SULLA DETERMINAZIONE A PRIORI DEL VALORE DELL' EQUAZIONE DEL TEMPO.

Di Francesco Pezzi.

Ricevuta li 8. Ghiacciajo An. VII. (28. *Novembre* 1798.)

1. Il C. *Lalande* ha inserita una sua memoria in quelle dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' Anno 1762, in cui ha voluto rilevare un errore commesso secondo lui, dall' Insigne Astronomo *La Caille* nel convertire in tempo *l' equazione del tempo*.

2. Ecco il passo citato dal Chiarissimo la Lande, e che ha dato luogo all' accennata memoria.

„ Hæc tabula est æquatio centri Solis, in tempus so-
„ lare medium conversa, quam quidem, ut & differentiam
„ inter longitudinem Solis veram & ascensionem ejus rectam
„ veram, quæ in tabula sequente adhibetur, plerique Ca-
„ nonum Astronomicorum artifices in tempus siderale, seu
„ primi mobilis, minus accurate solent convertere. „

3. Non v' ha dubbio che per tempo solare medio, *La Caille* non intendeva, come lo fa vedere chiaramente *Lalande* nella mentovata memoria, che il tempo conosciuto sotto tale nome da tutti gli Astronomi, e che corrisponde a 24 ore medie per $360^\circ\ 59'\ 8'', 3$.

4. Il C. *Lalande* stabilisce invece doversi ridurre in tempo sidereo o del primo mobile, cioè a ragione di 15° per ora, la differenza fra l' ascensione retta vera del Sole, e la sua ascensione retta media: differenza chiamata dagli Astronomi *equazione del tempo*. Si prescinde quì dalla 3ª parte di tale equazione, comechè nulla influisca nella presente quistione.

5. Il nome di questi due Celebri Autori, l' uso costante di tutti gli Astronomi, i quali convertono in tempo la nominata differenza a ragione non di $15^\circ\ 2'\ 28''$ ma solamente di 15° per ora, m' ha fatto nascere l' idea di cercare la dimostrazione *a priori*, d' una somigliante riduzione in tempo, giacchè le prove addottene dal C. *Lalande* nella già

riferita memoria sono di fatto, e non illuminano a mio giudizio la mente su i principj di quella conversione: ciò che potrà verificarsi in virtù della seguente breve e fedele esposizione.

6. Il C. *Lalande* prova la suddetta conversione a ragione di 15° per ora col mezzo de' due esempj che seguono.

Nel primo egli suppone il Sole vero ed il Sole medio distanti l' uno dall' altro di 4° sopra l' equatore, ed osserva che ciò avendo luogo nel principio di Novembre, tempo in cui i due Soli non cambiano sensibilmente di distanza fra di loro nelle 24 ore, allora ciascuno di essi impiegherà a descrivere 360° un intervallo di 24 ore esattamente. Dunque i 4° della distanza che havvi dall' uno all' altro, importeranno esattamente 16 minuti a passare sotto il meridiano: dunque l' *equazion* sarà di 16′ 0″ e non di 15′ 57″, come lo sarebbe in ragione di 24 ore per 360° 59′ 8″,3.

7. Nel secondo esempio il lodato Astronomo cerca il caso in cui i quattro gradi in quistione non dovrebbono fare che 15′ 57″ di tempo, e sarebbe quello in cui una Stella precedendo un' altra di 4°, si dimanderebbe l' intervallo de' loro passaggi al meridiano. Allora siccome gli Astri non impiegano che 23ʰ 56′ 4″ sull' orologio del tempo medio, egli è chiaro che i 4° corrispondono a 15′ 57″ e non a 16′ di tempo, quindi l' una precederà l' altra di 15′ 57″. Ma i 4° esprimenti la distanza de' due Soli non potrebbono essere tradotti che in 16′ di tempo, poichè il Sole descrivendo 360° in 24 ore per ritornare al meridiano, non si potrebbe dire come nell' ipotesi de' due Astri che il ritorno al meridiano esigendo meno, bisogna contar meno di 16′ per 4 gradi. Sinquì il dottissimo Lalande.

8. Il breve calcolo che ci darà la soluzione di questo problema ci farà vedere che la famosa regola degli Astronomi per la conversione del tempo a ragione di 15° per ora, non è che un risultato algebrico, corrispondente all' ipotesi della differenza fra l' ascensione retta vera del Sole, e la sua ascensione retta media, prese ciascuna nel momento del mezzodì vero. A tal che se *La Caille* intendeva per la differenza delle due mentovate ascensioni rette, quella che dipende dal loro valore preso per ciascuna nell' istan-

te del mezzodì rispettivo, allora la di lui regola è conforme alla verità: se poi questo Celebre Astronomo abbia intesa in tale senso la suddetta differenza, ne giudichino coloro che possedono le sue tavole Astronomiche, delle quali son privo. Ma il C. *Lalande* non avendo rilevata nella sua memoria questa ragione intrinseca dei due mentovati diversi modi di trasformare gli spazj dell' equatore in tempo, mi sono incoraggito a presentarne il calcolo alla Società Italiana, argomento tenue bensì, ma opportuno onde rinnovar con essa la mia corrispondenza matematica, troppo lungo tempo da estranee cause interrotta.

9. Cerchisi *direttamente* l' equazione del tempo.

Sia a quest' oggetto NO (Fig. 2.) l' ecclittica, NA l' equatore, N la sezione d' Ariete, O il Sole vero sopra il meridiano OA; S ovvero S' il Sole medio, che ritarda ovvero accelera su quello; $NA = A =$ ascensione retta vera all' istante del mezzodì vero; NB ovvero $NB' = a =$ longitudine media o ascensione retta media del Sole medio nello stesso istante. Il moto di rotazione della terra è tale che $360° 59' 8'',3$ prossimamente passano al meridiano in 24 ore che diconsi medie. Si faccia attenzione che nell' intervallo di tempo impiegato dal Sole S dal punto B. a venire sotto il meridiano, la sua longitudine media NB aumenterà di una quantità BD dovuta al passaggio dell' arco AB sotto il meridiano AO, non comprendendo in quest' arco il di lui accrescimento BD, il quale passerà sotto il meridiano alla fine dello stesso intervallo di tempo. Similmente quando il Sole medio precede il Sole vero, e che il primo sarà in S' per esempio, all' istante del mezzodì vero, l' arco AB' non sarà il solo arco passato sotto il meridiano AO, ma bensì AB' + un altro arco dovuto al passaggio dell' arco AB' sotto il meridiano, non comprendendo in tale arco il di lui accrescimento in quistione B'G. Per trovare BD ovvero B'G, si farà, chiamando O il moto diurno medio $59' 8'', 3$ del Sole in ascensione retta, $360° : O :: \pm a \mp A : BD$ ovvero $B'G = \frac{O(\pm a \mp A)}{360°}$; onde l' arco totale che sarà passato sotto il meridiano, arco ch' è la differenza delle due mentovate ascensioni rette, ma prese ciascuna nel valore corrispondente al mezzodì rispettivo, sarà $AB + BD$ nel primo caso, e $AB' + B'G$ nel secondo, $= \pm a \mp A + \frac{O(\pm a \mp A)}{360^\circ} = \frac{(360^\circ + O)(\pm a \mp A)}{360^\circ}$; Or egli è evidente che per trovare il tempo per AD o AG, bisognerà fare $360^\circ + O : 24^{or} :: \frac{(360^\circ + O)(\pm a \mp A)}{360^\circ} : T = \frac{24^{or}(\pm a \mp A)}{360^\circ} = \frac{1^{or}(\pm a \mp A)}{15^\circ}$ . . . (1), ch' è l'equazione del tempo di cui si servono gli Astronomi.

10. Quindi la durata T in tempo medio del giorno vero sarà $24^{or} \pm \frac{24^{or}(\pm a \mp A)}{360^\circ}$; $+$ ovvero $-$ la Frazione secondo che $A >$ ovvero $< a$; cioè $T = \frac{24^{or}(360^\circ + A - a)}{360^\circ} = 24^{or} + \frac{1^{or}(A - a)}{15^\circ}$ . . . . . (2); e l' equazione del tempo $\frac{1^{or}(A - a)}{15^\circ}$ sarà additiva o sottrattiva secondo che $A >$ o $< a$.

11. Ecco come nella pratica dell' Astronomia non si considera che l' arco che separa i due Soli nell' istante del mezzodì vero; arco eguale alla differenza delle due ascensioni rette corrispondenti ciascuna al momento del mezzo giorno vero: e abbiam veduto che quest' arco riceve poi un accrescimento dovuto alla longitudine media del Sole, la quale aumenta nell' intervallo di tempo che passa fra l' appulso dell' uno e dell' altro Sole al meridiano: ma la differenza delle due ascensioni rette prese ciascuna nel momento del mezzodì rispettivo, dee essere convertita in tempo a ragione di $360^\circ\ 59'\ 8'',3$, come apparisce dalla seconda proporzione del N.° 9.; differenza poi che in virtù della divisione che esige la suddetta proporzione, si trasforma in quella che corrisponde al mezzodì vero, e quindi si scioglie allora in tempo a ragione di 15° per ora: ciò ch' è la prova di quanto ho detto al N.° 8.

12. Si dimandi ora la differenza fra il giorno vero ed il giorno medio.

Prima di cercare tale differenza per mezzo di quella delle due ascensioni rette, vera e media, che forma propriamente il nostro oggetto, premetto la seguente maniera.

Supposti i centri dei due Soli partire nello stesso tempo, l' uno dal punto O, l' altro dal punto A, presi nello stesso meridiano OA, sia s il moto diurno vero del Sole in ascensione retta; egli è evidente che in virtù del passaggio al meridiano dei $360° + O$ nelle 24 ore medie, si ha subito la durata dal giorno vero in tempo solare medio, per la proporzione seguente

$$360° + O : 24^{or} :: 360° + s : T = \frac{24^{or}\,(360° + s)}{360° + O} \ldots (3).$$

d' onde si ha la differenza cercata $\pm 24^{or} \mp \frac{24^{or}\,(360° + s)}{360° + O}$

$$= \frac{24^{or}\,(\mp O \pm s)}{360° + O} \ldots (4).$$

Vengo alla differenza delle ascensioni rette ed osservo che l' ascensione retta vera del Sole, all' istante del suo ritorno al meridiano è $NA = A + s$: se il Sole medio ritarda sul vero, e ch' egli sia in S per es. al momento del mezzodì vero, la sua ascensione retta media sarà NB, ed il suo moto diurno medio in ascensione retta $= AB$, all' istante del mezzodì: si ha AB facendo

$$360° + O : O :: 360° + s : AB = \frac{O(360° + s)}{360° + O}, \text{ dunque}$$

$$NB = NA + AB = A + \frac{O(360° + s)}{360° + O} \ldots (5)$$ ed è la longitudine media del Sole medio all' istante del mezzodì vero.

14. Se il Sole medio accelera sopra il vero, e che il primo sia in S' per es. quando il secondo è nel meridiano, allora la longitudine media sarà $NA +$ il moto diurno medio s in ascensione retta $+$ l' aumento GB' dovuto al passaggio dell' arco totale che passerà al meridiano dopo mezzodì medio sino a mezzodì vero, e quest' arco è evidentemente eguale alla differenza $s - O$ de' due moti diurni in ascensione retta vera ed in ascensione retta media, ciascuna di esse essendo presa nell' istante del mezzodì rispettivo, si avrà dunque $360° + O : O :: s - O : GB' = \frac{O(s - O)}{360° + O}$;

dunque la longitudine media sarà nell' istante del mezzodì vero $NB' = A + O + \frac{O(s - O)}{360^\circ + O} = A + \frac{O(360^\circ + s)}{360^\circ + O} \ldots (6)$ quantità della stessa forma che quella segnata (5).

15. Or la differenza fra l' ascensione retta vera e media, è nel primo caso $AB = NB - NA = A + \frac{O(360^\circ + s)}{360^\circ + O} - A - s = \frac{360^\circ (O - s)}{360^\circ + O}$, e nel secondo caso, essa sarà $AB' = NA - NB' = A + s - A - \frac{O(360^\circ + s)}{360^\circ + O} = \frac{360^\circ (s - O)}{360^\circ + O} \ldots (7)$; quindi la differenza cercata è in ambi i casi nell' istante del mezzodì vero $\frac{360^\circ (\pm O \mp s)}{360^\circ + O} \ldots (8)$.

Dunque la differenza fra il giorno vero ed il giorno medio si ha dalla seguente proporzione $360^\circ : 24^{or} :: \frac{360^\circ (\pm O \mp s)}{360^\circ + O} : t = \frac{24^{or} (\pm O \mp s)}{360^\circ + O} \ldots (9)$. E la lunghezza T del giorno vero in tempo medio sarà $24^{or} \mp \frac{24^{or} (\pm O \mp s)}{360^\circ + O} = \frac{24^{or} (360^\circ + s)}{360^\circ + O} \ldots (10)$, risultato identico con quello segnato (3).

16. L' equazione (9) fa vedere che per conoscere la differenza fra un giorno vero ed un giorno medio, bisogna ridurre in tempo a ragione di 24^{or} non per 360°, secondo la regola dell' equazione del tempo, ma per $360^\circ\, 59'\, 8'',3$ la differenza $\pm O \mp s$ fra il moto diurno medio del Sole ed il suo moto diurno vero in ascensione retta: conversione che viene così prescritta da *La Caille* nella sua Opera immortale, intitolata Lezioni Elem. di Astr. artic. 465. ediz. di Parigi 1780 presso la vedova Dessaint. Di sopra abbiam veduto che la ragione n'è, perchè ciascuno di questi moti diurni viene quì preso nel momento del rispettivo mezzodì.

17. Per i stessi principj si calcolerebbe con somma facilità, e rigorosamente il passaggio d' una Stella o d' un Pianeta al Meridiano, senza ricorrere alle diverse correzioni impiegate praticamente dagli Astronomi. Sia O una Stella sul meridiano OA, S ovvero S' il Sole che ritarda o accelera il suo passaggio rapporto a quella; la differenza del-

le ascensioni rette sarà AB ovvero AB' nel momento in cui l'astro è al meridiano: la quantità di cui cresce l'ascensione retta media del Sole nell'intervallo de' due passaggi al meridiano è BD ovvero BG' $= \frac{s(\text{AB ovvero AB}')}{360^\circ}$; dunque l'arco totale che passerà in simile intervallo di tempo sarà AB + BD ovvero AB' + B'G cioè $\frac{\text{AB ovvero AB}'(360^\circ + s)}{360^\circ}$;

dunque $360^\circ + s : 24'' :: \frac{\text{AB ovvero AB}'(s + 360^\circ)}{360^\circ} : T = \frac{24''\ \text{AB ovvero AB}'}{360^\circ} \ldots (11)$.

La formola precedente fa vedere, che per trovare il tempo del passaggio di un astro al meridiano bisogna ridurre in tempo, a ragione di 15° per ora, la differenza fra l'ascensione retta vera del Sole e quella dell'astro, prese ciascuna nell'istante in cui l'astro è al meridiano.

18. Ma siccome nella pratica dell'Astronomia si calcola questa differenza per l'istante del mezzodì vero, ciò che dà luogo alle correzioni che ho mentovate qui sopra, così per liberarsi dalle medesime, basta sostituire nella proporzione precedente il semplice arco AD ovvero AG ch'esprime l'accennata differenza nell'istante del mezzodì vero. Chiamisi D questa differenza, si avrà $T = \frac{24''\,D}{360^\circ + s} \ldots (12)$, tempo esatto del passaggio.

19. Il tempo del passaggio di un Pianeta si troverebbe con eguale facilità. Sia D la differenza fra l'ascensione retta vera del Sole e quella del Pianeta nell'istante del mezzodì vero; P il moto diurno del pianeta in ascensione retta; X l'arco dell'equatore che passerà al meridiano nell'intervallo del passaggio del Sole e del Pianeta al meridiano: l'arco X è evidentemente eguale all'arco D, più l'accrescimento dovuto al moto diurno del Pianeta corrispondente al mentovato intervallo di tempo: egli è chiaro che per trovare questo accrescimento basterà fare

$360^\circ + s : P :: X : \frac{PX}{360^\circ + s}$; dunque $X = D + \frac{PX}{360^\circ + s}$;

d'ond' onde $X = \frac{D(360^\circ + s)}{360^\circ + s - P}$; quindi

$$360^\circ + s : 24^{or} :: \frac{D(360^\circ + s)}{360^\circ + s - P} : T = \frac{24^{or} D}{360^\circ + s - P} \dots (13).$$

20. Con pari facilità si troverebbe una Formola de' passaggi de' Pianeti, sotto diversi meridiani: basta sostituire, nella Formola precedente, a D la differenza delle due ascensioni rette vere corrispondente al meridiano in quistione. Sia d l' arco intercetto fra il meridiano delle tavole ed il nuovo meridiano: sia per un momento d occidentale relativamente al meridiano delle tavole; l' ascensione retta vera del Sole crescerà d' una quantità eguale al 4° termine della proporzione $360^\circ : s :: d : \frac{sd}{360^\circ}$; similmente l' ascensione retta vera del pianeta crescerà d' una quantità rappresentata dal 4° termine della proporzione $360^\circ + s : P :: d + \frac{sd}{360^\circ} : \frac{Pd}{360^\circ}$; dunque la differenza fra le due ascensioni rette vere sarà $D + \frac{Pd}{360^\circ} - \frac{sd}{360^\circ} = D + \frac{(P-s)d}{360^\circ}$: se il nuovo meridiano è orientale, allora l' ascensione retta vera del pianeta è minore di quella che corrisponde al meridiano delle tavole della quantità $\frac{Pd}{360^\circ}$, e l' ascensione retta vera del Sole è similmente minore della quantità $\frac{sd}{360^\circ}$; dunque la differenza delle due ascensioni rette vere sarà $D - \frac{Pd}{360^\circ} - (-\frac{sd}{360^\circ}) = D + \frac{(s-P)d}{360^\circ}$: ed in generale tale differenza sarà $D \pm \frac{(P-s)d}{360^\circ}$; dunque il tempo cercato sarà $T = \frac{24^{or}\left(D \pm \frac{(P-s)d}{360^\circ}\right)}{360^\circ + s - P} \dots (14)$; + ovvero — secondo che il meridiano in quistione è all' occidente, ovvero all' oriente del meridiano tabulare, rapporto a cui

la differenza delle due ascensioni rette vere è D nell'istante di mezzodì.

21. Se $P = 0$, allora la Formola precedente darà il tempo del passaggio d'un astro a un meridiano diverso da quello delle tavole, e si avrà $T = \frac{24^{or}\left(D \mp \frac{sd}{360^\circ}\right.}{360^\circ + s - P} \cdots (15)$; — ovvero + secondo che il nuovo meridiano è all' occidente ovvero all'oriente del meridiano delle tavole.

22. D'onde si vede che se il tempo del passaggio d'un pianeta ad un meridiano occidentale per es. rapporto al meridiano tabulare è maggiore del tempo per quest' ultimo meridiano, quello del passaggio d'un astro invece è minore del tempo per il meridiano delle tavole, e *vice versa* se il nuovo meridiano è all' oriente del tabulare. Spero che i Geometri miei colleghi mi scuseranno di aver forse allungata di troppo questa memoria, in favore della esattezza con cui ho cercato di sviluppare questi principj, che pur sono fra i fondamenti di tutta l'Astronomia.