

SUL PROBLEMA DEGLI APPOGGI

DEL MEDESIMO

Ricciuta il dì 9. Luglio 1801.

Dopo la mia Memoria su di questo argomento pubblicata nel volume VI. della Società Italiana sono comparse alla luce tre altre Memorie sull' istesso soggetto, la prima delle quali è stata inserita nel Tomo VII. dal Sig. Cav. Lorgna, e delle altre due contenute nel Volume VIII. una appartiene al Sig. Delanges, che prima di me, cioè nel Tomo V., si era già occupato nella soluzione di questo Problema, e l'altra al Sig. Malfatti. La soluzione del Cav. Lorgna è appoggiata ad una ipotesi così capricciosa, che sembra impossibile sia per essere da alcuno abbracciata; onde si rende inutile qualunque esame di essa. Quella del Sig. Delanges formerà specialmente il soggetto delle mie riflessioni; poichè siccome essa contiene alcuni risultati, i quali sono affatto contrarj a quelli da me ottenuti e pubblicati nella mia Memoria, è certo che o Egli, o io ci siamo ingannati, ed io voglio tentare, se è possibile, di difendere le mie proposizioni. Questa discussione si rende facile ed evidente; perchè si tratta specialmente di un affare di calcolo, riducendosi quasi tutto a vedere, se io ho data una dimostrazione paralogistica, o se Egli si è ingannato in una prova particolare, con cui ha voluto confermare il risultato della sua soluzione, e farlo comparire diverso da quello, che avevo dimostrato dover essere.

Nella mia Memoria, in luogo di cercar le pressioni esercitate sopra i punti di appoggio da un corpo sostenuto sopra un piano immobile, avevo per più semplicità sostituite alle pressioni ne' punti di appoggio delle forze attive in senso contrario, e cercato l' equilibrio di un piano mobile spinto da una parte da queste forze attive, e dall' altra dal peso del

del corpo. Il Sig. Delanges convenendo meco sulla soluzione di quest'ultimo problema asserisce però, che esso è di una natura del tutto differente dal primo, il quale è sempre determinato, quando all'opposto il secondo non è determinato, che nel solo caso di tre forze, e queste non situate in diritto. Mi è molto facile di rispondere a ciò, che non ho io capricciosamente confuso un problema coll'altro, ma che sono stato autorizzato a farlo, dopo che il sommo Geometra Lagrange con la più evidente e rigorosa metafisica ha generalmente dimostrato nella sua Meccanica Analitica, che si potevano in ogni caso sostituire alle pressioni eguali forze attive in senso contrario, senza che ne venissero in alcun modo alterate le condizioni dell'equilibrio. Ed infatti, se applico il principio delle velocità virtuali al problema considerato nell'aspetto, in cui lo prende il Sig. Delanges, giungo a que' medesimi risultati, che ho ottenuti nella maniera contemplata da me.

Ma quello, che fa maraviglia, si è, che avendo trovato il Sig. Delanges le mie formole esser d'accordo con le sue nel caso di tre appoggi, neghi poi questo consenso nel caso di un maggior numero di appoggi, per esempio di quattro. Eppure, avendo io dimostrato, che si potevano assumere per assi di rotazione quei, che più piacevano, allorchè nel paragrafo VIII. della mia Memoria prendo quelli, che considera il Sig. Delanges, giungo nel caso di quattro appoggi alle medesime equazioni, che sono state da lui ottenute. Posto ciò, come mai può Egli accordare, che il problema è indeterminato nel mio senso, quando nel suo lo sostiene determinato? Io dichiarai il problema indeterminato, perchè dimostrai, che i moti di rotazione non potevano riferirsi, che a soli tre assi, e che l'equazione ottenuta dalla considerazione di un quarto asse era necessariamente compresa nelle altre tre. Il Sig. Delanges, siccome è nella persuasione, che abbiamo trattati due problemi diversi, in luogo di attaccare la mia dimostrazione, ha adesso voluto corroborare il suo

suo sentimento calcolando un caso particolare di quattro appoggi, in cui risultano le pressioni dedotte dal suo metodo sotto una forma affatto determinata. Confesso, che sono stato per qualche tempo inquieto e dubbioso, poichè per una parte trovavo esatto il calcolo numerico del Sig. Delanges, per l'altra non incontravo alcuna difficoltà nella mia dimostrazione, la quale sapevo ancora essere stata approvata dal Sig. Malfatti. Finalmente per escir d'incertezza avendo ripresi da principio tutti i calcoli vidi, che era occorso uno sbaglio nelle formole generali date dal Sig. Delanges nella sua prima Memoria. Infatti trovai, che il denominatore comune ai valori delle quattro pressioni, invece di quello descritto nella citata Memoria, era il seguente

$(h\delta\omega + \varepsilon p\lambda - l p\delta)m + (gh\gamma + ln\delta - gn\lambda)q + f\omega(n\lambda - h\gamma) + flp\gamma;$
 e così pure sono diversi i numeratori, perchè quello per esempio, che corrisponde alla pressione sul punto A, si trova essere

$(dl\omega + \varepsilon p\lambda - a\lambda\omega - dl p)m + (dl n + ch\gamma - cn\lambda - a\lambda\gamma)q$
 $b\omega(n\lambda - h\gamma) + b l p\gamma.$

Avendo fatte le convenienti correzioni a tutte queste formole ho poi verificato, che non solo nel caso particolare contemplato dal Sig. Delanges, ma generalmente in tutti i casi i valori delle pressioni si riducono alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Ometto questo calcolo, perchè non ha altra difficoltà

che la lunghezza, e non esige che un poco di diligenza nel ridurre a coseni di archi multipli i prodotti de' coseni, onde meglio comparisca l'estinzione dei varj termini.

Il problema, che è generalmente determinato nel caso di tre appoggi, cessa di esserlo, quando i tre appoggi sono situati in linea retta. Il Sig. Delanges però vorrebbe farlo comparire determinato nel problema V., il quale suppongo che si abbia avanti gli occhi insieme con la fig. IV., che vi ha relazione. Ma io non so, se i Geometri troveranno buone le ragioni, per le quali esclude dalla terza equazione il

momento di rotazione dell'appoggio B; anzi mi sembra, che escludere questo momento sia lo stesso, che supporre in principio nulla la pressione in B. Poichè se questa pressione ha qualche valore, la di lei reazione sul vette AB deve necessariamente produrre un momento di rotazione, e qualora questo si trascuri, si viene a supporre ciò, che volevasi dimostrare, cioè che la pressione in B è nulla. Tutto ciò si oppone alla regola generale di sopra rammentata, per la quale alle pressioni si possono sostituire eguali forze attive in senso contrario.

Passiamo a dir qualche cosa della soluzione del Sig. Malfatti, la quale, per quanto contenga riflessioni molto acute, e calcoli assai pregevoli, mi sembra però che non oltrepassi di molto i confini di una ipotesi ingegnosa. Primieramente non so, se possa ammettersi senza prova quel sistema di vetti, col mezzo dei quali Egli determina le pressioni su i diversi punti di appoggio. Le leggi generali dell'equilibrio di qualunque sistema di corpi sono quelle, per le quali è impedito al sistema qualunque moto progressivo, o di rotazione, e da queste discende per corollario la regola dei vetti. Onde, quando esiste un dato sistema di vetti, è evidente che la Natura debba distribuire le sue pressioni secondo la legge di questi vetti. Ma allorchè questi vetti non esistono, il supporre un sistema, e immaginarsi che la Natura debba regolarsi nella distribuzione delle sue azioni, come se un tal sistema esistesse, è ciò che ha bisogno di dimostrazione. Infatti nella mia Memoria credei di dover provare, che combinava coll'equazioni generali dell'equilibrio lo ammettere quei vetti, che il Sig. Bossut supponeva nella sua soluzione.

In secondo luogo mi sembra, che il Sig. Malfatti abbia attribuito all'analogia infinitamente più di quello gli sia mai stato accordato. Per quanto in oggi si procuri di ottenere dimostrazioni generali e rigorose, pure in mancanza di esse non di rado succede, che dall'aver dimostrato, che la medesima legge regna costantemente in molti casi particolari,

si deduce per induzione, che essa abbia luogo per tutti i casi, specialmente quando apparisca, che la dimostrazione usata per i casi contemplati possa applicarsi anche a ciascuno degli altri casi. Ma che da un solo caso dimostrato si deducano per analogia tutti gli altri, è questo un metodo di ragionare del tutto inusitato in Matematica, e di cattivo esempio, perchè potrebbe condurre a gravissimi errori. Infatti si osserva, che un caso solo di rado conduce a quella legge, che si cerca, la quale per lo più accade di rinvenire dal paragone di varj casi.

Tale è il metodo del Sig. Malfatti: avendo Egli dimostrato il valore delle pressioni nel caso di tre appoggi, a somiglianza di esse senza alcun'altra dimostrazione compone le funzioni, che rappresentano il valore delle pressioni nel caso di quattro, e più appoggi. Queste funzioni si riducono alle formole dimostrate, quando gli appoggi sono tre, e soddisfanno per altra parte ad alcune condizioni dedotte dal principio della ragione sufficiente. Ma è facile il comprendere, che la ricerca di queste funzioni è un problema indeterminato, e che se ne potrebbero formare infinite altre, le quali avessero le medesime proprietà, e soddisfacessero alle medesime condizioni. Ora per qual motivo se ne dovrà ammettere una forma a preferenza delle altre? Bisognerebbe, che il Sig. Malfatti adducesse almeno qualche ragione per escluderle tutte, fuorchè quella, che è stata da Lui adottata.

In conferma della indeterminazione di questo problema; io ne assegnerò una soluzione diversa da quella del Sig. Malfatti, alla quale giungo usando un discorso simile a quello tenuto da Lui. Osservo che nel caso di tre appoggi il numeratore della pressione sopra un appoggio è il prodotto delle due distanze dal peso agli altri appoggi moltiplicato nel seno dell'angolo da esse contenuto. Così per analogia posso pensare, che nel caso di quattro appoggi il numeratore della pressione sopra uno di essi contenga tutti gli ambi delle distanze dal peso agli altri appoggi; moltiplicati ciascuno nel

seno dell'angolo da esse distanze formato. In tal caso, ritenute le denominazioni del Sig. Malfatti, le pressioni sarebbero così espresse:

$$\text{Pr. in A} = \frac{bc \text{ sen.} l + cd \text{ sen.} g + bd \text{ sen.} (l + g)}{S}$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{cd \text{ sen.} g - ad \text{ sen.} (i + l + g) - ac \text{ sen.} (i + l)}{S}$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{ab \text{ sen.} i - ad \text{ sen.} (i + l + g) - bd \text{ sen.} (l + g)}{S}$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{ab \text{ sen.} i + bc \text{ sen.} l + ac \text{ sen.} (i + l)}{S}$$

essendo S la somma dei numeratori.

Ora io dico, che queste formole soddisfanno alle medesime condizioni, le quali si verificano in quelle del Sig. Malfatti. Per provarlo cada primieramente il punto F sul punto C; sarà $d=c$, $g=0$; sostituiti i quali valori avremo

$$\text{Pr. in F} + \text{Pr. in C} = \frac{2ab \text{ sen.} i}{S}, \text{Pr. in A} = \frac{2bc \text{ sen.} l}{S},$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{-2ac \text{ sen.} (i + l)}{S},$$

che sono appunto le formole dimostrate per tre appoggj.

Passiamo a considerare il caso del homisco facendo $d=a$, $c=b$, $g=i$, ed avremo

$$\text{Pr. in A} = \frac{b^2 \text{ sen.} l + ab \text{ sen.} i + ab \text{ sen.} (i + l)}{S}$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{ab \text{ sen.} i - ab \text{ sen.} (i + l) - a^2 \text{ sen.} (2i + l)}{S}$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{ab \text{ sen.} i - a^2 \text{ sen.} (2i + l) - ab \text{ sen.} (i + l)}{S}$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{ab \text{ sen.} i + b^2 \text{ sen.} l + ab \text{ sen.} (i + l)}{S}$$

onde in primo luogo apparisce essere $\text{Pr. in A} = \text{Pr. in C}$, e $\text{Pr. in E} = \text{Pr. in F}$. Poi usando le medesime riduzioni, che adopra il Sig. Malfatti, troveremo

$$\text{Pr. in A} = \frac{b \cos. \frac{l}{2} [b \text{ sen. } \frac{l}{2} + a \text{ sen. } (i + \frac{l}{2})]}{2 [b \text{ sen. } \frac{l}{2} + a \text{ sen. } (i + \frac{l}{2})] [b \cos. \frac{l}{2} - a \cos. (i + \frac{l}{2})]}$$

$$\text{cioè Pr. in A} = \frac{b \cos. \frac{l}{2}}{2 [b \cos. \frac{l}{2} - a \cos. (i + \frac{l}{2})]},$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{-a \cos. (i + \frac{l}{2})}{2 [b \cos. \frac{l}{2} - a \cos. (i + \frac{l}{2})]}, \text{ che sono i me-}$$

desimi valori ottenuti da Lui. Le formole precedenti adunque, e quelle del Sig. Malfatti rappresentano con egual probabilità le leggi della Natura.

Del resto confesso, che per l'esame, che ne ho fatto, non ho trovato nelle di Lui formole alcuna contradizione con i principj ricevuti; onde potrebbe darsi che fossero esatte, e che fosse ad esso riescito d'indovinare il segreto della Natura: dico soltanto, che fin qui non vedo alcuna ragione, che me lo dimostri. E dopo i varj tentativi, che sono stati fatti per risolvere il problema degli appoggj mi confermo sempre più nella mia opinione; che, finchè non sarà scoperto qualche nuovo principio di Statica, quelli, che finora si conoscono, saranno insufficienti a determinare le pressioni sofferte da più di tre appoggj, a meno che non si unisca ad essi qualche particolare supposizione.