, z, ec. dipendentemente dai valori della u (n. 40, e seg.) potrà servici a risolvere il Problema importantissimo del (n.º 142. Teor. delle Equaz.) in altra maniera diversa da quella che ci propone l' immortale Lagrango, e che abbiamo colà esposta.

Data difatti la funzione $u \equiv f(x')$ (x'') (x'') \dots volendosi dipendentemente dai valori di questa i rispettivi valori di un' altra funzione qualunque $t = \varphi(x')(x')(x'')$ \dots ,

suppongo il trinomio

eseguisco nelle. u, t tutte le possibili permutazioni fra le " " ec. x (w) chiamo u', t'; u", t"; u", t"; ec. u(p), t(p) tutti i risultati che ne vengono fra loro corrispondenti, li sostituisco nel trinomio (T), moltiplico insieme le quantità $Z^{2}+t'Z+u', Z^{2}+t''Z+u'', Z^{3}+t'''Z+u''', ec. Z^{3}+t^{(p)}Z+u^{(p)}$ e ugnagliato allo zero il prodotto, onde mi venga l'Equazione $Z^{ij} + a Z^{ij-i} + b Z^{ij-i} + c Z^{ij-j} + ec. \equiv 0$. colloco nei coefficienti a, b, c, ec. in luogo delle u', t', u", t", ec. i rispettivi valori in x', x", x", ec. Ciò fatto, è manifesto che questi coefficienti a, b, c, ec, divengono tante funzioni della forma $f(x', x'', x''', \dots, x^{(m)})$, e che però sono determinabili razionalmente con i coefficienti A. B. C. ec. della data (A): eseguita pertanto una simile determinazione , sieguo ad operare come nei (n. 30, e seg.), e guindi diviso per (T) il primo membro della (V), ed avuto l' avanzo Pz + Y, in cui P = f(t)(u), Y = f'(t)(u), sostituisco in luogo della u il valore u', osservo se in una delle quantità f(t) (u') , f' (t) (u') tutti i coefficienti delle to, ti, te ec. vanno per questo a divenire zero, o nô: se si, l' altra, che rimane, fatta = o pel (1.º n.º 44) ci darà tutti i valori della t corrispondenti ad u'; se nò, cerco fra le f(t) (u), f'(t) (u) il massimo comun divisore, considerando incognita la t. e come nei (cit. n.) avrò infine la Equazione t = F (u). oppur l'altra t1 + VIt + VI = o, oppure la terza t3 + VIt2 + Vat + V3 = 0, ec., secondo che il valore della u, che si prende in considerazione, è disuguale dagli altri tutti, oppure ne uguaglia un solo, o ne uguaglia due, ec. Mediante poi l' Equazione in u già determinata potremo come nei (n.º 30. Ao) eliminare dai coefficienti F (u), V1, V2, V3, ec. tutte le potenze della u di grado > p-1, e ciò fatto, la $t \equiv F(u)$ si convertirà nella (N), gli altri coefficienti VI, V2, V3. ec. acquisteranno delle forme a questa somiglianti .

Queste ultime Equazioni, nei coefficienti delle quali mancano le potenze della u di grado > p - 1, come ancor le Tomo IX. V v v alaltre $t \equiv F(u)$, $t^2 + V_1t + V_2 \equiv 0$, $t^3 + V_1t^2 + V_2t$ -- V3 = o, ec. quelle saranno, che sciolgono il proposto

Problema del (n.º 142. Teor. delle Equaz.) .

Abbiamo esposta la soluzione presente dell' accennato Problema , si perchè se ne è data l'opportunità , e si perchè ci è sembrata piuttosto semplice principalmente nel caso, in cui due, tre, ec. dei valori della u sono uguali fra loro. Se nel trinomio (T) la t ci esprima la funzione data, e la u la richiesta, troveremo, che il calcolo riescirà più semplice, poiche nelle f(t)(u), f'(t)(u) la u ascende ad un grado inferiore al grado, a cui ascende la t.

40. La nostra Equazion di rapporto T' = 1 (n.º 26) abbia la forma indicata nel (IV. Caso 2.º n.º 29) dalla (F), e trascriviamo quivi le Equazioni colà supposte, cioè le

$$\begin{split} z^{j} + g \, z^{j-1} + \mathrm{ec.} + t &= 0 \,, \\ t^{p} + p \, t^{p-1} + \mathrm{ec.} + q &= 0 \,, \\ (\mathrm{XVII}) & q^{q} + t \, q^{i-1} + \mathrm{ec.} + u &= 0 \,, \\ u^{q} + a \, u^{p-1} + b \, u^{p-2} + \mathrm{ec.} &= 0 \,. \end{split}$$

Suppongasi ora risolta l' ultima di queste Equazioni (XVII) , Equazione, la quale pel (III. 2.º n.º 29) sappiamo dover essere razionale, e dipendentemente dai valori u', u'', u''', ec. u(9) suppongansi trovati i valori corrispondenti dei coefficienti t , ec. , si collochino essi nella Equazione penultima , e avuti gli n risultati

 $q' + t'q^{r-1} + ec. + u' \equiv 0, q' + t''q^{r-1} + ec. + u'' \equiv 0,$ $(XVIII)q^p + t'''q^{p-1} + ec. + u'' = 0, ec., q^p + t^{(n)}q^{p-1} + ec. + u^{(n)} = 0.$ moltiplichiamo tutti questi insieme; è chiaro, che ci verrà un' Equazione

 $q^{n_2} + Tq^{n_2-1} + ec. + V \equiv 0$. i coefficienti della quale saranno determinabili razionalmente dai coefficienti della (A). Dai valori q', q", q", ec. q(n) supsupponghismo dedotti i valori rispettivi dei coefficienti p, ec., e fatte le opportune sostituzioni, si moltiplichino fra loro gli

 $l^{\pi} + p'l^{\pi-1} + \text{ec.} + q' = 0, \ l^{\pi} + p'' \ l^{\pi-1} + \text{ec.} + q'' = 0$ (XIX) $l'' + p'' l^{\pi-1} + \text{ec.} + q''' = 0, \text{ec.} l'' + p'^{(n)} l^{n-1} + \text{ec.} + q'^{(n)} = 0,$ onde si abbia l' Equazione

(Y) $l^{nyn} + P l^{nyy-1} + ec. + Q = o$:

ancora i coefficienti di questa saranno funzioni commensurabili dei coefficienti della (a). Ricavati finalmente dai I, I, I, e, e, e, $I^{m_{F}}$) i valori corrispondenti delle quantità g, ec., fatta la solita sostimzione nella prima delle Equazioni (XVII), e moltiplicate insieme le $n \nu \pi$ Equazioni, che se ne ottengono,

 $x^{\beta} + g'x^{\beta-1} + ec. + \ell \equiv 0, x^{\beta} + g'x^{\beta-1} + ec. + \ell' \equiv 0,$ (XX) $x^{\beta} + g''x^{\beta-1} + ec. + \ell' \equiv 0, ec. x^{\beta} + g'^{(n\pi)}x^{\beta-1} + ec. + \ell^{(n\pi)} \equiv 0,$ c) yern in fine un' Equazione

(Z) $x^{n\nu\beta} + Gx^{n\nu\pi\beta-1} + ec. + L = 0$, i coefficienti della quale saranno funzioni anch' essi razionali

dei coefficienti della (A).

Giò presupposto , riflettasi, che pel (VI. caso a.º n.º a.º) tanto nella (F), quanto nelle funzioni $f(x')(x'')(x'')...(x^{(o)})$ esposte nel (IV. caso a.º n.º a.) niuna delle radici, che entrano in una delle funzioni componenti, possono entrare nelle altre. Dunque tutte le radici delle Equazioni (XX) essendo fra loro diverse, l'Equazione (Z) non sarà , che la (A) medesima , e quindi avremo il suo esponente $n\pi\pi\beta=m$. In conseguenza di ciò dovendo la (A) essere abbassabile ad un' Equazione (T), in cui l'esponente

 $n \nu \pi = \frac{m}{6}$, e la radice $l = x' x'' x''' x''' \dots x^{(d)}$; troverò questa ridotta, operando come è stato insegnato nel (n.° 39). Poichè la (Y) è riducibile anch' essa ad un' Equazione (Y) avente l' esponente $n \nu$, e la radice $q = l l'' l'' \dots l'^{(q)}$, col $V_{YY} v_A$ me-

metodo medesimo (n.º 30) determinerò dalla (Y) questa (V). Finalmente essendo ancora la (V) abbassabile alla u" + au" + bu" + ec. = o, determinerò da essa (V) quest' ultima Equazione operando nella solita maniera (n.º 39). Ciò fatto dalle radici u' , u'' , ec. u(a) determinate , sciogliendo la $u^n + au^{n-1} + bu^{n-2} + ec = 0$, determino col mezzo del (n.º 40., e seg.) le Equazioni (XVIII); quindi coi valori q' , q" , q" , ec. q (sr) ricavati dalle (XVIII) trovo le Equazioni (XIX); e finalmente mediante i valori I, I", I", ec. 1 (NFS) radici della (XIX) determinate le Equazioni (XX), la soluzione di queste ultime ci darà tutte le radici della (A) .

Dunque, se tale è il rapporto particolare fra le radici della (A), che siano determinabili delle Equazioni ulteriori di grado sempre inferiore, dalla soluzion delle quali si possa in seguito ottenere più facilmente il valore delle radici x', x", x", ec. x(m); anche in allora il nostro metodo servirà pienamente alla soluzion del Problema, non avendosi perciò che a replicare sulle Equazioni successive le medesi-

me operazioni .

50. Onde poter dire pienamente soddisfatto ai tre importantissimi quesiti, che ci siam proposti a principio, non più rimane, a noi sembra, da considerarsi che un solo caso, c tale è il seguente. Supposte u', u", u", ec. u'(n), u(n+1), u(0+2), ec. u(p) le radici tutte della (C), e tra queste esprimendosi dalle prime n le radici della (D), può succedere, che a cagione dei valori particolari delle x', x", x", ec. x(m) alcune delle u', u'', u''', ec, u''') siano non solamente nonali tra loro, ma che siano uguali ancora ad alcune delle altre $u^{(n+1)}, u^{(n+2)}$, ec. $u^{(p)}$, come se per esempio si voglia u' = $u'' = u^{(n+1)} \equiv u^{(n+2)} \equiv u^{(n+2)}$. Per questo accidente esigonsi delle riflessioni ulteriori; ma essendo questa Memoria riescita già troppo prolissa, serberemo simili riflessioni ad un'

un'altra, nella quale, se per la Dio mercè il potremo, procureremo di aggiungere qualche metodo particolare, onde agevolare maggiormente i calcoli nelle pratiche applicazioni.

Frattanto se mai si voglia che accada l' uguaglianza ora indicata tra i valori della u inservienti alla dimostrazione del Teorema del (n.º 23); se si voglia cioè che là pure alcune delle u', u", u", ec. u(a) radici della Equazione (V) non solo si uguaglino fra loro, ma uguaglino ancera alcuni fra gli altri valori $u^{(n+1)}, u^{(n+2)}$, ec. $u^{(p)}$ della $u \equiv \pm x' x'' x''' \dots x^{(n)}$ come se per esempio si voglia u' ± u(s+1) = u(s+2); quindi sarà necessario osservare per tutta esattezza, se questo caso altera punto la verità del Teorema indicato. Se sia $u' \equiv u^{(n+1)}$ = u(n+1) allora allo stesso valore u' corrispondendo egualmente i tre valori t', t(n+1), t(n+2) della t, i tre z', z(n+1), z(n+2), della z, ec., non potremo più dire immediatamente, che i coefficienti P, ec. della (VII) siano funzioni razionali dei coefficienti g , ec. della (V). In tal caso però dovremo cercare il valore di questi coefficienti P. ec. non già dagli altri g, ec., ma dalla (B), o dalla T = h, che da essa deriva (n.º 20): essendo solamente di numero n i valori della (B) uguali a K . ed essendo i coefficienti P . ec. tante funzioni delle x' , z", x", ec. x(0), che conservano sempre lo stesso valore a tutte quelle permutazioni, per cui hanno luogo le uguaglianze (IV), ne segue, che saranno essi tutti determinabili razionalmente dalla K; ora guesta K è quantità commensurabile (n.º 23); dunque eziandio nell' ipotesi ora fatta le quantità P, ce., e quindi l' Equazione (VII) risulteran razionali. Dunque ancora in questo caso sarà vero il Teorema del (n.º 23), e però ec.

51. Da quanto poi abbiamo detto finora concluderemo,

che , posta (A) Equazione semplice .

1.º Essa non è mai riducibile opportunamente alla propria soluzione, ogniqualvolta il suo esponente m sia numero primo (n.º 34). 2.º Allorche la (A) è abbassabile, potrà sempre determination in Equazione, l'esponente della quale sia un divisore esatto dell'esponente m della data, e supposto n'esponente della ridotta, ed m = \mu n, la soluzione di due Equazioni, la prima di grado n, la seconda di grado n' ci daranno
il valore di tutte le radici s', x', x', x', ce, x''' (n° 35).

3.º Nella ipotesi, che m abbia più di due divisori, come nel caso di $m \equiv n_F \pi_{\beta}$, potrà darià a cagione di particolar rapporto fra le x', x'', x'', ec. $x^{(m)}$, che si ottenga il valore di queste radici con la soluzione di tante Equazioni, i gradi delle quali vengano espressi da tutti i fattori $n_F \nu_F \pi_F \beta$

dell' esponente m (n.º 49).

4.º So le ultime Equazioni ottenute nella riduzione rischiano tutte di grado < 5, allora potremo attualmente accer la soluzione della data, ma se qualcuna delle Equazioni accenuate diventa di grado non < 5, ed è insieme irreducibile a grado inferiore; allora diremo, che la data (A) quantunque abbassata di grado, pure è incapace di soluzione. Ciò non pertanto, anche nel caso che le ridotte divengano di grado > 4, non dobbiamo già credere, che l'e eseguito abbassamento sia inutile; essendo le ridotte di grado minore del grado della data, potremo più agevolmente, applicare ad esse i metodi di approssimazione.

5.º Il metodo da Noi stabilito nei (n. 35, 36, 30, ec.) ci dimostra non solamente quali Equazioni sono abbassabili opportunamente alla propria soluzione, e quali nò; ma ci somministra ancora nelle prime tra queste l'abbassamento attuale: dai medesimi (n. 35, 36, 30, ec.) apprendiamo in seguito, come dalle radici della ridotta possiano ricavare

le radici della proposta.

6.º Succeda, o nò tra i valori della u il caso del (n.º 50), la ridotta (D) è sempre determinabile col nostro metodo, mentre la data (A) sia capace di abbassamento opportuno alla propria soluzione.