DELLA INTEGRAZIONE DELL' EQUAZIONI A DIFFERENZE PARZIALI FINITE ED INFINITESIME.

Di Pietro Paoli.

Ricevuta li 26. Gennajo 1799.

I Geometri di questo secolo hanno con tutto l' impegno coltivata l' importante Teoria dell' equazioni lineari a differenze parziali tanto infinitesime, che finite. L' integrazione delle prime ha ad essi somministrato il mezzo di risolvere gli astrusi problemi della Meccanica de' corpi flessibili e fluidi; con quella delle seconde hanno promossa la Teoria delle Serie Ricorrenti, e perfezionata la dottrina delle probabilità. In questa Memoria io prendo a considerare un' altra classe d' equazioni, le quali contengono insieme le differenze parziali e finite ed infinitesime, cioè, se z è una funzione delle variabili x, y, t, &c., l' equazioni lineari tra z, e le sue differenze finite prese relativamente ad alcune delle variabili x, y, t, &c., ed i differenziali della medesima funzione presi per rapporto al rimanente delle variabili x, y, t, &c. Parmi che il gran Geometra *Laplace* sia il solo, che abbia dato l' integrale di alcuna di quest' equazioni, applicandovi il suo ingegnosissimo metodo delle *funzioni generatrici* nel Volume dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1779. L' integrazione di quest' equazioni non è un oggetto di vana speculazione, ma è dotata di varj usi importanti, e da essa dipende la soluzione diretta di molti problemi relativi alle serie. Perciò ho tentato di promovere in questo Opuscolo la Teoria delle medesime equazioni, e di adattare ad esse quelli artifizj, che l' Analisi ha inventati per trattare le altre equazioni, e specialmente quei metodi, che per la integrazione dell' equazioni a differenze parziali solamente finite sono stati immaginati dal sommo Geometra *Lagrange*.

ARTICOLO I.

Dell' equazioni tra tre variabili.

1. Sia u una funzione qualunque di y, la quale ordinata per le potenze di y, ci dia la serie $u = \varphi.0 + y\varphi.1 + \frac{y^2}{2}\varphi.2 + \frac{y^3}{2.3}\varphi.3 + \frac{y^4}{2.3.4}\varphi.4 +$ &c. in modo che il termine generale di questa serie sia $\frac{y^x}{1.2...x}\varphi.x$. Se differenziamo x volte questa equazione per rapporto ad y, avremo $\frac{d^x u}{dy^x} = \varphi.x + y\varphi(x+1) + \frac{y^2}{2}\varphi(x+2) + \frac{y^3}{2.3}\varphi(x+3) +$ &c. Facciamo adesso $z_x = \varphi.x + y\varphi(x+1) + \frac{y^2}{2}\varphi(x+2) + \frac{y^3}{2.3}\varphi(x+3) +$ &c., ove z_x è funzione di x ed y, ed avremo $z_{x+1} = \varphi(x+1) + y\varphi(x+2) + \frac{y^2}{2}\varphi(x+3) +$ &c. $= \frac{dz_x}{dy}$. Quindi per trovare la somma della serie $\varphi.x + y\varphi(x+1) + \frac{y^2}{2}\varphi(x+2) + \frac{y^3}{2.3}\varphi(x+3) +$ &c. dobbiamo integrare l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy}$. Ma la somma di quella serie è $\frac{d^x \Psi.y}{dy^x}$; dunque sarà $z_x = \frac{d^x \Psi.y}{dy^x}$ l' integrale completo della precedente equazione, perchè comprende la funzione arbitraria $\Psi.y$.

All' istesso integrale potevamo ancora giungere mediante la sola differenziazione della equazione proposta. Infatti ponendo $x-1$ in luogo di x, avremo $z_x = \frac{dz_{x-1}}{dy}$, e quindi $\frac{dz_{x-1}}{dy} = \frac{d^2 z_{x-2}}{dy^2}$, cioè $z_x = \frac{d^2 z_{x-2}}{dy^2}$. Differenziando di nuovo due volte dopo di aver posto $x-2$ in luogo di x otterremo $z_x = \frac{d^2 z_{x-2}}{dy^2} = \frac{d^3 z_{x-3}}{dy^3}$, e così pure $z_x =$

$\frac{d^h z_{x-h}}{dy^h}$, e finalmente $z_x = \frac{d^x z_0}{dy^x}$, cioè $z_x = \frac{d^x \varphi \cdot y}{dy^x}$.

2. Prendiamo adesso ad integrare l' equazione più generale $a_x z_{x+1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy}$; ove a_x, b_y sono due funzioni date, quella di x, questa di y. Ponghiamo $z_x = Z_x \frac{d^x \varphi \cdot y}{dy^x}$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x+1} \cdot \frac{d^{x+1} \varphi \cdot y}{dy^{x+1}} + b_y Z_x \cdot \frac{d^x \varphi \cdot y}{dy^x} = Z_x \frac{d^{x+1} \varphi \cdot y}{dy^{x+1}} + \frac{dZ_x}{dy} \cdot \frac{d^x \varphi \cdot y}{dy^x}$; e a motivo della funzione arbitraria $\varphi \cdot y$ le due equazioni $a_x Z_{x+1} = Z_x$; $b_y Z_x = \frac{dZ_x}{dy}$. La prima mi dà $Z_x = e^{-\Sigma \log. a_x} \cdot \Psi \cdot y$, ove e è quel numero, che ha per logaritmo iperbolico l' unità; e sostituito questo valore la seconda diventa $b_y \Psi \cdot y = \frac{d\Psi \cdot y}{dy}$, cioè $\Psi \cdot y = e^{\int b_y dy}$. Pertanto l' integrale completo della proposta sarà $z_x = e^{\int b_y dy - \Sigma \log. a_x} \cdot \frac{d^x \varphi \cdot y}{dy^x}$.

Per dare un' esempio supponghiamo, che si voglia la somma della serie infinita $\varphi \cdot x + (x+1) y \varphi (x+1) + \frac{(x+1)(x+2)}{2} y^2 \varphi (x+2) + \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2 \cdot 3} y^3 \varphi (x+3)$ Facendo questa somma $= z_x$ avremo $z_{x+1} = \varphi (x+1) + (x+2) y \varphi (x+2) + \frac{(x+2)(x+3)}{2} y^2 \varphi (x+3) +$ ec.; $\frac{dz_x}{dy} = (x+1) \varphi (x+1) + (x+1)(x+2) y \varphi (x+2) + \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{2} y^2 \varphi (x+3)$ ec.; e quindi $(x+1) z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy}$. Sarà dunque $a_x = x + 1$; $b_y = 0$; e $z_x = e^{-\Sigma \log. (x+1)} \cdot \frac{d^x \Psi \cdot y}{dy^x} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot x} \cdot \frac{d^x \Psi \cdot y}{dy}$. Per determinare la funzione arbitraria $\Psi \cdot y$ si osservi, che

$z_{m+1} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{dz_m}{dy^m} = \frac{1}{1.2.3.(m+1)} \cdot \frac{d^{m+1}\Psi.y}{dy^{m+1}}$, e perciò $\frac{1}{1.2.3\ldots m} \cdot \frac{d^m\Psi.y}{dy^m} = z_m$, cioè eguale alla somma della serie, quando $x = m$. Sostituendo il valore di $\Psi.y$ avremo $z_x = \frac{1.2\ldots m}{1.2\ldots x} \cdot \frac{d^{x-m}z_m}{y^{x-m}}$, ove il differenziale si deve cangiare in integrale, quando $x - m$ è una quantità negativa. Se adunque si sa sommare la serie, quando x ha un dato valore, si potrà sommare in qualunque altro caso.

3. Sia data l' equazione $a_x z_{x+1} + bz_x = \frac{dz_x}{dy} + X$, ove a_x ed X sono funzioni date di x, e b costante. Siccome, quando X è zero, abbiamo $z_x = e^{by - \Sigma \log.a_x} \cdot \frac{d^x\varphi.y}{dy^x}$; allorchè X è funzione di x, aggiungiamo al valore di z_x il termine $+ Z_x$, ed avremo per determinare Z_x l'equazione $a_x Z_{x+1} + bZ_x = X$, la quale integrata ci darà $Z_x = (-b)^x \cdot e^{-\Sigma \log.a_x} \Sigma . \frac{Xe^{\Sigma \log.a_x}}{(-b)^{x+1}}$. Così pure, se fosse proposta l' equazione $az_{x+1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy} + Y$, essendo b_y ed Y funzioni di y ed a costante, ponghiamo la $z^x = \frac{e^{\int b_y dy}}{a^x} \cdot \frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + Z$, ove Z è funzione di y, ed avremo il valore di Z dalla equazione $(a + b_y)Z = \frac{dZ}{by} + Y$; cioè $Z = - e^{ay + \int b_y dy} . \int e^{-ay - \int b_y dy} . Y dy$.

4. Si debba adesso integrare l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy} + P_x$, essendo P_x una funzione data di x ed y. Ponghiamo $z_x = \frac{d^x Z_x}{dy^x}$, e sostituendo avremo $\frac{d^{x+1}Z_{x+1}}{dy^{x+1}} = \frac{d^{x+1}Z_x}{dy^{x+1}} + P_x$; cioè $\frac{d^{x+1}.\Delta Z_x}{dy^{x+1}} = P_x$, e quindi $\Delta Z_x = \int^{x+1} dy^{x+1} P_x$; $Z_x = \varphi.y + \Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} P_x$, ove ho aggiunto la funzione arbitraria $\varphi.y$, perchè l' integrale Σ si prende nella ipotesi di y costante. Sarà pertanto l' inte-

grale della equazione proposta $z_x = \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + \frac{d^x \Sigma \int^{x+1} d,^{x+1} P_x}{dy^x}$.
Questo integrale si può esprimere anche sotto un' altra forma: infatti $\Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} P_x = \int dy P_0 + \int^2 dy^2 P_1 + \int^3 dy^3 P_2 \ldots + \int^x dy^x P_{x-1}$; e perciò $\frac{d^x \Sigma \int^{x+1} dy^{x+1} P_x}{dy^x} = \frac{d^{x-1} P_0}{dy^{x-1}} + \frac{d^{x-2} P_1}{dy^{x-2}} \ldots + P_{x-1}$; la qual quantità è rappresentata dalla formola $\Sigma \frac{d^r P_{x-r-1}}{dy^{x-r-1}}$, se si prende questo integrale relativamente ad r da $r=0$ fino ad $r = x-1$.

5. Data adesso l' equazione più generale $a_x z_{x+1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy} + P_x$: facciamo $z_x = Z_x . Z'_x$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x+1} . Z'_{x+1} + b_y Z_x . Z'_x = Z'_x \frac{dZ_x}{dy} + Z_x \frac{dZ'_x}{dy} + P_x$. Ponghiamo $a_x Z_{x+1} = Z_x$; $b_y Z_x = \frac{dZ_x}{dy}$, ed avremo ancora $Z'_{x+1} = \frac{dZ'_x}{dy} + \frac{P_x}{Z'_x}$. La prima di quest' equazioni integrata ci dà $Z_x = e^{-\Sigma \log . a_x} . \Psi . y$; sostituito il qual valore nella seconda abbiamo $\Psi . y = e^{\int b_y dy}$, e quindi $Z_x = e^{\int b_y dy - \Sigma \log . a_x}$. Posto questo valore nella terza otterremo (4) $Z'_x = \frac{d^x [\Phi . y - \Sigma (e^{\Sigma \log . a_x} . \int^{x+1} dy^{x+1} P_x e^{-\int b_y dy})]}{dy^x}$;
e perciò l' integrale della proposta sarà $z^x = e^{\int b_y dy - \Sigma \log . a_x} . \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + e^{\int b_y dy - \Sigma \log . a_x} . \frac{d^x \Sigma (e^{\Sigma \log . a_x} \int^{x+1} dy^{x+1} P_x e^{-\int b_y dy})}{dy^x}$.

6. Passiamo a cercar l' integrale della equazione dell' ordine n; $\frac{d^n . z_x}{dy^n} + A \frac{d^{n-1} . z_{x+1}}{dy^{n-1}} + B \frac{d^{n-2} . z_{x-2}}{dy^{n-2}} \ldots + M \frac{dz_{x+n-1}}{dy} + N z_{x+n} = P_x$, ove A, B, . . N sono quantità costanti, e P_x funzione di x ed y. Ponghiamo $\frac{d^{n-1} . z_x}{dy^{n-1}} + A1 \frac{d^{n-2} . z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1 \frac{d^{n-3} . z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots +$

$M1z_{x+n-1} = X_x$; e se in questa equazione accresciamo x della unità, o pure la differenziamo per rapporto ad y, avremo le due equazioni

$$(1)\ \frac{d^{n-1}.z_{x+1}}{dy^{n-1}} + A1\frac{d^{n-2}.z_{x+2}}{d^{n-2}} \ldots + M1z_{x+n} = X_{x+1}.$$

$$(2)\ \frac{d^n.z_x}{dy^n} + A1\frac{d^{n-1}.z_{x+1}}{dy^{n-1}} \ldots + M1\frac{dz_{x+n-1}}{dy} = \frac{dX_x}{dy}.$$

Paragoniamo con la proposta l'equazione (2) — (1) α, ove α è costante, ed otterremo

$\frac{dX_x}{dy} - \alpha X_{x+1} = P_x$; $A1 - \alpha = A$; $B1 - \alpha A1 = B$; $C1 - \alpha L1 = C$; . . . . . $- \alpha M1 = N$. Quindi avremo $A1 = \alpha + A$; $B1 = \alpha^2 + A\alpha + B$; $C1 = \alpha^3 + A\alpha^2 + B\alpha + C$; . . . $M1 = \alpha^{n-1} + A\alpha^{n-2} + B\alpha^{n-3} \ldots + M$; ed a motivo di $-\alpha M1 = N$ sarà (P) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + C\alpha^{n-3} + \ldots + N = 0$. Sarà dunque α una radice di questa equazione: ed integrando l'equazione $\frac{dX_x}{dy} - \alpha X_{x+1} = P_x$, otterremo (5) $X_x = -\frac{1}{\alpha^x}.\frac{d^x.\Sigma(\alpha^x\int^{x+1}dy^{x+1}P_x)}{dy^x}$, ove tralascio la funzione arbitraria, perchè si può considerare compresa nel segno Σ. Trovati così i valori di $A1$, $B1$, ... $M1$ ed X_x, si conoscerà l'integrale primo della proposta $\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1\frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} \ldots + M1z_{x+n-1} = X_x$. Trattando questa equazione nella medesima maniera, che la proposta, ponghiamo $\frac{d^{n-2}.z_x}{dy^{n-2}} + A2\frac{d^{n-3}.z_{x+1}}{d^{n-3}} \ldots + L2z_{x+n-2} = X1_x$; e troveremo similmente $\frac{dX1_x}{dy} - \alpha 1X1_{x+1} = X_x$, essendo $\alpha 1$ una radice della equazione

(Q) $\alpha 1^{n-1} + A1\alpha 1^{n-2} + B1\alpha 1^{n-3} \ldots + M1 = 0$. Ora se questa equazione (Q) la moltiplichiamo per $\alpha 1 - \alpha$ avremo

$$\left.\begin{array}{l}\alpha 1^n + A1\alpha 1^{n-1} + B1\alpha 1^{n-2} + C1\alpha 1^{n-3} \ldots + M1\alpha 1 \\ -\alpha\alpha 1^{n-1} - \alpha A1\alpha 1^{n-2} - \alpha B1\alpha 1^{n-3} \ldots - \alpha L1\alpha 1 - \alpha M1\end{array}\right\} = 0$$

cioè, sostituiti i valori di $A1$, $B1$, ec.: $\alpha 1^n + A\alpha 1^{n-1} + B\alpha 1^{n-2} + C\alpha 1^{n-3} \ldots + N = 0$. Questa equazione essendo affatto simile alla equazione (P), è chiaro che l'equazione

(Q) ha le medesime radici, che ha l' equazione (P), eccettuata quella, che è già stata contemplata. Posto ciò avremo $X1_x = -\frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \Sigma(\alpha 1^x \int^{x+1} dy^{x+1} X_x)}{dy^x}$, essendo $\alpha 1$ una radice della equazione (P) diversa da α. Ma $\int^{x+1} dy^{x+1} X_x = -\frac{1}{\alpha^x} \int dy \Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} P_x) = -\frac{1}{\alpha^x} \Sigma(\alpha^x \int^{x+2} dy^{x+2} P_x)$; dunque sostituendo questo valore avremo

$$X1^x = \frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha}\right)^x \Sigma \alpha^x \int^{x+2} dy^{x+2} P_x}{dy^x}.$$

Così pure, se chiameremo $X2_x$ il secondo membro dell' integrale terzo, ed $\alpha 2$ sarà un' altra radice della equazione (P), otterremo

$$X2_x = \frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{\alpha 2}{\alpha 1}\right)^x \Sigma \alpha 1^x \int^{x+2} dy^{x+2} X_x}{dy^x};$$

e sostituendo il valore di X_x,

$$X2_x = -\frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha 1}\right)^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha 2}\right)^x \Sigma \alpha^x \int^{x+3} dy^{x+3} P_x}{dy^x}.$$

Quindi facilmente apparisce, che l' integrale finito della proposta sarà $z_x =$

$$\frac{\frac{(-1)}{\alpha^x} \cdot d^x \Sigma \left(\frac{\alpha}{\alpha 1}\right)^x \Sigma \left(\frac{\alpha 1}{\alpha 2}\right)^x \ldots \Sigma \left(\frac{\alpha(^{n-2})}{\alpha(^{n-1})}\right)^x \Sigma (\alpha^{n-1})^x \int^{x+n} dy^{x+n} P_x}{dy^x}.$$

Se tutte le radici α, $\alpha 1$, ec. fossero eguali, si renderebbe molto più semplice la forma di questo integrale, e sarebbe

$$z_x = \frac{(-1)^n}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \Sigma^n \alpha^x \int^{x+n} dy^{x+n} P_x}{dy^x}.$$

7. Ma quando le radici sono disuguali, è assai più comoda un' altra forma d' integrale composta di varie parti, ciascuna delle quali non contiene, che un solo segno sommatorio. Ad oggetto di ritrovar questa nuova forma, ripigliamo l' equazione

$$\frac{d^{n-1} \cdot z_x}{dy^{n-1}} + A1 \frac{d^{n-2} \cdot z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1 \frac{d^{n-3} \cdot z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + M1 z_{x+n-1} = X_x,$$

ed osserviamo, che prendendo in luogo di α le altre radici $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. della equazione (P) avremo gli altri integrali primi

$$\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1' \frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1' \frac{d^{n-3}.z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + M1' z_{x+n-1} = X'_x;$$
$$\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}} + A1'' \frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}} + B1'' \frac{d^{n-3}.z_{x+2}}{dy^{n-3}} \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + M1'' z_{x+n-1} = X''_x;$$

ove le quantità $A1'$, $A1''$, ec.; $B1'$, $B1''$, ec.; ed X'_x, X''_x, ec. sono i valori di $A1$, $B1$, ec. ed X, quando α si cangia in $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. Ora, essendo n questi integrali, potremo col loro mezzo eliminare i differenziali $\frac{d^{n-1}.z_x}{dy^{n-1}}$, $\frac{d^{n-2}.z_{x+1}}{dy^{n-2}}$, ... $\frac{dz_{x+n-2}}{dy}$, ed avremo il valore di z_{x+n-1} così espresso $z_{x+n-1} = \frac{X_x}{k} + \frac{X'_x}{k1} + \frac{X''_x}{k2} + \text{ec.}$, essendo k, $k1$, $k2$, ec. quantità costanti.

Per determinarle sostituiamo il valore di z_{x+n-1} nella prima dell' equazioni integrali; ed osservando che $\frac{dX_{x-1}}{dy} = \alpha X_x + P_{x-1}$; $\frac{d^2X_{x-2}}{dy^2} = \alpha \frac{dX_{x-1}}{dy} + \frac{dP_{x-2}}{dy} = \alpha^2 X_x + \alpha P_{x-1} + \frac{dP_{x-2}}{dy}$, e così in seguito, otterremo

$$X_x = X_x . \frac{\alpha^{n-1} + A1\alpha^{n-2} + B1\alpha^{n-3} \ldots + M1}{k} + (A) \frac{P_{x-1}}{k}$$
$$+ (B) \frac{dP_{x-2}}{kdy} + \text{ec.} + X'_x . \frac{\alpha 1^{n-1} + A1\alpha 1^{n-2} \ldots + M1}{k1}$$
$$+ (A1) \frac{P_{x-1}}{k1} + \text{ec.} + X''_x . \frac{\alpha 2^{n-1} + A1\alpha 2^{n-2} \ldots + M1}{k2}$$
$$+ (A2) \frac{P_{x-1}}{k2} + \text{ec.} + \text{ec.}$$

Ora, questa equazione dovendo essere identica, avremo $\frac{\alpha^{n-1} + A1\alpha^{n-2} + B1\alpha^{n-3} \ldots + M1}{k} = 1$, cioè $k = M1 + L1\alpha \ldots + A1\alpha^{n-2} + \alpha^{n-1}$, e gli altri termini svaniranno.

Se in questo valore di k sostituiamo i valori di $A1$,

B_1, ec., troveremo $k = n\alpha^{n-1} + (n-1)\,A\alpha^{n-2} + (n-2)\,B\alpha^{n-3} \ldots + M$; onde apparisce, che k è eguale al differenziale della quantità $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + M\alpha + N$, preso per rapporto ad α, e diviso per $d\alpha$. Il valore di si cangerà in quelli di k_1, k_2, ec., se muteremo α in α_1, α_2, ec., com'è facile a vedersi, se in luogo di sostituire il valore di z_{x+n-1} nella prima dell'equazioni integrali, si sostituisce in una delle altre. Se dunque facciamo $P = t^n + At^{n-1} + Bt^{n-2} \ldots + Mt + N$, avremo $k = \frac{dP}{dt}$ facendovi $t = \alpha$, $k_1 = \frac{dP}{dt}$ facendovi $t = \alpha_1$, ec., ove α, α_1, ec. sono le radici della equazione $P = 0$.

Determinate le quantità k, k_1, ec.; sarà il valore di z^{x+n-1} così espresso;

$$z_{x+n-1} = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha^x f^{x+1} dy^{x+1} P_x}{k\, dy^x} +$$
$$\frac{1}{\alpha_1^x} \cdot \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha_1^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha_1^x f^{x+1} dy^{x+1} P_x}{k_1 dy^x} +$$
$$\frac{1}{\alpha_2^x} \cdot \frac{d^x \varphi'' . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha_2^x} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha_2^x f^{x+1} dy^{x+1} P_x}{k_2 dy^x} + \text{ec.}$$

il quale, posto $x - n + 1$ in luogo di x, diventa

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha^{x-n+1} f^{x+1} dy^{x+1} P_{x-n+1}}{k\, dy^x}$$
$$+ \frac{1}{\alpha_1^x} \cdot \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha_1^{x-n+1}} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha_1^{x-n+1} f^{x+1} dy^{x+1} P_{x-n-1}}{k_1 dy^x} + \text{ec.}$$

ove ho scritto $\frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$ in luogo di $\frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^{x-n-1} \varphi . y}{dy^{x-n+1}}$, poichè, essendo $\varphi . y$ una funzione arbitraria, si può mettere $\varphi . y$ in luogo di $\frac{1}{\alpha^{-n+1}} \cdot \frac{d^{1-n} \varphi . y}{dy^{1-n}}$.

Si può render più semplice la forma di questo integrale, se si osserva che $\frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^x \Sigma \alpha^{x-n+1} f^{x+1} dy^{x+1} P_{x-n+1}}{dy^x} = \Sigma . \frac{d^r P_{x-n-r}}{\alpha^{r+1} dy^r}$, purchè si prenda questo integrale da

$r = o$ fino ad $r = x - n$. Pertanto l' integrale della proposta potrà esprimersi così.

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 2^x} \cdot \frac{d^x \varphi'' . y}{dy^x} + \text{ec.}$$

$$- \Sigma \left(\frac{\alpha^{-r-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-r-1}}{k1} + \frac{\alpha 2^{-r-1}}{k2} + \text{ec.} \right) \frac{d^r . P_{x-n-r}}{dy^r},$$

ove si deve prendere questo integrale relativamente ad r da $r = o$ fino ad $r = x - n$.

Questo valore di z_x ammette una forma più semplice, quando P_x è funzione della sola x, o della sola y. Nel primo caso è chiaro che sarà $z_x = \frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 1^x} \cdot \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} + \text{ec.}$ $- \left(\frac{\alpha^{-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-1}}{k1} + \text{ec.} \right) P_{x-n}$; ove si noti, che $\frac{\alpha^{-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-1}}{k1} + \text{ec.} = - \frac{1}{N}$, come può vedersi nel II. Tomo del *Calcolo Integrale* dell' *Euler* a pag. 434.

Nel secondo caso la quantità $\Sigma \alpha^{-r-1} . \frac{d^r P}{dy^r}$ è eguale a $\alpha^{-1} P + \alpha^{-2} \frac{dP}{dy} + \alpha^{-3} \frac{d^2 P}{dy^2} \ldots + \alpha^{-x+n-1} \frac{d^{x-n} P}{dy^{x-n}}$. Ponghiamo questa quantità $= Q$, e facilmente vedremo essere $\frac{dQ}{dy} = \alpha Q - P + \alpha^{-x+n-1} \frac{d^{x-n+1} P}{dy^{x-n+1}}$; l' integrazione della qual' equazione ci darà $Q = e^{\alpha y} \alpha^{-x+n-1} \int e^{-\alpha y} . \frac{d^{x-n+1} P}{dy^{x-n}}$ $- e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy$. Ma integrando per parti abbiamo $e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} . \frac{d^{x-n+1} P}{dy^{x-n}} = \frac{d^{x-n} P}{dy^{x-n}} + \alpha e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} . \frac{d^{x-n} P}{dy^{x-n-1}} =$ $\frac{1}{dy} d . e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} . \frac{d^{x-n} P}{dy^{x-n-1}}$; quindi sarà $e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} . \frac{d^{x-n+1} P}{dy^{x-n}} =$ $\frac{d^{x-n+1} e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy}{dy^{x-n+1}}$, e $Q = \frac{\alpha^{-x+n-1} d^{x-n+1} e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy}{dy^{x-n+1}} -$ $e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy$. Pertanto in luogo di $\frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} - \Sigma \frac{\alpha^{-r-1} d^r P}{k dy^r}$

si

si può scrivere $\frac{1}{\alpha^x} \cdot \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} - \frac{1}{\alpha^{x-n+1}} \cdot \frac{d^{x-n+1} e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy}{k dy^{x-n+1}} + \frac{e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy}{k}$. Ma salva la generalità si può porre $\varphi . y$ invece di $\varphi . y - \frac{\alpha^{n-1}}{k} \cdot \frac{d^{1-n} e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy}{dy^{1-n}}$; quindi l' integrale sarà in questo caso $z^x = \frac{1}{\alpha^x} \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 1^x} \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 2^x} \frac{d^x \varphi'' . y}{dy^x} + \text{ec.}$ $+ \frac{e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} P dy}{k} + \frac{e^{\alpha 1 y} \int e^{-\alpha 1 y} P dy}{k 1} + \text{ec.}$

E se P_x avrà la forma $Q_x + R$, essendo Q_x funzione della sola x, ed R della sola y, è chiaro che l' integrale sarà $z_x = \frac{1}{\alpha^x} \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + \frac{1}{\alpha 1^x} \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} + \text{ec.} + \frac{1}{N} Q_{x-n}$ $+ \frac{e^{\alpha y} \int e^{-\alpha y} R dy}{k} + \frac{e^{\alpha 1 y} \int e^{-\alpha 1 y} R dy}{k 1} + \text{ec.}$

8. Ripigliamo il valor generale di z_x, e supponghiamo che le due radici α ed $\alpha 1$ siano eguali. Secondo il metodo di *Dalembert* faremo $\alpha 1 = \alpha + \omega$, essendo ω infinitamente piccolo, ed avremo $\alpha 1^{-r-1} = \alpha^{-r-1} - (r+1) \omega \alpha^{-r-2}$; e chiamando P1 la quantità $\frac{P}{(t-\alpha)^2}$, avremo ancora $\frac{1}{k} = -\frac{1}{\omega P 1}$, facendo $t = \alpha$; $\frac{1}{k 1} = \frac{1}{\omega P 1}$, facendovi $t = \alpha 1$ $= \alpha + \omega$; cioè $\frac{1}{k 1} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{P 1} + \omega \frac{d . \frac{1}{P 1}}{dt} \right)$, facendovi $t = \alpha$. Sostituiti questi valori, i due termini $\frac{\alpha^{-r-1}}{k} + \frac{\alpha 1^{-r-1}}{k 1}$ diventeranno $\alpha^{-r-1} . \frac{d . \frac{1}{P 1}}{dt} - \frac{r+1}{P 1} \alpha^{-r-2}$. I termini $\alpha^{-x} \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} + \alpha 1^{-x} \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x}$ si cangeranno in $\alpha^{-x} \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} +$ $\alpha^{-x} \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x} - \omega x \alpha^{-x-1} \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x}$, cioè in $\alpha^{-x} \frac{d^x \varphi . y}{dy^x} +$

$x\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$, posto $\varphi.y$ in luogo di $\varphi.y + \varphi'.y$, e $\varphi'.y$ in luogo di $-\omega\frac{\varphi'.y}{\alpha}$. Quindi nel caso di due radici α ed α_1 eguali l'integrale avrà la forma

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}\right) + \frac{1}{\alpha_2{}^x}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x} + \text{ec.} -$$

$$\Sigma\left[\alpha^{-r-1}\left(\frac{d.\frac{1}{P_1}}{dt} - \frac{r+1}{P_1\alpha}\right) + \frac{\alpha_2{}^{-r-1}}{k_2} + \text{ec.}\right]\frac{d^rP_{x-r-1}}{dy^r}.$$

Se tre radici α, α_1, α_2 saranno eguali, faremo $\alpha_1 = \alpha + \omega$, $\alpha_2 = \alpha + m\omega$, e sarà $\alpha_1{}^{-r-1} = \alpha^{-r-1} - (r+1)\omega\alpha^{-r-2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}\omega^2\alpha^{-r-3}$; $\alpha_2{}^{-r-1} = \alpha^{-r-1} - (r+1)m\omega\alpha^{-r-2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}m^2\omega^2\alpha^{-r-3}$; e posto $P_2 = \frac{P}{(t-\alpha)^3}$, sarà $\frac{1}{k} = \frac{1}{m\omega^2}\cdot\frac{1}{P_2}$, facendovi $t = \alpha$; $\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{(m-1)\omega^2}\cdot\frac{1}{P_2}$, facendovi $t = \alpha_1 = \alpha + \omega$; cioè $\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{(m-1)\omega^2}\left(\frac{1}{P_2} + \omega\frac{d.\frac{1}{P_2}}{dt} + \omega^2\frac{d^2.\frac{1}{P_2}}{2dt^2}\right)$, facendovi $t = \alpha$; e similmente $\frac{1}{k_2} = \frac{1}{m(m-1)\omega^2}\left(\frac{1}{P_2} + m\omega\frac{d.\frac{1}{P_2}}{dt} + m^2\omega^2\frac{d^2\frac{1}{P_2}}{2dt^2}\right)$, facendovi $t = \alpha$. Sostituiti questi valori, i tre termini $\frac{\alpha^{-r-1}}{k} + \frac{\alpha_1{}^{-r-1}}{k_1} + \frac{\alpha_2{}^{-r-1}}{k_2}$ diventeranno $\frac{d^2.\frac{1}{P_2}}{2dt^2}\alpha^{-r-1} - (r+1)\frac{d.\frac{1}{P_2}}{dt}\alpha^{-r-2} + \frac{(r+1)(r+2)}{2}\cdot\frac{1}{P_2}\alpha^{-r-3}$. Così pure i termini

$\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + \alpha_1^{-x}\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} + \alpha_2^{-x}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}$ si cangeranno in

$$\alpha^{-x}\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + \left(\alpha^{-x} - x\omega\alpha^{-x-1} + \frac{x(x+1)}{2}\omega^2\alpha^{-x-2}\right)\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$$

$$+ \left(\alpha^{-x} - xm\omega\alpha^{-x-1} + \frac{x(x+1)}{2}m^2\omega^2\alpha^{-x-2}\right)\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x};$$

in luogo de' quali termini potremo porre $\frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} + \frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}\right)$; scrivendo cioè $\varphi.y$ in luogo di $\varphi y + \varphi'.y + \varphi''.y$, $\varphi'y - \varphi''y$ invece di $-\frac{\omega}{\alpha}\varphi y - \frac{m\omega}{\alpha}\varphi''.y$, e $\varphi''.y$ in luogo di $\frac{\omega^2}{\alpha^2}\varphi'.y + \frac{m^2\omega^2}{\alpha^2}\varphi''.y$. Pertanto nel caso di tre radici eguali avremo

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi y}{dy^x} + x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} + \frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x}\right) + \frac{1}{\alpha 3^x}\times$$

$$\frac{d^x\varphi'''.y}{dy^x} + \text{ec.} - \Sigma\left[\alpha^{-r-1}\left(\frac{d^2.\frac{1}{P_2}}{2dt^2} - \frac{(r+1)\,d.\frac{1}{P_2}}{\alpha dt} + \frac{(r+1)(r+2)}{2\alpha^2 P_2}\right) + \frac{\alpha 3^{-r-1}}{k3} + \&c.\right]\frac{d^r.P_{x-n-r}}{dy^{x-n-r}}.$$

Si vede chiaramente, qual sarà la forma dell' integrale per un maggior numero di radici eguali, come pure è evidente che nel caso, in cui tutte le radici fossero eguali, sarà

$$z_x = \frac{1}{\alpha^x}\left(\frac{d^x\varphi.y}{dy^x} + x\frac{d^x\varphi'.y}{dy^x} + \frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi''.y}{dy^x} \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{2\cdot 3\cdots(x-1)}\frac{d^x\varphi^{(n-1)}.y}{dy^x}\right) - \frac{1}{(-\alpha)^{n-1}}\Sigma.\alpha^{-r-1}\times$$

$$\frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+n-1)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cdot\frac{d^r P_{x-n-r}}{dy^{x-n-r}}.$$

9. Con un metodo simile si potrà trovare l' integrale della equazione $\frac{d^n z}{dy^n} + A\frac{d^{n-1}\Delta z}{dy^{n-1}} + B\frac{d^{n-2}\Delta^2 z}{dy^{n-2}} \cdots + N\Delta^n z = P$, essendo z e P funzioni di x ed y, e la carat-

teristica Δ appartenente alla variabile x. Nel caso di $P = o$ essa è già stata integrata da *Laplace* in una sua Memoria sulle Serie inserita tra quelle dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' anno 1779. Ponghiamo $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} + A1 \frac{d^{n-2}\Delta z}{dy^{n-2}} + B1 \frac{d^{n-3}\Delta^2 z}{dy^{n-3}} \ldots + M1\Delta^{n-1}z = X$, e paragionando con la proposta una equazione formata dalla somma del differenziale di questa, e della differenza finita della medesima moltiplicata per una costante $-\alpha$, troveremo (1) $\frac{dX}{dy} - \alpha\Delta X = P$, α essendo data dalla equazione (2) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + N = o$. O a l'equazione (1) integrata ci dà (5) $X = \frac{\alpha^{-x}e^{-xy}d\,[\phi.y - \Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} P e^{xy})]}{dy^x}$.

Quindi se chiamiamo α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. le radici della equazione (2), operando come sopra (8) otterremo $\Delta^{n-1}z = \frac{\alpha^{-x}e^{-xy}d.^x[\phi.y - \Sigma(\alpha^x \int^{x+1} dy^{x+1} dy^{x+1} P e^{xy})]}{k1 dy^x} + \frac{\alpha 1^{-x}e^{-x1y}d^x.[\phi'.y - \Sigma(\alpha 1^x \int^{x+1} dy^{x+1} P e^{x1y})]}{k1 dy^x} +$ ec. Adesso se osserviamo, che a motivo della funzione arbitraria $\phi.y$ la quantità $\Sigma z^{-x}e^{-xy}\frac{d^x\phi.y}{dy^x}$ è sempre della forma $\alpha^{-x}e^{-xy}\frac{d^x\phi.y}{dy^x}$, avremo $z = \alpha^{-x}e^{-xy}\frac{d^x\phi.y}{dy^x} - e^{-xy}\Sigma^{n-1}\alpha^{-x}\frac{d^x\Sigma\alpha^x\int^{x+1}dy^{x+1}Pe^{xy}}{k dy^x} + \alpha 1^{-x}e^{-\alpha 1y}\frac{d^x\phi'.y}{dy^x} - e^{-\alpha 1y}\Sigma^{n-1}.\alpha 1^{-x}\frac{d^x\Sigma\alpha 1^x\int^{x+1}dy^{x+1}Pe^{\alpha 1y}}{k1 dy^x} +$ ec.

L' altro metodo delle integrazioni successive ci condurrebbe ad espressioni troppo complicate, eccettuato il solo caso, in cui tutte le radici α, $\alpha 1$, ec. sono eguali, per il quale si troverà $z = \frac{(-1)^n}{\alpha^x e^{xy}} \cdot \frac{d^x\Sigma^n.\alpha^x\int^{x+n}dy^{x+n}Pe^{xy}}{dy^x}$.

10. Se fosse data l' equazione più generale $\frac{d^n z}{dy^n} +$

$$A\frac{d^{n-1}(az_{x+1}+bz_x)}{dy^{n-1}}+B\frac{d^{n-2}(a^2z_{x+2}+2abz_{x+1}+b^2z_x)}{dy^{n-2}}+$$

$N(a^nz_{x+n}+na^{n-1}bz_{x+n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2z_{x+n-2}\ldots+$ $b^nz_x=P$, facciamo $z_x=\varphi.x.Z_x$ ed $az_{x+1}+bz_x=-b\varphi.x.\Delta Z_x$, cioè $a\varphi(x+1).Z_{x+1}+b\varphi.x.Z_x=-b\varphi.x.Z_{x+1}+b\varphi.x.Z_x$, e quindi $a\varphi(x+1)=-b\varphi.x$, e $\varphi.x=\left(-\frac{b}{a}\right)^x$. Ciò posto, l' equazione $az_{x+1}+bz_x=-b\varphi.x\Delta Z_x$ ci darà $a^2z_{x+2}+2abz_{x+1}+b^2z_x=-ab\varphi(x+1)\Delta Z_{x+1}-b^2\varphi.x\Delta Z_x=b^2\varphi.x\Delta^2Z^x$; e similmente $a^3z_{x+3}+3a^2bz_{x+2}+3ab^2z_{x+1}+b^3z^x=ab^2\varphi(x+1)\Delta^2Z_{x+1}+b^3\varphi x\Delta^2Z_x=-b^3\varphi.x\Delta^3Z_x$, e così in seguito. Pertanto l' equazione proposta diventerà $\frac{d^nZ}{dy^n}-Ab\frac{d^{n-1}\Delta Z}{dy^{n-1}}+Bb^2\frac{d^{n-2}\Delta^2Z}{dy^{n-2}}\ldots\pm Nb^n\Delta^nZ=\left(-\frac{a}{b}\right)^nP$, cioè sarà ridotta alla forma della equazione precedente.

11. Se in luogo della equazione $z_{x+1}=\frac{dz_x}{dy}$, che abbiamo da principio considerata, fosse data la seguente $z_{x-1}=\frac{dz_x}{dy}$; differenziando continuamente per rapporto ad y, avremo $\frac{d^xz_x}{dy_x}=z_0=\varphi.y$, e quindi $z_x=\int^x dy^x\varphi.y$, che sarà l' integrale della proposta. Ma siccome le integrazioni si fanno nella supposizione di x costante, quando saranno completate, verrà ad introdurvisi una nuova funzione arbitraria di x. Infatti, com' è noto, all' integrale $\int^x dy^x\varphi.y$ conviene aggiungere la quantità $C_n+C_{n-1}.y+C_{n-2}.\frac{y^2}{2}+C_{n-3}.\frac{y^3}{2.3}\ldots+C_1.\frac{y^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)}$, per renderlo completo. Onde, se n è variabile ed eguale ad x, C_n diverrà una funzione arbitraria di x, e l' integrale completo della proposta sarà $z_x=\int^x dy^x\varphi.y+\psi.x+y\psi(x-1)+\frac{y^2}{2}\psi(x-2)\ldots+\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\psi.1$. Nè deve far maraviglia, che questo

integrale contenga due funzioni arbitrarie, perchè l' equazione proposta è del second' ordine, come chiaramente apparisce, se si pone sotto la forma $z_x = \frac{dz_{x+1}}{dy}$, ove il termine $\frac{dz_{x+1}}{dy}$ contiene la doppia variazione per rapporto ad x, e per rapporto ad y.

12. Prendiamo adesso l'equazione più generale $a_x z_{x-1} + b_y z_x = \frac{dz_x}{dy} + P_x$. Ponghiamo $z_x = Z_x \int^x dy^x Z'_x$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x-1} \int^{x-1} dy^{x-1} Z'_{x-1} + b_y Z_x \int^x dy^x Z'_x = Z_x \int^{x-1} dy^{x-1} Z'_x + \frac{dZ_x}{dy} \int^x dy^x Z'_x + P_x$. Facciamo $a_x Z_{x-1} = Z_x$; $b_y Z_x = \frac{dZ_x}{dy}$; ed avremo ancora $\int^{x-1} dy^{x-1} \Delta Z'_{x-1} = -\frac{P^x}{Z_x}$. Le prime due equazioni ci danno $Z_x = e^{\Sigma \log. a_{x+1} + \int b_y dy}$, e la terza $\Delta Z'_x = -e^{-\Sigma \log. a_{x+1}} . \frac{d^x . e^{-\int b_y dy} . P_{x+1}}{dy^x}$; e quindi $Z'_x = \varphi . y - \Sigma e^{-\Sigma \log. a_{x+1}} . \frac{d^x . e^{-\int b_y dy} P_{x+1}}{dy^x}$; cioè l'integrale completo della proposta sarà $z_x =$

$$e^{\Sigma \log. a_{x+1} + \int b_y dy} \int^x dy^x \left(\varphi . y - \Sigma e^{-\Sigma \log. a_{x+1}} . \frac{d^x . e^{-\int b_y dy} P_{x+1}}{dy^x} \right)$$

$$+ e^{\Sigma \log. a_{x+1} + \int b_y dy} \left(\Psi . x + y \Psi (x-1) \ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. + \frac{y^{x-1}}{2.3 \ldots (x-1)} \Psi . 1 \right).$$

E da ciò chiaramente apparisce, qual cangiamento convenga fare all' integrale dell' equazioni precedenti, quando in esse la x in luogo di crescere diminuirà dell' unità.

ARTICOLO II.

Applicazione de' medesimi principj all' equazioni a differenze parziali solamente finite, o solamente infinitesime.

13. I medesimi metodi si possono applicare all' equazioni a differenze parziali finite. Sia data l' equazione $a_x z_{x+1,y} + b_{x+y} z_{x,y} = \Delta' z_{x,y} + P_{x,y}$, ove la caratteristica Δ' appartiene alla variabile y, cioè è $\Delta' z_{x,y} = z_{x,y+1} - z_{x,y}$. Ponghiamo $z_{x,y} = Z_{x,y} . Z'_{x,y}$, e sostituendo avremo $a_x Z_{x+1,y} . Z'_{x+1,y} + b_{x+y} Z_{x,y} . Z'_{x,y} = Z'_{x,y} \Delta' Z_{x,y} + Z_{x,y} \Delta' Z'_{x,y} + \Delta' Z'_{x,y} . \Delta' Z_{x,y} + P_{x,y}$. Si faccia (1) $a_x Z_{x+1,y} = Z_{x,y} + \Delta' Z_{x,y} = Z_{x,y+1}$; (2) $b_{x+y} Z_{x,y} = \Delta' Z_{x,y}$; e sarà (3) $Z'_{x+1,y} = \Delta' Z'_{x,y} + \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$. L' equazioni (1) e (2) integrate ci daranno $Z_{x,y} = e^{\Sigma \log. \frac{1+b_{x,y}}{a^x}}$; e l' equazione (3), posto $Z'_{x,y} = \Delta'^x Z''_{x,y}$ diventerà $\Delta'^{x+1} \Delta Z''_{x,y} = \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$; e quindi $\Delta Z''_{x,y} = \Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$; e $Z''_{x,y} = \varphi . y + \Sigma\Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}}$; $Z'_{x,y} = \Delta'^x \left(\varphi . y + \Sigma\Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{Z_{x,y+1}} \right)$; e finalmente l' integrale della proposta riuscirà $z_{x,y} = e^{\Sigma \log. \frac{1+b_{x+y}}{a^x}} \Delta'^x \left(\varphi . y + \Sigma\Sigma'^{x+1} . e^{\Sigma \log. \frac{a^x}{1+b_{x+y+1}}} . P_{x,y} \right)$.

Nel caso di a e b costanti, questo integrale prenderà la forma $z_{x,y} = \frac{(1+b)^{x+y}}{a^x} \Delta'^x \left(\varphi . y + \Sigma a^x \Sigma'^{x+1} . \frac{P_{x,y}}{(1+b)^{x+y+1}} \right)$, il quale si può scrivere in altro modo così; $z_{x,y} = \frac{(1+b)^{x+y}}{a^x} \Delta'^x \varphi . y + (1+b)^{x+y} \Sigma a^{-r-1} \Delta'^r . \frac{P_{x-r-1,y}}{(1+b)^{x+y-r}}$, ove l' integrale Σ si deve prendere relativamente ad r da $r = 0$ fino ad $r = x - 1$.

Ma la forma precedente d' integrale cessa di esser utile, quando $b_{x+y} = -1$; in tal caso ripigliamo la proposta, o sia l' equazione più generale $a_{x,y} z_{x+1,y} = z_{x,y+1} + P_{x,y}$. Facciamo $x + y = n$, e introduciamo la variabile n in luogo di y, in modo che $z_{x,y}$ divenga $Z_{x,n}$; sarà $z_{x+1,y} = Z_{x+1,n+1}$, e $z_{x,y+1} = Z_{x,n+1}$; così pure $a_{x,y}$ e $P_{x,y}$ diventino respettivamente $a'_{x,n}$ e $P'_{x,n}$. Ciò posto avremo l' equazione $a'_{x,n} Z_{x+1,n+1} = Z_{x,n+1} + P'_{x,n}$; la quale, siccome si può riguardare n come costante, ci darà $Z_{x,n+1} = e^{-\Sigma \log . a'_{x,n}} \left(\varphi . n + \Sigma e^{\Sigma \log . a'_{x,n}} . P'_{x,n} \right)$; e quindi $Z_{x,n} = z_{x,y} = e^{-\Sigma \log . a'_{x,n-1}} \left(\varphi . n + \Sigma e^{\Sigma \log . a'_{x,n-1}} . P'_{x,n-1} \right)$; cioè $z_{x,y} = e^{-\Sigma \log . a_{x,y-1}} \left(\varphi (x + y) + \Sigma e^{\Sigma \log . a_{x,y-1}} . P_{x,y-1} \right)$, purchè si prendano gl' integrali Σ nella ipotesi di $x + y$ costante.

14. Sia adesso proposta l' equazione $\Delta'^n z_x + A \Delta'^{n-1} z_{x+1} + B \Delta'^{n-2} z_{x+2} \ldots + N z_{x+n} = P_x$, e ponghiamo che il suo integrale primo sia $\Delta'^{n-1} z^x + A1 \Delta'^{n-2} z_{x+1} + B1 \Delta'^{n-3} z_{x+2} \ldots + M1 z_{x+n-1} = X_x$. Se facciamo (1) $\Delta X_x - \alpha X_{x+1} = P_x$, troveremo, come sopra (6), che α sarà una radice della equazione $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + N = 0$. Ora l' integrale di questa equazione (1) essendo $X_x = \frac{1}{\alpha^x} \Delta^x (\varphi . y - \Sigma \alpha^x \Sigma'^{x+1} P^x)$, il quale si cangia nel valore di X^x trovato di sopra (6), purchè le caratteristiche Δ' e Σ' si cangino in d ed $\int$, è chiaro che l' integrale della equazione del n.° 6. si muterà in quello della proposta, purchè le caratteristiche d ed $\int$ si mutino respettivamente in Δ' e Σ'.

15. Passiamo alla equazione $\Delta'^n z + A \Delta'^{n-1} \Delta z + B \Delta'^{n-2} \Delta^2 z \ldots + N \Delta^n z = P$, e ponghiamo il di lei integrale primo essere $\Delta'^{n-1} z + A1 \Delta'^{n-2} \Delta z + B1 \Delta'^{n-3} \Delta^2 z \ldots + M1 \Delta^{n-1} z = X$. Se facciamo (a) $\Delta' X - \alpha \Delta X = P$ avremo per α una radice della equazione (b) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + N = 0$. Ora l' equazione (a) integrata ci darà (13) $X = -\frac{(1-\alpha)^{x+y}}{\alpha^x} \Delta'^x \Sigma \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^x \Sigma'^{x+1} \frac{P}{(1+a)^{y+1}}$, ove tralascio la funzione arbitraria, che può riputarsi compresa nell' integrale Σ.

Se

Se chiamiamo α_1, α_2, &c. le altre radici della equazione (b), ed X_1, X_2, &c. i valori corrispondenti di X, avremo operando come sopra (8), $\Delta^{n-1}z = \frac{X}{k} + \frac{X_1}{k_1} + \frac{X_2}{k_2}$ + ec.; e quindi $z = \Sigma^{n-1}\left(\frac{X}{k} + \frac{K_1}{k_1} + \frac{X_2}{k_2}\ \&c.\right)$. Ma se qualche radice della equazione (b) fosse eguale all' unità, in tal caso il valore corrispondente di X sarebbe $X = -\Sigma P_{n-1}$, purchè si prenda questo integrale nella ipotesi di $x+y$ costante.

Se fosse data una equazione di una forma simile a quella trattata di sopra (10), se non che in luogo dei differenziali per rapporto ad y vi fossero le differenze finite relativamente alla medesima variabile, col medesimo artifizio si ridurrà all' equazione trattata in questo numero.

16. Facciamo un' altra applicazione del medesimo metodo all' equazioni a differenze finite tra due sole variabili z ed x, supponendo che la differenza finita di z sia una funzione qualunque di x. Sia proposta adunque l' equazione $z^{(n)} + Az^{(n-1)} + Bz^{(n-2)} \ldots + Mz' + Nz = P$, essendo $A, B \ldots N$ costanti, e P funzione data di x, $z' = z + \Delta z$, $z = z' + \Delta z'$, e in generale $z^{(r)} = z^{(r-1)} + \Delta z^{(r-1)}$. Pongiamo ($a$) $z^{(n-1)} + A_1 z^{(n-2)} + B_1 z^{(n-3)} \ldots + M_1 z = X$, essendo A_1, $B_1, \ldots M_1$ ed X funzioni di x. Facendo variare l' equazione (a), avremo (b) $z^{(n)} + A_1 z^{(n-1)} + B_1 z^{(n-2)} \ldots + M_1 z' = X'$; e sottraendo dalla equazione (b) l' equazione (a) moltiplicata per una funzione α di x,

$$\left.\begin{array}{l} z^{(n)} + A_1' z^{(n-1)} + B_1' z^{(n-2)} \ldots + M' z' \\ \quad - \alpha z^{(n-1)} - \alpha A_1 z^{(n-2)} \ldots\ldots - \alpha M_1 z \end{array}\right\} = X' - \alpha X.$$

Siccome questa equazione è affatto simile alla proposta, paragoniamola con essa, ed avremo; $X' - \alpha X = P$; $A_1' = \alpha + A$; $B_1' = \alpha A_1 + B = \alpha\alpha_1 + A\alpha + B$; $C_1' = \alpha\alpha_1\alpha_{11} + A\alpha\alpha_1 + B\alpha + C; \ldots M_1' = \alpha\alpha_1\alpha_{11} \ldots \alpha_{(n-1)} + A\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{(n-2)} + B\alpha \ldots \alpha_{(n-2)} + M$; $-\alpha M_1 = N$; cioè $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{(n)} + A\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{(n-1)} + B\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_{(n-2)} + M\alpha + N = 0$, dalla quale convien determinare il valore di α. Ma poichè $A, B \ldots N$ sono quantità costanti, potremo soddisfare ad essa prendendo α costante, e allora sarà α una radice della equazione (c) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + M\alpha + N = 0$, ed i coeffi-

cienti A_1, B_1 ... M_1 saranno anch' essi costanti. Posto ciò per integrare l' equazione $X' - \alpha X = P$ facciamo $X = X_1 . X_2$, e sostituendo avremo $X_1' . X_2' - \alpha X_1 . X_2 = P$; e poichè delle funzioni X_1 ed X_2 ne possiamo prendere una ad arbitrio, ponghiamo (*d*) $X_2' - \alpha X_2 = 0$, ed avremo ancora (*e*) $\Delta X_1 = \frac{P}{X_2'}$. Dalla equazione (*d*) prendendo i logaritmi, abbiamo $\log . X_2' = \log . X_2 + \log . \alpha$; cioè $\Delta \log . X_2 = \log . \alpha$, ed $X_2 = e^{\Sigma \log . \alpha} = \alpha^{\Sigma 1}$; e quindi $X_1 = \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P$, ed $X = \alpha^{\Sigma 1} (c + \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P)$, ove gl' integrali si devono prendere nel sistema di differenza variabile, che regna nella proposta. Sostituito questo valore di X l' equazione diventa (*a*) $z^{(n-1)} + A_1 z^{(n-2)} + B_1 z^{(n-3)} \ldots + M_1 z = \alpha^{\Sigma 1} (c + \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P)$, la quale, siccome è di un' ordine inferiore alla proposta, e contiene la costante arbitraria c, ne sarà uno integrale primo completo. E se chiamiamo α_1, α_2, &c. le altre radici della equazione (*c*), avremo altri $n - 1$ integrali primi della proposta, per mezzo de' quali eliminando $z', z'' \ldots z^{(n-1)}$ otterremo l' integrale finito completo così espresso; $z =$

$$\frac{\alpha^{\Sigma 1} (c + \Sigma \alpha^{-\Sigma 1 - 1} . P)}{k} + \frac{\alpha_1^{\Sigma 1} (c_1 + \Sigma \alpha_1^{-\Sigma 1 - 1} . P)}{k_1} + \text{ec.}$$

essendo c, c_1, ec. n costanti arbitrarie.

Se la differenza di x fosse costante ed eguale all' unità, avremmo $\Sigma 1 = x$, ed il valore di z sarebbe in questo caso $z = \frac{\alpha^x (c + \Sigma \alpha^{-x-1} . P)}{k} + \frac{\alpha_1^x (c_1 + \Sigma \alpha_1^{-x-1} . P)}{k_1} + \text{ec.}$; il qual valore si cangia in quello trovato precedentemente, se in luogo di x vi si pone $\Sigma 1$. Generalmente avendo integrata una equazione, in cui la differenza finita di x sia eguale all' unità, ne potremo dedurre l' integrale della medesima equazione, allorchè la differenza di x è in qualunque modo variabile; e per ciò ottenere basta solo, che in luogo di x vi si ponga $\Sigma 1$, e questo integrale si prenda nel sistema di differenza variabile, che regna nella proposta. Potremo portanto ottener facilmente l' integrale di tutte le precedenti equazioni, quando in esse la x, in

luogo di variare dell' unità, varierà di una funzione qualunque di x. Così per esempio avendo trovato dell' equazione $z' = \frac{dz}{dy} + P$, allorchè $\Delta x = 1$, l' integrale essere $z = \frac{d^x(\phi.y + \Sigma\int^{x+1} dy^{x+1} P)}{dy^x}$; quando la differenza di x è qualunque, avremo l' integrale della medesima equazione così espresso, $z = \frac{d^{\Sigma 1}(\phi.y + \Sigma\int^{\Sigma 1+1} dy^{\Sigma 1+1} P)}{dy^{\Sigma 1}}$; e lo stesso si dica delle altre.

17. Nella medesima maniera si possono integrare l' equazioni di una simile forma a differenze parziali e infitamente piccole. Quantunque esse siano state trattate da altri, contuttociò vi applicherò il medesimo metodo, perchè avrò in seguito bisogno del loro integrale espresso in una forma generale e concisa. Sia data pertanto l' equazione $\frac{d^n z}{dx^n} + A\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + B\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} \ldots + N\frac{d^n z}{dy^n} = P$, ove siano A, B .... N costanti, e P una funzione data di x e di y. Poniamo che sia (*a*) $\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + A1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-2}dy} + B1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-3}dy^2} \ldots + M1\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}} = X$; e da questa differenziata per rapporto ad x ed y dedurremo

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^n z}{dx^n} + A1\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} + B1\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} \ldots + M1\frac{d^n z}{dx\,dy^{n-1}} \\ \quad - \alpha\frac{d^n z}{dx^{n-1}dy} - \alpha A1\frac{d^n z}{dx^{n-2}dy^2} \ldots - \alpha M1\frac{d^n z}{dy^n}\end{array}\right\} =$$

$\frac{dX}{dx} - \alpha\frac{dX}{dy}$. Essendo questa equazione di una forma simile alla proposta, paragoniamola con essa, ed avremo in primo luogo (*b*) $\frac{dX}{dx} - \alpha\frac{dX}{dy} = P$; poi dal confronto degli altri termini ricaveremo come sopra (*6*) i valori dei coefficienti A1, B1, ec.; e vedremo che α è una

radice della equazione (*c*) $\alpha^n + A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} \ldots + N = 0$. L' integrale della equazione (*b*) è noto essere $X = \int P dx$, purchè si prenda questo integrale nella ipotesi di $y + \alpha x$ costante, e sarà perciò $\varphi(y + \alpha x)$ la funzione arbitraria, che deve aggiungersi ad esso per renderlo completo. Sostituiti i valori di A1, B1, &c. ed X, sarà l' equazione (*a*) l' integrale primo della proposta.

Se adesso operando egualmente sulla equazione (*a*), ponghiamo $\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + A2 \frac{d^{n-2}z}{dx^{n-3}dy} \ldots + L2 \frac{d^{n-2}z}{dy^{n-2}} = X1$, avremo similmente (*d*) $\frac{dX1}{dx} - \alpha 1 \frac{dX1}{dy} = X$, ove (*6*) sarà $\alpha 1$ un' altra radice della equazione (*c*) diversa da α. Ora l' equazione (*d*) integrata ci dà $X1 = \int X dx$, purchè si prenda questo integrale nella ipotesi di $y + \alpha 1 x$ costante. Dunque sostituendo il valore di X avremo $X1 = \int^2 P dx^2$, purchè facciamo una integrazione supponendo $y + \alpha x$ costante, e l' altra supponendo costante $y + \alpha 1 x$.

Senza che progrediamo più oltre, facilmente apparisce, che l' integrale finito della proposta sarà $z = \int^n P dx^n$, purchè facciamo le integrazioni supponendo costanti una volta $y + \alpha x$, un' altra $y + \alpha 1 x$, un' altra $y + \alpha 2 x$, &c.; ove α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, &c. sono le radici della equazione (*c*). A questo integrale, perchè sia completo, conviene aggiungere le *n* funzioni arbitrarie $\varphi(y + \alpha x) + \varphi'(y + \alpha 1 x) + \varphi''(y + \alpha 2 x) \ldots + \varphi^{(n-1)}[y + \alpha(n-1)x]$.

18. Se fosse proposta l' equazione più generale $\frac{d^n z}{dx^n}$

$$+ A \frac{d^{n-1}\left(az + b\frac{dz}{dy}\right)}{dx^{n-1}} + B \frac{d^{n-2}\left(a^2 z + 2ab\frac{dz}{dy} + b^2\frac{d^2 z}{dy^2}\right)}{dx^{n-2}}$$

$$+ C \frac{d^{n-3}\left(a^3 z + 3a^2 b\frac{dz}{dy} + 3ab^2\frac{d^2 z}{dy^2} + b^3\frac{d^3 z}{dy^3}\right)}{dx^{n-3}} \ldots\ldots$$

$$+ M \frac{d\left(a^{n-1}z + (n-1)a^{n-2}b\frac{dz}{dy} \ldots\ldots + b^{n-1}\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right)}{dx}$$

$+ N\left(a^n z + na^{n-1}b\frac{dz}{dy} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2\frac{d^2z}{dy^2}\ldots + b^n\frac{d^nz}{dy^n}\right)$ $= P$, si potrebbe trattare col medesimo metodo, ma più facilmente si ridurrà alla forma precedente. Facciamo $z = TZ$, ed avremo $az + b\frac{dz}{dy} = aTZ + b\frac{dT}{dy}Z + bT\frac{dZ}{dy} = bT\frac{dZ}{dy}$, se ponghiamo $aT + b\frac{dT}{dy} = 0$, cioè $T = e^{-\frac{a}{b}y}$. Quindi sarà $a^2z + 2ab\frac{dz}{dy} + b^2\frac{d^2z}{dy^2} = abT\frac{dZ}{dy} + b^2T\frac{d^2Z}{dy^2} + b^2\frac{dT}{dy}\cdot\frac{dZ}{dy} = b^2T\frac{d^2Z}{dy^2}$; $a^3z + 3a^2b\frac{dz}{dy} + 3ab^2\frac{d^2z}{dy^2} + b^3\frac{d^3z}{dy^3} = ab^2T\frac{d^2Z}{dy^2} + b^3\frac{dT}{dy}\cdot\frac{d^2Z}{dy^2} + b^3T\frac{d^3Z}{dy^3} = b^3T\frac{d^3Z}{dy^3}$, e così in seguito. Sostituiti questi valori, la proposta diventerà $\frac{d^nZ}{dx^n} + Ab\frac{d^nZ}{dx^{n-1}dy} + Bb^2\frac{d^nZ}{dx^{n-2}dy^2}\ldots$ $\ldots + Nb^n\frac{d^nZ}{dy^n} = e^{\frac{a}{b}y}.P$; cioè sarà ridotta alla forma precedente. Quindi l' integrale dell' equazione proposta sarà $z = e^{-\frac{a}{b}y}\int^n e^{\frac{a}{b}y}P\,dx^n$; purchè si facciano una dopo l' altra costanti le quantità $y + \alpha x$, $y + \alpha 1 x$, $y + \alpha 2 x$, &c.; essendo α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, &c. le radici della equazione $\alpha^n + Ab\alpha^{n-1} + Bb^2\alpha^{n-2}\ldots + Nb^n = 0$.

29. Ma per ottenere un resultato un poco più generale, consideriamo l' equazione del second' ordine $\frac{d^2z}{dx^2} + A\frac{d^2z}{dxdy} + B\frac{d^2z}{dy^2} + C\frac{dz}{dx} + D\frac{dz}{dy} + Ez = P$, in cui i coefficienti A, B, &c. sian tali, che la quantità $\alpha^2 + A\alpha\beta + B\beta^2 + C\alpha + D\beta + E$ sia risolubile in due fattori razionali della forma $\alpha + p\beta + q$, $\alpha + p'\beta + q'$. E' chia-

ro, che l' equazione proposta potrà mettersi in tal caso sotto la forma $\frac{d^2z}{dx^2} + p\frac{d^2z}{dxdy} + q\frac{dz}{dx} + p'\left(\frac{d^2z}{dxdy} + p\frac{d^2z}{dy^2} + q\frac{dz}{dy}\right) + q'\left(\frac{dz}{dx} + p\frac{dz}{dy} + qz\right) = P$; la quale, se facciamo (*a*) $\frac{dz}{dx} + p\frac{dz}{dy} + qz = X$, diventerà (*b*) $\frac{dX}{dx} + p'\frac{dX}{dy} + q'X = P$. L' integrale della equazione (*b*) è $X = e^{-q'x}\int e^{q'x}Pdx$, se si prende l' integrale $\int$ nella ipotesi di $y - p'x$ costante. E così pure l' integrale della equazione (*a*) sarà $z = e^{-qx}\int e^{qx}Pdx$, purchè si prenda l' integrale $\int$ nella supposizione di $y - px$ costante. Quindi sostituendo il valore di X, avremo con queste condizioni l' integrale della proposta $z = e^{-qx}\int e^{(q-q')x}dx\int e^{q'x}Pdx$.

Il medesimo metodo condurrà alla integrazione dell' equazioni lineari di qualunque ordine; purchè il loro primo membro sia tale, che il polinomio, il quale ne risulta dal porre $\alpha^r\beta^t$ in luogo di $\frac{d^{r+t}z}{dx^r dy^t}$ sia risolubile in fattori della forma $\alpha + p\beta + q$. E se n è l' ordine della equazione proposta, ed i fattori del polinomio sono $\alpha + p\beta + q$; $\alpha + p'\beta + q'$; $\alpha + p''\beta + q''$; . . . . . $a + p^{(n-2)}\beta + q^{(n-2)}$; $\alpha + p^{(n-1)}\beta + q^{(n-1)}$; è facile il vedere, che l' integrale della proposta sarà $z = e^{-qx}\int e^{(q-q')x}dx\int e^{(q'-q'')x}dx$ . . . . . $\int e^{(q^{(n-2)} - q^{(n-1)})x}dx\int e^{q^{(n-1)}}xPdx$; ove si deve supporre costante nel primo segno $\int$ la quantità $y - px$, nel secondo $y - p'x$, nel terzo $y - p''x$, e così in seguito.

Se q sarà il medesimo in tutti i fattori, questo valore di z diventerà più semplicemente espresso, e sarà $z = e^{-qx}\int^n e^{qx}Pdx^n$; ove si dovranno fare le integrazioni supponendo una dopo l' altra costanti le quantità $y - px$, $y - p'x$, $y - p''x$ ec., in quell' ordine che più piacerà.

ARTICOLO III.

Dell' equazioni a differenze parziali finite e infinitesime tra quattro variabili.

20. Fin qui abbiamo parlato dell' equazioni tra tre sole variabili; passiamo a dir qualche cosa di quelle, che ne contengono un maggior numero. Sia dunque z_x una funzione delle tre variabili x, y, e t; e si proponga l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$, ove a è una quantità costante. Ponendo $x=0$, e $z_0 = \varphi(y, t)$, avremo $z_1 = \frac{d\varphi}{dy} + a\frac{d\varphi}{dt}$; similmente fatto $x=1$, sarà $z_2 = \frac{dz_1}{dy} + a\frac{dz_1}{dt}$; e sostituendovi il valore di z_1 verrà $z_2 = \frac{d^2\varphi}{dy^2} + 2a\frac{d^2\varphi}{dydt} + a^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Continuando ad operare nella medesima maniera, otterremo finalmente $z_x = \frac{d^x\varphi}{dy^x} + A1\frac{d^x\varphi}{dy^{x-1}dt} + A2\frac{d^x\varphi}{dy^{x-2}dt^2} \ldots\ldots + A(x)\frac{d^x\varphi}{dt^x}$; ove A1, A2, ec. sono funzioni di x. Per determinarle sostituiamo questo valore nella proposta, ed avremo l' equazione $\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}} + A1'\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^x dt} + A2'\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x-1}dy^2} \ldots\ldots\ldots\ldots + A(x+1)'\frac{d^{x+1}\varphi}{dt^{x+1}} = \frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}} + A1\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^x dt} + A2\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x-1}dt^2} \ldots + A(x)\frac{d^{x+1}\varphi}{dydt^x} + a\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^x dt} + aA1\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x-1}dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots + aA(x)\frac{d^{x+1}\varphi}{dt^{x+1}}$. Quindi avrassi $\Delta A1 = a$, $\Delta A2 = aA1$, $\Delta A3 = aA2$, ec.: ed integrando $A1' = ax + C$; $A2 a^2\frac{x(x-1)}{2} + Cx + C1$; $A3 = a^3\frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} + C\frac{x(x-1)}{2} + C1x + C2$, &c. Ma quando $x=1$, dev' essere $A1 = a$, $A2 = 0$, $A3 = 0$, &c.; dunque avremo $C = 0$, $C1$

$= 0$, $C2 = 0$, ec.; e quindi $z_x = \frac{d^x\varphi}{dy^x} + ax\frac{d^x\varphi}{dy^{x-1}dt} + a^2\frac{x(x-1)}{2}\frac{d^x\varphi}{dy^{x-2}dt^2} \ldots\ldots + a^x\frac{d^x\varphi}{dt^x}$: la qual formola si può rappresentare così; $z_x = \left(\frac{d\varphi}{dy} + a\frac{d\varphi}{dt}\right)^x$, purchè nello sviluppo del secondo membro si applichino alla caratteristica d gli esponenti di $d\varphi$.

21. Se l' equazione fosse stata $z_{x-1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$; ponendo, come sopra (11), $-x$ in luogo di x, e mutando le differenziali di esponente negativo in integrali, avremmo $z_x = \left(\frac{d\varphi}{dy} + a\frac{d\varphi}{dt}\right)^{-x} = \int^x dy^x\varphi - ax\int^{x+1}dy^{x+1}\frac{d\varphi}{dt} + a^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2}dy^{x+2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ ec. Per dimostrar questa formola, integriamo la proposta relativamente ad y: avremo $z_x = \int z_{x-1}dy - a\int\frac{dz_x}{dt}dy$; e ponendo $x = 1$ sarà $z_1 = \int\varphi dy - a\int\frac{dz_1}{dt}dy$; $\int\frac{dz_1}{dt}dy = \int^2\frac{d\varphi}{dt}dy^2 - a\int^2\frac{d^2z_1}{dt^2}dy^2$; $\int\frac{d^2z_1}{dt^2}dy = \int^3\frac{d^2\varphi}{dt^2}dy^3 - a\int^3\frac{d^3z_1}{dt^3}dy^3$ ec.; onde sostituendo nella prima equazione i valori presi dalle altre otterremo $z_1 = \int dy\varphi - a\int^2 dy^2\frac{d\varphi}{dt} + a^2\int^3 dy^3\frac{d^2\varphi}{dt^3} - a^3\int^4 dy^4\frac{d^3\varphi}{dt^3} +$ ec. Così pure, posto $x = 2$, sarà $z_2 = \int dyz_1 - a\int dy\frac{dz_2}{dt}$; cioè $z_2 = \int dyz_1 - a\int^2 dy^2\frac{dz_1}{dt} + a^2\int^3 dy^3\frac{d^2z_1}{dt^2} -$ ec.; e sostituito il valore di z_1 sarà $z_2 = \int^2 dy^2\varphi - 2a\int^3 dy^3\frac{d\varphi}{dt} + 3a^2\int^4 dy^4\frac{d^2\varphi}{dt^2} -$ ec. Onde apparisce, che sarà in generale $z_x = \int^x dy^x\varphi - A_x\int^{x+1}dy^{x+1}\frac{d\varphi}{dt}$

+

$+ A1_x \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — ec. Per determinare le quantità A_x, $A1_x$, ec. si sostituisca questo valore nella proposta, ed avrassi $\int^{x-1} dy^{x-1}\phi - A_{x-1}\int^x dy^x \frac{d\phi}{dt} + A1_{x-1}\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — ec. $= \int^{x-1} dy^{x-1}\phi - A_x \int^x dy^x \frac{d\phi}{dt} + A1_x \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — ec. $+ a\int^x dy^x \frac{d\phi}{dt} - aA_x \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d^2\phi}{dt^2}$ + ec.; e quindi $\Delta A_x = a$, $\Delta A1_x = aA_{x+1}$, $\Delta A2_x = aA1_{x+1}$, ec. Onde integrando, $A_x = a_x + C$, $A1_x = a^2 \frac{x(x+1)}{2} + Cx + C1$, $A2_x = a^3 \frac{x(x+1)(x+2)}{2 \cdot 3} + C\frac{x(x+1)}{2} + C1x + C2$, ec.; e siccome $A_1 = a$, $A1_1 = a^2$, $A2_1 = a^3$, ec., sarà $C = C1 = C2 =$ ec. $= 0$, e $z_x = \int^x dy^x\phi - ax\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\phi}{dt} + a^2 \frac{x(x+1)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — ec.

Questo integrale ha poco pregio, perchè è espresso da una serie infinita; onde convien vedere, se fosse possibile di ridurlo ad un numero finito di termini. Sia dunque $S = \int^x dy^x\phi - ax\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\phi}{dt} + a^2 \frac{x(x+1)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\phi}{dt^2}$ — ec. e sia proposto di trovare il valore di S, o sia la somma di questa serie infinita. S' integri per parti la quantità $\int^x dy^x \Psi$, e si avrà, per i metodi altronde già noti, $\int^x dy^x \Psi =$

$$\frac{1}{1.2..(x-1)} \left\{ \begin{array}{l} y^{x-1}\int dy\Psi - (x-1)y^{x-2}\int y dy\Psi + \frac{(x-1)(x-2)}{2} y^{x-3}\int y^2 dy\Psi \\ \ldots\ldots\ldots \pm (x-1)y\int y^{x-2} dy\Psi \mp \int y^{x-1} dy\Psi . \end{array} \right\}$$

E ponendo $x + 1$ in luogo di x si avrà $\int^{x+1} dy^{x+1}\Psi$

$$= \frac{1}{1.2\ldots x} \left\{ \begin{array}{l} y^x\int dy\Psi - xy^{x-1}\int y dy\Psi + \frac{x(x-1)}{2} \int y^2 dy\Psi \\ \ldots\ldots\ldots \mp xy\int y^{x-1} dy\Psi \pm \int y^x dy\Psi \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{1.2\ldots x} [y^x\int dy\Psi - (x-1)y^{x-1}\int y dy\Psi \ldots\ldots \mp \int y^{x-1} dy\Psi]$$

$$-\frac{1}{1\cdot 2\ldots x}[y^{x-1}\int y dy\Psi-(x-1)y^{x-2}\int y^2 dy\Psi\ldots=\int y^x dy\Psi]$$

$=\frac{y}{x}\int^x dy^x\Psi-\frac{1}{x}\int^x y dy^x\Psi$. Quindi poi si ricaverà

$$x\int^{x+1}dy^{x+1}\frac{d\varphi}{dt}=y\int^x dy^x\frac{d\varphi}{dt}-\int^x dy^x\cdot y\frac{d\varphi}{dt};\ \frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2}dy^{x+2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$=\frac{x}{2}y\int^{x+1}dy^{x+1}\frac{d^2\varphi}{dt^2}-\frac{x}{2}\int^{x+1}dy^{x+1}\cdot y\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$=\frac{y^2}{2}\int^x dy^x\frac{d^2\varphi}{dt^2}-y\int^x dy^x\cdot y\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{1}{2}\int^x dy^x\cdot y^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, e così in seguito. Avremo pertanto, sostituendo i ritrovati valori,

$$S=\int^x dy^x(\varphi+ay\frac{d\varphi}{dt}+\frac{a^2y^2}{2}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{a^3y^3}{2\cdot 3}\cdot\frac{d^3\varphi}{dt^3}+\text{ec.})$$

$$-ay\int^x dy^x(\frac{d\varphi}{dt}+ay\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{a^2y^2}{dt^2}\cdot\frac{d^3\varphi}{dt^3}+\text{ec.})$$

$$+\frac{a^2y^2}{2}\int^x dy^x(\frac{d^2\varphi}{dt^2}+ay\frac{d^3\varphi}{dt^3}+\text{ec.})+\text{ec.};\ \text{cioè}\ S=$$

$$\int^x dy^x(y,t+ay)-ay\int^x dy^x\frac{d\varphi(y,t+ay)}{dt}+\frac{a^2y^2}{2}\int^x dy^x\frac{d^2\varphi(y,t+ay)}{dt^2}$$

— ec.; o sia sarà S il valore di $\int^x dy^x\varphi(y,t+ay)$, allorchè dopo le integrazioni vi si pone $t-ay$ in luogo di t, o finalmente sarà S il valore di $\int^x dy^x\varphi(y,t)$, quando si fanno le integrazioni nella ipotesi di $t-ay$ costante.

L' integrale adunque della equazione $z_{x-1}=\frac{dz_x}{dy}+a\frac{dz_x}{dt}$ sarà così semplicemente espresso; $z_x=\int^x dy^x\varphi(t,y)$; ove l'integrali si devono prendere nella supposizione di $t-ay$ costante, e quindi in ciascuna integrazione conviene aggiungere una funzione arbitraria di $t-ay$; onde dopo x integrazioni verrà ad essere aggiunta la formola seguente

$$\Psi(x,t-ay)+y\Psi(x-1,t-ay)+\frac{y^2}{2}\Psi(x-2,t-ay)\ldots\ldots$$

$$\ldots+\frac{y^{x-1}}{2\cdot 3\ldots(x-1)}\Psi(1,t-ay).$$ Quindi l' integrale della proposta conterrà due funzioni arbitrarie $\varphi(t,y)$, e $\Psi(x,t-ay)$, com' esser doveva, perchè la proposta è del second' ordine.

Si potrà trovare l' integrale della equazione $z_{x-1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$ anche con un altro metodo. Si ponga $x-1$ in luogo di x, ed avrassi $z_{x-2} = \frac{dz_{x-1}}{dy} + a\frac{dz_{x-1}}{dt}$; e sostituendo il valore di z_{x-1} sarà $z_{x-2} = \frac{d^2z_x}{dy^2} + 2a\frac{d^2z_x}{dydt} + a^2\frac{d^2z_x}{dt^2}$. Così pure troverassi $z_{x-3} = \frac{d^3z_x}{dy^3} + 3a\frac{d^2z_x}{dy^2dt} + 3a^2\frac{d^2z_x}{dydt^2} + a^3\frac{d^3z_x}{dt^3}$; e finalmente, posto $z_0 = \varphi(y,t)$, si giungerà alla equazione (a) $\varphi(y,t) = \frac{d^xz_x}{dy^x} + ax\frac{d^xz_x}{dy^{x-1}dy} + a^2\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{d^xz_x}{dy^{x-2}dt^2} \ldots\ldots + a^x\frac{d^xz_x}{dt^x}$, ove si può riguardare x come costante. Ora l' integrale di questa equazione è (17) $z_x = \int^x dy^x\varphi(y,t)$, purchè si facciano le integrazioni supposte costanti una dopo l' altra le quantità $t+\alpha y$, $t+\alpha 1y$, $t+\alpha 2y$, ec.; ove α, $\alpha 1$, $\alpha 2$, ec. sono le radici della equazione $\alpha^x + ax\alpha^{x-1} + a^2\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2}\ldots\ldots + a^x = (\alpha+a)^x = 0$. Ma queste radici sono tutte $= -a$; dunque l' integrale della proposta sarà $z_x = \int^x dy^x\varphi(y,t)$, purchè si facciano tutte le integrazioni nella supposizione di $t-ay$ costante.

L' integrale della equazione (a) porterà x funzioni arbitrarie di x e di $t-ay$ rappresentate della formola $\frac{y^{x-1}}{2\cdot 3\ldots(x-1)}\Psi_{1,x,t-ay} + \frac{y^{x-2}}{2\cdot 3\ldots(x-2)}\Psi_{2,x,t-ay}\ldots\ldots + \Psi_{x,x,t-ay}$. Per determinare la forma di queste funzioni si sostituisca la formola precedente nella proposta in luogo di z_x, e dal paragone de' termini troverassi in generale $\Psi_{n,x,t-ay} = \Psi_{n,x-1,t-ay}$, la qual' equazione ci dà $\Psi_{n,x,t-ay} = F_{n,t-ay}$. Sarà dunque $\Psi_{1,x,t-ay} = F_{1,t-ay}$; $\Psi_{2,t-ay} = F_{2,t-ay}$;.. ... $\Psi_{x,x,t-ay} = F_{x,t-ay}$; cioè una sola sarà la funzione arbitraria di x e di $t-ay$, come avevamo già veduto di sopra.

22. L' equazioni precedenti si possono però facilmente ridurre alla integrazione con una semplicissima trasformazione delle variabili. Ripigliamo l' equazione $z_{x+1} = \frac{dz_x}{dy} + a\frac{dz_x}{dt}$, e ponghiamo in luogo di t un' altra variabile u, che sia funzione di y e t, in modo che la quantità z_x diventi una funzione di x, y, ed u, che chiameremo Z_x. Sarà dunque $z_{x+1} = Z_{x+1}$; $\frac{dz_x}{dy} = \frac{dZ_x}{dy} + \frac{dZ_x}{du} \cdot \frac{du}{dy}$; $\frac{dZ_x}{dt} = \frac{dZ_x}{du} \cdot \frac{du}{dt}$; sostituiti i quali valori la proposta diventerà $Z_{x+1} = \frac{dZ_x}{dy} + \left(\frac{du}{dy} + a\frac{du}{dt}\right)\frac{dZ_x}{du}$. Facciamo $\frac{du}{dy} + a\frac{du}{dt} = 0$, ed avremo $Z_{x+1} = \frac{dZ_x}{dy}$, ove possiamo riguardare u come costante; e l' integrale di essa sarà (1) $Z_x = \frac{d^x\varphi(y,u)}{dy^x}$. Ora l' equazione $\frac{du}{dy} + a\frac{du}{dt} = 0$ integrata ci dà $u = \Psi(t - ay)$; ma poichè non abbiamo bisogno, che di un valore particolare di u, prenderemo $u = t - ay$, lo che combina con le cose precedenti.

Generalmente, se sarà z_x funzione di un numero qualunque di variabili x, y, t, u, ec., data dalla equazione $z_{x+1} = a\frac{dz_x}{dy} + b\frac{dz_x}{dt} + c\frac{dz_x}{du} +$ ec., e sieno a, b, c, ec. quantità costanti, si troverà col medesimo metodo $z_x = a^x\frac{d^x\varphi(y, t, u, \&c.)}{dy^x}$, purchè si prendano le differenziali supponendo costanti le quantità $at - by$, $au - cy$, &c.

23. Sia adesso proposta l' equazione $az_{x+1}\ bz_x = \frac{dz_x}{dy} + c\frac{dz_x}{dt} + P$, ove sia a funzione di x, b e c funzioni di y e t, e P funzione di x, y, e t. Sia M il Moltiplicatore, che rende integrabile la differenziale $dt - cdy$, e sia

$\int M(dt - cdy) = u$. Introduciamo in luogo di t questa nuova variabile u, in modo che z_x diventi una funzione di x, y ed u, che chiameremo Z_x; e b, c, P si cangino respettivamente in b', c', e P'. Fatte queste sostituzioni la proposta diventerà $aZ_{x+1} + b'Z_x = \frac{dZ_x}{dy} + P'$. In questa u si può riguardare come costante, ed il di lei integrale è perciò (5) $Z_x = e^{\int b'dy - \Sigma \log.a} \cdot \frac{d^x \varphi(y,u)}{dy^x}$ $+ e^{\int b'dy - \Sigma \log.a} \cdot \frac{d^x \Sigma e^{\Sigma \log.a} \int_{x+1} dy^{x+1} P' e^{-\int b'dy}}{dy^x}$.

24. Fin qui abbiamo trattate quell' equazioni, nelle quali le differenze di due variabili erano infinitamente piccole, e la differenza della terza finita; passiamo a considerar quelle, nelle quali la differenza di due variabili è finita, e della terza infinitesima. Sia pertanto $z_{x,y}$ funzione di x, y, e t; e sia proposta l' equazione $z_{x+1,y} = z_{x,y+1} + a\frac{dz_{x,y}}{dt}$, ove a è una quantità costante. Ponendo $z_{0,y} = \varphi(y,t)$, se facciamo $x = 0$, avremo $z_{1,y} = \varphi(y+1,t) + a\frac{d\varphi(y,t)}{dt}$. Così facendo $x = 1$, avremo $z_{2,y} = z_{1,y+1} + a\frac{dz_{1,y}}{dt}$; e sostituendo il valore di $z_{1,y}$, sarà $z_{2,y} = \varphi(y+2,t) + 2a\frac{d\varphi(y+1,t)}{dt}$ $+ a^2\frac{d^2\varphi(y,t)}{dt^2}$. Nella medesima maniera troveremo $z_{3,y} =$ $\varphi(y+3,t) + 3a\frac{d\varphi(y+2,t)}{dt} + 3a^2\frac{d^2\varphi(y+1,t)}{dt^2} + a^3\frac{d^3\varphi(y,t)}{dt^3}$; onde si vede, che in generale sarà $z_{x,y} = \varphi(y+x,t) +$ $xa\frac{d\varphi(y+x-1,t)}{dt} \ldots + a^x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$; e questo è l' integrale della proposta.

Ma per aver questo integrale in una forma più concisa, ponghiamo $z_{x,y} = Z_{x,y}\frac{d^{x+y}Z_{1,x,y}}{dt^{x+y}}$, ove $Z_{x,y}$ è funzio-

ne di x ed y, e $Z1_{xy}$ funzione di x, y, t; e sostituendo avremo $Z_{x+1y} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{x+1y}}{dt^{x+y+1}} = Z_{xy+1} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z_{xy+1}}{dt^{x+y+1}}$ $+ aZ_{xy} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{xy}}{dt^{x+y+1}} = Z_{xy+1} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{xy}}{dt^{x+y+1}} +$ $Z_{xy+1} \cdot \frac{d^{x+y+1}\Delta' Z1_{xy}}{dt^{x+y+1}} + aZ_{xy} \cdot \frac{d^{x+y+1}.Z1_{xy}}{dt^{x+y+1}}$. Facciamo Z_{x+1y} $= Z_{xy+1}$, $Z_{xy+1} = -aZ_{xy}$, alle quali equazioni soddisfaremo con prendere $Z_{xy} = (-a)^{x+y}$. Ciò posto l' equazione precedente diventerà $Z1_{x+1y} = \Delta' Z1_{xy}$, ed integrata ci darà $Z1_{xy} = \Delta'^x \varphi(y,t)$. Pertanto l' integrale della proposta sarà $z_{xy} = \frac{(-a)^{x+y} d^{x+y} \Delta'^x \varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$.

Quantunque questo valore di z_{xy} sembri a prima vista diverso da quello trovato di sopra, pure ambedue combinano perfettamente. Infatti ponghiamo in quello $(-a)^y \frac{d^y \varphi(y,t)}{dt^y}$ in luogo di $\varphi(y,t)$, lo che può farsi senza nulla togliere alla generalità, e diventerà

$$(-a)^{x+y} \cdot \frac{d^{x+y}[\varphi(y+x,t) - x\varphi(y+x-1,t) \ldots\ldots \pm \varphi.t]}{dt^{x+y}};$$

cioè $(-a)^{x+y} \cdot \frac{d^{x+y} \Delta'^x \varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$.

25. Se l' equazione data avrà la forma $z_{x-1y} = z_{xy+1} - a \frac{dz_{xy}}{dt}$, porremo $z_{xy} = Z_{xy} \cdot \frac{d^{y-x} Z1_{xy}}{dt^{x-y}}$, ove Z_{xy} è funzione di x ed y, e $Z1_{xy}$ funzione x, y e t; e sostituendo avremo $Z_{x-1y} \cdot \frac{d^{x-y+1}.Z1_{x-1y}}{dt^{x-y+1}} = Z_{xy+1} \cdot \frac{d^{x-y+1}(Z1_{xy} + \Delta' Z1_{xy})}{dt^{x-y+1}}$ $- aZ_{xy} \cdot \frac{d^{x-y+1}.Z1_{xy}}{dt^{x-y+1}}$. Facciamo $Z_{x-1y} = Z_{xy+1} = aZ_{xy}$, cioè $Z_{xy} = a^{y-x}$, e l' equazione precedente diventerà $Z1_{x-1y} = \Delta' Z_{xy}$, l' integrale della quale è $Z1_{xy} = \Sigma'^x \varphi(y,t)$. Sarà perciò $z_{xy} = \frac{a^{y-x} d^{y-x} \Sigma'^x \varphi(y,t)}{dt^{y-x}} = \frac{a^{y-x} d^y \Sigma'^x \int^x dt^x \varphi(y,t)}{dt^y}$.

Si potrebbe giungere al medesimo integrale anche con

un altro metodo. Posto $z_{0,y} = \Psi(y,t)$ la proposta si può trasformare nella seguente $\Psi(y,t) = z_{x,y+x} - xa\frac{dz_{x,y+x-1}}{dt} + \frac{x(x-1)}{2}a^2\frac{d^2z_{x,y+x-2}}{dt^2} \ldots \pm a^x\frac{d^xz_{x,y}}{dt^x}$; e dividendo per $(-1)^xa^x$ verrà $\frac{\Psi(y,t)}{(-1)^xa^x} = \frac{d^xz_{x,y}}{dt^x} - \frac{x}{a}\cdot\frac{d^{x-1}z_{x,y+1}}{dt^{x-1}} + \frac{x(x-1)}{2a^2}\cdot\frac{d^{x-2}z_{x,y+2}}{dt^{x-2}} \ldots \pm \frac{1}{a^x}z_{x,y+x}$, ove si può riguardare x come costante. Paragonandola con l' equazione trattata al n.° 6. troveremo, che tutte le radici della equazione (P) sono eguali ad $\frac{1}{a}$; e quindi il di lei integrale sarà $z_{x,y} = \frac{a^{y-x}d^y\Sigma'^xa^{-y}\int^{x+y}dt^{x+y}\Psi(y,t)}{dt^y}$, il quale combina col valore trovato precedentemente, e si riduce ad esso ponendo $\frac{1}{a^y}\int^y dt^y\Psi(y,t) = \varphi(y,t)$.

26. Che se la proposta fosse $z_{x-1,y} = z_{x,y-1} - a\frac{dz_{x,y}}{dt}$; in tal caso porremmo $z_{x,y} = Z_{x,y}\int^{x+y}dt^{x+y}Zt_{x,y}$, preso Z e Zt come sopra, e sostituendo avremmo $Z_{x-1,y}\int^{x+y-1}dt^{x+y-1}.Zt_{x-1,y} = Z_{x,y-1}\int^{x+y-1}dt^{x+y-1}(Zt_{x,y} - \Delta'^1Zt_{x,y-1}) - aZ_{x,y}\int^{x+y-1}dt^{x+y-1}.Zt_{x,y}$. Facciamo $Z_{x-1,y} = Z_{x,y-1} = aZ_{x,y}$, cioè $Z_{x,y} = \frac{1}{a^{x+y}}$; e l' equazione precedente ci darà $Zt_{x-1,y} = -\Delta'Zt_{x,y-1}$, l' integrale della quale è $Z_{x,y} = (-1)^x\Sigma'^x\varphi(y+x,t)$. Pertanto l' integrale della proposta sarà $z_{x,y} = \frac{(-1)^x}{a^{x+y}}\int^{x+y}dt^{x+y}\Sigma'^x\varphi(x+y,t)$. I due segni integrali Σ' ed $\int$ porteranno altre due funzioni arbitrarie, una di x e t, e l' altra di x ed y, com' esser doveva, perchè la proposta è del terz' ordine.

27. Sia data adesso l' equazione $z_{x+1,y} = z_{x,y+1} - a\frac{dz_{x,y}}{dt} + P_x$, essendo a costante, e P_x funzione di x, y, t. Facciamo $z_{x,y} = a^{x+y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^xZ_{x,y}}{dt^{x+y}}$, e sostituendo avremo

$$a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x+1,y}}{dt^{x+y-1}}=a^{x+y+1}\cdot\frac{d^{x+y+1}\Delta'^{x+1}Z_{x,y}}{dt^{x+y+1}}+P_x.$$

Quindi $\Delta Z_{x,y}=\Sigma'^{x+1}\cdot\frac{1}{a^{x+y+1}}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P_x$, ed integrando

$Z_{x,y}=\varphi(y,t)+\Sigma\Sigma'^{x+1}\cdot\frac{1}{a^{x+y+1}}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P_x$. Quindi l' integrale della proposta sarà, $z_{x,y}=a^{x+y}\cdot\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$

$$+\ a^{x+y}\cdot\frac{d^{x+y}\Delta'^{x}\Sigma\Sigma'^{x+1}\cdot a^{-x-y-1}\int^{x+y+1}dt^{x+y+1}P_x}{dt^{x+y}}.$$

Quest' ultimo termine si può anche esprimer così;

$$\frac{a^y d^y\Sigma\Delta'^r\frac{1}{a^{y-r}}\int^{y-r}dt^{y-r}P_{x-r-1}}{dt^y},$$ ove l' integrale Σ si deve prendere relativamente ad r da $r=0$ fino ad $r=x-1$.

28. Più generalmente, se fosse data l' equazione $az_{x+1,y}+bcz_{x,y}=z_{x,y+1}+c\frac{dz_{x,y}}{dt}+P$, ove a, b, c, P sono respettivamente funzioni di x, di t, di $x+y$, e di x, y, t; porremo $z_{x,y}=Z_{x,y}.Z1_{x,y}$, essendo $Z_{x,y}$ e $Z1_{x,y}$ ambedue funzioni di x, y, t; e sostituendo avremo invece $aZ_{x+1,y}.Z1_{x+1,y}+bcZ_{x,y}.Z1_{x,y}=Z_{x,y+1}.Z1_{x,y+1}+cZ_{x,y}.\frac{dZ1_{x,y}}{dt}+cZ1_{x,y}.\frac{dZ_{x,y}}{dt}+P$. Facciamo adesso

(1) $bZ_{x,y}=\frac{dZ_{x,y}}{dt}$; (2) $Z_{x,y+1}=cZ_{x,y}$; (3) $aZ_{x+1,y}=Z_{x,y+1}$; ed otterremo $Z1_{x+1,y}=Z1_{x,y+1}+\frac{dZ1_{x,y}}{dt}+\frac{P}{Z_{x,y+1}}$, che abbiamo integrata nel num.° precedente. Per determinare $Z_{x,y}$ abbiamo dalla equazione (1) $Z_{x,y}=e^{\int bdt}.\psi(x,y)$, e sostituito questo valore la (2) diventa $\psi(x,y+1)=c\psi(x,y)$, e quindi abbiamo $\psi(x,y)=e^{\Sigma'\log.c}.\phi.x$, e dalla equazione (3) ricaveremo $\phi.x=e^{-\Sigma\log.a}$. Sarà dunque $Z_{x,y}=e^{\int bdt+\Sigma'\log.c-\Sigma\log.a}$; o sia più semplicemente, poichè c è funzione di $x+y$, sarà $Z_{x,y}=e^{\int bdt+\Sigma\log.\frac{c}{a}}$.

AR-

ARTICOLO IV.

Metodo generale per l' integraione dell' equazioni tra tre variabili, nelle quali i coefficienti sono costanti.

29. Allorchè nell' equazioni lineari a differenze parziali finite e infinitesime i coefficienti son costanti, e non vi è alcun termine, che non contenga la funzione z_x, si può adoperare per la loro integrazione un' altro semplicissimo metodo. Sia proposta l' equazione del prim' ordine $z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy}$. Ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ove α e β sono quantità costanti, ed e il numero, che ha per logaritmo iperbolico l' unità. Sostituendo questo valore, e dividendo l' equazione per $\alpha^x e^{\beta y}$ otterremo $\alpha = A + B\beta$; la qual' equazione esprime il rapporto, che devono aver tra loro le quantità α e β, perchè $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$ soddisfaccia alla proposta. Sarà dunque $z_x = (A + B\beta)^x e^{\beta y} = [A^x + xA^{x-1}B\beta + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\beta^2 \ldots + B^x\beta^x]e^{\beta y}$; il qual valore si può mettere sotto la forma $z_x = A^x e^{\beta y} + xA^{x-1}B\frac{d.e^{\beta y}}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^2.e^{\beta y}}{dy^2} \ldots + B^x\frac{d^x.e^{\beta y}}{dy^x}$, e questo sarà un integrale particolare della proposta.

Per dedurne l' integrale completo si osservi, che ponendo nella proposta il precedente valore di z_x, essa diventerà identica. Ma, o cresca x dell' unità, o si differenzj z_x per rapporto ad y, è chiaro che in questa sostituzione si manterrà in ciascun termine inalterata la quantità $e^{\beta y}$, e solo si cangeranno i coefficienti e gli esponenti della caratteristica d. E siccome β può esser qualunque, se dopo questa sostituzione si porranno tutti i termini della equazione da una parte, svaniranno i coefficienti delle quantità $e^{\beta x}$, $\frac{d.e^{\beta y}}{dy}$, $\frac{d^2.e^{\beta y}}{dy^2}$, ec. Quindi, se nel valore di z_x in luogo di $e^{\beta y}$ si ponesse una funzione qualunque $\varphi.y$ di y, svanirebbero egualmente i coefficienti di $\varphi.y$, $\frac{d\varphi.y}{dy}$, $\frac{d^2\varphi.y}{dy^2}$, ec.,

che sarebbero quelli stessi di $e^{\beta y}$, $\frac{d.e^{\beta y}}{dy}$, ec., e l'equazione sarebbe sempre identica. Pertanto alla proposta soddisfarà il valore $z_x = A^x \phi.y + xA^{x-1}B\frac{d\phi.y}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^2\phi.y}{dy^2}$ $\ldots + \frac{B^x d^x \phi.y}{dy^x}$, che a motivo della funzione arbitraria $\phi.y$ ne sarà l'integrale completo.

Abbiamo espresso α per β; se invece prenderemo il valore di β, otterremo lo stesso integrale sotto una forma molto più semplice. Sarà infatti $\beta = \frac{\alpha - A}{B}$, e quindi $z_x = \alpha^x e^{\beta y} = \alpha^x e^{[(\alpha - A):B]y}$, il qual valore si può anche esprimere così, $z_x = B^x e^{-(A:B)y} \cdot \frac{d^x . e^{\alpha y:B}}{dy^x}$; e col medesimo raziocinio si proverà, che in luogo di $e^{\alpha y:B}$ si può mettere una funzione qualunque di y. Adunque il cercato integrale sarà $z_x = B^x e^{-(A.B)y} \cdot \frac{d^x y}{dy^x}$.

30. Passiamo adesso alla equazione $z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy} + C\frac{dz_{x+1}}{dy}$. Ponendo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$ avremo l'equazione $\alpha = A + B\beta + C\alpha\beta$, dalla quale si ricava $\alpha = \frac{A + B\beta}{1 - C\beta}$. Se esprimessimo, come sopra, il valore di α^x per le potenze di β, a motivo del denominatore $1 - C\beta$ avremmo una serie infinita; onde per ottenere l'integrale in termini finiti conviene in questo caso ricorrere ad altri artifizj. Facciamo $C\beta - 1 = C\gamma$, e sarà $\beta = \gamma + \frac{1}{C}$, ed $\alpha = \frac{A + B\gamma + B:C}{-C\gamma}$ $= \frac{1}{-C}\left(\frac{K}{\gamma} + B\right)$, posto $K = A + \frac{B}{C}$. Pertanto $\alpha^x e^{\beta y} =$ $\frac{1}{(-C)^x}\left(\frac{K}{\gamma} + B\right)^x e^{(\gamma + 1:C)y}$, e svolta in serie la quantità

$\left(\frac{K}{\gamma}+B\right)^x$ sarà $\alpha^x e^{\beta y}=\frac{1}{(-C)^x}e^{(\gamma+1:C)y}\left(\frac{K^x}{\gamma^x}+x\frac{K^{x-1}B}{\gamma^{x-1}}+\frac{x(x-1)}{2}\cdot\frac{K^{x-2}B^2}{\gamma^{x-2}}\ldots\ldots+B^x\right)$, la qual formola si può mettere sotto la forma $\frac{1}{(-C)^x}e^{(y:C)}(K^x\int^x dy^x e^{\gamma y}+xK^{x-1}B\int^{x-1}dy^{x-1}e^{\gamma y}\ldots+B^x e^{\gamma y})$. Quindi per le ragioni addotte sopra ponendo una funzione di y in luogo di $e^{\gamma y}$ avremo

$$z_x=\left\{\begin{array}{l}\frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}(K^x\int^x dy^x\varphi.y+xK^{x-1}B\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y+\\ \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y+\text{ec.})\end{array}\right\}.$$

Il segno integrale $\int^x dy^x\varphi.y$ introduce la quantità $\Psi.x+y\Psi(x-1)+\frac{y^2}{2}\Psi(x-2)+\frac{y^3}{2.3}\Psi(x-3)\ldots+\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi 1$; similmente il segno $\int^{x-1}$ porterà la quantità $\Psi(x-1)+y\Psi(x-2)+\frac{y^2}{2}\Psi(x-3)\ldots\ldots+\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi 1$; e così in seguito. Onde l'integrale completo della proposta sarà

$$z_x=\frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}(K^x\int^x dy^x\varphi.y+xK^{x-1}B\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y\ldots+B^x\varphi.y)$$

$$+\frac{e^{(y:C)}.K^x}{(-C)^x}\left\{\begin{array}{l}\Psi.x+(y+\frac{B}{K}x)\Psi(x-1)+[\frac{y^2}{2}+\frac{B}{K}xy+\\ \frac{B^2}{K^2}.\frac{x(x-1)}{2}]\Psi(x-2)+[\frac{y^3}{2.3.}+\frac{B}{K}.\frac{xy^2}{2}+\\ \frac{B^2}{K^2}.\frac{x(x-1)y}{2}+\frac{B^3}{K^3}.\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}]\Psi(x-3)\ldots\\ +[\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}+\frac{B}{K}.\frac{xy^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\ldots+\frac{B^{x-1}}{K^{x-1}}]\Psi 1.\end{array}\right\}$$

il quale contiene due funzioni arbitrarie $\varphi.y$, e $\Psi.x$, perchè la proposta è del second' ordine.

La prima linea del valore di z_x si potrà rendere più concisa, se si pone sotto la forma

$\frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}\int^x dy^x\left(K^x\varphi.y + xK^{x-1}B\frac{d\varphi}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots\right.$ $\left.+ B^x\frac{d^x\varphi}{dy^x}\right)$. Facciamo $Q_x = K^x\varphi.y + xK^{x-1}B\frac{d\varphi}{dy} + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}B^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots B^x\frac{d^x\varphi}{dy^x}$, ed avremo $Q_{x+1} = K^{x+1}\varphi.y + (x+1)K^xB\frac{d\varphi}{dy} + \frac{(x+1)x}{2}K^{x-1}B^2\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots\ldots\ldots$ $\ldots + B^{x+1}\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}}$; poi $\frac{dQ_x}{dy} = K^x\frac{d\varphi}{dy} + xK^{x-1}\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots$ $+ B^x\frac{d^{x+1}\varphi}{dy^{x+1}}$. Quindi apparisce, che sarà $Q_{x+1} = KQ_x$ $+ B\frac{dQ_x}{dy}$, l' integrale della qual' equazione è $Q_x =$ $B^xe^{-(K:B)y}.\frac{d^x\varphi y}{dy^x}$. Per conseguenza in luogo della prima linea del valore di z_x si potrà sostituire la quantità $e^{(y:C)}\left(-\frac{B}{C}\right)^x\int^x dy^x\left(e^{-(K:B)y}.\frac{d^x\varphi.y}{dy^x}\right)$.

Se $K=0$, cioè $B=-AC$, ponendo $\Psi.x=\frac{F.x}{K^x}$ avremo $z_x = e^{(y:C)}A^x\varphi.y + \frac{e^{(y:C)}}{(-C)^x}\left(F.x + BxF(x-1) + B^2\frac{x(x-1)}{2}F(x-2)\ldots\ldots + B^{x-1}xF.1\right)$, o sia più semplicemente $z_x = A^x\varphi.y + e^{(y:C)}F.x$.

A questo integrale giungeremo subito, se osserviamo che l' equazione $\alpha = A + B\beta + C\alpha\beta$ diventa in questo caso della forma $(\alpha - A)(1 - C\beta) = 0$, onde si deduce o $\alpha =$ A e β qualunque, o $\beta = \frac{1}{C}$ ed α qualunque. Quindi $A^xe^{\beta y}$, e $e^{(y:C)}.\alpha^x$ soddisfaranno alla proposta. Ma in luogo di $e^{\beta y}$ possiamo porre una funzione qualunque di y, e così pure una funzione qualunque di x in luogo di α^x; poichè il valore $e^{(y:C)}.\alpha^x$ sostituito nella proposta in luogo di z_x la

renderà identica; e perciò, posti tutti i termini da una parte e dall'altra zero, saranno dopo questa sostituzione eguali a zero i coefficienti di α^x e di α^{x+1}, a motivo di α qualunque. Ora se invece di α^x prendiamo Ψx, e sostituiamo $e^{(y:C)}\Psi.x$ in luogo di z_x, saranno i coefficienti di $\Psi.x$ e $\Psi(x+1)$ quei medesimi, che prima erano di α^x e di α^{x+1}, cioè eguali a zero. Pertanto soddisfaranno alla proposta i due valori $A^x\varphi.y$, ed $e^{(y:C)}\Psi.x$ di z_x, e siccome la proposta è lineare, soddifarà ancora $z_x = A^x\varphi.y + e^{(y:C)}\Psi x$, e ne sarà l'integrale completo, perchè comprende le due funzioni arbitrarie $\varphi.y$ e $\Psi.x$.

31. L'equazioni degli ordini superiori si potranno facilmente integrare, se dopo di avervi sostituito $\alpha^x e^{\beta y}$ in luogo di z_x, l'equazione, che ne nasce tra α e β, sarà risolubile in fattori della forma $\alpha - p - q\beta = 0$, o pure $\alpha - p - q\beta - r\alpha\beta = 0$. Ciascuno di questi fattori ci darà un valore particolare di z_x, e la somma di tutti l'integrale completo della proposta. A render ciò evidente consideriamo l'equazione del second' ordine $z_{x+2} + Az_{x+1} + Bz_x + C\frac{dz_x}{dy} + D\frac{dz_{x+1}}{dy} + E\frac{d^2z_x}{dy^2} = 0$, la quale posto $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$ ci dà tra α e β l'equazione $\alpha^2 + A\alpha + B + C\beta + D\alpha\beta + E\beta^2 = 0$. Se il primo membro di questa equazione è risolubile ne' due fattori $\alpha - p - q\beta$, $\alpha - p' + q'\beta$, è chiaro che ad essa si potrà dar la forma seguente $\alpha^2 - p\alpha + q\alpha\beta - p'(\alpha - p - q\beta) - q'(\alpha\beta - p\beta - q\beta^2) = 0$. Quindi l'equazione proposta sarà della forma $z_{x+2} - pz_{x+1} - q\frac{dz_{x+1}}{dy} - p'\left(z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy}\right) - q'\left(\frac{dz_{x+1}}{dy} - p\frac{dz_x}{dy} - q\frac{d^2z_x}{dy^2}\right) = 0$, ed è evidente, che ad essa soddisfà l'equazione $z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy} = 0$, cioè integrando $z_x = q^x e^{(-p:q)y} \cdot \frac{d^x\varphi.y}{dy^x}$. Nella stessa maniera si proverà, che alla proposta soddisfà l'equazione $z_{x+1} - p'z_x - q'\frac{dz_x}{dy} = 0$, e quindi $z_x = q'^x . e^{-(p':q')y} \cdot \frac{d^x\varphi'.y}{dy^x}$. Onde, siccome

la proposta è lineare, l' integrale sarà $z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \varphi . y}{dy^x}$ $+ q'^x e^{-(p':q')y} . \frac{d^x \varphi' . y}{dy^x}$. L' istesso discorso si applica a qualunque altra equazione di una simile forma.

32. Negli stessi casi si potrà trovare l' integrale di quest' equazioni, anche quando il secondo membro, invece di esser zero, sarà una funzione qualunque P di x ed y. Infatti ponendo (*a*) $z_{x+1} - pz_x - q\frac{dz_x}{dy} = X_x$, l' equazione per esempio del second' ordine, che abbiamo considerata nel n.° antecedente, diventerà $X_{x+1} - p'X_x - q'\frac{dX_x}{dy} = P$; la quale integrata ci darà (5)

$$X_x = q'^x e^{-(p':q')y} . \frac{d^x \Sigma q'^{-x-1} \int^{x+1} dy^{x+1} . P e^{(p':q')y}}{dy^x} .$$

Trovato X_x avremo dalla equazione (*a*)

$$z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \Sigma q^{-x-1} \int^{x+1} dy^{x+1} . X_x e^{(p:q)y}}{dy^x} .$$

Se p e q sono in ambedue i fattori i medesimi, sostituendo nel valore di z_x quello di X_x avremo

$$z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \Sigma^2 q^{-x-2} \int^{x+2} dy^{x+2} . P e^{(p:q)y}}{dy^x} .$$

Il medesimo metodo riuscirà in tutte l' equazioni di una simile forma; e nel caso che tutti i fattori $\alpha - p - p\beta$, $\alpha - p' - q'\beta$, &c. siano eguali, otterremo generalmente

$$z_x = q^x e^{-(p:q)y} . \frac{d^x \Sigma^n q^{-x-n} \int^{x+n} dy^{x+n} . P e^{(p:q)y}}{dy^x} ,$$ essendo n l' ordine della equazione.

33. Se l' equazione in α e β non è risolubile in fattori di primo grado, con i metodi conosciuti potremo esprimere la quantità α^x in una serie ascendente ordinata per le potenze di β di questa forma $\alpha^x = M\beta^{mx} + M'\beta^{mx+m'} + M''\beta^{mx+m''} +$ ec.; e col medesimo raziocinio usato di sopra ne dedurremo il valore particolare di z_x; cioè

$$z^x = M \frac{d^{mx}\varphi . y}{dy^{mx}} + M' \frac{d^{mx+m'}\varphi . y}{dy^{mx+m'}} + M'' \frac{d^{mx+m''}\varphi . y}{dy^{mx+m''}} + \text{ec.}$$

Ma siccome abbiamo tante serie per esprimere α^x, quanto è il grado dell' equazione in α e β, o sia quanto è l' ordine della equazione proposta tra z_x e le sue differenze, otterremo altrettanti valori particolari di z_x, e la somma di tutti ci darà l' integrale completo della proposta.

Se per le condizioni del problema le funzioni arbitrarie $\varphi.y$, &c. fossero funzioni intere, le serie in tal caso si terminerebbero, ed avremmo l' integrale espresso in un numero finito di termini. Eccettuato questo caso l' integrale ottenuto in tal modo sarà composto d' infiniti termini, e per averlo sotto una forma finita converrà ricorrere ad un altro metodo, che adesso son per esporre.

34. Sia adunque proposta l' equazione generale del second'ordine $z_{x+2} = Az_{x+1} + Bz_x + C\frac{dz_{x+1}}{dy} + D\frac{dz_x}{dy} + E\frac{d^2z_x}{dy^2}$. Se ponghiamo $z_1 = \varphi.y$, e $z_0 = \varphi'.y$, facendo $x = 0$ avremo $z_2 = A\varphi y + C\frac{d\varphi}{dy} + B\varphi'.y + D\frac{d\varphi'}{dy} + E\frac{d^2\varphi'}{dy^2}$. Similmente ponendo $x = 1$ otterremo $z_3 = Az_2 + B\varphi.y + C\frac{dz_2}{dy} + D\frac{d\varphi}{dy} + E\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, e sostituendovi il valore di z_2 avremo il valore di z_3 della forma seguente $z_3 = a\varphi.y + a'\frac{d\varphi}{dy} + a''\frac{d^2\varphi}{dy^2} + b\varphi'.y + b'\frac{d\varphi'}{dy} + b''\frac{d^2\varphi'}{dy^2} + b'''\frac{d^3\varphi}{dy^3}$. Continuando ad operare nella medesima maniera troveremo il valore di z_x così espresso; $z_x = a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} \ldots\ldots + a_{x-1,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-1}} + b_{0,x}\varphi'.y + b_{1,x}\frac{d^2\varphi'}{dy} + b_{2,x}\frac{d^2\varphi'}{dy^2} \ldots\ldots + b_{x,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^x}$, che sarà l' integrale completo della proposta.

Per determinare i coefficienti $a_{0,x}$, $b_{0,x}$, ec. ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ed avremo $\varphi.y = z_1 = \alpha e^{\beta y}$; $\varphi'.y = z_0 = e^{\beta y}$; e quindi (a) $\alpha^x = a_{0,x}.\alpha + a_{1,x}.\alpha\beta + a_{2,x}.\alpha\beta^2 \ldots\ldots + a_{x-1,x}.\alpha\beta^{x-1} + b_{0,x} + b_{1,x}.\beta + b_{2,x}.\beta^2 + b_{3,x}.\beta^3 \ldots\ldots + b_{x,x}.\beta^x$; e tra α e β avrà luogo l' equazione (b) $\alpha^2 = A\alpha + B + C\alpha\beta + D\beta + E\beta^2$. Quindi apparisce, che l' equazione (a) si otterrà, se nella quantità α^x si porrà finchè si

può il valore di α^2 ricavato dalla equazione (b), e nella quantità che ne risulta, si sostituirà, finchè è possibile, il medesimo valore di α^2, e così in seguito. Posto ciò mettiamo nella equazione (a) $x+1$ in luogo di x, ed avremo (c) $\alpha^{x+1} = a_{0,x+1}.\alpha + a_{1,x+1}.\alpha\beta + a_{2,x+1}.\alpha\beta^2 + a_{3,x+1}.\alpha\beta^3 +$ &c. $+ b_{0,x+1} + b_{1,x+1}.\beta + b_{2,x+1}.\beta^2 + b_{3,x+1}.\beta^3 +$ &c. Ma il valore di α^{x+1} si può ottenere in altra maniera, se quello di α^x si moltiplica per α, e fatto ciò si troverà $\alpha^{x+1} = a_{0,x}.\alpha^2 + a_{1,x}.\alpha^2\beta + a_{2,x}.\alpha^2\beta^2 + a_{3,x}.\alpha^2\beta^3 +$ &c. $+ b_{0,x}.\alpha + b_{1,x}.\alpha\beta + b_{2,x}.\alpha\beta^2 + b_{3,x}.\alpha\beta^3 +$ &c. Se in questa quantità in luogo di α^2 si sostituisce il suo valore preso dalla equazione (b), si avrà (d) $\alpha^{x+1} = (A + C\beta)(a_{0,x}.\alpha + a_{1,x}.\alpha\beta + a_{2,x}.\alpha\beta^2 +$ &c.$) + (B + D\beta + E\beta^2)(a_{0,x} + a_{1,x}.\beta + a_{2,x}.\beta^2 +$ &c.$) + b_{0,x}.\alpha + b_{1,x}.\alpha\beta + b_{2,x}.\alpha\beta^2 + b_{3,x}.\alpha\beta^3 +$ &c. Siccome le due equazioni (c) e (d) devono essere identiche, se paragoniamo i coefficienti di α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$, &c., avremo $a_{0,x+1} = Aa_{0,x} + b_{0,x}$; $a_{1,x+1} = Aa_{1,x} + Ca_{0,x} + b_{1,x}$; e generalmente (e) $a_{n,x+1} = Aa_{n,x} + Ca_{n-1,x} + b_{n,x}$; per mezzo della qual' equazione otterremo il valore di $b_{n,x}$, subito che conosceremo quello di $a_{n,x}$.

Se paragoniamo ancora i coefficienti di β^0, β, β^2, &c. troveremo $b_{0,x+1} = Ba_{0,x}$; $b_{1,x+1} = Ba_{1,x} + Da_{0,x}$; $b_{2,x+1} = Ba_{2,x} + Da_{1,x} + Ea_{0,x}$; e generalmente $b_{n,x+1} = Ba_{n,x} + Da_{n-1,x} + Ea_{n-2,x}$. Ponghiamo in quest' equazioni il valore di $b_{n,x}$ ricavato dalla equazione (e), ed avrassi $a_{0,x+2} = Aa_{0,x+1} + Ba_{0,x}$; $a_{1,x+2} = Aa_{1,x+1} + Ba_{1,x} + Ca_{0,x+1} + Da_{0,x}$, (f) $a_{n,x+2} = Aa_{n,x+1} + Ba_{n,x} + Ca_{n-1,x+1} + Da_{n-1,x} + Ea_{n-2,x}$; le quali tre equazioni sono tutte comprese nella terza, come apparisce dall' osservare che $a_{n,x}$ è zero, quando n è un numero negativo.

Pertanto l' integrazione della proposta equazione a differenze finite e infinitesime è ridotta alla integrazione della equazione (f) a differenze finite. Le due funzioni arbitrarie $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, che porterà l' integrazione di questa equazione, son tali, che $a_{n,0}$ è sempre $= 0$, ed $a_{n,1}$ è sempre $= 0$, fuorchè nel caso di $n = 0$, in cui è $= 1$: le funzioni $a_{0,x}$, $a_{1,x}$ son date dall' equazioni $a_{0,x+2} = Aa_{0,x+1} + Ba_{0,x}$; $a_{1,x+2} = Aa_{1,x+1} + Ba_{1,x} + Ca_{0,x+1} + Da_{0,x}$.

Del resto per trovare i coefficienti $a_{0,x}$, $b_{0,x}$, &c. si possono usare altri metodi, e a quest' oggetto si consulti

una

una eccellente Memoria del Sommo Geometra *Lagrange* sulla integrazione dell' equazioni a differenze finite inserita tra quelle dell' Accademia di Berlino dell' anno 1775. Solo si osservi, che questi metodi possono alquanto semplicizzarsi per la riflessione, che abbiamo fatta di sopra, cioè che il valore di b_{mx} è noto in generale, subito che si conosce quello di a_{mx}.

35. Il metodo precedente non può adoprarsi, quando nella proposta manca il termine z_{x+2}. Per trovar l' integrale in tal caso, mettiamo la proposta sotto la forma $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} = Bz_x + C\frac{dz_x}{dy} + D\frac{d^2z_x}{dy^2}$, e facciamo $z_x = e^{my}.z'_x$, essendo m una quantità costante. Sostituito questo valore l' equazione diventerà $(1 + Am)z'_{x+1} + A\frac{dz'_{x+1}}{dy} = (B + Cm + Dm^2)z'_x + (C + 2Dm)\frac{dz'_x}{dy} + D\frac{d^2z'_x}{dy^2}$. Ora potremo togliere il primo termine con fare $1 + Am = 0$, cioè $m = -\frac{1}{A}$, ed avremo $\frac{dz'_{x+1}}{dy} = B1z'_x + C1\frac{dz'_x}{dy} + D1\frac{d^2z'_x}{dy^2}$; nella qual formola sarà $B1 = \frac{B + Cm + Dm^2}{A}$, $C1 = \frac{C + 2Dm}{A}$, $D1 = \frac{D}{A}$. Ponghiamo adesso $z'_x = \int^x dy^x z''_x$, ed otterremo $z''_{x+1} = B1z'_x + C1\frac{dx''_x}{dy} + D1\frac{d^2z''_x}{dy^2}$. Per integrar questa equazione facciamo $z''_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ed avremo $\alpha = B1 + C1\beta + D1\beta^2$, e quindi $\alpha^x = (B1 + C1\beta + D1\beta^2)^x$, la qual quantità evolta secondo le potenze di β ci darà una formola della forma seguente, $\alpha^x = a_{0,x} + a_{1,x}.\beta + a_{2,x}.\beta^2 \ldots\ldots + a_{2x,x}.\beta^{2x}$. Di qui usando i precedenti ragionamenti dedurremo il valore di z''_x così espresso, $z''_x = a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} \ldots + a_{2x,x}\frac{d^{2x}\varphi}{dy^{2x}}$; ove $\varphi.y$ è una funzione arbitraria di y. Ora essendo $z'_x = \int^x dy^x z''$, sarà $z'_x = a_{0,x}\int^x dy^x \varphi.y +$

$$a_{1,x}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y \ldots a_{x-1,x}\int dy\varphi.y + a_{x,x}\varphi.y + a_{x+1,x}.\frac{d\varphi}{dy} +$$

$$a_{x+2,x}.\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots + a_{2x,x}.\frac{d^x\varphi}{dy^x} + a_{0,x}\Psi.x + (y a_{0,x} + a_{1,x})\Psi(x-1)$$

$$+\left(\frac{y^2}{2}a_{0,x} + y a_{1,x} + a_{2,x}\right)\Psi(x-2)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left(\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}a_{0,x} + \frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}a_{1,x}\ldots + a_{x-1,x}\right)\Psi 1;$$

e se questo valore lo moltiplichiamo per $e^{my} = e^{-(1:A)y}$, otterremo l' integrale completo della proposta equazione.

Nel caso di $A = 0$ il valore di z_x si troverà di una forma simile a quello di z'_x, e siccome non conterrà che una funzione arbitraria, sarà un integrale particolare. Nè si vede, come in tal caso possa esprimersi in termini finiti l' integrale completo della proposta.

36. Passiamo all' equazione del terz' ordine $z_{x+3} = Az_{x+2} + B\frac{dz_{x+2}}{dy} + Cz_{x+1} + D\frac{dz_{x+1}}{dy} + E\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} + Fz_x + G\frac{dz_x}{dy} + H\frac{d^2z_x}{dy^2} + I\frac{d^3z_x}{dy^3}$. Se ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y}$, avremo tra α e β l' equazione (a) $\alpha^3 = A\alpha^2 + B\alpha^2\beta + C\alpha + D\alpha\beta + E\alpha\beta^2 + F + G\beta + H\beta^2 + I\beta^3$. Si sviluppi il vare di α^x in una formola della forma $\alpha_x = a_{0,x}.\alpha^2 + a_{1,x}.\alpha^2\beta + a_{2,x}.\alpha^2\beta^2 \ldots\ldots + a_{x-2,x}.\alpha^2\beta^{x-2} + b_{0,x}.\alpha + b_{1,x}.\alpha\beta + b_{2,x}.\alpha\beta^2 \ldots + b_{x-1,x}.\alpha\beta^{x-1} + c_{0,x} + c_{1,x}.\beta + c_{2,x}.\beta^2 \ldots\ldots + c_{x,x}.\beta^x$; e col ragionamento usato di sopra si dimostrerà l' integrale completo della proposta essere $z_x =$

$$a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2}\ldots\ldots + a_{x-2,x}\frac{d^{x-2}\varphi}{dy^{x-2}}$$

$$+ b_{0,x}\varphi'.y + b_{1,x}\frac{d\varphi'}{dy} + b_{2,x}\frac{d^2\varphi'}{dy^2}\ldots\ldots + b_{x-1,x}\frac{d^{x-1}\varphi'}{dy^{x-1}}$$

$$+ c_{0,x}\varphi''.y + c_{1,x}\frac{d\varphi''}{dy^2} + c_{2,x}\frac{d^2\varphi''}{dy^2}\ldots\ldots\ldots + c_{x,x}\frac{d^x\varphi''}{dy^x};$$

ove $\varphi.y$, $\varphi'.y$, $\varphi''.y$ sono tre funzioni arbitrarie di y, cioè $\varphi.y = z_{2,y}$; $\varphi.y = z_1$; $\varphi''.y = z_0$.

Nel valore di a^x ponendo $x+1$ in luogo di x avremo

$$\alpha^{x+1} = a_{0,x+1}\alpha^2 + a_{1,x+1}\alpha^2\beta + a_{2,x+1}\alpha^2\beta^2 + a_{3,x+1}\alpha^2\beta^3 + \text{ec.}$$
$$+ b_{0,x+1}\alpha + b_{1,x+1}\alpha\beta + b_{2,x+1}\alpha\beta^2 + b_{3,x+1}\alpha\beta^3 + \text{ec.}$$
$$+ c_{0,x+1} + c_{1,x+1}\beta + c_{2,x+1}\beta^2 + c_{3,x+1}\beta^3 + \text{ec.}$$

Ma in altra forma ancora otterremo α^{x+1}, se moltiplicheremo α^x per α, e poi in luogo di α^3 vi porremo il suo valore dedotto dalla equazione (a); e fatto ciò avremo

$$\alpha^{x+1} = (A + B\beta)(a_{0,x}\alpha^2 + a_{1,x}\alpha^2\beta + a_{2,x}\alpha^2\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ (C + D\beta + E\beta^2)(a_{0,x}\alpha + a_{1,x}\alpha\beta + a_{2,x}\alpha\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ (F + G\beta + H\beta^2 + I\beta^3)(a_{0,x} + a_{1,x}\beta + a_{2,x}\beta^2 + \text{ec.})$$
$$+ b_{0,x}\alpha^2 + b_{1,x}\alpha^2\beta + b_{2,x}\alpha^2\beta^2 + b_{3,x}\alpha^2\beta^3 + \text{ec.}$$
$$+ c_{0,x}\alpha + c_{1,x}\alpha\beta + c_{2,x}\alpha\beta^2 + c_{3,x}\alpha\beta^3 + \text{ec.}$$

Se adesso in questi due valori di α^{x+1} si paragonano i coefficienti di α^2, $\alpha^2\beta$, $\alpha^2\beta^2$, ec., si troverà $a_{0,x+1} = Aa_{0,x} + b_{0,x}$; $a_{1,x+1} = Aa_{1,x} + Ba_{0,x} + ba_{1,x}$; e generalmente $a_{n,x+1} = Aa_{n,x} + Ba_{n-1,x} + ba_{n,x}$; per mezzo della qual' equazione conosciuto $a_{n,x}$ si avrà subito $b_{n,x}$.

Paragonando i coefficienti di α, $\alpha\beta$, $\alpha\beta^2$, &c. avremo $b_{0,x+1} = Ca_{0,x} + c_{0,x}$; $b_{1,x+1} = Ca_{1,x} Da_{0,x} + c_{1,x}$; $b_{2,x+1} = Ca_{2,x} + Da_{1,x} + Ea_{0,x} + c_{2,x}$; $b_{n,x+1} = Ca_{n,x} + Da_{n-1,x} + Ea_{n-2,x} + c_{n,x}$; nella qual'equazione se sostituiamo il valore di $b_{n,x}$ trovato di sopra avremo $c_{n,x} = a_{n,x+2} - Aa_{n,x+1} - Ba_{n-1,x+1} - Ca_{n,x} - Da_{n-1,x} - Ea_{n-2,x}$, e quindi conosciuto $a_{n,x}$ si avrà anche $c_{n,x}$.

Paragoniamo finalmente i coefficienti di β^0, β, β^2, ec., e troveremo $c_{0,x+1} = Fa_{0,x}$; $c_{1,x+1} = Fa_{1,x} + Ga_{0,x}$; $c_{2,x+1} = Fa_{2,x} + Ga_{1,x} + Ha_{0,x}$; $c_{3,x+1} = Fa_{3,x} + Ga_{2,x} + Ha_{1,x} + Ia_{0,x}$; e generalmente $c_{n,x+1} = Fa_{n,x} + Ga_{n-1,x} + Ha_{n-2,x} + Ia_{n-3,x}$. Si sostituisca in quest' equazioni il valore di $c_{n,x}$, ed avrassi

$$(b)\quad a_{0,x+3} = Aa_{0,x+2} + Ca_{0,x+1} + Fa_{0,x};$$
$$(c)\quad a_{1,x+3} = Aa_{1,x+2} + Ba_{0,x+2} + Ca_{1,x+1} + Da_{0,x+1} + Fa_{1,x} + Ga_{0,x};$$
$$(d)\quad a_{2,x+3} = Aa_{2,x+2} + Ba_{1,x+2} + Ca_{2,x+1} + Da_{1,x+1} + Ea_{0,x+1} + Fa_{2,x} Ga_{1,x} + Ha_{0,x};$$
$$(e)\quad a_{n,x+3} = Aa_{n,x+2} + Ba_{n-1,x+2} + Ca_{n,x+1} + Da_{n-1,x+1} + Ea_{n-2,x+2} + Fa_{n,x} + Ga_{n-1,x} + Ha_{n-2,x} + Ia_{n-3,x}.$$

Le quali equazioni sono tutte comprese nella (e), giacchè $a_{n,x}$ è $= 0$, quando n è negativa.

La ricerca pertanto di $a_{n,x}$ dipende dalla integrazione della equazione (e) a differenze finite. E qui si osservi, che le funzioni arbitrarie $a_{n,0}$, $a_{n,1}$, $a_{n,2}$, che porterà questa

integrazione son date in modo, che $a_{n,0}$ ed $a_{n,1}$ sono sempre eguali a zero; $a_{n,2}$ è $=1$ nel solo caso di $n=0$, negli altri è sempre $=0$. Le funzioni $a_{0,x}$, $a_{1,x}$, $a_{2,x}$ sono date dall'equazioni (b), (c), (d), che essendo a differenze finite tra due sole variabili non presentano alcuna difficoltà per la loro integrazione. Ad oggetto di conoscere altri metodi per determinare $a_{n,x}$ si consulti la lodata Memoria di *Lagrange*.

37. Se manca il termine z_{x+3}, l' equazione precedente potrà mettersi sotto la forma $z_{x+2} + A\frac{dz_{x+2}}{dy} = Bz_{x+1} + C\frac{dz_{x+1}}{dy} + D\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} + Ez_x + F\frac{dz_x}{dy} + G\frac{d^2z_x}{dy^2} + H\frac{d^3z_x}{dy^3}$. Ponghiamo $z_x = e^{-y:A}.z'_x$, ed avremo $\frac{dz'_{x+2}}{dy} = B1z'_{x+1} + C1\frac{dz'_{x+1}}{dy} + D1\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2} + E1z'_x$ $F1\frac{dz'_x}{dy} + G1\frac{d^2z'_x}{dy^2} + H1\frac{d^3z'_x}{dy^3}$; ove $B1 = \frac{B}{A} - \frac{C}{A^2} + \frac{D}{A^3}$, $C1 = \frac{C}{A} - \frac{2D}{A^2}$, $D1 = \frac{D}{A}$, $E1 = \frac{E}{A} - \frac{F}{A^2} + \frac{G}{A^3} - \frac{H}{A^4}$, $F1 = \frac{F}{A} - \frac{2G}{A^2} + \frac{3H}{A^3}$, $G1 = \frac{G}{A} - \frac{3H}{A^2}$, $H1 = \frac{H}{A}$. Se adesso facciamo $z'_x = \alpha^x e^{\beta y}$, avremo tra α e β l' equazione $\alpha^2\beta = B1\alpha + C1\alpha\beta + D1\alpha\beta^2 + E1 + F1\beta + G1\beta^2 + H1\beta^3$. Mediante questa equazione se svolgeremo la quantità α^x in una formola della forma

$$\alpha^x = \frac{a_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}} + \frac{a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}} \ldots + a_{x-1,x}.\alpha + a_{x,x}.\alpha\beta \ldots + a_{2x-2,x}.\alpha\beta^{x-2}$$
$$+ \frac{b_{0,x}}{\beta^{x-1}} + \frac{b_{1,x}\alpha}{\beta^{x-2}} \ldots + b_{x-1,x} + b_{x,x}.\beta \ldots + b_{2x-1,x}.\beta^x$$

otterremo l' integrale della proposta così espresso;

$$z'_x = a_{0,x}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y + a_{1,x}\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y \ldots + a_{x-2,x}\int dy\varphi.y$$
$$+ a_{x-1,x}\varphi.y + a_{x,x}\frac{d\varphi}{dy} \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2x-2,x}.\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-1}}$$
$$+ b_{0,x}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi'.y + b_{1,x}\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi'.y \ldots + b_{x-2,x}\int dy\varphi'.y$$
$$+ b_{x-1,x}\varphi'.y + b_{x,x}\frac{d\varphi'}{dy} \ldots\ldots\ldots\ldots + b_{2x-1,x}\frac{d^x\varphi'}{dy_x}.$$

Questo integrale non sembra completo, perchè contiene due sole funzioni arbitrarie $\varphi.y$ e $\varphi'.y$. Ma è da notarsi, che i segni sommatorj introdurranno un' altra funzione arbitraria di x, e si dovrà aggiungere al valore precedente di z'_x la formola seguente

$$\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi_{1,x}+\frac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)}\Psi_{2,x}\ldots+y\Psi_{x-2,x}+\Psi_{x-1,x}.$$

Delle funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$, ec. una sola dev' essere arbitraria, e per determinar le altre si sostituirà nella equazione data la formola precedente in luogo di z'_x, e dal paragone de' diversi termini si dedurrà la relazione che deve aver luogo tra le medesime funzioni.

38. Sia data per esempio l' equazione $z_{x+2}+A\frac{dz_{x+2}}{dy}=Bz_{x+1}+Ez_x$; la quale posto $z_x=e^{-y:A}z'_x$, e $B1=\frac{B}{A}$, $E1=\frac{E}{A}$ si cangia nella seguente $\frac{dz'_{x+2}}{dy}=B1z'_{x+1}+E1z'_x$. Se facciamo $z'_x=\alpha^x e^{\beta y}$, avremo tra α e β l' equazione $\alpha^2=\frac{B1\alpha}{\beta}+\frac{E1}{\beta}$, mediante la quale svolgeremo la quantità α^x in una formola della forma seguente

$$\alpha^x=\frac{a_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\frac{a_{2,x}.\alpha}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}}{\beta^{x-2}}+\frac{b_{2,x}}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$

Ponghiamo in questa formola $x+1$ in luogo di x, ed avremo

$$\alpha^{x+1}=\frac{a_{0,x+1}.\alpha}{\beta^{x}}+\frac{a_{1,x+1}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{a_{2,x+1}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x+1}}{\beta^{x}}+\frac{b_{1,x+1}}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{2,x+1}}{\beta^{x-2}}+\text{ec.}$$

Per ottenere un' altro valore di α^{x+1} moltiplichiamo quello di α^x per α, e sarà

$$\alpha^{x+1}=\frac{a_{0,x}.\alpha^2}{b^{x-1}}+\frac{a_{1,x}.\alpha^2}{\beta^{x-2}}+\frac{a_{2,x}.\alpha^2}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$
$$+\frac{b_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}}+\frac{b_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}}+\frac{b_{2,x}.\alpha}{\beta^{x-3}}+\text{ec.}$$

e se in luogo di α^2 vi si sostituisce il suo valore $\frac{B1\alpha}{\beta} + \frac{E1}{\beta}$

sarà $\alpha^{x+1} = \frac{B1a_{0,x}.\alpha}{\beta^x} + \frac{B1a_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-1}} + \frac{B1a_{2,x}.\alpha}{\beta^{x-2}} + \text{ec.}$

$$+ \frac{E1a_{0,x}}{b^x} + \frac{E1a_{1,x}}{\beta^{x-1}} + \frac{E1a_{2,x}}{\beta^{x-2}} + \text{ec.}$$

$$+ \frac{b_{0,x}.\alpha}{\beta^{x-1}} + \frac{b_{1,x}.\alpha}{\beta^{x-2}} + \text{ec.}$$

Questo valore di α^{x+1} dovendo essere identico col primo trovato, avremo dal paragone de' termini simili $b_{n,x+1} = E1a_{n,x}$; cioè conosciuto $a_{n,x}$ sarà $b_{n,x} = E1a_{n,x-1}$. Sarà inoltre $a_{0,x+1} = B1a_{0,x}$; $a_{n,x+1} = Ba_{n,x} + b_{n-1,x}$; e sostituendovi il valore di $b_{n,x}$, $a_{n,x+1} = B1a_{n,x} + E1a_{n-1,x-1}$. Prima d' integrare questa equazione si osservi, che la funzione $a_{n,x}$ è tale, che $a_{1,2} = 0$, $a_{2,3} = 0$, $a_{3,4} = 0$, e generalmente $a_{n,n+1} = 0$, eccettuato il solo caso di $n = 0$ in cui è $= 1$. Posto ciò facciamo $a_{n,x} = B1^x c_{n,x}$, e sarà

$$c_{0,x+1} = c_{0,x}\,;\; c_{n,x+1} = c_{n,x} + \frac{E1}{B1^2} c_{n-1,x-1}.$$

Da questa si ricava $c_{n,x} = \frac{E1}{B1^2}\Sigma c_{n-1,x-1}$, e sostituendo nel secondo membro di questa equazione il valore di $c_{n-1,x-1}$ dedotto dalla medesima, e così in seguito, giungeremo all' equazione $c_{n,x} = \frac{E1^n}{B1^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x-n}$, cioè $c_{n,x+n} = \frac{E1^n}{B1^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x}$; e posto $x-1$ in luogo di x, $c_{n,x+n+1} = \frac{E1^n}{B^{2n}}\Sigma^n.c_{0,x+1}$; onde si deduce $c_{n,x+n} = \frac{E1^n}{B1^{2n}}\Sigma^{n+1}.(c_{0,x+1} - c_{0,x})$. Ma poichè $c_{0,x+1} - c_{0,x} = 0$, avremo $c_{n,x+n} = \frac{E1^n}{B1^{2n}}\Big(\Psi(n+1) + (x-1)\Psi.n$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)}{2}\Psi(n-1) \ldots + \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{2.3\ldots n}\Psi.1\Big).$$

Sarà pertanto, posto $x-n$ in luogo di x e in luogo di $c_{n,x}$ il suo valore, $a_{n,x} =$

$$B1^{x-2n}.E1^n\left\{\begin{array}{l}\Psi(n+1)+(x-n-1)\Psi.n+\frac{(x-n-1)(x-n-2)}{2}\Psi(n-1)\\ \ldots+\frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n)}{2.3\ldots\ldots n}\Psi.1\end{array}\right\}.$$

Per determinare la funzione arbitraria $\Psi.n$ facciamo $x=n+1$, ed otterremo $\Psi(n+1) = \frac{B1^{n-1}}{E1^{n}} a_{n,x+1}$. Ma $a_{n,x+1}=0$, fuorchè nel caso di $n=0$; dunque sarà $\Psi.n=0$ eccettuato il caso di $n=1$, in cui è $\Psi.1 = \frac{1}{B1}$. Dunque avremo finalmente

$$a_{n,x} = B1^{x-2n-1}.E1^{n}.\frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}.$$

E siccome $b_{n,x} = E1 a_{n,x-1}$, sarà

$$b_{n,x} = B1^{x-2n-2}.E1^{n+1}.\frac{(x-n-2)(x-n-3)\ldots(x-2n-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}$$

Avremo pertanto nel caso di x pari, $z_x =$

$$e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{array}{l} B1^{x-1}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y + B1^{x-3}.E1(x-2)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y \\ +B1^{x-5}.E1^{2}\frac{(x-3)(x-4)}{2}\int^{x-3}dy^{x-3}\varphi.y\ \ldots\ldots\ldots \\ +B1^{3}.E1^{(x-4):2}.\frac{(x+2)x(x-2)}{2^{4}.3})\int^{(x+2):2}dy^{(x+2):2} \\ +B1.E1^{(x-2):2}.\frac{x}{2}\int^{x:2}dy^{x:2}\varphi.y \end{array}\right.$$

$$+e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{array}{l} B1^{x-2}.E1\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi'.y + B1^{x-4}.E1^{2}(x-3)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi'.y \\ +B1^{x-6}.E1^{3}\frac{(x-4)(x-5)}{2}\int^{x-3}dy^{x-3}\varphi'.y\ \ldots\ldots \\ +B1^{2}.E1^{(x-2):2}\frac{x(x-2)}{2^{3}}\int^{(x+2):2}dy^{(x+2):2}\varphi'.y \\ +E1^{x:2}\int^{x:2}dy^{x:2}\varphi'y. \end{array}\right.$$

E nel caso di x dispari, $z_x =$

$$e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{array}{l} B1^{x-1}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi.y + B1^{x-3}.E1(x-2)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi.y \\ \ldots\ldots + B1^{2}.E1^{(x-3):2}.\frac{(x+1)(x-1)}{2^{3}}\int^{(x+1):2}dy^{(x+1):2}\varphi.y \\ +E1^{(x-1):2}\int^{(x-1):2}dy^{(x-1):2}\varphi.y \end{array}\right.$$

$$+e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{array}{l} B1^{x-2}\int^{x-1}dy^{x-1}\varphi'.y + B1^{x-4}.E1^{2}(x-3)\int^{x-2}dy^{x-2}\varphi'.y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +B1^{3}.E1^{(x-3):2}.\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{2^{4}.3}\int^{(x+3):2}dy^{(x+3):2}\varphi'.y \\ +B1.E1^{(x-1):2}.\frac{x-1}{2}\int^{(x+1):2}dy^{(x+1):2}\varphi'.y. \end{array}\right.$$

Rimane adesso a determinare le funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$ ec. nella quantità

$$\frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi_{1,x}+\frac{y^{x-3}}{2.3\ldots(x-3)}\Psi_{2,x}\ldots+y\Psi_{x-2,x}+\Psi_{x-1,x},$$

che conviene aggiungere al valore di z'_x, perchè questo diventi l'integrale completo della proposta. A quest' oggetto si sostituisca quella quantità in luogo di z'_x nella equazione $\frac{dz'_{x+2}}{dy}=B1z'_{x+1}+E1z'_x$, ed avrassi

$$0=\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi_{1,x+2}+\frac{y^{x-2}}{2\ldots(x-2)}\cdot\Psi_{2,x+2}$$
$$+\frac{y^{x-3}}{2\ldots(x-3)}\Psi_{3,x+2}+\text{ec.}+\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}B1\Psi_{1,x+1}$$
$$+\frac{y^{x-2}}{2\ldots(x-2)}B1\Psi_{2,x+1}+\frac{y^{x-3}}{2\ldots(x-3)}B1\Psi_{3,x+1}+\text{ec.}$$
$$+\frac{y^{x-2}}{2\ldots(x-2)}E1\Psi_{1,x}+\frac{y^{x-3}}{2\ldots(x-3)}E1\Psi_{2,x}+\text{ec.}$$

e quindi $\Psi_{1,x+2}=B1\Psi_{1,x+1}$; $\Psi_{2,x+2}=B1\Psi_{2,x+1}+E1\Psi_{1,x}$; e $\Psi_{n,x+2}=B1\Psi_{n,x+1}+E1\Psi_{n-1,x}$. Ponghiamo $\Psi_{n,x}=B1^{x-2n}.Z_{n,x}$, ed avremo $Z_{1,x+2}=Z_{1,x+1}$; $Z_{n,x+1}=Z_{n,x}+E1Z_{n-1,x-1}$, cioè $Z_{n,x}=E1\Sigma.Z_{n-1,x-1}$. Di qui si ricava $Z_{n,x}=E1^{n-1}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x-n+1}$, cioè $Z_{n,x+n}=E1^{n-1}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x+1}$, e ponendo $x+1$ in luogo di x, $Z_{n,x+n+1}=E1^{n-1}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x+2}$, e perciò $Z_{n,x+n}=E1^{n-1}\Sigma^{n}(Z_{1,x+2}-Z_{1,x+1})$. A questo integrale, perchè sia completo, conviene aggiungere la formola $E1^{n-1}[F_n+(x-1)F_{n-1}+\frac{(x-1)(x-2)}{2}F_{n-2}\ldots\ldots+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{2.3\ldots(n-1)}F_1]$. Ma $Z_{1,x+2}-Z_{1,x+1}=0$; dunque avremo $\Psi_{n,x+n}=B1^{x-n}.E1^{n-1}[F_n+(x-1)F_{n-2}\ldots+\frac{(x-1)\ldots(x-n+1)}{2\ldots(n-1)}F_1]$; e quindi $\Psi_{n,x}=$

$$B1_x^{-2n}.E1^{n-1}\left\{\begin{array}{l}F_n+(x-n-1(F_{n-1}+\frac{(x-n-1)(x-n-2)}{2}F_{n-2}\\ \ldots+\frac{(x-n-1)(x-n-2)\ldots(x-2n+1)}{2.3\ldots\ldots(n-1)}F_1\end{array}\right\}$$

Sa-

Sarà pertanto $\Psi_{1,x} = B1^{x-2}.F_1$; $\Psi_{2,x} = B1^{x-4}.E1(F_2 + (x-3)F_1)$; $\Psi_{3,x} = B1^{x-6}.E1^2(F_3 + (x-4)F_2 + \frac{(x-4)(x-5)}{2}F_1)$ . . . . . $\Psi_{x-2,x} = B1^{-x+4}.E1^{x-3}(F_{x-2} + F_{x-3})$; $\Psi_{x-1,x} = B1^{-x+2}.E1^{x-2}.F_{x-1}$. Laonde al valore trovato precedentemente di z_x, perchè sia completo, conviene aggiungere la quantità

$$e^{-\frac{y}{A}}\left\{\begin{array}{l}\frac{y^{x-2}}{2.3..(x-2)}B1^{x-2}F_1 + \frac{y^{x-3}}{2.3...(x-3)}B1^{x-4}E1(F_2(x-3)F_1) \\ + \frac{y^{x-4}}{2.3...(x-4)}B1^{x-6}.E1^2(F_3+(x-4)F_2+\frac{(x-4)(x-5)}{2}F_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + yB1^{-x+4}.E1^{x-3}(F_{x-2}+F_{x-3}) + B1^{-x+2}.E1^{x-2}F_{x-1}\end{array}\right.$$

la qual formola contiene la funzione arbitraria F_x.

39. Merita particolare attenzione il caso, in cui oltre il termine z_{x+3} mancano nella proposta anche gli altri due termini z_{x+2}, e $\frac{dz_{x+1}}{dy}$. L' equazione diventa allora della forma $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2z_{x+1}}{dy^2} = Cz_x + C\frac{dz_x}{dy} + E\frac{d^2z_x}{dy^2} + F\frac{d^3z_x}{dy^3}$. Per trovarne l' integrale si ponga $z_x = e^{my}.z'_x$, e presa m in modo, che sia $1 + Am + Bm^2 = 0$, cioè che m sia una radice dell' equazione $1 + At + Bt^2 = 0$, la proposta diventerà $A1\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2z'_{x+1}}{dy^2} = C1z'_x + D1\frac{dz'_x}{dy} + E1\frac{d^2z'_x}{dy^2} + F\frac{d^3z'_x}{dy^3}$, ove $A1 = A + 2Bm$, $C1 = C + Dm + Em^2 + Fm^3$, $D1 = D + 2Em + 3Fm^2$, $E1 = E + 3Fm$. Si faccia adesso $z'_x = \int^x dy^x z''_x$, ed avrassi $A1z''_{x+1} + B\frac{dz''_{x+1}}{dy} = C1z''_x + D1\frac{dz''_x}{dy} + E1\frac{d^2z''_x}{dy^2} + F\frac{d^3z''_x}{dy^3}$.

Se di nuovo ponghiamo $z''_x = e^{ny}.z'''_x$, e prendiamo n in modo, che sia $A1 + Bn = 0$, avremo $\frac{dz'''_{x+1}}{dy} = C^2z'''_x + D2\frac{dz'''_x}{dy} + E2\frac{d^2z'''_x}{dy^2} + F2\frac{d^3z'''_x}{dy^3}$, ove

$C_2 = \frac{C_1 + D_1 n + E_1 n^2 + F n^3}{B}$, $D_2 = \frac{D_1 + 2E_1 n + 3F n^2}{B}$, $E_2 = \frac{E_1 + 3Fn}{B}$, $F_2 = \frac{F}{B}$. Si osservi, che nella equazione $A_1 + Bn = 0$ mettendo il valore di A_1 abbiamo $A_1 + 2Bm + Bn = 0$; ora se chiamiamo m' l'altra radice della equazione $1 + At + Bt^2 = 0$, sarà $m + m' = -\frac{A}{B}$, e quindi $-m - m' + 2m + n = 0$, cioè $n = m' - m$.

Si faccia adesso $z'''_x = \alpha^x e^{\beta y}$, ed avrassi $\alpha = \frac{C_2}{\beta} + D_2 + E_2\beta + F_2\beta^2$, la qual quantità inalzata alla potenza x ci darà $\alpha^x = \frac{a_{0,x}}{\beta^x} + \frac{a_{1,x}}{\beta^{x-1}} + \frac{a_{2,x}}{\beta^{x-2}} \ldots\ldots\ldots + a_{3x,x}.\beta^{2x}$, e quindi dedurremo

$$z''_x = a_{0,x}.\int^x dy^x \varphi.y + a_{1,x}\int^{x-1} dy^{x-1}\varphi.y \ldots\ldots + a_{x-1,x}\int dy\varphi.y$$
$$+ a_{x,x}\varphi.y + a_{x+1,x}\frac{d\varphi}{dy} \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3x,x}.\frac{d^{2x}\varphi}{dy^{2x}}.$$

Il segno integrale $\int^x dy^x \varphi.y$ introdurrà in questo valore una funzione arbitraria di x, ed un'altra ne porterà nel valore di z'_x il segno integrale $\int^x dy^x z''_x$; onde avrassi il valore completo di z_x con tre funzioni arbitrarie, come meglio si vedrà nell'esempio seguente.

40. Sia proposta l'equazione $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2 z_{x+1}}{dy^2} = Cz_x$. Se ponghiamo $z_x = e^{my}.z'_x$, $z'_x = \int^x dy^x z''_x$, $z''_x = e^{(m'-m)y}.z'''_x$, otterremo le seguenti trasformate

$$(A + 2Bm)\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{d^2 z'_{x+1}}{dy^2} = Cz'_x$$
$$(A + 2Bm)z''_{x+1} + B\frac{dz''_{x+1}}{dy} = Cz''_x$$
$$B\frac{dz'''_{x+1}}{dy} = Cz'''_x,$$

l'ultima delle quali integrata ci dà $z'''_x = \frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x \varphi.y$; onde avremo $z_x = e^{my}.\frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x e^{(m'-m)y}\int^x dy^x \varphi.y$.

E' facile il vedere, che questo valore di z_x si può ridurre alla forma seguente $z_x =$

$$e^{my}(M\int^x dy^x . e^{(m'-m)y}.\phi.y + M1\int^{x-1} dy^{x-1} e^{(m'-m)y}\phi.y + \&c.)$$
$$+ e^{m'y}(N\int^x dy^x \phi.y + N1\int^{x-1} dy^{x-1}\phi.y + \&c.)$$

ove i coefficienti M, N, sono funzioni di x. Onde converrà aggiungere al presente valore le quantità

$$e^{my}\left(\frac{y^{x-1}}{1.2\ldots(x-1)}\Psi_{1,x} + \frac{y^{x-2}}{1.2\ldots(x-2)}\Psi_{2,x}\ldots + \Psi_{x,x}\right),$$
$$e^{m'y}\left(\frac{y^{x-1}}{1.2\ldots(x-1)}\Psi'_{1,x} + \frac{y^{x-2}}{1.2\ldots(x-2)}\Psi'_{2,x}\ldots + \Psi'_{x,x}\right).$$

Per determinare le funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$; &c. $\Psi'_{1,x}$, $\Psi'_{2,x}$ &c., sostituiamo la prima delle quantità precedenti nella proposta in luogo di z_x, e riflettendo che $1 + Am + Bm^2 = 0$ troveremo

$$0 = \frac{y^{x-1}}{1.2\ldots(x-1)}[(A+2Bm)\Psi_{1,x+1} - C\Psi_{1,x}]$$
$$+ \frac{y^{x-2}}{1.2\ldots(x-2)}[(A+2Bm)\Psi_{2,x+1} - C\Psi_{2,x} - B\Psi_{1,x+1}]$$
$$+ \frac{y^{x-3}}{1.2\ldots(x-3)}[(A+2Bm)\Psi_{3,x+1} - C\Psi_{3,x} - B\Psi_{2,x+1}]$$

+ ec. Quindi otterremo $(A + 2Bm)\Psi_{1,x+1} = C\Psi_{1,x}$; $(A + 2Bm)\Psi_{2,x+1} = C\Psi_{2,x} + B\Psi_{1,x+1}$; e generalmente $(A + 2Bm)\Psi_{n,x+1} = C\Psi_{n,x} + B\Psi_{n-1,x+1}$: e sostituendovi il valore di $A = -B(m+m')$ sarà $B(m-m')\Psi_{1,x+1} = C\Psi_{1,x}$; $B(m-m')\Psi_{n,x+1} = C\Psi_{n,x} + B\Psi_{n-1,x+1}$. Facciasi $\Psi_{n,x}$ $= \frac{C^x}{B^x(m-m')^x}Z_{n,x}$, e si avrà $Z_{1,x+1} = Z_{1,x}$;

$$Z_{n,x+1} = Z_{n,x} + \frac{1}{m-m'}Z_{n-1,x-1}.$$

Da quest' ultima equazione facilmente si deduce

$$Z_{n,x} = \frac{1}{(m-m')^{n-1}}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x+n-1};\ \text{cioè}$$

$$Z_{n,x-n+1} = \frac{1}{(m-m')^{n-1}}\Sigma^{n-1}.Z_{1,x};\ \text{e quindi}$$

$$Z_{n,x-n+1} = \frac{1}{(m-m')^{n-1}}\Sigma^{n}(Z_{1,x+1} - Z_{1,x}).$$

Ma poichè $Z_{1,x+1} - Z_x = 0$, avremo

$$Z_{n,x-n+1} = \frac{1}{(m-m')^{x-1}}\Big(F_n + (x+1)F_{n-1} + \frac{(x+1)x}{2}F_{n-2} \cdots$$

$$\cdots\cdots + \frac{(x-1(\cdots(x-n+3)}{2\cdots n-1}F_1\Big);$$ con che si otterrà il valore di $$\Psi_{n,x} = \frac{C^x}{B^x(m-m')^{x+n-1}}\Big(F_n + (x+n)F_{n-1} + \frac{(x+n)(x+n-1)}{2}F_{n-2} \cdots\cdots + \frac{(x+n)\cdots(x+2)}{2\cdots(n-1)}F_1\Big).$$

E' facile il vedere, che questo valore di $\Psi_{n,x}$ si cangerà in quello di $\Psi'_{n,x}$, se solamente si cangerà m in m', e viceversa m' in m; pertanto l' integrale completo della proposta avrà la forma $z_x = e^{my}.\frac{C^x}{B^x}\int^x dy^x.e^{(m'-m)y}\int^x dy^x\varphi.y$

$$+P\left\{\begin{array}{l} \frac{y^{x-1}}{2\cdots(x-1)}F_1 + \frac{y^{x-2}}{2\cdots(x-2)}\cdot\frac{1}{m-m'}[F_2+(x+2)F_1] \\ + \frac{y^{x-3}}{2\cdots(x-3)}\cdot\frac{1}{(m-m')^2}[F_3+(x+3)F_2+\frac{(x+3)(x+2)}{2}F_1] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{1}{(m-m')^{x-1}}[F_x+2xF_{x-1}+\frac{2x(2x-1)}{2}F_{x-3}\cdots+\frac{2x\cdot(x+2)}{2\cdot(x-1)}F_1] \end{array}\right.$$

$$+Q\left\{\begin{array}{l} \frac{y^{x-1}}{2\cdots(x-1)}F'_1 + \frac{y^{x-2}}{2\cdots(x-2)}\cdot\frac{1}{m'-m}[F'_2+(x+2)F'_1] \\ + \frac{y^{x-3}}{2\cdots(x-3)}\cdot\frac{1}{(m'-m)^2}[F'_3+(x+3)F'_2\frac{(x+3)(x+2)}{2}F'_1] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{1}{m'-m)^{x-1}}[F'_x+2xF'_{x-1}\cdots+\frac{2x\cdots(x+2)}{2\cdots(x-1)}F'_1] \end{array}\right.$$

ove $\varphi.y$, F_x, e F'_x sono tre funzioni arbitrarie; ed inoltre $P = e^{my}.\frac{C^x}{B^x(m-m')^x}$; $Q = e^{my}\frac{C^x}{B^x(m'-m)^x}$.

41. Dal fin qui esposto facilmente apparisce, che i medesimi metodi condurranno sempre alla integrazione dell' equazioni a differenze parziali finite e infinitesime tra tre variabili, qualunque sia l' ordine dell' equazioni, purchè i coefficienti siano costanti. Ma se, la forma dell' equazioni rimanendo la medesima, i coefficienti saranno funzioni di x,

in tal caso la loro integrazione si potrà ridurre a quella dell' equazioni a differenze finite con i coefficienti variabili. Sia data per esempio la seguente equazione del prim' ordine $z_{x+1} = A_x z_x + B_x \frac{dz_x}{dy}$, ove i coefficienti A_x, B_x sono funzioni date di x. Se ponghiamo $z_0 = \varphi.y$, l' integrale di questa equazione in tal caso si vedrà prendere la forma

$$z_x = a_{0,x}\varphi.y + a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} \ldots + a_{x,x}\frac{d^x\varphi}{dy^x}.$$

Per determinare le quantità $a_{0,x}$, $a_{1,x}$, ec. sostituiamo questo valore nella proposta, e ne ricaveremo l' equazione

$$0 = a_{0,x+1}\varphi.y + a_{1,x+1}\frac{d\varphi}{dy} + a_{2,x+1}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \text{ec.}$$
$$- A_x a_{0,x}\varphi.y - A_x a_{1,x}\frac{d\varphi}{dy} - A_x a_{2,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \text{ec.}$$
$$- B_x a_{0,x}\frac{d\varphi}{dy} - B_x a_{1,x}\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \text{ec.}$$

e quindi $a_{0,x+1} = A_x a_{0,x}$; $a_{1,x+1} = A_x a_{1,x} + B_x a_{0,x}$; e generalmente $a_{n,x+1} = A_x a_{n,x} + B_x a_{n-1,x}$; dalla qual' equazione perciò dipenderà l' integrazione della proposta.

42. Consideriamo adesso l' equazione del second' ordine

$$z_{x+1} - A_x \frac{dz_{x+1}}{dy} = B_x z_x + C_x \frac{dz_x}{dy} + D_x \frac{d^2 z_x}{dy^2}.$$

Ponendo $x = 0$, e $z_0 = \varphi.y$, avremo invece la seguente

$$z_1 - A_0 \frac{dz_1}{dy} = B_0\varphi.y + C_0\frac{d\varphi}{dy} + D_0\frac{d^2\varphi}{dy^2} = u_1.$$

Così pure, se si fa $x = 1$, sarà

$$z_2 - A_1\frac{dz^2}{dy} = B_1 z_1 + C_1\frac{dz_1}{dy} + D_1\frac{d^2 z_1}{dy^2}$$
$$\frac{dz^2}{dy} - A_1\frac{d^2 z_1}{dy^2} = B_1\frac{dz_1}{dy} + C_1\frac{d^2 z_1}{dy^2} + D_1\frac{d^3 z_1}{dy^3};$$

e quindi

$$z_2 - A_1\frac{dz_1}{dy} - A_0\left(\frac{dz_1}{dy} - A_1\frac{d^2 z_1}{dy^2}\right) = B_1 u_1 + C_1\frac{du_1}{dy} + D_1\frac{d^2 u_1}{dy^2};$$

la qual' equazione rappresenteremo così

$$z_2 + \alpha_2\frac{dz_1}{dy} + \alpha'_2\frac{d^2 z_1}{dy^2} = u^2,$$

ove i coefficienti α_2, α'_2 son tali, che la quantità

$$1 + \alpha_2 m + \alpha'_2 m^2 = (1 - A_0 m)(1 - A_1 m).$$

Facendo adesso $x = 2$ otterremo

$$z_3 - A_2 \frac{dz_3}{dy} = B_2 z_2 + C_2 \frac{dz_2}{dy} + D_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2}$$

$$\frac{dz_3}{dy} - A_2 \frac{d^2 z_3}{dy^2} = B_2 \frac{dz_2}{dy} + C_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + D_2 \frac{d^3 z_2}{dy^3}$$

$$\frac{d^2 z_3}{dy^2} - A_2 \frac{d^3 z_3}{dy^3} = B_2 \frac{d^2 z_2}{dy^2} + C_2 \frac{d^3 z_2}{dy^3} + D_3 \frac{d^4 z_2}{dy^4};$$

donde si ricava

$$z_3 - A_2 \frac{dz_3}{dy} + \alpha_2 \left(\frac{dz_3}{dy} - A_2 \frac{d^2 z^3}{dy^2} \right) + \alpha'_2 \left(\frac{d^2 z_3}{dy^2} - A_2 \frac{d^3 z_3}{dy^3} \right)$$

$$= B_2 u_2 + C_2 \frac{du_2}{dy} . + D_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} = u_3;$$

la qual' equazione se si pone sotto la forma

$$z_3 + \alpha_3 \frac{dz_3}{dy} + \alpha'_3 \frac{d^2 z_3}{dy^2} + \alpha''_3 \frac{d^3 z_3}{dy^3} = u_3,$$

sarà la quantità

$$1 + \alpha_3 m + \alpha'_3 m^2 + \alpha''_3 m^3 = (1 + \alpha_2 m + \alpha'_2 m^2)(1 - A_2 m)$$
$$= (1 - A_0 m)(1 - A_1 m)(1 - A_2 m).$$

Continuando ad operare nella medesima maniera giungeremo finalmente alla equazione

$$(A)\ z_x + \alpha_x \frac{dz_x}{dy} + \alpha'_x \frac{d^2 z_x}{dy^2} \ldots . + \alpha_x^{(x-1)} . \frac{d^x z_x}{dy^x} = u_x,$$

ove i coefficienti α_x, α'_x, ec. son tali, che $1 + \alpha_x m + \alpha'_x m^2 \ldots + \alpha_x^{(x-1)} m^x = (1 - A_0 m)(1 - A_1 m) \ldots (1 - A_{x-1} m)$; e per determinare u_x abbiamo l' equazione

$u_{x+1} = B_x u_x + C_x \frac{du_x}{dy} + D_x \frac{d^2 u^x}{dy^2}$, la quale possiamo trattare col metodo usato nel numero precedente.

Adesso nella equazione (A) potremo riguardare x come costante, ed il di lei integrale sarà

$$z_x = \frac{e^{y:A_0} \int e^{-y:A_0}}{k} . u_x dy + \frac{e^{y:A_1} \int e^{-y:A_1}}{k} . u_x dy + \text{ec.}$$

$$+ e^{y:A_0} \psi_{1,x} + e^{y:A_1} \psi_{2,x} + e^{y:A_2} \psi_{3,x} \ldots + e^{y:A_{x-1}} . \psi_{x,x}.$$

Per determinare le funzioni $\Psi_{1,x}$, $\Psi_{2,x}$, ec. sostituiamo questo valore di z_x nella proposta, e troveremo

$$A_0(A_0 - A_x)\Psi_{1,x+1} = (A_0^2B_x + A_0C_x + D_x)\Psi_{1,x}.$$
$$A_1(A_1 - A_x)\Psi_{2,x+1} = (A_1^2B_x + A_1C_x + D_x)\Psi_{2,x}$$

e generalmente

$$A_{n-1}(A_{n-1} - A_{x-1})\Psi_{n,x+1} = (A_{n-1}^2B_x + A_{n-1}C_x + D_x)\Psi_{n,x}.$$

L' integrale di questa equazione sarà della forma $\Psi_{n,x} = X_{n,x}.F_n$, essendo $X_{n,x}$ una funzione data di n ed x, ed F_n una funzione arbitraria di n. E poichè si deve prendere il valore di $\Psi_{n,x}$ da $n=1$ fino ad $n=x$, esso introdurrà nell' integrale della proposta una nuova funzione arbitraria di x.

Le due equazioni contemplate ci fanno conoscere il metodo, che in ogni caso si deve tenere, per ridurre l' integrazione di qualsivoglia equazione lineare a differenze parziali miste con i coefficienti variabili alla integrazione di una simile equazione a differenze parziali finite. Noi ci astenghiamo dal più lungamente parlarne, perchè questa riduzione oltre i due casi considerati è più curiosa che utile, poichè l' integrazione dell' equazioni a differenze finite con i coefficienti variabili al di là del prim' ordine è tra le cose desiderate.

ARTICOLO V.

Applicazione del metodo precedente all' equazioni tra quattro variabili.

43. Passando all' equazioni tra quattro variabili, proponghiamoci in primo luogo d' integrare l' equazione del prim' ordine $z_{x+1} = Az_x + B\frac{dz_x}{dy} + C\frac{dz_x}{dt}$, essendo z_x funzione delle tre variabili x, y, t. Ponendo $z_x = \alpha^x e^{\beta y + \gamma t}$ avremo (*a*) $\alpha = A + B\beta + C\gamma$, cioè $\alpha = B\beta + C\delta$, posto $A + C\gamma = C\delta$. Quindi sarà $\alpha^x = B^x\beta^x + xB^{x-1}C\beta^{x-1}\delta + \frac{x(x-1)}{2}B^{x-2}C^2\beta^{x-2}\delta^2 \ldots\ldots + C^x\delta^x$; e perciò $\alpha^x e^{\beta y + \gamma t}$

$$=e^{-\frac{A}{C}t}\left(B^x\frac{d^x.e^{\beta y+\gamma t}}{dy^x}+xB^{x-1}C\frac{d^x.e^{\beta y+\gamma t}}{dy^{x-1}dt}\ldots+C^x\frac{d^x.e^{\beta y+\gamma t}}{dt^x}\right);$$

onde usando un ragionamento simile ai precedenti (29) ricaveremo

$$z^x=e^{-\frac{A}{C}t}\left(B^x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dy^x}+xB^{x-1}C\frac{d^x\varphi}{dy^{x-1}dt}\ldots\ldots+C^x\frac{d^x\varphi}{dt^x}\right).$$

Il medesimo integrale potrà ottenersi in una forma più semplice espresso, se, invece di prendere dalla equazione (α) il valore di α, si prenderà quello di β o di γ. Infatti si avrà $\gamma=\frac{\alpha-A-B\beta}{C}$, ed $\alpha^x e^{\beta y+\gamma t}=e^{-\frac{A}{C}t}\alpha^x e^{\frac{\alpha}{C}t+\beta(y-\frac{B}{C}t)}$

$=e^{-\frac{A}{C}t}.C^x\alpha^x e^{\alpha t+\beta(Cy-Bt)}$ (se in luogo di α e β si pone $C\alpha$ e $C\beta$) $=e^{-\frac{A}{C}t}.C^x.\frac{d^x.e^{\alpha t+\beta(Cy-Bt)}}{dt^x}$ nella supposizione di $Cy-Bt$ costante. Sarà dunque $z_x=e^{-\frac{A}{C}t}.C^x.\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$, purchè si prendano i differenziali nella ipotesi di $Cy-Bt$ costante.

44. Sia proposta adesso l'equazione del second' ordine

$$z_{x+1}+A\frac{dz_{x+1}}{dy}+B\frac{dz_{x+1}}{dt}=Cz_x+D\frac{dz_x}{dy}+E\frac{dz_x}{dt}.$$

Ponendo $z_x=\alpha^x e^{\beta y+\gamma t}$ avremo

$$\alpha+A\alpha\beta+B\alpha\gamma=C+D\beta+E\gamma.$$

Facciamo

$$1+A\beta+B\gamma=(AE-BD)\delta,$$
$$C+D\beta+E\gamma=(AE-BD)\theta;$$

ed avremo $\alpha=\frac{\theta}{\delta}$, $\beta=E\delta-B\theta+K$, $\gamma=A\theta-D\delta+L$, ove $K=\frac{BC-E}{AE-BD}$, $L=\frac{D-AC}{AE-BD}$, e sarà

$$\alpha^x e^{\beta y+\gamma t}=\frac{\theta^x}{\delta^x}e^{Ky+Lt+\delta(Ey-Dt)+\theta(At-By)}.$$

Se

Se per più semplicità ponghiamo $Ey - Dt = r$, $At - By = u$, ne otterremo l'equazione $\alpha^x e^{\beta y + \gamma t} = e^{(r+Cu):(BD-AE)} \cdot \frac{\theta^x}{\delta^x} e^{\delta r + \beta u}$ $= e^{(r+Cu):(BD-AE)} \int^x dr^x \cdot \frac{d^x e^{\delta r + \beta u}}{du^x}$. E siccome in luogo di $e^{\delta r + \beta u}$ si può sostituire una funzione qualunque di r ed u, sarà $z_x = e^{(r+Cu):(BD-AE)} \int^x dr^x \cdot \frac{d^x \varphi(r,u)}{du^x}$. Il segno integrale $\int^x dr^x \varphi(r,u)$ porterà la quantità $\Psi_{u,x} + r\Psi_{u,x-1} + \frac{r^2}{2}\Psi_{u,x-2} \ldots\ldots\ldots$ $\ldots + \frac{r^{x-1}}{2 \cdot 3 \cdots (x-1)}\Psi_{u,1}$. Quindi l' integrale completo della proposta sarà $z_x = e^{(r+Cu):(BD-AE)} \cdot \frac{d^x \int^x dr^x \varphi(r,u)}{du^x}$ $+ e^{(r+Cu):(BD-AE)} \left(\frac{d^x \Psi_{x,u}}{du^x} + r \frac{d^x \Psi_{x-1,u}}{du^x} \ldots + \frac{r^{x-1}}{2 \cdot 3 \ldots (x-1)} \frac{d^x \Psi_{1,u}}{du^x} \right)$.

La medesima equazione può anche trattarsi con un metodo analogo a quello del n.° 42. Prima di tutto osservo, che essa può rendersi assai più semplice, se si pone $z_x = e^{my+nt} \cdot z'_x$. Infatti essa diventerà dopo questa sostituzione $(1 + Am + Bn) z'_{x+1} + A\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{dz'_{x+1}}{dt} = (C + Dm + En) z'_x$ $+ D\frac{dz'_x}{dy} + E\frac{dz'_x}{dt}$. Ora essendo le quantità m ed n in nostro arbitrio, potremo prenderle tali, che ne risulti $1 + Am + Bn = 0$; $C + Dm + En = 0$, nel qual caso svanendo i coefficienti di due termini, l' equazione sarà $A\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{dz_{x+1}}{dt} = D\frac{dz'_x}{dy} + E\frac{dz'_x}{dt}$. Facciamo in questa $x = 0$, e ponendo $z'_x = \varphi(y,t)$ avremo $A\frac{dz'_1}{dy} +$ $B\frac{dz'_1}{dt} = D\frac{d\varphi}{dy} + E\frac{d\varphi}{dt} = u_1$. Se adesso ponghiamo $x = 1$, avremo $A\frac{dz'_2}{dy} + B\frac{dz'_2}{dt} = D\frac{dz'_1}{dy} + E\frac{dz'_1}{dt}$, e quindi sarà $A^2\frac{d^2 z'_2}{dy^2} + 2AB\frac{d^2 z'_2}{dydt} + B^2\frac{d^2 z'_2}{dt^2} = AD\frac{d^2 z'_1}{dy^2} +$

$(AE+BD)\frac{d^2z'_1}{dydt}+BE\frac{d^2z'_1}{dt^2}=D\frac{du_1}{dy}+E\frac{du_1}{dt}=u_2$. Similmente troveremo $A^3\frac{d^3z'_3}{dy^3}+3A^2B\frac{d^3z'_3}{dy^2dt}+3AB^2\frac{d^3z'_3}{dydt^2}+B^3\frac{d^3z'_3}{dt^3}$ $=A^2D\frac{d^3z'_2}{dy^3}+(2ABD+A^2E)\frac{d^3z'_2}{dy^2dt}+(B^2D+2ABE)\frac{d^3z'_2}{dydt^2}$ $+B^2E\frac{d^3z'_2}{dt^3}=D\frac{du_2}{dy}+E\frac{du_2}{dt}=u_3$. Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata (*a*) $A^x\frac{d^xz'_x}{dy^x}+xA^{x-1}B\frac{d^xz'_x}{dy^{x-1}dt}+\frac{x(x-1)}{2}A^{x-2}B^2\frac{d^xz'_x}{dy^{x-2}dt^2}\cdots$ $+B^x\frac{d^xz'_x}{dt^x}=u_x$, ove u_x si deve determinare dalla equazione $u_{x+1}=D\frac{du_x}{dy}+E\frac{du_x}{dt}$; cioè sarà (43) $u_x=E_x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$, purchè si facciano le differenziazioni nella ipotesi di $Ey-Dt$ costante. Nella equazione (*a*) si potrà considerare x come costante, e il di lei integrale sarà (17) $z'_x=\frac{1}{A^x}\int^x dy^x.u_x$, facendo le integrazioni nella supposizione di $At-By$ costante; le quali cose combinano con l'integrale trovato precedentemente.

45. Passiamo all' equazione generale del second' ordine $z_{x+2}=Az_{x+1}+B\frac{dz_{x+1}}{dy}+C\frac{dz_{x+1}}{dt}+Dz_x+E\frac{dz_x}{dy}$ $+F\frac{dz_x}{dt}+G\frac{d^2z_x}{dy^2}+H\frac{d^2z_x}{dydt}+I\frac{d^2z_x}{dt^2}$. Ponendo $z_x=\alpha^xe^{\beta y+\gamma t}$, e dividendo per $\alpha^xe^{\beta y+\gamma t}$ avremo (*a*) $\alpha^2=A\alpha+B\alpha\beta+C\alpha\gamma+D+E\beta+F\gamma+G\beta^2+H\beta\gamma+I\gamma^2$. Se da questa equazione deduciamo i valori di α^3, α^4, ec. ponendovi, finchè è possibile, il valore di α^2 ricavato dalla medesima equazione, troveremo α^x espresso nella forma seguente;

$$\alpha^x=\alpha\left\{\begin{array}{l}a_{0,0,x}+a_{1,0,x}\beta+a_{0,1,x}\gamma+a_{2,0,x}\beta^2+a_{1,1,x}\beta\gamma+a_{0,2,x}\gamma^2\\+a_{3,0,x}\beta^3+a_{2,1,x}\beta^2\gamma+a_{1,2,x}\beta\gamma^2+a_{0,3,x}\gamma^3\cdots\cdots\\+a_{x-1,0,x}\beta^{x-1}+a_{x-2,1,x}\beta^{x-2}\gamma\cdots\cdots+a_{0,x-1,x}\gamma^{x-1}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{l}+b_{0,0,x}+b_{1,0,x}\beta+b_{0,1,x}\gamma+b_{2,0,x}\beta^2+b_{1,1,x}\beta\gamma+b_{0,2,x}\gamma^2\\+b_{3,0,x}\beta^3+b_{2,1,x}\beta^2\gamma+b_{1,2,x}\beta\gamma^2+b_{0,3,x}\gamma^3\cdots\cdots\\+b_{x,0,x}\beta^x+b_{x-1,1,x}\beta^{x-1}\gamma\cdots\cdots\cdots+b_{0,x,x}\gamma^x\end{array}$$

Quindi con il ragionamento più volte usato dedurremo l' integrale completo della proposta espresso come segue

$$
\begin{aligned}
u_x = {} & a_{0,0,x}\varphi(y,t) + a_{1,0,x}\frac{d\varphi}{dy} + a_{0,1,x}\frac{d\varphi}{dt} + a_{2,0,x}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_{1,1,x}\frac{d^2\varphi}{dydt} \\
& + a_{0,2,x}\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_{3,0,x}\frac{d^3\varphi}{dy^3} + a_{2,1,x}\frac{d^3\varphi}{dy^2dt} \cdots\cdots\cdots \\
& + a_{x-1,0,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-1}} + a_{x-2,1,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dy^{x-2}dt} \cdots + a_{0,x-1,x}\frac{d^{x-1}\varphi}{dt^{x-1}} \\
& + b_{0,0,x}\varphi'(y,t) + b_{1,0,x}\frac{d\varphi'}{dy} + b_{0,1,x}\frac{d\varphi'}{dt} + b_{2,0,x}\frac{d^2\varphi'}{dy^2} + b_{1,1,x}\frac{d^2\varphi'}{dydt} \\
& + b_{0,2,x}\frac{d^2\varphi'}{dt^2} + b_{3,0,x}\frac{d^3\varphi'}{dy^3} + b_{2,1,x}\frac{d^3\varphi'}{dy^2dt} \cdots\cdots\cdots \\
& + b_{x,0,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^x} + b_{x-1,0,x}\frac{d^x\varphi'}{dy^{x-1}dt} \cdots\cdots + b_{0,x,x}\frac{d^x\varphi'}{dt^x};
\end{aligned}
$$

ove φ e φ' sono due funzioni arbitrarie di y e t.

Per determinare i coefficienti $a_{0,0,x}$, ec. $b_{0,0,x}$, ec. ponghiamo $x+1$ in luogo di x nel valore di α^x, ed avremo

$$
\begin{aligned}
\alpha^{x+1} = \alpha \Big\{ & a_{0,0,x+1} + a_{1,0,x+1}\beta + a_{0,1,x+1}\gamma + a_{2,0,x+1}\beta^2 \\
& + a_{1,1,x+1}\beta\gamma + a_{0,2,x+1}\gamma^2 + a_{3,0,x+1}\beta^3 + \text{ec.} \\
& + b_{0,0,x+1} + b_{1,0,x+1}\beta + b_{0,1,x+1}\gamma + b_{2,0,x+1}\beta^2 \\
& + b_{1,1,x+1}\beta\gamma + b_{0,2,x+1}\gamma^2 + b_{3,0,x+1}\beta^3 + \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Ma questo valore di α^{x+1} si può ottenere ancora in altra guisa, se quello di α^x si moltiplica per α, e poi in luogo di α^2 si sostituisce il suo valore ricavato dall' equazione (a). Sarà dunque

$$
\begin{aligned}
\alpha^{x+1} = {} & (A + B\beta + C\gamma)\alpha\Big\{ a_{0,0,x} + a_{1,0,x}\beta + a_{0,1,x}\gamma \\
& + a_{2,0,x}\beta^2 + a_{1,1,x}\beta\gamma + \text{ec.} \\
& + \alpha\Big\{ b_{0,0,x} + b_{1,0,x}\beta + b_{0,1,x}\gamma + b_{2,0,x}\beta^2 + b_{1,1,x}\beta\gamma \\
& + b_{0,2,x}\gamma^2 + b_{3,0,x}\beta^3 + b_{2,1,x}\beta^2\gamma + b_{1,2,x}\beta\gamma^2 + \text{ec.} \\
& + (D + E\beta + F\gamma + G\beta^2 + H\beta\gamma + I\gamma^2)\Big\{ a_{0,0,x} + a_{1,0,x}\beta \\
& + a_{0,1,x}\gamma + \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Siccome questi due valori di α^{x+1} devono essere identici, paragonando insieme i coefficienti de' termini α, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta^2$, ec. avremo

(b) $a_{0,0,x+1} = Aa_{0,0,x} + b_{0,0,x}$.

(c) $a_{m,0,x+1} = Aa_{m,0,x} + Ba_{m-1,0,x} + b_{m,0,x}$.

(d) $a_{0,n,x+1} = Aa_{0,n,x} + Ca_{0,n-1,x} + b_{0,n,x}$.

(e) $a_{m,n,x+1} = Aa_{m,n,x} + Ba_{m-1,n,x} + Ca_{m,n-1,x} + b_{m,n,x}$.

le quali equazioni si vede esser tutte comprese nella equazione (e), se si osserva che $a_{m,n,x}$ è $=0$, quando m o n è un numero negativo.

Similmente paragonando ne' due valori di α^{x-1} i coefficienti de' termini β, γ, β^2, $\beta\gamma$, γ^2, ec. otterremo in generale l'equazione (f) $b_{m,n,x+1} = Da_{m,n,x} + Ea_{m-1,n,x} + Fa_{m,n-1,x} + Ga_{m-2,n,x} + Ha_{m-1,n-1,x} + Ia_{m,n-2,x}$ purchè si rifletta, che $a_{m,n,x}$ è $=0$, quando uno de' numeri m o n è negativo.

L'equazione (e) ci darà il valore di $b_{m,n,x}$ subito che sarà trovato quello di $a_{m,n,x}$. Sostituendo poi il valore di $b_{m,n,x}$ nella equazione (f), avremo l' equazione $a_{m,n,x+2} = Aa_{m,n,x+1} + Ba_{m-1,n,x+1} + Ca_{m,n-1,x+1} + Da_{m,n,x} + Ea_{m-1,n,x} + Fa_{m,n-1,x} + Ga_{m-2,n,x} + Ha_{m-1,n-1,x} + Ia_{m,n-2,x}$ a differenze finite, l'integrazione della quale ci darà il valore di $a_{m,n,x}$. Anche indipendentemente dalla integrazione della equazione precedente si potrà trovare con altri metodi il valore di $a_{m,n,x}$; sopra di che si può vedere la citata Memoria di *Lagrange*.

46. Se nella proposta mancasse il termine z_{x+2}, cioè se essa fosse della forma $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{dz_{x+1}}{dt} = Cz_x + D\frac{dz_x}{d} + E\frac{dz_x}{dt} + \frac{Fd^2z_x}{dy^2} + G\frac{d^2z_x}{dydt} + H\frac{d^2z_x}{dt^2}$, non si potrebbe adoprare il metodo precedente. In questo caso ponghiamo $z_x = e^{-y:A}.z'_x$, e l' equazione diventerà $A\frac{dz'_{x+1}}{dy} + B\frac{dz'_{x+1}}{dt} = C1z'_x + D1\frac{dz'_x}{d} + E1\frac{dz'_x}{dt} + F\frac{d^2z'_x}{dy^2} + G\frac{d^2z'_x}{dydt} + H\frac{d^2z'_x}{dt^2}$, essendo $C1 = C - \frac{D}{A} + \frac{F}{A^2}$, $D1 = D - \frac{2F}{A}$, $E1 = E - \frac{G}{A}$. Adesso in luogo di t introduciamo la variabile $u = At - By$, in modo che z'_x diventi funzione di x, y, ed u, ed avremo (a) $A\frac{dz'_{x+1}}{dy} = C1z'_x + D1\frac{dz'_x}{dy} + E2\frac{dz'_x}{du} + F\frac{d^2z'_x}{dy^2} + G1\frac{d^2z'_x}{dydu} + H1\frac{d^2z'_x}{du^2}$, ove $E2 = AE1$

$- BD_1$, $G_1 = AG - 2BF$, $H_1 = A^2H - ABG + B^2F$. Si faccia $z'_x = \int^x dy^x . z''_x$, e l'equazione precedente si cangerà in $Az''_{x+1} = C_1 z''_x + D_1 \frac{dz''_x}{dy} + E_2 \frac{dz''_x}{du} + F \frac{d^2 z''_x}{dy^2} + G_1 \frac{d^2 z''_x}{dydt} + H_1 \frac{d^2 z''_x}{du^2}$. Ora ponendo $z''_x = \alpha^x e^{\beta y + \gamma u}$ avremo $A\alpha = C_1 + D_1\beta + E_2\gamma + F\beta^2 + G_1\beta\gamma + H_1\gamma^2$, e quindi $\alpha^x = \frac{1}{A^x}(C_1 + D_1\beta + E_2\gamma + F\beta^2 + G_1\beta\gamma + H\gamma^2)^x$. Se svolgiamo questo valore di α^x nella forma $a_{010} + a_{110}.\beta + a_{011}\gamma + a_{210}.\beta^2 + a_{211}.\beta\gamma + a_{012}.\gamma^2 \ldots\ldots\ldots + a_{2x10}.\beta^{2x} + a_{2x-111}.\beta^{2x-1}\gamma \ldots\ldots\ldots + a_{012x}\gamma^{2x}$, sarà

$$z''_x = a_{010}\Phi(y,u) + a_{110}.\frac{d\Phi}{dy} + a_{011}.\frac{d\Phi}{du} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{2x10}.\frac{d^{2x}\Phi}{dy^{2x}} + a_{2x-111}\frac{d^{2x}\Phi}{dy^{2x-1}du} \ldots\ldots + a_{012x}.\frac{d^{2x}\Phi}{du^{2x}}.$$

Il segno sommatorio $\int^x dy^x . z''_x$ porterà la quantità $\frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)}\Psi_{1,x,u} + \frac{y^{x-2}}{2.3\ldots(x-2)}\Psi_{2,x,u} \ldots\ldots + \Psi_{x,x,u}$; e per determinare la funzione $\Psi_{n,x,u}$ si porrà questa quantità in luogo di z'_x nella equazione (a). Fatta la sostituzione si troverà $A_{1,x+1} = C_1\Psi_{1,x} + E_2\frac{d\Psi_{1,x}}{du} + H_1\frac{d^2\Psi_{1,x}}{du^2}$ $A\Psi_{n,x+1} = C_1\Psi_{n,x} + E_2\frac{d\Psi_{n,x}}{du} + H_1\frac{d^2\Psi_{n,x}}{du^2} + D_1\Psi_{n-1,x} + G_1\frac{d\Psi_{n-1,x}}{du} + F\Psi_{n-2,x}$. Questa equazione è di un genere diverso da quello, che qui si contempla, poichè la differenza di due variabili n ed x è finita, e della terza u infinitesima, e della di lei integrazione parleremo in seguito.

Per l' integrazione dell' equazione $z_{x+1} + A\frac{dz_{x+1}}{dy} + B\frac{dz_{x+1}}{dt} = Cz_x + D\frac{dz_x}{dy} + E\frac{dz_x}{dt} + F\frac{d^2z_x}{dy^2} + G\frac{d^2z_x}{dydt} + H\frac{d^2z_x}{dt^2}$ si può anche usare il metodo seguente, che è ge-

neralmente applicabile all' equazioni della medesima forma di un ordine più elevato. Facciamo $z_0 = \phi(y,t)$, e ponendo nella proposta $x+0$ avremo $z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt} = C\phi(y,t) + D\frac{d\phi}{dy} + E\frac{d\phi}{dt} + F\frac{d^2\phi}{dy^2} + G\frac{d^2\phi}{dydt} + H\frac{d^2\phi}{dt^2} = u_1$.
Similmente, se facciamo $x=2$, otterremo

$$z_2 + A\frac{dz_2}{dy} + B\frac{dz_2}{dt} + A\frac{d\left(z_2 + A\frac{dz_2}{dy} + B\frac{dz_2}{dt}\right)}{dy}$$
$$+ B\frac{d\left(z_2 + A\frac{dz_2}{dy} + B\frac{dz_2}{dt}\right)}{dt} = C\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)$$
$$+ D\frac{d\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dy} + E\frac{d\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dt}$$
$$+ F\frac{d^2\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dy^2} + G\frac{d^2\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dydt}$$
$$+ H\frac{d^2\left(z_1 + A\frac{dz_1}{dy} + B\frac{dz_1}{dt}\right)}{dt^2};$$

e se ponghiamo questa equazione sotto la forma $z_2 + \alpha\frac{dz_2}{dy} + \alpha'\frac{dz_2}{dt} + \alpha''\frac{d^2z_2}{dy^2} + \alpha'''\frac{d^2z_2}{dydt} + \alpha''''\frac{d^2z_2}{dt^2} = u_2$, sarà la quantità $1 + \alpha m + \alpha' n + \alpha'' m^2 + \alpha''' mn + \alpha'''' n^2 = (1 + Am + Bn)^2$; ed $u_2 = Cu_1 + D\frac{du_1}{dy} + E\frac{du_1}{dt} + F\frac{d^2u_1}{dy^2} + G\frac{d^2u_1}{dydt} + H\frac{d^2u_1}{dt^2}$. Così pure, se nella proposta ponghiamo $x=2$, ne dedurremo

$$z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt} + \alpha\frac{d\left(z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt}$$
$$+ \alpha'\frac{d\left(z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt} + \alpha''\frac{d^2\left(z_3 + A\frac{dz_3}{dy} + B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dy^2}$$

$$+\alpha'''\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dydt}+\alpha''''\frac{d^2\left(z_3+A\frac{dz_3}{dy}+B\frac{dz_3}{dt}\right)}{dt^2}$$

$$=Cu_2+D\frac{du_2}{dy}+E\frac{du_2}{dt}+F\frac{d^2u_2}{dy^2}+G\frac{d^2u_2}{dydt}+H\frac{d^2u_2}{dt^2};$$

la qual' equazione se si pone sotto la forma $z_3+\beta\frac{dz_3}{dy}$ $+\beta'\frac{dz_3}{dt}+\beta''\frac{d^2z_3}{dy^2}+\beta'''\frac{d^2z_3}{dydt}+\beta''''\frac{d^2z_3}{dt^2}+\beta'''''\frac{d^3z_3}{dy^3}+\beta''''''\frac{d^3z_3}{dy^2dt}$ $+\beta'''''''\frac{d^3z_3}{dydt^2}+\beta''''''''\frac{d^3z_3}{dt^3}=u_3$, la quantità $1+\beta m+\beta' n$ $+\beta''m^2+\beta'''mn+\beta''''n^2+\beta'''''m^3+\beta''''''m^2n+\beta'''''''mn^2$ $+\beta''''''''n^3$ sarà $=(1+\alpha m+\alpha' n+\alpha''m^2+\alpha'''mn$ $+\alpha''''n^2)(1+Am+Bn)=(1+Am+Bn)^3$.

Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata (a) $z_x+\omega\frac{dz_x}{dy}+\omega'\frac{dz_x}{dt}+\omega''\frac{d^2z_x}{dy^2}$ $+\omega'''\frac{d^2z_x}{dydt}+\omega''''\frac{d^2z_x}{dt^2}+\text{ec.}=u_x$; ove la quantità $1+\omega m$ $+\omega' n+\omega''m^2+\omega'''mn+\omega''''n^2+\text{ec.}$ è $=(1+Am+Bn)^x$, e per determinare u_x abbiamo l' equazione $u_{x+1}=Cu_x$ $+D\frac{du_x}{dy}+E\frac{du_x}{dt}+F\frac{d^2u_x}{dy^2}+G\frac{d^2u_x}{dydt}+H\frac{d^2u_x}{dt}$, per mezzo della quale potremo col metodo del n.° 45. esprimere u_x per $\varphi(y,t)$, e per le differenziali di questa funzione relativamente ad y ed a t.

Trovato u_x, l' equazione (a) integrata (19) ci darà $z_x=\frac{e^{-y:A}}{A^x}\int^x dy^x.e^{y:A}u_x$, purchè si prendano questi integrali nella ipotesi di $At-By$ costante. Col metodo precedente si potrà sempre ridurre l' integrazione di qualunque equazione della forma, che abbiamo considerata, alla integrazione di una equazione a differenze parziali e infinitesime.

47. Passiamo adesso a considerare quell' equazioni, nelle quali la differenza di due variabili x ed y è finita, e della terza t infinitesima. Se z_{xy} rappresenta una funzione di x, y, e t, la forma generale dell' equazione del prim' or-

dine è la seguente; $z_{x+1,y} = Az_{x,y} + Bz_{x,y+1} + C\frac{dz_{x,y}}{dt}$. Per integrarla facciamo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$, ed avremo $\alpha = A + B\beta + C\gamma = B\beta + C\delta$, se ponghiamo $A + C\gamma = C\delta$, cioè $\gamma = \delta - \frac{A}{C}$. Sarà dunque $\alpha^x = B^x\beta^x + xB^{x-1}C\beta^{x-1}\delta + \frac{x(x-1)}{2}B^{x-2}C^2\beta^{x-2}\delta^2 \ldots\ldots\ldots C^x\delta^x$; e siccome $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \alpha^x\beta^y e^{(\delta - A:C)t}$, sarà $z_{x,y} = e^{-(A:C)t}(B^x\beta^{x+y}e^{\delta t} + xB^{x-1}C\frac{d.\beta^{x+y-1}e^{\delta t}}{dt} \ldots\ldots + C^x\frac{d^x.\beta^y e^{\delta t}}{dt^x})$; onde col ragionamento più volte usato dedurremo l' integrale completo $z_{x,y} = e^{-(A:C)t}(B^x\varphi(x+y,t) + xB^{x-1}C\frac{d.\varphi(x+y-1,t)}{dt} \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots + C^x\frac{d^x\varphi(y,t)}{dt^x}$.

L' istesso integrale può ottenersi espresso in un modo più semplice. Ripigliamo l' equazione $\alpha = B\beta + C\delta$, e ponghiamo $B\beta = -C\omega\delta$; sarà $\alpha = -C\delta(\omega - 1)$; e quindi avremo $\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{e^{-(A:C)t}.(-C)^{x+y}}{B^y}.\delta^{x+y}(\omega - 1)^x\omega^y e^{\delta t} = \frac{e^{-(A:C)t}.(-C)^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\omega^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}$; onde ricaveremo l' integrale cercato $z_{x,y} = \frac{e^{-(A:C)t}.(-C)^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$, ove Δ' rappresenta la differenza finita per rapporto ad y. Possiamo ancora porre $\alpha = C\omega\delta$, ed avremo $\beta = \frac{C}{B}\delta(\omega - 1)$, e col medesimo discorso troveremo

$$z_{x,y} = \frac{e^{-(A:C)t}.C^{x+y}}{B^y}.\frac{d^{x+y}\Delta^x\psi(x,t)}{dt^{x+y}}.$$

48. Consideriamo adesso l' equazione del second' ordine

$$z_{x+1,y} + Az_{x+1,y+1} + B\frac{dz_{x+1,y}}{dt} = Cz_{x,y} + Dz_{x,y+1} + E\frac{dz_{x,y}}{dt}.$$

Po-

Ponendo $z_{x,y} = \alpha^x \beta^y e^{\gamma t}$ avremo $\alpha = \frac{C + D\beta + F\gamma}{1 + A\beta + B\gamma}$; e facendo $1 + B\gamma = B\delta$, e $C - \frac{E}{B} = K$, sarà $\alpha = \frac{K + D\beta + E\delta}{A\beta + B\delta}$.

Se adesso ponghiamo $A\beta = -B\omega\delta$, sarà $\beta = -\frac{B}{A}\omega\delta$, ed $\alpha = \frac{K + \delta(E - L\omega)}{-B\delta(\omega - 1)}$, ove $L = \frac{BD}{A}$. Di nuovo facciamo $E - L\omega = -E(\omega' - 1)$; ed otterremo $\omega = \frac{E}{L}\omega'$, $\beta = -\frac{BE}{AL}\omega'\delta$, ed $\alpha = \frac{K - E\delta(\omega' - 1)}{-B\delta\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)}$. Sarà pertanto $\alpha^x \beta^y e^{\gamma t}$

$$= \frac{(-B)^y e^{-t:B}}{A^y(-B)^x} \cdot \frac{[K - E\delta(\omega' - 1)]^x \cdot \frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)^x}.$$

Ma la quantità

$$\frac{[K - E\delta(\omega' - 1)]^x \cdot \frac{E^y}{L^y}\omega'^y e^{\delta t}}{\delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)^x},$$

svolto in serie il binomio $[K - E\delta(\omega' - 1)]^x$, diventa $\left\{[K^x - xK^{x-1}E\delta(\omega' - 1) + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}E^2\delta^2(\omega' + 1)^2 \ldots \pm E^x\delta^x(\omega' - 1)^x]\left(\frac{E}{L}\right)^y \omega'^y e^{\delta t}\right\} : \delta^{x-y}\left(\frac{E}{L}\omega' - 1\right)^x$; e questa formola si può mettere sotto la forma $\left\{d^{y-x}\Sigma^{x}\frac{E^y}{L^y}\left(K^x\omega'^y e^{\delta t} - xK^{x-1}E\frac{d\Delta'.\omega'^y e^{\delta t}}{dt} - \ldots\ldots \ldots\ldots \pm E^x\frac{d^x\Delta'^x.\omega'^y e^{\delta t}}{dt^x}\right\} : dt^{y-x}$. Se dunque facciamo z_x eguale a questa ultima quantità, dopo di averla moltiplicata per $\frac{(-B)^y e^{-(t:B)}}{A^y(-B)^x}$, e di aver posto in luogo di $\omega' e^{\delta t}$ una funzione qualunque arbitraria di y e t, avremo l' integrale della proposta.

Ora si osservi, che la formola $K^x\varphi(y,t) - xK^{x-1}E\frac{d\Delta'\varphi}{dt} + \frac{x(x-1)}{2}K^{x-2}E^2\frac{d^2\Delta'^2\varphi}{dt^2} \ldots\ldots \pm E^x\frac{d^x\Delta'^x\varphi}{dt^x}$ si può ridurre in una forma assai più concisa. Facciamola infatti $= Q_{x,y}$, ed avremo $Q_{x+1,y} = K^{x+1}\varphi - (x+1)K^xE\frac{d\Delta'\varphi}{dt} + \frac{(x+1)x}{2}K^{x-1}E^2\frac{d^2\Delta'^2\varphi}{dt^2}$ — ec., e $\frac{d\Delta Q_{x,y}}{dt} = K^x\frac{d\Delta'\varphi}{dt} - xK^{x-1}E\frac{d^2\Delta'^2\varphi}{dt^2}$ + ec. Quindi apparisce, che sarà $Q_{x+1,y} = KQ_{x,y} - E\frac{d\Delta'Q_{x,y}}{dt}$. Per integrare questa equazione ponghiamo $Q_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$, ed avremo $\alpha = K - E(\beta - 1)\gamma$; il qual valore di α diventa $\alpha = K - E\omega + E\gamma$, se si fa $\beta\gamma = \omega$. Di nuovo ponghiamo $K + E\gamma = E\delta$, ed $\omega = \omega'\delta$, ed avremo $\alpha = -E\delta(\omega' - 1)$, $\beta = \frac{\omega'\delta}{\delta - K:E}$, e quindi $\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{(-E)^x\delta^{x+y}(\omega'-1)^x.\omega'^y e^{(\delta - K:E)t}}{(\delta - K:E)}$, la qual quantità si può mettere sotto la forma $(-E)^x\int^y dt^y.e^{-(K:E)t}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\omega'^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}$. Pertanto il valore di $Q_{x,y}$ sarà $Q_{x,y} = (-E)^x\int^y dt^y.e^{-(K:E)t}\frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$; e l'integrale della proposta

$$z_{x,y} = \frac{(-B)^y E^x e^{-(t:B)}}{A^y B^x}.\frac{d^{y-x}\Sigma'^x\frac{E^y}{L^y}\int^y dt^y.e^{-(K:E)t}.\frac{d^{x+y}\Delta'^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}}{dt^{y-x}}.$$

49. Questa forma d'integrale cessa di essere utile in due casi, cioè quando $D = o$, e quando $B = o$. Nel primo caso ponendo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$, e poi $1 - E\gamma = E\delta$, e $K = C - \frac{B}{E}$, avremo $\alpha = \frac{K + E\delta}{A\beta + E\delta}$; e quindi facendo $A\beta = -B\omega\delta$ otterremo $\beta = -\frac{B}{A}\omega\delta$, ed $\alpha = \frac{K + ED}{-E\delta(\omega - 1)}$; onde sarà

$$\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} e^{-(1:B+K:E)t} \cdot \frac{(\delta+K:E)^x \omega^y \delta^y e^{(\delta+K:E)t}}{\delta^x(\omega-1)^x};$$

la qual quantità si può mettere sotto la forma

$$\frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} e^{-(1:B+K:E)t} \cdot \frac{d^x . e^{(K:E)t} d^{y-x} \Sigma'^x \omega^y e^{\delta t}}{d^y}.$$ Quindi ponendo una funzione arbitraria di y e t in luogo di $\omega^y e^{\delta t}$ avremo

$$z_{xy} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} e^{-(1:B+K:E)t} \cdot \frac{d^x e^{(K:E)t} d^{y-x} \Sigma'^x \varphi(,t)}{dt^y}.$$

E se oltre ad essere $D=o$, fosse anche $C=o$, a motivo di $\frac{K}{E} = -\frac{1}{B}$, sarà $z_{xy} = \frac{(-B)^y E^x}{A^y(-B)^x} \cdot \frac{d^x e^{-(t:B)} d^{y-x} \Sigma'^x \varphi(y,t)}{dt^y}$.

50. Nel caso di $B=o$ facendo $z_{xy} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$ avremo $\varkappa = \frac{C+D\beta+E\gamma}{1+A\beta}$. Si ponga $C+E\gamma=E\delta$, $A\beta=-\omega$, e sarà $\gamma = \delta - \frac{C}{E}$, $\beta = -\frac{\omega}{A}$, ed $\alpha = \frac{(D:A)\omega - E\delta}{\omega-1}$. Si faccia adesso $\frac{D}{A}\omega = E\omega'\delta$, e chiamando M la quantità $\frac{AE}{D}$, avremo $\omega = M\omega'\delta$; $\beta = -\frac{M\omega'\delta}{A}$; ed $\alpha = \frac{E(\omega'-1)\delta}{M\omega'\delta-1}$. Quindi sarà $\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{E^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \cdot \frac{(\omega'-1)^x \delta^{x+y} M^y \omega'^y e^{\delta t}}{(M\omega\delta-1)^x}$, il qual valore può mettersi sotto la forma $\frac{E^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \Sigma'^x . M^y \frac{d^{x+y} \Delta'^x \omega'^y e^{\delta t}}{dt^{x+y}}$;

e perciò $z_{xy} = \frac{E^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \Sigma'^x \cdot \frac{A^y E^y}{D^y} \cdot \frac{d^{x+y} \Delta'^x \varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$.

E se B e D fossero nel medesimo tempo $= o$, fermandoci ai valori di α e β in δ ed ω, avremmo $\alpha^x\beta^y e^{\gamma t} = \frac{(-E)^x e^{-(C:E)t} \omega^y e^{\delta t}}{(-A)^y(\omega-1)^x}$; donde facilmente si ricava $z_{xy} = \frac{(-E)^x e^{-(C:E)t}}{(-A)^y} \cdot \frac{d^x \Sigma'^x \varphi(y,t)}{dt^x}$.

51. L' equazione del n.° 48. si potrebbe anche trattare nel modo seguente. Ponghiamovi $z_{xy} = e^{-(t:B)} . z_{xy}$, ed essa diventerà $Az'_{x+1,y+1} + B\frac{dz'_{x+1,y}}{dt} = Kz'_{xy} + Dz'_{xy+1} + E\frac{dz_{xy}}{dt}$. Sia $z'_{0y} = \varphi(y,t)$, e posto $x = 0$ sarà $Az'_{1y+1} + B\frac{dz_{1y}}{dt} = K\varphi(y,t) + D\varphi(y+1,t) + E\frac{d\varphi(y,t)}{dt} = u_{1y}$. Similmente facendo $x = 1$, avremo $Az'_{2y+1} + B\frac{dz'_{2y}}{dt} = Kz'_{1y} + Dz'_{1y+1} + E\frac{dz_{1y}}{dt}$; onde si deduce

$$A^2z'_{2y+2} + 2AB\frac{dz'_{2y+1}}{dt} + B^2\frac{d^2z'_{2y}}{dt^2} = K\left(Az'_{1y+1} + B\frac{dz'_{1y}}{dt}\right) + D\left(Az'_{1y+2} + B\frac{dz'_{1y+1}}{dt}\right) + E\left(A\frac{dz'_{1y+1}}{dt} + B\frac{d^2z'_{1y}}{dt^2}\right) = Ku_{1y} + Du_{1y+1} + E\frac{du_{1y}}{dt} = u_{2y}.$$

Nella medesima maniera troveremo, facendo $x = 2$;

$$A^3z'_{3y+3} + 3A^2B\frac{dz'_{3y+2}}{dt} + 3AB^2\frac{d^2z'_{3y+1}}{dt^2} + B^3\frac{d^3z_{3y}}{dt^3} = u_{3y};$$

ove sarà $u_{3y} = Ku_{2y} + Du_{2y+1} + E\frac{du_{2y}}{dt}$; e generalmente

$$(a)\ A^xz'_{xy+x} + xA^{x-1}B\frac{dz'_{xy+x-1}}{dt} \ldots\ldots + B^x\frac{d^xz'_{xy}}{dt^x} = u_{xy};$$

essendo (b) $u_{x+1y} = Ku_{xy} + Du_{xy+1} + E\frac{du_{xy}}{dt}$. L' equazione (b) ci dà (47) $u_{xy} = \frac{e^{-(K:E)t}.(-E)^{x+y}}{D^y} . \frac{d^{x+y}\Delta^x\varphi(y,t)}{dt^{x+y}}$.

Nella equazione (a) si può considerare x come costante, ed il di lei integrale sarà (6)

$$z'_{xy} = \frac{(-B)^x}{A^y(-B)} . \frac{d^y\Sigma^x\frac{A^y}{(-B)^y}\int^{x+y}dt^{x+y}.u_{xy}}{dt^y};$$ lo che combina con le cose precedenti.

Perchè questo valore di $z'_{x,y}$ sia completo, converrà aggiungervi quella quantità, che introduce il segno Σ'^{x}, cioè $\frac{(-B)^y}{A^y(-B)^x}\left(\frac{y(y-1)\ldots\ldots(y-x+2)}{1\cdot 2\ldots(x-1)}\cdot\frac{d^{y-x}\Psi_{1,x}}{dt^{y-x}}\right.$ $\left.+\frac{y\ldots(y-x+3)}{1\ldots(x-2)}\cdot\frac{d^{y-x}\Psi_{2,x}}{dt^{y-x}}\ldots\ldots+\frac{d^{y-x}\Psi_{y,x}}{dt^{y-x}}\right)$; e per determinare la funzione $\Psi_{n,x}$ converrà sostituire questa quantità nella equazione data in luogo di $z'_{x,y}$. Ma si osservi che $\frac{(y+r)(y+r-1)\ldots(y+r-5)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots(5+1)}$ è $=\frac{(y+r-1)(y+r-2)\ldots(y+r-5-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots(5+1)}$ $+\frac{(y+r-1)(y+r-2)\ldots(y+r-5)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots 5}$. Posto ciò, facendo la sostituzione, e ponendo come sopra $\frac{BD}{A}=L$, avremo

$$o=\frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(x-1)}\left(\Psi_{2y,x+1}-K\Psi_{1,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{1,x}}{dt}\right)$$
$$+\frac{y(y-1)\ldots(y-x+3)}{1\cdot 2\ldots(x-2)}\left(\Psi_{2y,x+1}-K\Psi_{2,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{2,x}}{dt}+L\frac{d\Psi_{3,x}}{dt}\right)$$
$$+\frac{y(y-1)\ldots(y-x+4)}{1\cdot 2\ldots(x-3)}\left(\Psi_{3,x+1}-K\Psi_{3,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{3,x}}{dt}+L\frac{d\Psi_{2,x}}{dt}\right)$$
$+$ ec.

Quindi paragonando i termini simili otterremo (*a*) $\Psi_{1,x+1}$ $-K\Psi_{1,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{1,x}}{dt}=o$; $\Psi_{n,x+1}-K\Psi_{n,x}+(L-E)\frac{d\Psi_{n,x}}{dt}$ $+L\frac{d\Psi_{n-1,x}}{dt}=o$. Questa seconda equazione è quella medesima del n.° 49., se ivi si pone $x=n-1$, $y=x$, $A=-\frac{1}{K}$, $B=\frac{E-L}{K}$, $C=o$, ed $E=\frac{L}{K}$; onde sarà

$$\Psi_{n,x}=(E-L)^{x-n+1}.L^{n-1}.\frac{d^{n-1}.e^{Kt(L-E)}d^{x-n+1}\Sigma^{n-1}F(x,t)}{dt^x}.$$

Sostituiamo il valore di $\Psi_{n,x}$ dato da questa formola nella equazione (1), ed avremo $F(x+1,t)=F(x,t)$, cioè sarà $F(x,t)$ una funzione di t senza x, e perciò $\Sigma^{n-1}F(x,t)$ sarà della forma

$$f_{n,t}+xf_{n-1,t}+\frac{x(x-1)}{2}f_{n-2,t}\ldots+\frac{x(x-1)\ldots(x-n+2)}{2\ldots\ldots(n-1)}f_{1,t};$$

e siccome n si deve prendere da $n=o$ fino ad $n=x$, verrà

ad introdursi nel valore di $z_{x,y}$ una funzione arbitraria di x e t, lo che era necessario per rendere quell' integrale completo.

52. Sia adesso proposta l' equazione generale del second' ordine $z_{x+2,y} = Az_{x+1,y} + Bz_{x+1,y+1} + C\frac{dz_{x+1,y}}{dt}$

$$+ Dz_{x,y} + Ez_{x,y+1} + F\frac{dz^x}{dt} + Gz_{x,y+2} + H\frac{dz_{x,y+1}}{dt} + I\frac{d^2z_{x,y}}{dt^2}.$$

Ponendo $z_{x,y} = \alpha^x\beta^y e^{\gamma t}$, avremo $\alpha^2 = (A+B\beta+C\gamma)\alpha + D + E\beta + F\gamma + G\beta^2 + H\beta\gamma + I\gamma^2$; e se per mezzo di questa equazione svolgeremo il valore di α^x nella forma seguente

$$\alpha^x = \alpha\begin{cases} a_{0,0,x} + a_{1,0,x}.\beta + a_{0,1,x}.\gamma + a_{2,0,x}.\beta^2 + a_{1,1,x}.\beta\gamma + a_{0,2,x}.\gamma^2 \\ + a_{3,0,x}.\beta^3 + a_{2,1,x}.\beta^2\gamma + a_{1,2,x}.\beta\gamma^2 + a_{0,3,x}\gamma^3 \ldots\ldots \\ + a_{x-1,0,x}.\beta^{x-1} + a_{x-2,1,x}.\beta^{x-2}\gamma \ldots + a_{0,x-1,x}.\gamma^{x-1} \end{cases}$$

$$+ b_{0,0,x} + b_{1,0,x}.\beta + b_{0,1,x}.\gamma + b_{2,0,x}.\beta^2 + b_{1,1,x}.\beta\gamma + b_{0,2,x}.\gamma^2$$
$$+ b_{3,0,x}.\beta^3 + b_{2,1,x}.\beta^2\gamma + b_{1,2,x}.\beta\gamma^2 + b_{0,3,x}.\gamma^3 \ldots\ldots$$
$$+ b_{x,0,x}.\beta^x + b_{x-1,1,x}.\beta^{x-1}\gamma \ldots\ldots\ldots + b_{0,x,x}.\gamma^x,$$

chiamando $\varphi.y$, e $\varphi'.y$ due funzioni arbitrarie di y e t, otterremo l' integrale completo della proposta

$$z_{x,y} = a_{0,0,x}.\varphi.y + a_{1,0,x}.\varphi(y+1) + a_{0,1,x}.\frac{d\varphi.y}{dt} + a_{2,0,x}.\varphi(y+2)$$
$$+ a_{1,1,x}.\frac{d\varphi(y+1)}{dt} + a_{0,2,x}.\frac{d^2\varphi.y}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{x-1,0,x}.\varphi(y+x-1) + a_{x-2,1,x}.\frac{d\varphi(y+x-2)}{dt} \ldots + a_{0,x-1,x}.\frac{d^{x-1}\varphi.y}{dt^{x-1}}$$
$$+ b_{0,0,x}.\varphi'.y + b_{1,0,x}.\varphi'(y+1) + b_{0,1,x}.\frac{d\varphi'.y}{dt} + b_{2,0,x}.\varphi'(y+2)$$
$$+ b_{1,1,x}.\frac{d\varphi'(y+1)}{dt} + b_{0,2,x}.\frac{d^2\varphi'.y}{dt^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ b_{x,0,x}.\varphi'(y+x) + b_{x-1,1,x}.\frac{d\varphi(y+x-1)}{dt} \ldots + b_{0,x,x}.\frac{d^x\varphi'.y}{dt^x};$$

ove i coefficienti $a_{x,0,x}$, ec. si determineranno come sopra (45.). In luogo di svolgere il valore di α^x si potrà egualmente prendere quello di β^y, e si giungerà in una simile maniera all' integrale della equazione proposta.

53. Ma se mancassero insieme i due termini $z_{x+2,y}$ e $z_{x,y+2}$, questo metodo non potrebbe adoprarsi, e converrebbe servirsi del seguente. Sia adunque proposta l' equazione

$z_{x+1,y} + Az_{x+1,y+1} + B\frac{dz_{x+1,y}}{dt} = Cz_{x,y} + Dz_{x,y+1} + E\frac{dz_{x,y}}{dy}$ $+ F\frac{dz_{x,y+1}}{dt} + G\frac{d^2z_{x,y}}{dt^2}$. Posto $x=0$, sarà $z_{0,y}$ una funzione di y e t, chiameremo $\phi.y$, e la proposta ci darà $z_{1,y} + Az_{1,y+1} + B\frac{dz_{1,y}}{dt} = C\phi.y + D\phi(y+1) + E\frac{d\phi.y}{dt} + F\frac{d\phi(y+1)}{dt}$ $+ G\frac{d^2\phi.y}{dt^2} = u_{1,y}$. Così pure, se facciamo $x=1$, avremo $z_{2,y} + Az_{2,y+1} + B\frac{dz_{2,y}}{dt} = Cz_{1,y} + Dz_{1,y+1} + \frac{Edz_{1,y}}{dt} + F\frac{dz_{1,y+1}}{dt}$ $+ G\frac{d^2z_{1,y}}{dt^2}$; donde si deduce $z_{2,y} + Az_{2,y+1} + B\frac{dz_{2,y}}{dt}$ $+ A\left(z_{2,y+1} + Az_{2,y+2} + B\frac{dz_{2,y+1}}{dt}\right) + B\left(\frac{dz_{2,y}}{dt} + A\frac{dz_{2,y+1}}{dt}\right.$ $\left.+ B\frac{d^2z_{2,y}}{dt^2}\right) = Cu_{1,y} + Du_{1,y+1} + E\frac{du_{1,y}}{dt} + F\frac{du_{1,y+1}}{dt^2}$ $+ G\frac{d^2u_{1,y}}{dt^2} = u_{2,y}$; la qual equazione posta sotto la forma $z_{2,y} + \alpha z_{2,y+1} + \alpha'\frac{dz_{2,y}}{dt} + \alpha''z_{2,y+2} + \alpha'''\frac{dz_{2,y+1}}{dt} + \alpha''''\frac{d^2z_{2,y}}{dt^2} = u_{2,y}$, sarà la quantità $1 + \alpha m + \alpha' n + \alpha'' m^2 + \alpha''' mn + \alpha'''' n^2$ $= (1 + Am + Bn)^2$. Continuando le medesime operazioni giungeremo finalmente alla trasformata (κ) $z_{x,y} + \omega z_{x,y+1}$ $+ \omega'\frac{dz_{x,y}}{dt} + \omega'' z_{x,y+2} + \omega'''\frac{dz_{x,y+1}}{dt} + \text{ec.} = u_{x,y}$, ove sarà $1 + \omega m + \omega' n + \omega'' m^2 + \omega''' mn + \text{ec.} = (1 + Am + Bn)^x$; e per determinare $u_{x,y}$ avremo l'equazione $u_{x+1,y} = Cu_{x,y}$ $+ Du_{x,y+1} + E\frac{du_{x,y}}{dt} + F\frac{du_{x,y+1}}{dt} + G\frac{d^2u_{x,y}}{dt^2}$, la quale s'integrerà col metodo del numero antecedente, ed il valore di $u_{x,y}$ conterrà una funzione arbitraria di y, e t.

Nella equazione (a) si può riguardare x come costante, e se la paragoniamo con quella, che abbiamo considerata al n.° 32., avremo il di lei integrale così espresso

$$z_{x,y} = \frac{(-B)^{y-x}}{A^y} t^{-(t:B)} \cdot \frac{d^{y-x}\Sigma^{x}\left(-\frac{A}{B}\right)^y \int^y dt^y . e^{(t:B)} u_{x,y}}{dt^{y-x}}.$$

A questo valore di $z_{x,y}$, perchè sia completo, conviene aggiungere la quantità

$$\frac{(-B)^{y-x}}{A^y} e^{-t:B} \left(\frac{y(y-1)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-1)} \cdot \frac{d^{y-x}\Psi_{1,x}}{dt^{y-x}} + \frac{y\ldots(y-x+3)}{1\ldots(x-2)} \cdot \frac{d^{y-x}\Psi_{2,x}}{dt^{y-x}} \ldots + \frac{d^{y-x}\Psi_{x,x}}{dt^{y-x}} \right);$$

e per determinare la funzione $\Psi_{n,x}$ si sostituirà questa quantità in luogo di $z_{x,y}$ nella equazione proposta. Fatto ciò si troverà

$$\Psi_{1,x+1} = A1\Psi_{1,x} + B1\frac{d\Psi_{1,x}}{dt} + C1\frac{d^2\Psi_{1,x}}{dt^2};$$

$$\Psi_{n,x+1} = A1\Psi_{n,x} + B1\frac{d\Psi_{n,x}}{dt} + C1\frac{d^2\Psi_{n,x}}{dt^2} + D1\frac{d\Psi_{n-1,x}}{dt} + E1\frac{d^2\Psi_{n-1,x}}{dt^2};$$ ove $A1 = C - \frac{E}{B} + \frac{G}{B^2}$, $B1 = E - \frac{BD}{A} + \frac{F}{A} - \frac{2G}{B}$, $C1 = G - \frac{BF}{A}$, $D1 = F - \frac{BD}{A}$, $E1 = -\frac{BF}{A}$.

Questa ultima equazione è del terz' ordine, e per integrarla si potranno usare i metodi precedenti. Ma siccome il calcolo va divenendo sempre più complicato, porremo qui fine a queste ricerche, e piuttosto passeremo a mostrarne qualche uso nella Dottrina delle Serie.

ARTICOLO VI.

Dell' uso delle precedenti ricerche nella Teoria delle serie.

54. Abbiamo già veduto, che l' equazioni a differenze parziali finite ed infinitesime possono esser qualche volta utili per trovare la somma delle serie. Adesso proponghiamoci il problema seguente: data la serie infinita

$$\int^x dy^x \varphi(y,t,u) + ax\int^{x+1} dy^{x+1} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + a^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.}$$
$$+ bx\int^{x+1} dy^{x+1} \cdot \frac{d\varphi}{du} + 2ab\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dtdu} + \text{ec.}$$
$$+ b^2\frac{x(x+1)}{2}\int^{x+2} dy^{x+2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.},$$ ove le integrazioni so-

no

no fatte nella ipotesi di t ed u costanti, trovare la somma di questa serie.

Se la facciamo $= z_x$, avremo $\frac{dz_{x+1}}{dy} = \int^x dy^x \varphi$

$$+ a(x+1)\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} + a^2 \frac{(x+1)(x+2)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.}$$

$$+ b(x+1)\int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{du} + 2ab \frac{(x+1)(x+2)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt\,du} + \text{ec.}$$

$$+ b^2 \frac{(x+1)(x+2)}{2} \int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{du^2} + \text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{dt} = \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{dt} + a(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \text{ec.}$$

$$+ b(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt\,du} + \text{ec.}$$

$$\frac{dz_{x+1}}{du} = \int^{x+1} dy^{x+1} \frac{d\varphi}{du} + a(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{dt\,du} + \text{ec.}$$

$$+ b(x+1)\int^{x+2} dy^{x+2} \frac{d^2\varphi}{du^2} + \text{ec.}$$

Quindi sarà $\frac{dz_{x+1}}{dy} - a\frac{dz_{x+1}}{dt} - b\frac{dz_{x+1}}{du} = z_x$.

Per integrare questa ultima equazione ponghiamo $z_x = \alpha^x e^{\beta y + \gamma t + \delta u}$, ed avremo $\alpha\beta - a\alpha\gamma - b\alpha\delta = 1$, e prendendo da questa equazione il valore di β, avremo $\alpha^x e^{\beta y + \gamma t + \delta u} = \alpha^x e^{(1:\alpha)y + \gamma(t+ay) + \delta(u+by)} = \int^x dy^x . e^{(1:\alpha)y + \gamma(t+ay) + \delta(u+by)}$, purchè si prendano gl' integrali supponendo costanti $t+ay$, ed $u+by$; e quindi per il ragionamento più volte usato sarà nella medesima ipotesi $z^x = \int^x dy^x \Psi(y,t,u)$. Facendo $x = 0$ abbiamo $z_0 = \varphi(y,t,u) = \Psi(y,t,u)$, e di qui nasce il Teorema: la serie proposta è eguale al suo primo termine $\int^x dy^x \varphi(y,t,u)$, purchè si facciano le integrazioni nella ipotesi di $t+ay$, ed $u+by$ costanti. Questo Teorema è quel medesimo del n.° 21. generalizzato, e facilmente si vede, che può estendersi ad un numero qualunque di variabili.

53. Passiamo ad un problema di altro genere, che mostri l'uso delle cose esposte nella evoluzione delle funzioni in serie. Sia data una equazione $z=0$ tra le variabili x ed y, e sia da trovare il valore di una funzione u delle medesime variabili x ed y in una serie ordinata per le potenze di y.

L'equazione $z=0$, posta $y=0$, si ridurrà ad essere una equazione tra x e costanti, la quale risoluta ci darà varj valori di x. Sia a uno di questi valori, cioè sia $x-a$ uno dei fattori della funzione z, allorchè vi si pone $y=0$, ed A sia il prodotto degli altri fattori, che suppongo tutti diversi da $x-a$; è chiaro che si potrà dare alla equazione $z=0$ la forma $(x-a)A+\varphi=0$; essendo φ una funzione di x ed y, la quale svanisce, quando $y=0$. La funzione φ non avrà il fattore $x-a$, perchè se lo avesse, l'equazione $z=0$ si risolverebbe nelle due $x-a=0$, $A+\frac{\varphi}{x-a}=0$, le quali converrebbe considerare separatamente. Si può anche supporre, che la quantità a non entri in φ, perchè se ciò fosse, si potrebbe mettere un' altra lettera b in luogo di a, e si risolverebbe un problema più generale, e dopo terminate tutte le operazioni si farebbe $b=a$ per aver la soluzione del caso dato. Ciò posto, se, riguardando x come una funzione di a ed y data dalla equazione $(x-a)A+\varphi=0$, differenziamo la medesima equazione prima per rapporto ad a, e poi per rapporto ad y, avremo

$$A\frac{dx}{da}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{da}-A+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{da}=0,$$

$$A\frac{dx}{dy}+(x-a)\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=0;$$

e di qui dedurremo $\frac{dx}{dy}=-\frac{d\varphi}{Ady}\cdot\frac{dx}{da}=-\frac{dz}{Ady}\cdot\frac{dx}{da}$

perchè $\frac{d\varphi}{dy}=\frac{dz}{dy}$.

Se la funzione data u contenesse a, si potrebbe da essa eliminare ponendovi in luogo di a il suo valore $x+\frac{\varphi}{A}$ dedotto dalla equazione $z=0$; perciò si può supporre che a non sia contenuta in u. Per ridurre la funzione u in una serie ordinata per le potenze di y, bisogna cercare i differenziali di u presi per rapporto ad y, e per trovar questi siccome avrò bisogno di differenziare u relativamente ad y in due diverse maniere, mi servirò di due segni differenti;

cioè indicherò questo differenziale col segno $\frac{du}{dy}$, quando si considera x come funzione di y data dalla equazione $z=0$, e col segno $\left(\frac{du}{dy}\right)$, quando si riguardano x ed y come tra loro indipendenti. Sarà dunque $\frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)$ $-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{da}$; e siccome $P\frac{dx}{da}=\frac{d.\int Pdx}{da}$, allorchè nell' integrale $\int Pdx$ si suppone y costante, sarà in questa ipotesi

(1) $\frac{du}{dy}=\left(\frac{du}{dy}\right)-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{da}$. Questa equazione differenziata per rapporto ad y ci darà $\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{dy}$ $-\frac{d^2.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dz}dx}{dudy}$. Ma $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\frac{dx}{du}=-\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx}{da}$, e ponendo nella equazione (1) $\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx$ in luogo di u abbiamo $\frac{d.\int\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}dx}{dy}=\int\left[\frac{1}{A}\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)\frac{du}{dx}+\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\right]dx$ $-\frac{d.\int\frac{1}{A^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\frac{du}{dx}dx}{da}$. Quindi sostituendo questi valori avremo $\frac{d^2u}{dy^2}$ espresso nella forma seguente (2) $\frac{d^2u}{dy^2}=\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$ $+\frac{d.\int\alpha dx}{da}+\frac{d^2.\int\alpha' dx}{da^2}$. Differenziamo di nuovo l' equazione (2), ed otterremo $\frac{d^3u}{dy^3}=\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)+\left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dx}{dy}+\frac{d^3.\int\alpha dx}{dady}+$ $\frac{d^3.\int\alpha' dx}{da^2dy}$. Ma in vigore della equazione (1) si ritrova

$\frac{d.\int\alpha dx}{dy}=\int\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)dx-\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)\alpha dx}{da}$; $\frac{d.\int\alpha' dx}{dy}=\int\left(\frac{d\alpha'}{dy}\right)dx$

$$-\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)d'dx}{da};\ \left(\frac{d^3u}{dxdy^2}\right)\frac{dx}{dy}=-\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)(d^3u:dxdy^2)dx}{da}.$$

Pertanto il valore di $\frac{d^3u}{dy^3}$ avrà la forma $\frac{d^3u}{dy^3}=\left(\frac{d^3u}{dy^3}\right)$ $+\frac{d.\int\beta dx}{da}+\frac{d^2.\int\beta' dx}{da^2}+\frac{d^3.\int\beta'' dx}{da^3}$. Continuando ad operare nella medesima maniera troveremo in generale, che il valore di $\frac{d^nu}{dy^n}$ sarà della forma seguente (*a*) $\frac{d^nu}{dy^n}=\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right)$ $+\frac{d.\int Bdx}{da}+\frac{d^2\int B1dx}{da^2}+\frac{d^3.\int B2dx}{da^3}\ldots\ldots+\frac{d^n.\int B(n-1)dx}{da^n}$, ove converrà trovare le quantità B, B1, B2, ec.

Se chiamiamo B', B1', B2', ec. i valori di B, B1, B2, ec. quando n diventa $n+1$, avremo similmente (*b*) $\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}$ $=\left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)+\frac{d.\int B'dx}{da}+\frac{d^2\int B1'dx}{da^2}+\frac{d^3.\int B2'dx}{da^3}+$ ec. Ma l' equazione (*a*) differenziata ci dà $\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}=\left(\frac{d^{n+1}u}{dy^{n+1}}\right)$ $-\frac{d.\int(1:A)(dz:dy)(d^{n+1}u:dxdy^n)dx}{da}-\frac{d^2\int(B:A)(dz:dy)dx}{da^2}+$ ec. $+\frac{d.\int(dB:dy)dx}{da}+\frac{d^2\int(dB1:dy)dx}{da^2}+$ ec. Dunque paragonando questa con l' equazione (*b*) avremo la seguente serie di equazioni a differenze parziali finite e infinitesime $B'=\left(\frac{dB}{dy}\right)-\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$; $B1'=\left(\frac{dB1}{dy}\right)-\frac{B}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; $B2'=\left(\frac{dB2}{dy}\right)-\frac{B1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; ec. Se adesso osserviamo, che $\frac{d.\int Bdx}{da}=B\frac{dx}{da}$, otterremo (*c*) $\frac{d^nu}{dy^n}=\left(\frac{d^nu}{dy^n}\right)+B\frac{dx}{da}+$ $\frac{d.B1dx:da}{da}+\frac{d^2B2dx:da}{da^2}\ldots\ldots+\frac{d^{n-1}.B(n-1)dx:da}{da^{n-1}}$, ove nel secondo membro convien porre il valore di x in a ed y ricavato dalla equazione $z=o$.

Ma per svolgere la funzione u in una serie ordinata per le potenze di y, bisogna, com'è noto, trovare il valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$, quando $y=0$. Ora l' equazione $z=0$, allorchè $y=0$, ci dà $x=a$; dunque avremo il ricercato valore di $\frac{d^n u}{dy^n}$, nel caso di $y=0$, dalla equazione (c), se nel secondo membro porremo $y=0$ ed $x=a$. Per altra parte, siccome u e $\frac{dz}{dy}=\frac{d\phi}{dy}$, e in conseguenza le quantità B, B1, ec. non contengono a, facilmente si vede, che $\frac{d^r.B(r)dx:da}{da^r}$, ponendovi $x=a$, è lo stesso che $\frac{d^r.B(r)}{dx^r}$, se vi si pone $x=a$ dopo le differenziazioni. Sarà pertanto con questa condizione

$$\frac{d^n u}{dy^n}=\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)+B+\frac{dB1}{dx}+\frac{d^2.B2}{dx^2}\ldots+\frac{d^{n-1}.B(n-1)}{dx^{n-1}}.$$

Allorchè si fa $x=a$ dopo le differenziazioni, è sempre

$$\frac{d^{n-1}(x-a)^r P}{dx^{n-1}}=(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(n-r)\frac{d^{n-r-1}P}{dx^{n-r-1}};$$

dunque avremo eziandio l' equazione $\frac{d^n u}{dy^n}=\left(\frac{d^n u}{dy^n}\right)+$

$$\frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1}+b1(x-a)^{n-2}+b2(x-a)^{n-3}\ldots+b(n-1)]}{dx^{n-1}},$$

ove $b=\frac{B}{1.2\ldots(n-2)}$; $b1=\frac{B1}{2.3\ldots(n-1)}$; $b2=\frac{B2}{3.4\ldots(n-1)}$; ec.: cioè avranno luogo tra b, $b1$, $b2$, ec. le seguenti equazioni $nb'=\left(\frac{db}{dy}\right)-\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$;

$nb1'=\left(\frac{db1}{dy}\right)-\frac{b}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; $nb'2=\left(\frac{db2}{dy}\right)-\frac{2b1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$;

$nb3'=\left(\frac{db3}{dy}\right)-\frac{3b2}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)$; ec.

Consideriamo adesso la quantità $\frac{Ab}{z}+\frac{A^2b1}{z^2}+\frac{A^3b2}{z^3}+\frac{A^4b3}{z^4}\ldots+\frac{A^nb(n-1)}{z^n}$; la quale, se riguardiamo x

come costante, è una funzione di n ed y, che chiameremo $S_{n,y}$. Ponendovi $n+1$ in luogo di n avremo $S_{n+1,y}$ $= \frac{Ab'}{z} + \frac{A^2b1'}{z^2} + \frac{A^3b2'}{z^3} + \frac{A^4b3'}{z^4} +$ ec.; e sostituendovi i valori di b', $b1'$, ec. ricavati dall' equazioni precedenti, sarà $S_{n+1,y} = -\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) + \frac{1}{n}.\frac{A(db:dy)}{z}$ $+ \frac{1}{n}.\frac{A^2(db1:dy)}{z^2}. +$ ec. $- \frac{1}{n}Ab\left(\frac{dz}{z^2dy}\right) - \frac{2}{n}A^2b1\left(\frac{dz}{z^3dy}\right)$ $- \frac{3}{n}A^3b2\left(\frac{dz}{z^4dy}\right) -$ ec. Ma la quantità $S_{n,y}$ differenziata per rapporto ad y ci dà $\frac{dS_{n,y}}{dy} = \frac{A(db:dy)}{z} + \frac{A^2(db1:dy)}{z^2}$ $+ \frac{A^3(db2:dy)}{z^3} +$ ec. $- Ab\left(\frac{dz}{z^2dy}\right) - 2A^2b1\left(\frac{dz}{z^3dy}\right)$ $- 3A^3b2\left(\frac{dz}{z^4dy}\right) -$ ec. Quindi avremo $S_{n+1,y} = \frac{1}{n}.\frac{dS_{n,y}}{dy}$ $- \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$, l' integrale della quale è (5)

$$S_{n,y} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}.\frac{d^n[\Phi.y - \Sigma\int^{n+1}dy^{n+1}(dz:zdy)(d^{n+1}u:dxdy^n)]}{dy^n}.$$

Per render questo valore più semplice, liberandolo dal segno integrale Σ, facciasi $\Sigma\int^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$ $= \int^n dy^n.P_{n,y}.Q$, nella quale $P_{n,y}$ è funzione di n ed y, e Q funzione di y; e prendendo la differenza finita avremo $\int^{n+1}dy^{n+1}\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) = \int^{n+1}dy^{n+1}.P_{n+1,y}.Q - \int^n dy^n.P_{n,y}.Q$ $= \int^{n+1}dy^{n+1}\left(P_{n+1,y}.Q - P_{n,y}.\frac{dQ}{dy} - Q\frac{dP_{n,y}}{dy}\right)$. Quindi sarà $\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) = Q\left(P_{n+1,y} - \frac{dP_{n,y}}{dy}\right) - P_{n,y}.\frac{dQ}{dy}$; e se facciamo $P_{n+1,y} - \frac{dP_{n,y}}{dy} = 0$, cioè $P_{n,y} = \frac{d^n\Psi.y}{dy^n}$ otterremo

$\left(\frac{dz}{zdy}\right)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right) = -\frac{d^n\Psi.y}{dy^n}.\frac{dQ}{dy}$; alla qual' equazione si soddisfà prendendo $\Psi.y = \frac{du}{dx}$, e $-\frac{dQ}{dy} = \frac{dz}{zdy}$, cioè $Q = C - \log.z$. Sostituendo questi valori, quello di S_{nn} diventerà $S_{nn} = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{d^n\varphi.y}{dy^n} - (C - \log.z)\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]$.

Per determinare la funzione arbitraria $\varphi.y$, facciamo $n=1$, ed avremo $S_{nn} = \frac{d\varphi.y}{dy} - (C - \log.z)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \frac{Ab}{z}$; ma quando $n=1$, è $b = -\frac{1}{A}\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{du}{dx}$; dunque sarà $\frac{d\varphi.y}{dy} = -\left(\frac{dz}{zdy}\right)\frac{du}{dx} + (C - \log.z)\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, e $\varphi.y = c + C\frac{du}{dx} - \frac{du}{dx}\log.z$. Avremo dunque $\frac{Ab}{z} + \frac{A^2b_1}{z^2} + \frac{A^3b_2}{z^3} + \text{ec.} = -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[\left(\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}\right) - \log.z\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]$, e ponendo $y=0$, poichè $z=(x-a)A+\varphi$, sarà $\frac{b}{x-a} + \frac{b_1}{(x-a)^2} + \frac{b_2}{(x-a)^3} + \text{ec.} = -\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\left[\left(\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}\right) - \log.z\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\right]$; e moltiplicando per $(x-a)^n$, e differenziando $n-1$ volte per rapporto ad x, sarà $\frac{d^{n-1}[b(x-a)^{n-1} + b_1(x-a)^{n-2} + \text{ec.}]}{dx^{n-1}}$

$$= -\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}} + \frac{d^{n-1}(x-a)^n\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)\log.z}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Ma siccome dopo le differenziazioni si deve fare $x=a$, si potrà omettere il termine $\frac{d^{n-1}(x-a)^n\log.z(d^{n+1}u:dxdy^n)}{1.2\ldots(n-1)dx^{n-1}}$, il quale è sempre $=0$. In fatti siccome $\left(\frac{d^{n+1}u}{dxdy^n}\right)$ non diventa infinita facendovi $x=a$, il termine precedente sarà della forma

$[Q(x-a)+Q_1(x-a)^2 \ldots\ldots + Q_{n-1}(x-a)^n]\log.(x-a)$
$+ R(x-a)+R_1(x-a)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + R_{n-1}(x-a)^n$,
ove i coefficienti Q, Q_1, ec. R, R_1, ec. non saranno infiniti quando $x=a$. Ora questa quantità è visibilmente $=0$ nel caso di $x=a$, perchè è noto che in questo caso $(x-a)^r\log.(x-a)=0$, quando r è un numero intero positivo. Quindi finalmente nel caso di $y=0$ sarà $\frac{d^n u}{dy^n}=\frac{d^n u}{dy^n}$
$-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{dy^n}}{1.2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}$, ove nel secondo membro si riguarderanno le variabili x ed y come tra loro indipendenti, e si farà $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. E se chiamiamo q_n il coefficiente del termine y^n nella serie, che nasce dallo sviluppo di u, sarà, con queste condizioni $q_n=\frac{d^n u}{1.2\ldots n dy}$
$-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z}{1.2\ldots n dy^n}}{1.2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}$.

Una simil serie si troverà per esprimere u, qualunque altro fattore si assuma della quantità z, allorchè $y=0$; ma perchè la cosa riesca, conviene che tutti questi fattori siano diseguali. Infatti abbiamo supposto nei calcoli precedenti, che A non contenga altri fattori eguali ad $x-a$. Ma nel caso che vi siano più fattori eguali espressi da $(x-a)^i$, la quantità z si potrà risolvere in i fattori z', z'', z''' ec., ciascuno de' quali avrà la forma $(x-a)A'+\varphi'$, ove A' non contenga più il fattore $x-a$, e φ' sia una funzione di x ed y, che svanisca quando $y=0$; e ciascuno dei fattori z', z'', ec. ci darà per coefficiente di y^n nella serie di u la quantità

$$\frac{d^n u}{1.2\ldots n dy^n}-\frac{d^{n-1}(x-a)^n\frac{d^n.(du:dx)\log.z'}{1.2\ldots\ldots n dy^n}}{1.2\ldots\ldots(n-1)dx^{n-1}}.$$

Se adesso prendiamo il medio aritmetico tra tutte queste i serie che nascono dai fattori z', z'', ec., e chiamiamo q_n il coefficiente di y^n in questa serie media, avremo

q_n

$$q_n = \frac{d^n u}{1.2...ndy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n . \frac{d^n . \frac{du}{dx}(\log.z' + \log.z'' + \log.z''' + \text{ec.})}{1 . 2 . . . . . ndy^n}}{1 . 2 . . . . . dx^{n-1}};$$

cioè, a motivo di $\log. z' + \log.z'' + \log.z''' + \text{ec.} = \log.z$,

$$q_n = \frac{d^n u}{1 . 2 . . . ndy^n} - \frac{d^{n-1}(x-a)^n . \frac{d^n . \frac{du}{dx}\log.z}{1 . 2 . . . ndy^n}}{1 . 2 . . . (n-1)idx^{n-1}},$$ posto, come sopra, $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y, ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

Questo Teorema è stato dato senza dimostrazione dal sommo Geometra *Laplace* nelle Memorie dell'Accademia di Parigi dell'anno 1777., per trovare il coefficiente di y^n nella serie, che nasce dal fattore $(x-a)^i$. Noi lo avevamo già dimostrato nel Tomo IV. della Società Italiana, ma la dimostrazione precedente è assai più diretta.

Dalle cose precedenti apparisce, che il Teorema è vero, quando $i=1$; ma quando $i>1$, q_n non esprime che il coefficiente di y^n nella serie, che è il medio aritmetico tra tutte quelle le quali rappresentano il valore di u dipendentemente dal fattore $(x-a)^i$. Ma questa serie media non ci dà il valore esatto di u, perchè con essa non si soddisfà alla equazione $z=0$, cioè non si assume tra x ed y quel rapporto, che è dato da questa equazione.

Per mostrar ciò con un esempio semplicissimo, si prenda l'equazione $(x-a)^2 - y^2(b+cx)^2 = 0$, e si voglia svolgere il valore di x in una serie ordinata per le potenze di y. Saranno $x-a-y(b+cx)$, $x-a+y(b+cx)$ i due fattori della quantità z, e questi fattori ci daranno le due serie

$$x = a + (ac+b)y + c(ac+b)y^2 + c^2(ac+b)y^3 + \text{ec.}$$
$$x = a - (ac+b)y + c(ac+b)y^2 - c^2(ac+b)y^3 + \text{ec.}$$

ciascuna delle quali soddisfà all'equazione $z=0$. Se prendiamo di queste due serie il medio aritmetico, avremo quella serie, che ci dà il Teorema di *Laplace*, cioè

$$x = a + c(ac+b)y^2 + c^3(ac+b)y^4 + \text{ec.}$$

ma questa non soddisfà alla equazione $z=0$.