MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA.

TENTATIVO SUL PROBLEMA DELLE PRESSIONI, CHE SOFFRONO GLI APPOGGI COLLOCATI AGLI ANGOLI DI UNA FIGURA, DERIVATE DA UN PESO POSTO DENTRO LA SUA AJA.

DI FRANCESCO MALFATTI.

Ricevuta li 18. Dicembre 1798.

1. TOrna ora in campo un Problema, su cui hanno inutilmente versato le indagini de' più sublimi Geometri: che ha costretto il grande Eulero per presentarne una soluzione a ricorrere nel Tomo decimo ottavo de' nuovi Commentarii di Pietroburgo ad una ipotesi affatto arbitraria, anzi ridotta all' assurdo dal Ch. Paoli nel Tomo sesto delle Memorie della Società Italiana: che ha fatto dire al celebre d' Alembert nel Tomo quinto de' suoi Opuscoli non potersi colle sole note leggi della Statica risolvere fuorchè in un caso particolare, e a Bossut nel Tomo pri-

mo del suo Trattato di Meccanica, che, eccettuato quel caso, rimane esso pel Geometra un Problema indeterminato: le soluzioni del quale finalmente date, non ha molto, dal dotto Paolo Delanges e dal Lorgna ne' Tomi quinto e settimo della suddetta nostra Società non hanno forzato l'assenso e l'approvazione della Repubblica Matematica: cosicchè considerasi sino a quest' ora come Problema non risoluto. Malgrado il ritegno che dovea pur farmi un' impresa ad altri sì mal riuscita, non mi sono scoraggito, ed ho voluto tentare il Problema per una via forse non calcata da alcuno, la quale a me è sembrata l'unica per arrivare a qualche certa conclusione. Merita l'argomento, che non sia abbandonato, perchè utile all' Architettura e perchè per la sua difficoltà si è reso famoso. Se io non vado errato ne' miei raziocinj, i quali sottopongo all' esame e alla decisione degl' Intendenti, mi compiacerò della mia fortuna nell' avere incontrato quel metodo che possa esser considerato come equivalente all' economia e al magistero della Natura nella distribuzione delle sue forze. In caso contrario, sul riflesso che de' Tifi di me più esperti hanno rotto in questo scoglio, voglio sperare, che traendo origine i miei tentativi dal desiderio di esser utile alla Statica col dilatarne i confini, non mi sarà recato a vergogna di avere col mio ardimento accresciuto il numero de' naufragj Matematici.

2 Il Problema è questo: Dato un peso situato dentro l'aja di un piano rettilineo orizzontale, e sostenuto negli angoli da appoggj immobili e in direzion verticale; determinare la quantità di pressione, che soffre ciascuno de' detti appoggj. Per maggior facilità si suppone il piano senza massa e il corpo pesante concentrato nel suo centro di gravità, la direzion della quale segni nel piano medesimo un punto animato e premente, da cui derivano agli appoggj le respettive pressioni. Se questi son tre non collocati tutti in una sola retta, cosicchè il piano sia un triangolo, il Problema riceve una facile soluzione, o si proceda col metodo de' momenti, riferendo il peso e gli appoggj a tre diversi piani di rotazione situati arbitrariamente, come hanno fatto i mentovati Geometri Delanges e Paoli, o piaccia piuttosto di valersi del sistema de' vetti comunicanti sulle traccie del

Bossut e dell' Eulero. Ma se tutti e tre gli appoggj sono disposti in una sola retta, sulla qual pure sia il peso, il Problema, di determinato ch' egli era, diventa indeterminato, nè v' è stato modo di conoscere la vera misura delle pressioni, onde ciascuno d' essi è caricato. Indeterminato pure si è concluso esser quello de' quattro appoggj o collocati o non collocati in linea retta, e maggiormente indeterminato se si fa crescere il numero di questi appoggj.

3 Daremo un esempio della indeterminatezza del Problema nella figura quadrilatera AEFC (Fig. I), ove il lato AC è parallelo all' opposto EF, e gli altri lati AE, FC tra loro eguali sono egualmente inclinati sulla AC. Divisa per metà in O la AC, si ecciti la OQ perpendicolare ai lati paralleli, si intenda collocato il peso in un punto P della OQ, e i quattro appoggj in A, E, F, C, ai quali si guidin le rette PA, PE, PF, PC. In questa figura, che Pappo chiama un bomisco, deve aversi equilibrio tra le forze derivate da P agli appoggj per qualunque verso. Il perchè, stabiliti quattro assi di rotazione, ciascun de' quali sia normale alla sua distanza da P e passi per il punto d' appoggio, coll' ajuto del teorema Statico de' momenti avrem quattro equazioni, le quali vedrem quanto servono per la determinazione delle pressioni, che chiamo A, E, F, C. Comincio dall' appoggio A. Ad AP sia normale l' asse di rotazione DH, su cui cadano le perpendicolari EH, FG, CD, e congiungo FA. Pongo AP = PC = a, PE = PF = b, sen.APO = sen.k, sen.EPQ = sen.h. Quindi nasce sen.EPA = sen.$(h+k)$, cos.EPA = — cos.$(h+k)$, sen.EPF = sen.$2h$, cos.EPF = cos.$2h$, sen.APF = sen.$(k-h)$, cos.APF = — cos.$(k-h)$. Inoltre, posto r il Raggio, sarà sen.PAF = $\frac{b\,\text{sen.}(k-h)}{\text{AF}}$, cos.PAF = $\frac{ar+b\cos.(k-h)}{\text{AF}}$ = sen.FAG. Ma r : sen.FAG : : AF : FG. Dunque avremo FG = $\frac{ar+b\cos.(k-h)}{r}$. Si ha pure sen.PAE = $\frac{b\,\text{sen.}(k+h)}{\text{AE}}$, cos.PAE = $\frac{ar+b\cos.(k+h)}{\text{AE}}$ = sen.EAH; ed essen-

do r : sen.EAH : : AE : EH, analiticamente risulta EH $= \frac{ar + b\cos.(k+h)}{r}$. Così, perchè sen.PAO $= \cos.k$, sen.CAD $=$ sen.k, di più AO $= \frac{a\,\text{sen}.k}{r}$, e AC $= \frac{2a\,\text{sen}.k}{r}$; sarà CD $= \frac{2a(\text{sen}.k)^2}{r^2}$. Ma per la legge de' momenti; E.EH + F.FG + C.CD = AP, chiamato 1 il peso P. Dunque colle sostituzioni de' trovati valori si avrà la prima equazione:

$$Er\left(ar + b\cos.(k+h)\right) + Fr\left(ar + b\cos.(k-h)\right) + 2Ca(\text{sen}.k)^2 = ar^2.$$

Siccome poi C è analogo ad A, ed F ad E, se immaginiamo un secondo asse di rotazione perpendicolare a CP, si vede chiaro che nel bomisco dev' essere la seconda equazione de' momenti:

$$Fr\left(ar + b\cos.(k+h)\right) + Er\left(ar + b\cos.(k-h)\right) + 2Aa(\text{sen}.k)^2 = ar^2.$$

4 Il terzo asse di rotazione attorno ad E sia TM perpendicolare a PE, e su d' esso cadano le normali AT, CL, FM, e si conduca CE. Si vede a un tratto essere l' angolo EPC = all' angolo APF, e quindi sen.EPC = sen.$(k-h)$, cos.EPC $= -\cos.(k-h)$, onde sen.PEC $= \frac{a\,\text{sen}.(k-h)}{\text{CE}}$, ed inoltre cos.PEC $= \frac{br + a\cos.(k-h)}{\text{CE}} =$ sen.CEL; e perchè r : sen. CEL : : CE : CL, sarà CL $= \frac{br + a\cos.(k-h)}{r}$. Così r : sen.h : : b : EQ $= \frac{b\,\text{sen}.h}{r}$; che dà EF $= \frac{2b\,\text{sen}.h}{r}$. Ma è l' angolo FEM = EPQ, e vale l' analogia PE : EQ : : EF : FM. Dunque FM $= \frac{2b(\text{sen}.h)^2}{r^2}$. Oltracciò sen.PEA:

$= \frac{a \text{ sen.}(k+h)}{AE}$, $\cos.PEA = \frac{br + a\cos.(k+h)}{AE} =$ sen.AET; ed essendo r : sen.AET : : AE : AT, abbiamo $AT = \frac{br + a\cos.(k+h)}{r}$. Ora il canone de' momenti esige, che sia $A \cdot AT + C \cdot CL + F \cdot FM = PE$. Sicchè avrem la terza equazione:

$$Ar\left(br + a\cos.(k+h)\right) + Cr\left(br + a\cos.(k-h)\right) + 2Fb(\text{sen.}h)^2 = br^2.$$

E per la ragione che nel bomisco F, C sono analoghi ad E, A, anche pel quarto asse attorno a F sarà pronta l'equazione quarta

$$Cr\left(br + a\cos.(k+h)\right) + Ar\left(br + a\cos.(k-h)\right) + 2Eb(\text{sen.}h)^2 = br^2.$$

5 Poste in ordine le nostre quattro equazioni, sono esse le seguenti:

1.ª $Er\left(ar + b\cos.(k+h)\right) + Fr\left(ar + b\cos.(k-h)\right) + 2Ca(\text{sen.}k)^2 = ar^2$;

2.ª $Er\left(ar + b\cos.(k-h)\right) + Fr\left(ar + b\cos.(k+h)\right) + 2Aa(\text{sen.}k)^2 = ar^2$;

3.ª $Ar\left(br + a\cos.(k+h)\right) + Cr\left(br + a\cos.(k-h)\right) + 2Fb(\text{sen.}h)^2 = br^2$;

4.ª $Ar\left(br + a\cos.(k-h)\right) + Cr\left(br + a\cos.(k+h)\right) + 2Eb(\text{sen.}h)^2 = br^2$.

Ora osservando che è $r\left(\cos.(k+h) + \cos.(k-h)\right) = 2\cos.k\cos.h$, sommate le due prime, poi le due ultime, e dividendo per due le 2 somme si ottiene $(E+F)(ar^2 + b\cos.k\cos.h) + a(A+C)(\text{sen.}k)^2 = ar^2$; $(A+C)(br^2 + a\cos.k\cos.h) + b(E+F)(\text{sen.}h)^2 = br^2$.

Dunque sarà $E + F = \frac{ar^2 - (A + C)\, a\, (\text{sen}.k)^2}{ar^2 + b \cos.k \cos.h} =$

$\frac{br^2 - (A + C)(br^2 + a \cos.k \cos.h)}{b\,(\text{sen}.h)^2}$; e quindi poi

$(A+C)\Big(-ab\,(\text{sen}.h)^2\,(\text{sen}.k)^2 + abr^4 + ab\,(\cos.k)^2\,(\cos.h)^2$
$+ a^2 r^2 \cos.k \cos.h + b^2 r^2 \cos.k \cos.h\Big) = abr^4 +$
$b^2 r^2 \cos.k \cos.h - abr^2(\text{sen}.h)^2$; ove fatte le riduzioni,
$(A + C)\Big(abr^2(\cos.h)^2 + abr^2(\cos.k)^2 + a^2r^2\cos.k\cos.h$
$+ b^2 r^2 \cos.k \cos.h\Big) = abr^2\,(\cos.h)^2 + b^2 r^2 \cos.k \cos.h$;
cioè, dopo la divisione pel fattor comune $ar^2 \cos.h +$
$br^2 \cos.k$, sarà $(A + C)(a\cos.k + b\cos.h) = b \cos.h$,
ossia $A + C = \frac{b \cos.h}{a \cos.k + b \cos.h}$; e questo valore
ci fa conoscer l' altro $E + F = \frac{a \cos.k}{a \cos.k + b \cos.h}$.

Introdotto il valor di C dato per A, e quel di F dato per E con queste due ugualità finali nelle quattro formole dei momenti, le troverem tutte identiche, e concluderemo, che il quarto piano di rotazione, di cui ci siamo serviti, è affatto inutile pe 'l ritrovamento della quarta pressione, il che rende incognite tutte le altre, e lascia pe 'l Geometra, che non si vale d' altro principio che di quel de' momenti, il Problema delle pressioni indeterminato.

6 Ma per rimovere quest' inciampo, perchè non chiamerem noi in soccorso l' assioma fisico; che le operazioni della Natura, posta in circostanze per ogni verso eguali, sono eguali? Questo principio di per se luminoso ed evidente ci si offre spontaneamente nel nostro bomisco. Rispetto al punto P gli appoggj in A e in C son collocati a distanze eguali, le quali o colla perpendicolare QPO, o colla EF, o coi lati EA, FC costituiscono di quà e di là eguali

li angoli; il che dee pur dirsi di P riferito alle eguali distanze AP, PC che egualmente s' inclinano sul lato AC, e sui lati stessi AF, FC. Dunque qualunque sia l' influenza, che le pressioni derivate da P agli appoggj in E, F aver possano sul quantitativo delle altre che vengono distribuite in A, C, non v' è ragion sufficiente per asserire che indur possa disuguaglianza tra queste pressioni; il che vuolsi dire egualmente rispetto alle pressioni in E, F, che devon' essere tra loro eguali. Onde, fatto $C = A$, $F = E$, il problema, indeterminato coll' uso dell' unica legge dei momenti, combinato col principio dell' indifferenza contenuto nel nostro assioma diventa effettivamente determinato; poichè si ottiene $A = \frac{b \cos.h}{2(a \cos.k + b \cos.h)} = C$; $E = \frac{a \cos.k}{2(a \cos.k + b \cos.h)} = F$. Se il bomisco si trasforma in un quadrato, che abbia il peso P nel centro della figura, come si può egli negare, che ciascun appoggio venga caricato della 4.ª parte del peso totale? Ora questa appunto è la conseguenza che si deduce dalle formole modificate all' ipotesi di tale trasformazione. Perchè allora si fa $h = k$, $b = a$, e diventa $A = C = E = F = \frac{1}{4}$, come ci suggerisce la ragione.

7 Non si speri per altro di trar vantaggio dal principio della ragion sufficiente associato alla dottrina de' momenti, in tutte le figure e in tutte le collocazioni del peso P. Esso si occulta quasi sempre agli occhi del Geometra; anzi nel bomisco medesimo o nel quadrato, se P è fuor della retta QO che divide per mezzo la figura, ritorniamo un' altra volta all' oscuro, nè sappiam per ora diradar le tenebre che circondano il problema.

8 Queste tenebre non comprendon però nel loro recinto la Figura triangolare qualunque AEC (Fig. 2), dovunque sia posto, purchè dentro l' aja, il peso P. La ragione si è, che 3 sole sono le distanze di P dagli appoggj, e per conseguenza 3 i piani di rotazione ai quali si può riferire lo stesso punto, dai quali risultano 3 equazioni, che non contengono niente d' identico e servono a ritrovare le 3

pressioni. Per il quadrilatero ci è forza di ricorrere al 4.° piano, e per ciò appunto il problema è indeterminato; su di che sarà bene leggere la eccellente general dimostrazione, che dà il nostro celebre Socio Paoli nel precitato VI Tomo, della impossibilità di schivare le equazioni identiche, ove un punto di una figura si riferisca a più di 3 piani di rotazione.

9 Sono note a tutti i Geometri le pressioni, onde son caricati gli appoggj A, E, C nel triangolo (Fig. 2) derivanti dal peso P; e fatto $AP = a$, $PE = b$, $PC = c$, sen.APE $=$ sen.i, sen.EPC $=$ sen.l, che fa essere sen.APC $= -$ sen.$(i + l)$, si sa che son verissime le 3 seguenti equazioni; Press. in $A = \frac{bc \text{ sen.} l}{ab \text{ sen.} i - ac \text{ sen.}(i+l) + bc \text{ sen.} l}$; Pr. in $E = -\frac{ac \text{ sen.}(i+l)}{ab \text{ sen.} i - ac \text{ sen.}(i+l) + bc \text{ sen.} l}$; Pr. in $C = \frac{ab \text{ sen.} i}{ab \text{ sen.} i - ac \text{ sen.}(i+l) + bc \text{ sen.} l}$, nelle quali sarà bene avvertire, che i numeri delle pressioni in A, E, C vengono formati dal prodotto de' due lati che sono in opposizione al punto ov' è la pressione, moltiplicato nel seno dell' angolo da essi compreso, essendo il denominator comune la somma di tutti i numeratori. Nel triangolo poi AEC, o in qualunque altra figura chiamerem da quì innanzi P il centro delle pressioni o semplicemente il *centro*; gli angoli fatti dalle distanze, aventi il vertice comune nel centro, angoli *centrali*; e detratti quegli angoli centrali, i quali hanno per lato comune la distanza del centro dal punto di ciascuna pressione, denominerem tutti gli altri centrali, angoli *opposti*. Così nel triangolo AEC relativamente alla pressione in A, l' angolo opposto è l' unico angolo EPC, e rispetto alle altre in E, C gli angoli opposti sono APC, APE. Ma nel bomisco (Fig. I), riguardo all' appoggio A, gli angoli opposti son tre, EPF, FPC, EPC; e a C corrispondono i 3 angoli opposti APE, EPF, APF, &c. Oltracciò essendo nella Fig. 2 tre le distanze del centro dagli appoggj espresse coi simboli a, b, c, ed avendosi ne' numeratori delle pressioni i tre prodotti, ab per C, ac per E, bc per A, chiamerem questi prodotti gli *ambi* delle distanze; e se quattro

saran le distanze, come accade nel quadrilatero, che siano a, b, c, d, e risultino nel calcolo i prodotti abc, abd, acd, bcd, li chiameremo i *terni* delle distanze. Così le *quaderne*, le *cinquine*, &c., se 4, 5, &c. distanze si coalizzino a formarle.

10 Un' altra riflessione ci sarà molto utile, ed è, che nel triangolo in vece della legge statica de' momenti, che c' impegna in lungo e laborioso calcolo, possiamo adoperar la legge dei vetti semplici, che da quella deriva, o la fa derivare. Ma non è già vero, che qualunque retta, la quale passi per il peso P, come MPN, possa far figura di vette, che diremo in appresso vette *primario*, onde combinato esso cogli altri vetti ANC, AME, cui darem nome di vetti *comunicanti*, ci faccia conoscere le vere pressioni della Natura. I vetti primarj che ce le fanno ottenere, sono le rette, che congiungono gli appoggj col centro e terminano ai lati opposti, come APT, EPO, CPS. Per esempio, coll' assumere per vette primario la EPO, chiamato al solito 1 il peso P, risulta, usando del canone de' vetti semplici, Press. in $A = \frac{EP}{EO} \cdot \frac{CO}{AC}$; Press. in $E = \frac{PO}{EO}$, Pr. in $C = \frac{EP}{EO} \cdot \frac{AO}{AC}$; ed equivalenti pressioni avremo, se ci varremo di ciascun degli altri vetti primarj APT, CPS; il che è conforme alle dimostrazioni di quasi tutti i Geometri, che trattano del nostro argomento. Così nel bomisco (Fig. 1) non qualunque retta, che passi per P e termini ai lati, ha la proprietà di guidarci alle giuste pressioni; ma sibbene la QPO, o la SPI normale alla QO. Colla 1ª, poichè $PQ = \frac{b \cos.h}{r}$; $PO = \frac{a \cos k}{r}$; $QO = \frac{b \cos.h + a \cos.k}{r}$; $\frac{CO}{AO} = \frac{1}{2} = \frac{AO}{CO}$; $\frac{QF}{EF} = \frac{1}{2} = \frac{EQ}{EF}$, ci nasce, per la legge de' vetti semplici, Press. in $A = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC} = \frac{b \cos.h}{2(a \cos.k + b \cos.h)}$ = Pr. in C; Pr. in $E = \frac{PO}{QO} \cdot \frac{QF}{EF} = \frac{a \cos.k}{2(a \cos.k + b \cos.h)}$ = Pr. in F, come al n. 6. Colla 2.ª, per ragion delle parallele SI, SF, si fa

$\frac{PQ}{QO} = \frac{ES}{AE}$; $\frac{PO}{QO} = \frac{AS}{AE}$; $\frac{PI}{SI}$ o $\frac{SP}{SI} = \frac{1}{2}$; ed abbiamo Pr. in A $= \frac{PI}{SI} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{b \cos.h}{2(a \cos.k + b \cos.h)} =$ Pr. in C; Pr. in E $= \frac{PI}{SI} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{a \cos.k}{2(a \cos.k + b \cos.h)}$; espressioni identiche colle precedenti.

11 L'analogia, che sarà sempre la nostra guida, ci fa dunque conoscere, che nel triangolo, nel bomisco, e se si vuol, nel quadrato e nel rettangolo, quando in queste 3 ultime figure il peso sia nella retta che divide per metà i lati paralleli, dipendendo la posizione del vette primario e de' vetti comunicanti dal modo con cui divider si debbono gli angoli centrali APC, APE &c., qualora intraprender si voglia la soluzione generale del problema delle pressioni, sarà necessario sapere per qualunque figura, in qual proporzione debbansi dividere questi angoli, e come coll' ajuto de' punti S, T, O, &c. ne' lati ove terminano le linee dividenti, si possano stabilire i sistemi de' vetti, che danno le vere pressioni della Natura.

12 L'indagine è scabrosa e difficile, nè a primo colpo d'occhio v'ha raggio di speranza alcuna per ben riuscir nell' impresa. Pur tuttavia il principio metafisico della ragion sufficiente mi suggerisce, che potrebbe per avventura essere utilmente adoprato nelle figure ordinate e regolari, quando il peso è collocato nel centro della figura, mentre tale ipotesi induce la necessità, che a ciascun angolo ove sono gli appoggj, essendo essi di numero n, abbiavi la pressione $\frac{1}{n}$. Stabilita questa inconcussa verità, perchè dovrem noi disperare, ora tentando una via, ora un' altra, di imbatterci finalmente in quella, che ci fa con metodo generale determinare le posizioni e grandezze de' vetti primarj non che quelle de' vetti comunicanti, i quali trasferiscono a ciascun angolo la suddetta quantità di pressione? E trovato ciò, trarrem forse di là qualche lume per poter salire dalle figure ordinate alle omonime irregolari, e compiere in esse eziandio le competenti distribuzioni. Dopo molti errori itinerarj una strada finalmente mi si è presentata, che

mi guida diritto al mio scopo, e la quale per la sua generalità e semplicità, quanto il può permettere un sì difficil problema, ha tutti i caratteri di equivalenza alla vera legge fisica delle pressioni. Io andrò esponendo di mano in mano i miei pensamenti; ma comincierò dal premettere alcune verità puramente geometriche, che serviranno ad agevolarci i calcoli necessarj per la soluzione de' susseguenti problemi.

LEMMA I.

13 In qualunque triangolo ABC (Fig. 3), preso dentro l' aja un punto P, e dagli angoli ai lati opposti condotte per P le rette BPD, APN, CPM; sarà

1.° $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{PN}{AN}$.

Si guidi sino alla AN la DQ parallela a BC, e avrassi: PB : BD : : PN : NQ, cioè $\frac{BP}{BD} = \frac{PN}{NQ}$. Di più AC : CD : : AN : NQ, ossia $\frac{CD}{AC} = \frac{NQ}{AN}$. Dunque $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{PN}{NQ} \cdot \frac{NQ}{AN} = \frac{EN}{AN}$.

2.° $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{PM}{CM}$.

Conducendo sino a CM la DL parallela ad AB, si ha tosto $\frac{PB}{BD} = \frac{PM}{ML}$, e ancora $\frac{AD}{AC} = \frac{ML}{CM}$. Onde $\frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{PM}{ML} \cdot \frac{ML}{CM} = \frac{PM}{CM}$.

3.° $\frac{AP}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$.

La NO, che va alla CM, sia parallela ad AB; il che fa essere $\frac{AP}{AN} = \frac{PM}{MO}$; $\frac{BN}{BC} = \frac{MO}{CM}$; e quindi $\frac{AP}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{PM}{CM}$.

Ma (2.°) $\frac{PM}{CM} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$. Dunque $\frac{AP}{AN} \cdot \frac{BN}{BC} = \frac{PB}{BD} \cdot \frac{AD}{AC}$.

4.° $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$.

Vada alla AN, se occorre, prodotta la BV parallela ad AC, e nasce $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AV} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{AN}{AV}$; $\frac{AN}{AV} = \frac{CN}{BC}$.

E però $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$.

5.° $\frac{PD}{BD} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AB}$.

La MK parallela ad AC incontri in K la BD, e sarà $\frac{AM}{AB} = \frac{DK}{DB}$; Perchè poi son simili i triangoli MPK, DPC, è $\frac{CP}{CM} = \frac{DP}{DK}$. Laonde $\frac{DP}{DK} \cdot \frac{DK}{DB} = \frac{PD}{BD} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AB}$. Di più (4.°) $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$. Dunque è ancora $\frac{CP}{CM} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$.

6.° $\frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{BM}{AB}$.

Si faccian simili i triangoli APH, CPN col tirare la AH parallela a BC; e abbiamo $\frac{PN}{AN} = \frac{CP}{CH} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{CM}{CH}$. Ma son pur simili i triangoli AMH, CMB, e quindi $\frac{CM}{CH} = \frac{BM}{AB}$. Dunque $\frac{PN}{AN} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{BM}{AB}$. Finalmente, perchè (1.°) $\frac{PN}{AN} = \frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{AC}$, sarà anche $\frac{BP}{BD} \cdot \frac{CD}{AC} = \frac{CP}{CM} \cdot \frac{BM}{AB}$.

Scolio. Questo lemma racchiude la dimostrazione completa, che per aver le pressioni agli appoggj A, B, C nel

triangolo col metodo de' vetti comunicanti, si può assumere per vette primario APN, o BPD, o CPM, e che con qualunque di questi 3 vetti si ottengono le stesse identifiche pressioni, essendo ciò una delle caratteristiche necessarie per la giustezza de' risultati, mentre non v'è maggior ragione per dire, che dà le vere pressioni piuttosto l'uno che l'altro di questi 3 vetti tirati e situati relativamente agli angoli da cui spiccano e al centro, per cui passano, in affatto simili maniere.

LEMMA 2.

14 Dentro un dato angolo BCA (Fig. 3.) presi ne' lati 2 punti B, A, e da questi ai lati opposti guidate le rette BD, AN intersecantisi in qualche punto P; sarà $\frac{AP}{AN} = \frac{AD.BC}{AD.BC + BN.CD}$; $\frac{PN}{AN} = \frac{BN.CD}{AD.BC + BN.CD}$.

Congiunta la AB sino alla AC, si conduca la NT parallela a BD, e si ha, BC : CD : : BN : DT, onde BN . CD = BC . DT. Ma è anche AP : AN : : AD : AT : : AD : AD + DT : : AD . BC : AD . BC + BC . DT : : AD . BC : AD . BC + BN . CD. Dunque $\frac{AP}{AN} = \frac{AD.BC}{AD.BC + BN.CD}$, e conseguentemente $\frac{PN}{AN} = \frac{BN.CD}{AD.BC + BN.CD}$.

Corol. Pel Lemma 1, è $\frac{PD}{BD} = \frac{AP}{AN} \cdot \frac{CN}{BC}$ (4.°), ovvero sostituendo il valore di $\frac{AP}{AN}$, $\frac{PD}{BD} = \frac{AD.CN}{AD.BC + BN.CD}$. Ma AD . BC + BN . CN = AD . CN + AD . BN + CD . BN = AD . CN + AC . BN. Dunque $\frac{PD}{BD} = \frac{AD.CN}{AD.CN + AC.BN}$, e quindi $\frac{BP}{BD} = \frac{AC.BN}{AD.CN + AC.BN}$.

PROBLEMA.

15 Dato un punto P dentro l' aja d' un trapezio AEFC (Fig. 4.), e preso in un de' lati AE un dato segmento ES, determinare nel lato contiguo EF tal altro segmento EQ, che guidate da S, Q per P ai lati opposti le rette SPT, QPO, sia $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC} = \frac{PQ}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$.

Congiungo la FS, da C per P tiro una retta, che incontri la FS in δ, poi da A per δ la retta AδQ, che termina al lato EF in Q, sarà EQ il segmento ricercato.

Si conducan le rette CS, CQ. Nel triangolo CSF si verifica questa equazione $\frac{P\delta}{C\delta} = \frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC}$ (lem. 1. n. 3.°). Parimente nel triangolo AQC ha luogo quest' altra $\frac{P\delta}{C\delta} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$ (lem. 1. n. 2.°). Dunque sarà anche $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$.

Corol. 1. Dall' essere 1.° $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{FT}{FC} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{AO}{AC}$, deriva 2.° $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{FC} = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$. Imperciocchè, guidata la AF, e considerato il triangolo AEF, abbiamo $\frac{S\delta}{FS} = \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$ (lem. 1. n. 3.). Il triangolo poi SFC ci dà $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{S\delta}{FS}$ (lem. 1. n. 5.), onde $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$. Ma dal triangolo AQC risulta $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} = \frac{OP}{OQ}$ (lem. 1. n. 5.). Dunque $\frac{PS}{ST} \cdot \frac{CT}{CF} = \frac{OP}{OQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$.

3.°

3.° $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$. Si considerino i 3 triangoli, SFC, EAF, AQC. Il 1.° ci somministra $\frac{PT}{ST} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS}$ (lem. 1. n. 6.); cioè $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS} \cdot \frac{ES}{AE}$. Il 2.°, $\frac{F\delta}{FS} : \frac{ES}{AE} = \frac{Q\delta}{AQ}$ (lem. 1. n. 6.); che fa essere $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ}$. Ma dal 3.° triangolo si ritrae $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$ (lem. 1. n. 6.). Dunque $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$.

4.° $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{PO}{QO} \cdot \frac{QF}{EF}$. Dei 3 triangoli SFC, AEF, AQC, considerato il 1.° si presenta l' egualità $\frac{PT}{ST} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS}$ (lem. 1. n. 6.); ossia $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{F\delta}{FS} \cdot \frac{AS}{AE}$. Dal 2.° emanà $\frac{F\delta}{FS} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF}$; e però $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF}$. Ma il 3.° dà $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} = \frac{PO}{OQ}$ (lem. 1. n. 5.). Dunque $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{AS}{AE} = \frac{PO}{QO} \cdot \frac{QF}{EF}$.

Corol. 2. Dalla soluzione del problema e dal corol. 1. risulta, che essendo EQ, ES i due segmenti analoghi ne' due lati contigui AE, EF, i quali salvano la condizione proposta, avran pure la stessa qualità i due segmenti AS, AO; così CO, CT; FT, FQ; e poichè dati i due primi EQ, ES, e condotte le rette AQ, SF che si segano in δ, si è dimostrato, che la retta CP tirata pe 'l punto P dall' angolo opposto C cade in δ, sarà altresì vero, che la FP prodotta s' incontrerà nel punto, ove s' incrociano le altre due

rette EO, CS; e similmente si discorra per le due ultime EP, AP rispetto ai punti d' intersezione, che avrebbero le AT, OF, e le CQ, ET.

Scolio. Si supponga ora in P il peso, e i 4 appoggj in A, E, F, C. Se, presa EQ ad arbitrio, si volesse assumere QPO come vette primario, il problema presente col corol. 1. ci fa conoscere, che col prendere eziandio per vette primario SPT si otterrebbero le stesse pressioni come coll' altro. Imperocchè con QO la pressione in A diventa $\frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$, e con ST si fa essa $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE}$. Ma (corol. 1. n. 3.°) si ha $\frac{PT}{ST} \cdot \frac{ES}{AE} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$. Dunque l'uno o l' altro vette dà in A la stessa quantità di pressione; e lo stesso vuolsi dir pure per le altre in C, F, E. Aggiungo di più, che assumendo ancora come vette primario la CPδ, essendo gli altri vetti comunicanti AδQ, EQF, le nostre pressioni non variano. Perchè figurando CPδ come vette primario, la pressione in A sarebbe $\frac{CP}{C\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{QP}{QO} \cdot \frac{CO}{AC}$ (corol. 1. n. 3.). Così si dica per le altre tre. Ma perchè si è presa la EQ ad arbitrio, arbitrarie son pure queste pressioni e variabili in quantità a misura che si taglia in EF un segmento maggiore o minore di EQ: Onde se non ci vien fatto di rinvenire un criterio per istabilir nel trapezio la grandezza di questo segmento, o che è lo stesso, per dividere l' angolo centrale EPF in conformità della legge osservata dalla Natura, non avrem fatto alcun progresso per la risoluzione generale del quesito; e col nostro discorso si sarà solo ad evidenza dimostrato, che l' unica teoria del vette non basta per rendere generalmente determinato il problema. Nel bomisco e nel rettangolo, in qualche collocazione del peso P, abbiam potuto determinare la $EQ = \frac{EF}{2}$, perchè oltre la regola del vette è venuto in nostro soccorso il principio metafisico della ragion sufficiente, che ci ha fatto ottenere l' intento. Ma pel trapezio siam privi di questo ajuto; e resta tuttavia a saper-

si, in qual modo debbasi divider l' angolo EPF, e render con ciò cognita la EQ.

LEMMA 3.

16 In qualunque triangolo RST (Fig. 5), guidata da un angolo S al lato opposto qualunque SV, e chiamati x, y gli angoli TSV, RSV; sarà $\frac{TV}{RV} = \frac{ST\,sen.x}{SR\,sen.y}$.

Imperciocchè sta TV : RV in ragion composta $\begin{cases} TV : SV \\ SV : RV \end{cases}$.

Ma $\begin{cases} TV : SV :: sen.x : sen.STV \\ SV : RV :: sen.SRV : sen.y \end{cases}$. Dunque TV : RV in comp. $\begin{cases} sen.x : sen.STV \\ sen.SRV : sen.y \end{cases}$; o anche TV : RV in comp. $\begin{cases} sen.x : sen.y \\ sen.SRV : sen.STV \end{cases}$

Ora essendo sen.SRV : sen.STV :: ST : SR, avremo TV : RV in comp. $\begin{cases} sen.x : sen.y \\ TS : RS \end{cases}$, e quindi $\frac{TV}{RV} = \frac{ST\,sen.x}{SR\,sen.y}$.

Corol. 1. Perchè TV : RV :: STsen.x : SR sen.y, si ha anche TV : TR :: STsen.x : ST sen.x + SR sen.y; onde $\frac{TV}{TR} = \frac{STsen.x}{STsen.x + SRsen.y}$; e per conseguenza $\frac{RV}{TR} = \frac{SRsen.y}{STsen.x + SRsen.y}$.

Corol. 2. Si può dire TR : RV in comp. $\begin{cases} TR : SR \\ SR : SV \\ SV : RV \end{cases}$. Ma TR : SR :: sen.$(x+y)$: sen.STR; SV : RV :: sen.SRT : sen.y.

Dunque TR : RV in comp. $\begin{cases} sen.(x+y) : sen.STR \\ SR : SV \\ sen.SRT : sen.y \end{cases}$; ossia TR : RV in comp. $\begin{cases} sen.(x+y) : sen.y \\ sen.SRT : sen.STR \\ SR : SV \end{cases}$; e perchè sen. SRT : sen. STR :: ST : SR, ne viene per conseguenza, che TR : RV in comp. $\begin{cases} sen.(x+y) : sen.y \\ ST : SR \\ SR : SV \end{cases}$ :: ST sen.$(x+y)$: SV sen.y.

Inoltre pel corol. 1. TR : RV :: STsen.x + SRsen.y : SR sen.y; onde STsen.x + SR sen.y : SR sen.y ::

$ST\,sen.(x+y) : SV sen.y$; e quest' ultima analogia da $SV = \frac{SR \,.\, ST sen.(x+y)}{ST sen.x + SR sen.y}$. Di più, poichè abbiamo $TR : RV :: ST\,sen.(x+y) : SV sen.y$, sarà $\frac{RV}{TR} = \frac{SV sen.y}{ST sen.(x+y)}$. Ma $TV : RV$, ovvero $\frac{TV}{TR} : \frac{RV}{TR} :: ST sen.x : SR sen.y$, e sostituito il valore di $\frac{RV}{TR}$, si ha $\frac{TV}{TR} : \frac{SV sen.y}{ST sen.(x+y)} :: ST sen.x : SR sen.y$. Dunque $\frac{TV}{TR} = \frac{SV sen.x}{SR sen.(x+y)}$.

LEMMA 4.

17 Dividere un dato angolo MPD per modo che i seni delle porzioni dell' angolo, MPO NPO, siano in ragion data di $m : n$.

Sul lato PN dell' angolo si ponga $PD = m$, e nell' altro lato MP prodotto si collochi $PH = n$, poi si congiunga DH. La retta PO parallela a DH divide l' angolo MPD nel modo ricercato. Perchè per ragion delle parallele PO, DH, gli angoli MPO, OPN sono respettivamente eguali agli angoli PHD, PDH. Ma sta sen.PHD : sen.PDH :: PD : PH :: $m : n$. Dunque anche sen.MPO : sen.OPN :: $m : n$.

18 Cadano ora sotto alla nostra considerazione le figure ordinate e regolari, supponendo sempre il peso nel centro, e gli appoggj agli angoli della figura. E poichè la teoria de' vetti comunicanti nel bomisco, nel triangolo, e nel rettangolo, pei casi superiormente esaminati, ci ha condotti alle medesime conseguenze, alle quali giungevasi coll' altra de' momenti, abbracciando il primo metodo cerchiamo come debbasi in ciascuna figura collocare il sistema di questi vetti, onde per mezzo di essi venga dal peso trasferita a ciascun appoggio la pressione $\frac{1}{n}$, posto n il numero de' lati. La prima difficoltà che s' incontra in quest' indagine, è quella di determinare ne' lati della figura gli opportuni

segmenti, o di dividere come conviene gli angoli, che abbiam chiamato centrali. Ma riflettendo, che ove il peso sia nel centro questi segmenti sono la metà del lato sì nel triangolo equilatero come nel quadrato, e che la linea dividente gli angoli centrali è a ciascun di essi lati perpendicolare, noi veggiam chiaramente, che l' analogia c' invita a stabilire, dover ciò essere eziandio nelle altre figure regolari. Oltracciò nel trapezio (Fig. 4) abbiamo osservato, che relativamente ai segmenti analoghi EQ, ES, tirate FS, AQ, che s' incrociano in δ, si può assumere per vette primario CPδ, essendo i vetti comunicanti AQ, EF. Ciò pure si verifica nel triangolo AEC (Fig. 2), ove δ cade in P e si fa Pδ = o. Perchè preso CPδ come vette primario, i comunicanti sono OPE, AOC, e ne risultano le pressioni seguenti: Pr. in C derivante dal solo vette CPδ $= \frac{P\delta}{PC} = o$; Pr. in E $= \frac{CP}{CP} \cdot \frac{PO}{OE} = \frac{PO}{OE}$; Pr. in A $= \frac{CP}{CP} \cdot \frac{PE}{EO} \cdot \frac{CO}{AC} = \frac{PE}{EO} \cdot \frac{CO}{AC}$; altra Press. in C $= \frac{CP}{CP} \cdot \frac{PE}{EO} \cdot \frac{AO}{AC} = \frac{PE}{EO} \cdot \frac{AO}{AC}$; le quali pressioni son le medesime con quelle già trovate. Dunque non è fuor di proposito lo estendere al generale delle figure, nelle quali si suppongon già eseguite le convenienti divisioni degli angoli centrali, questa assunzione di vette primario nella direzion di Pδ, dalla quale ne vien subito determinato un braccio, che è Pδ; e ci rimane solo l' altra difficoltà di stabilir la grandezza del secondo braccio e la posizione degli altri vetti comunicanti, che insiem col primario ne formano l' intero sistema.

19 Quest' ultima è stata a me utilissima per fissar le mie regole e le mie costruzioni. Quanto alle figure regolari, noi le distribuiremo prima in due classi, cioè di figure pari-latere e di figure impari-latere. Suddivideremo quelle di num.° di lati pari in altre 2 specie; la 1.ª delle denominate da un numero pari-pari, come il quadrato, l' ottogono, il dodecagono &c.; la 2.ª delle denominate da un num.° pari-dispari, come l' essagono, il decagono &c. Così distin-

guo due nuove specie di figure impari-latere; la 1.ª di quelle, il cui num.° di lati n è tale, che $n+1$ sia num.° pari-pari, come il triangolo equilatero, l' eptagono &c.; la 2.ª di quelle, che fanno essere $n+1$ un num.° pari-dispari, come il pentagono, l' enneagono &c. Tratterem di ciascuna delle suddette specie separatamente, perchè, sebbene alcune proprietà siano a tutte comuni, altre son peculiari alla specie e diversificano alquanto le geometriche preparazioni.

20 Regola I. che serve a stabilire nelle figure ordinate pari-latere e denominate da un num.° pari-pari il sistema de' vetti comunicanti, che trasferiscono dal peso collocato nel centro della figura pressioni eguali agli angoli del poligono, ove son situati gli appoggj.

Per veder con chiarezza l' andamento del metodo, fa mestieri aver sotto all' occhio una figura di un gran numero di lati. Io ho scelto quella di 24 (Fig. 7), sulla quale ragioneremo come se fosse una figura di num.° di lati n, onde adattar si possano le nostre operazioni sì alle superiori che alle inferiori figure comprese nella stessa categoria.

21 Camminando sulle traccie additateci dal triangolo equilatero e dal quadrato, immagino prima di tutto divisi per metà tutti i lati n, e tutti gli angoli centrali del poligono, con che restano determinati per ogni lato i veri segmenti, che ci guidano alla soluzion del problema. Prendo poi un lato qualunque AH, e alla sinistra due altri lati, AE, EF consecutivi all' assunto, i cui punti di mezzo sono L, Q. Conduco in oltre due rette AQ, LF, che s' intersecano in δ, e da δ pel centro P una retta indefinita: La δP, secondo la nostra regola deve essere un braccio del vette primario. Suppongo Pβ l' altro braccio, onde tutto il vette sia $\beta\delta$. Si vede subito, che dovendo questo vette portar le pressioni agli appoggj in A e in F, i vetti comunicanti rispetto ai due lati AE, EF sono AδQ, FQE; sicchè essendo al solito P = 1, n il num.° de' lati della figura, fa d' uopo che sia $\frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{Q\delta}{AQ}=\frac{1}{n}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{A\delta}{AQ}\cdot\frac{FQ}{EF}=\frac{1}{n}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{A\delta}{AQ}\cdot\frac{EQ}{EF}=\frac{1}{n}$. Congiungo le rette PQ, PL, δE. E' chiara l'eguaglianza delle linee AQ, FL; chiaro che i triangoli AQE, FLE sono respetti-

vamente equilateri, e perciò che riescono eguali gli angoli δFQ, δAL. Di più l' angolo δQF si fa eguale all' angolo δLA; e perchè FQ, AL sono eguali, il son pure le rette $F\delta$, δA; il che rende equilateri respettivamente i triangoli $FE\delta$, $AE\delta$, e l' angolo AEF vien bisecato dalla $E\delta$. Ma nelle figure ordinate la retta, che dal centro va all' angolo della figura, lo divide per metà. Dunque $P\delta$ prodotta va ad E. Ora indicando col simbolo R l' angolo retto, nella fig. di num.° di lati n diventa l' angolo $QPE = \frac{4R}{2n} = \frac{2R}{n}$. Fatto pertanto AP eguale al raggio trigonometrico r, e $\frac{2R}{n} = x$, sarà $\text{sen.}QP\delta = \text{sen.}x = EQ$; $\cos.QP\delta = \cos.x = PQ$; $\text{sen.}AP\delta = \text{sen.}2x$; $\text{sen.}APQ = \text{sen.}3x$. E perchè $P\delta = \frac{PA \cdot PQ\ \text{sen.}APQ}{PA\ \text{sen.}AP\delta + PQ\ \text{sen.}QP\delta}$ (lem. 3. corol. 2), colle sostituzioni otterremo $P\delta = \frac{r \cos.x\ \text{sen.}3x}{r\ \text{sen.}2x + \text{sen.}x \cos.x} = \frac{2r \cos.x\ \text{sen.}3x}{2r\ \text{sen.}2x + 2\ \text{sen.}x \cos.x} = \frac{2r \cos.x\ \text{sen.}3x}{2r\ \text{sen.}2x + r\ \text{sen.}2x}$, pei canoni trigonometrici; cioè $P\delta = \frac{2 \cos.x\ \text{sen.}3x}{3\ \text{sen.}2x}$. Il citato corol. 2 ci dà anche $\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{P\delta\ \text{sen.}QP\delta}{AP\ \text{sen.}APQ}$; cioè $\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{2\ \text{sen.}x \cos.x\ \text{sen.}3x}{3r\ \text{sen.}2x\ \text{sen.}3x} = \frac{r\ \text{sen.}2x\ \text{sen.}3x}{3r\ \text{sen.}2x\ \text{sen.}3x} = \frac{1}{3}$; e quindi $\frac{A\delta}{AQ} = \frac{2}{3}$. Ma dev' essere $\frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{Q\delta}{AQ} = \frac{1}{n}$. Dunque $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{3}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n}$; $P\beta = \frac{3P\delta}{n-3}$; Con che restano determinate in generale per tutte le figure regolari la direzione e la lunghezza del vette primario $\beta\delta$; e verificandosi le 3 equazioni $\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{1}{3}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{FQ}{FE} = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\beta}{\beta\delta} \cdot \frac{A\delta}{AQ} \cdot \frac{EQ}{EF} = \frac{3}{n} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n}$, abbiamo 2

buon conto eguali le pressioni ne' tre punti d' appoggio A, E, F.

22 Posti N, I i punti di mezzo dei lati HC, CB che seguitano alla destra del lato AH, ripetendo la stessa operazione praticata nella sinistra, conduco le rette HI, NB, che s' intersecano in θ, e guido al centro la retta θP. Dal punto di mezzo O dell' assunto lato AH faccio passar pel centro la OP; poi da θ per β tiro una linea, che prodotta incontri la OP nel punto γ, e dico che sarà $\theta\gamma$ un altro vettè comunicante del primario $\beta\delta$, cosicchè avran luogo le equazioni seguenti: $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{I\theta}{HI} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{BI}{BC} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{CI}{BI} = \frac{1}{n}$; il che dimostro così. Poichè Pθ prolungata va al punto C, e l' ang.° OPθ = $3x$, sarà l' ang.° γPθ = 2R — $3x$. Ma anche γPβ = OPδ = $3x$. Dunque l' ang.° θPβ = 2R — $6x$, e quindi sen.γPβ = sen.$3x$; sen γPθ = sen.$3x$; sen.θPβ = sen.$6x$. Ora $\frac{\gamma\beta}{\theta\gamma} = \frac{P\beta}{P\theta} \frac{\text{sen.}\gamma P\beta}{\text{sen.}\gamma P\theta}$ (lem. 3 corol. 2.), cioè $\frac{\gamma\beta}{\theta\gamma} = \frac{P\beta}{P\delta} \frac{\text{sen.}3x}{\text{sen.}3x}$, perchè P$\theta$ = Pδ. Dunque $\frac{\gamma\beta}{\theta\gamma} = \frac{P\beta}{P\delta} = \frac{3}{n-3}$ (21); e quindi $\frac{\theta\beta}{\theta\gamma} = \frac{n-6}{n-3}$. In oltre, essendo $\frac{I\theta}{HI} = \frac{1}{3}$, $\frac{H\theta}{HI} = \frac{2}{3}$, $\frac{BI}{CB}$, o $\frac{CI}{CB} = \frac{1}{2}$, avremo colle sostituzioni $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{I\theta}{HI} = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$; $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{BI}{BC} = \frac{n-3}{n} \cdot \frac{3}{n-3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{n} = \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{\theta\gamma} \cdot \frac{H\theta}{HI} \cdot \frac{CI}{BC}$. Onde sono eguali a $\frac{1}{n}$ anche le pressioni, che soffrono i punti H, C, B derivate da P per mezzo dei vetti $\beta\delta$, $\theta\gamma$, HI, CB.

23 Stabiliti in generale i vetti, i quali combinati col primario ci fanno risultare pei nostri poligoni regolari le pressioni uguali ne' 6 punti F, E, A, H, C, B, è neces-

cessario, che i due principali $\beta\delta$, $d\gamma$ ci servano coll' unione di altri vetti comunicanti a produrre la pressione $\frac{1}{n}$ anche su ciascuno degli altri appoggj di numero $n-6$; che ci rimangono da caricare; e bisogna a questo fine determinare la posizione e la grandezza di questi vetti. La regola, che non manca di esser semplice, è la seguente.

24 Immaginiam la $O\gamma$ prolungata sino al nuovo incontro con un lato superiore del poligono in V. E' chiaro, che V sarà alla metà di questo lato, e che tra V ed O saran frapposti sì alla destra che alla sinistra num.° n di mezzi lati, essendo questo num.° di mezzi lati pari-pari, perchè tale supponiamo quello de' lati della figura. Sottendo pertanto la QX a 4 mezzi lati, la XZ ad altri 4 seguenti, e così progredisco sinchè arrivo ad V, dove deve necessariamente cadere il termine dell' ultima sottesa, perchè frapponendosi tra O e Q 4 mezzi lati, il num.° di quelli, che sono tra Q ed V, è $n-4$, che è numero pari-pari. La stessa operazione faccio alla sinistra, cominciando da I, e arriverò parimente al punto V. Nella figura di 24 lati, che abbiam sotto l' occhio, alla sinistra e alla destra cinque riescono queste sottese, i mezzi lati corrispondenti son 20, ai quali se alla sinistra aggiungiam gli altri 4 tra Q ed O, o alla destra gli altri 4 tra O ed I, abbiamo per l' una e per l' altra parte 24 mezzi lati, che costituiscono la metà dell' intero perimetro del nostro poligono regolare. Sottesa la QX, guido al centro la retta XP; indi dal punto Y, che è al termine de' 2 mezzi lati dopo X, conduco parimente al centro la YP, e segno il punto X', ove essa sega la XZ. Da Y andando avanti, numero 6 mezzi lati, arrivo al punto Z', poi congiungo X'Z'. Oltre Y prendo altri 2 mezzi lati, che terminano in Z, e da questo punto faccio andare al centro la ZP, la quale taglia la X'Z' in X''. Cominciando da Z, numero altri 8 mezzi lati, arrivo a Z'', e meno la X''Z''. Distando Y' 2 mezzi lati da Z, secondo il solito, tiro la YP, che sega la X''Z'' in X'''. Conto da Y', dove siam giunti, 10 mezzi lati seguenti e arrivo a Z'''. Condotta poi la X'''Z''', faccio da Z' che è distante 2 altri mezzi lati da Y' andare al centro la retta

Z'P, che taglia la X'''Z''' in X''''. Non essendo ora più ignoto, come si debba procedere, qualora s' abbiano a continuare le operazioni, mi fermo quì; e siccome nella figura di 24 lati son già arrivato al vertice V e alla retta MRV, perchè X''' cade in M, X'''' in R, Z''' in V, le operazioni alla sinistra son terminate. Con simile andamento alla destra determineremo i punti T, T', T'', T''', T'''' &c.; D, D' &c.; S, S', S'', S''', S'''' &c.: e dovendo nel nostro poligono esser ultima la linea WKV, coincidono T''' in W, T'''' in K, S''' in V, e diventa VR = VK, VM = VW, siccome è chiaro. Giunti a queste ultime linee, si unisca R con W, K con M. Le rette MK, RW s' intersecheranno in un punto; ed io dico, che questo punto sarà lo stesso punto γ superiormente già determinato; la qual cosa si dee dimostrare, come anche, che colle eseguite costruzioni si determinano eziandio le posizioni e le grandezze de' vetti comunicanti, i quali costituiscono insiem coi già stabiliti l' intero sistema de' vetti che sciolgono il problema.

25 Ognun vede, che per dare questa dimostrazione, è necessario esprimere analiticamente i valori delle rette che fan parte delle nostre operazioni. Cominciam dalle rette PX, PX', PX'' &c. Quanto alla prima, poichè PX = PQ, e PQ = cos.x, sarà PX = cos.x = $\frac{\text{cos.}x\ \text{sen.}2x}{1.\ \text{sen.}2x}$. Per la 2.ª PX', rifletto essere anche PZ = cos.x, e sen.ZPX' = sen.$2x$. = sen.XPX', onde nasce sen.ZPX = sen.$4x$. Ma (lem. 3 corol. 2) PX' = $\frac{\text{PX . PZsen.ZPX}}{\text{PXsen.XPX' + PZsen.ZPX'}}$.

Dunque PX' = $\frac{(\text{cos.}x)^2\ \text{sen.}4x}{\text{cos.}x\ \text{sen.}2x + \text{cos.}x\ \text{sen.}2x}$, ovvero PX' = $\frac{\text{cos.}x\ \text{sen.}4x}{2\ \text{sen.}2x}$. Quanto alla 3.ª PX''; si osservi essere l' angolo Z'PX'' = $4x$, l' angolo X''PX' = $2x$, l' angolo Z'PX' = $6x$, PZ' = cos.x; e perchè PX'' = $\frac{\text{PZ' . PX' sen.Z'PX'}}{\text{PZ' sen.Z'PX'' + PX' sen.X'PX''}}$, sarà colle specie PX'' =

$$\frac{\cos.x \cos.x \operatorname{sen}.4x \operatorname{sen}.6x}{2 \operatorname{sen}.2x \left(\cos.x \operatorname{sen}.4x + \frac{\cos.x \operatorname{sen}.4x \operatorname{sen}.2x}{2 \operatorname{sen}.2x}\right)} = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.6x}{3 \operatorname{sen}.2x},$$

dopo le riduzioni. Vado oltre, e poichè l' ang.° $Z''PX'' = 8x$, l' angolo $Z''PX''' = 6x$, l' ang.° $X'''PX'' = 2x$, $PZ'' = \cos.x$, risulta $PX''' = \frac{PZ'' PX'' \operatorname{sen}.Z''PX''}{PZ'' \operatorname{sen}.Z''PX''' + PX'' \operatorname{sen}.X''PX'''}$; cioè in analisi al netto $PX''' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.8x}{4 \operatorname{sen}.2x}$. Ponghiamo per ordine i termini della serie, e ci nasce $PX = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.2x}{1 . \operatorname{sen}.2x}$, $PX' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.4x}{2 \operatorname{sen}.2x}$, $PX'' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.6x}{3 \operatorname{sen}.2x}$, $PX''' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.8x}{4 \operatorname{sen}.2x}$; e continuandola colla legge che è chiara, $PX'''' = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.10x}{5 \operatorname{sen}.2x}$; &c. Quando $n = 24$, che è il caso della presente figura, i 4 ultimi termini della serie sono $PX''' = PM = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.8x}{4 \operatorname{sen}.2x}$, $PX'''' = PR = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.10x}{5 \operatorname{sen}.2x}$. Se fosse $n = 20$, numero che corrisponde alla fig.ª prossimamente minore tra quelle che hanno un numero di lati pari-pari, i 2 ultimi termini sarebbero $PX'' = PM = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.6x}{3 \operatorname{sen}.2x}$, $PX''' = PR = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.8x}{4 \operatorname{sen}.2x}$; e proporzionatamente si discorra per le altre figure o superiori o inferiori. Ciò posto, potremo, coll' uso de' teoremi appartenenti alle espressioni de' termini generali delle serie, esibir quella delle ultime linee PM, PR nella fig.ª di lati n; e avremo $PM = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.\left(\frac{n-8}{2}\right)x}{\frac{n-8}{4} . \operatorname{sen}.2x}$; ... e $PR = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.\left(\frac{n-4}{2}\right)x}{\frac{n-4}{4} . \operatorname{sen}.2x}$.

26 Gli angoli ZPX', $Z'PX''$, $Z''PX'''$ &c. seguitan la legge di questa serie $2x$, $4x$, $6x$, $8x$ &c. Quando $n = 24$, l' ultimo è $8x$; quando $n = 20$, l' ultimo è $6x$; e quindi

in generale l'ultimo, cioè $VPR = \frac{(n-8)x}{2}$; che dà VPM $= \frac{(n-4)x}{2}$, perchè $MPR = 2x$. Si cerchi ora l' espressione delle funzioni successive $\frac{ZX'}{XZ}, \frac{Z'X''}{X'Z'}, \frac{Z''X'''}{X''Z''}$, &c. sino all' ultima $\frac{VR}{VM}$. Quanto alla funzione $\frac{ZX'}{XZ}$, perchè ZX' è la metà di XZ, sarà $\frac{ZX'}{XZ} = \frac{1}{2}$. Le altre poi ci vengono somministrate dal 3.° Lemma, e col mezzo d' esso troviamo $\frac{Z'X''}{X'Z'} = \frac{PX''\,\text{sen}Z'PX''}{PX'\,\text{sen}.Z'PX'} = \frac{2}{3}$; $\frac{Z''X'''}{X''Z''} = \frac{PX'''\,\text{sen}.Z''PX''}{PX''\,\text{sen}.Z''PX''} = \frac{3}{4}$; &c. Ecco pertanto la serie delle suddette funzioni; $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots \frac{VR}{VM}$, che è l' ultima. Ma il termine generale di questa serie è $\frac{n-8}{n-4}$; perchè, fatto $n = 24$, la serie finisce al 4.° termine $\frac{4}{5}$; fatto $n = 20$, si ferma essa nel 3.° $= \frac{3}{4}$; e tali valori appunto si trovano sostituendo successivamente nel termine generale $n = 24$, $n = 20$. Dunque $\frac{VR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$ per il poligono di lati n. Prendiamo al rovescio questa serie, e fatto primo termine $\frac{n-8}{n-4}$, per avere il prossimo sarà mestieri in vece di n mettere $n-4$ nel 1.° termine; per avere il 3.° in ordine, mettere $n-8$; per il 4.°, $n-12$ &c. Così operando, ecco la serie rovesciata

(A) .... $\frac{n-8}{n-4}, \frac{n-12}{n-8}, \frac{n-16}{n-12} \ldots\ldots \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$. Ma

dall' essere $\frac{ZX'}{XZ} = \frac{1}{2}$, $\frac{Z'X''}{X'Z'} = \frac{2}{3}$, $\frac{Z''X''}{X''Z''} = \frac{3}{4} \cdots \frac{XR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$, risultano le altre funzioni $\frac{XX'}{XZ} = \frac{1}{2}$, $\frac{X'X'}{X'Z'} = \frac{1}{3}$, $\frac{X''X''}{X''Z''} = \frac{1}{4} \cdots \frac{MR}{VM} = \frac{1}{\frac{n-4}{4}} = \frac{4}{n-4}$. Dunque prendendo anche quì la serie al rovescio, andrà essa con quest' ordine $\frac{4}{n-4}$, $\frac{4}{n-8}$, $\frac{4}{n-12}$, $\frac{4}{n-16} \cdots\cdots \frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

27 Le linee analoghe dalla parte destra della figura sono simili in posizione ed eguali in grandezza a quelle della sinistra; e alle serie nella sinistra delle funzioni

$$\frac{ZX'}{XZ}, \frac{ZX''}{X'Z'}, \frac{Z'X'''}{X''Z''} \cdots\cdots \frac{VR}{VM}$$

$$\frac{XX'}{XZ}, \frac{XX''}{XZ'}, \frac{X'X'''}{X'Z''} \cdots\cdots \frac{MR}{VM}$$

corrispondon le serie delle funzioni alla destra

$$\frac{ST'}{TS}, \frac{ST''}{TS}, \frac{S'T'''}{T'S''} \cdots\cdots \frac{VK}{VW};$$

$$\frac{TT'}{TS}, \frac{TT''}{TS'}, \frac{T'T'''}{T'S''} \cdots\cdots \frac{WK}{VW}.$$

Quindi poichè $\frac{VK}{VW} = \frac{VR}{VM} = \frac{n-8}{n-4}$; $\frac{WK}{VW} = \frac{MR}{VM} = \frac{4}{n-4}$, queste due ultime serie saranno identiche colle precedenti, e prese al rovescio termineranno esse pure nella frazione $\frac{1}{2}$.

28 Si è veduto essere l' angolo VPM $= \frac{(n-4)}{2} x$, l' angolo VPR $= \frac{(n-8)}{2} x$; e a questo essendo egua-

le VPK, si fa sen.VPK $=$ sen.γPK $=$ sen.$\frac{(n-8)}{2}x$; sen.VPM $=$ sen.γPM $=$ sen.$\frac{(n-4)}{2}x$; e sen.(γPM $+$ γPK) $=$ sen.MPK $=$ sen.$\left(\frac{n-8}{2}+\frac{n-4}{2}\right)x =$ sen.$(n-6)x$. Ricordiamci, che è $x = \frac{2R}{n}$, cioè $nx = 2R$. Onde sen.$(n-6)x$ $=$ sen.$(2R-6x)$ $=$ sen.$6x$; e però sen.MPK $=$ sen.$6x$. Or, siccome $P\gamma = \frac{PM \cdot PK\text{sen.}MPK}{PM\text{sen.}MP\gamma + PK\text{sen.}KP\gamma}$ (lem.3), coll'uso delle specie analitiche ci risulta il valor di $P\gamma$, che spurgato verrà espresso dalla equazione $P\gamma = \frac{2\cos.x\,\text{sen.}6x}{(n-6)\text{sen.}2x}$.

29. Si conduca $\theta\delta$, e la VP prodotta incontri la $\theta\beta$ in ω. Perchè $P\delta$, $P\theta$ sono eguali, e l'angolo $\delta P\theta$ è bisecato da $P\omega$, sarà $P\omega$ perpendicolare ad $\theta\delta$. Abbiamo oltracciò $r : \cos.3x :: P\theta : P\omega$, e però $P\omega = \frac{P\theta\cos.3x}{r} = \frac{P\delta\cos.3x}{r} = \frac{2\cos.x\,\text{sen.}3x\cos.3x}{3r\,\text{sen.}2x} = \frac{\cos.x\,\text{sen}6x}{3\text{sen.}2x}$. Sia $P\varphi$ parallela a $\gamma\theta$, e questa analogia ne risulterà $\beta\delta : P\delta :: \theta\beta : P\varphi = \frac{\theta\beta \cdot P\delta}{\beta\delta}$. Di più; $\theta\gamma : P\varphi :: \gamma\omega : P\omega$. Dunque $\gamma\omega : P\omega :: \theta\gamma : \frac{\theta\beta \cdot P\delta}{\beta\delta} :: \frac{\theta\gamma}{\theta\beta} : \frac{P\delta}{\beta\delta} :: \frac{n-3}{n-6} : \frac{n-3}{n}$ (n. 22,21) $:: n : n-6$; e dividendo, $P\gamma : P\omega :: 6 : n-6$, ossia $P\gamma : \frac{\cos.x\,\text{sen.}6x}{3\text{sen.}2x} :: 6 : n-6$; onde $P\gamma = \frac{2\cos.x\,\text{sen.}6x}{(n-6)\text{sen.}2x}$, valore identico col trovato per mezzo delle serie nel numero antecedente, che dimostra cadere appunto l'intersezione delle due rette MK, WR nel già determinato punto γ. Essendo poi pel solito lem. 3, $\frac{K\gamma}{KM} = \frac{P\gamma\text{sen.}KP\gamma}{PM\text{sen.}KPM}$, adoprando i simboli, dopo le riduzioni sarà $\frac{K\gamma}{KM} = \frac{n-8}{2(n-6)}$,

e $\frac{M\gamma}{KM} = \frac{n-4}{2(n-6)}$; e conseguentemente $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} =$
$\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} = \frac{n-8}{2n}$.

30 Stabiliamo ora, che il sistema alla sinistra de' vetti comunicanti coi principali $\beta\delta$, $\theta\gamma$ sia composto delle rette XZ, X'Z', X''Z'' &c. e finalmente di MK, cui daremo il nome di vette d'unione, perchè unisce il sinistro al sistema destro de' vetti. Poichè prendendo KM per vette d'unione, non entra in azione la funzione $\frac{VR}{VM} - \frac{n-8}{n-4}$, ma bensì la susseguente $\frac{n-12}{n-8}$, e appresso tutte le altre $\frac{n-16}{n-12}, \frac{n-20}{n-16} \cdots \frac{1}{2}$, nella serie (A) (n. 25) si deve eliminare il 1.° termine $\frac{n-8}{n-4}$, e allora abbiamo $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} \cdots\cdots \frac{ZX'}{ZX} =$
$\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \cdots\cdots \frac{1}{2}$.
Con queste funzioni de' nostri vetti trasportiamo la pressione derivata da P al punto X, che è alla metà di F'F'' dove non è appoggio, e va distribuita ai punti F', F'' dove sono gli appoggj, ciascun de' quali dev' essere caricato della pressione $\frac{1}{n}$. Il perchè bisogna che risulti la pressione in X $= \frac{2}{n}$, e conseguentemente il prodotto de' termini della suddetta serie equivaler deve a $\frac{2}{n}$. In essa i 3 primi fattori $\frac{n-3}{n}, \frac{n-6}{n-3}, \frac{n-8}{2(n-6)}$, rappresentano le funzioni $\frac{P\delta}{\beta\delta}, \frac{\theta\beta}{\theta\gamma}, \frac{K\gamma}{MK}$ de' vetti $\beta\delta$, $\theta\gamma$, MK inservienti ad ambidue i sistemi, sinistro e destro, de' vetti comunicanti. Il prodotto delle funzioni del sistema sinistro di questi vetti, che ci portano la pressione al punto X, è dunque

$\frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \cdot \frac{(n-20)}{n-16} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; che chiamo p. Diamo a n i valori nella serie 16, 20, 24, 28 ec., e avremo

$$n = 16 \; ; \; p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

fatto $$n = 20 \; ; \; p = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{3}$$

$$n = 24 \; ; \; p = \frac{12}{16} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{4} \cdot \text{ ec.}$$

Dunque generalmente $p = \frac{1}{\frac{n-8}{4}} = \frac{4}{n-8}$, ove n sia nella serie 16, 20, 24 ec. E quindi risulta la Pressione in X $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{4}{n-8} = \frac{2}{n}$; la quale distribuita agli appoggj F', F'' egualmente distanti da X, fa essere Pr. in F' $= \frac{1}{n}$, Pr. in F'' $= \frac{1}{n}$; il che mostra rispetto ai suddetti appoggj F', F'' esser giusta la posizione del sistema sinistro de' nostri vetti.

31 Esaminata la serie dell' equazione stabilita sopra $p = \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \cdot \frac{(n-20)}{n-16} \cdot \frac{(n-24)}{n-20} \cdots \frac{1}{2}$, osservo aver essa la proprietà, che se in vece di qualunque de' fattori del 2.° membro sostituisco il complemento del fattore all' unità, trascurando tutti i seguenti, non resta niente alterato il valore di p, che resta sempre $= \frac{4}{n-8}$. Per esempio in vece del 1.° fattore $\frac{n-12}{n-8}$ metto $\frac{4}{n-8}$, che è il complemento all' unità dello stesso 1.° fattore, e trascuro tutti i rimanenti; diventa $p = \frac{4}{n-8}$, come prendendo l' intero prodotto. In vece di $\frac{n-16}{n-12}$, pongo il com-

complemento all' unità $\frac{4}{n-12}$, non curando i seguenti, e nasce $p = \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{4}{n-12} = \frac{4}{n-8}$: il che si verifica per qualunque altro fattore.

32 Ciò posto, ripigliamo l' intera serie delle funzioni de' vetti, e sottoponghiamo ai termini i valori corrispondenti;

$$(B) \ldots \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{MK} \ldots\ldots \frac{Z''X'''}{X''Z''} \cdot \frac{Z'X''}{X'Z'} \cdot \frac{ZX'}{XZ};$$

$$(C) \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \ldots\ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

L' ultimo fattore $\frac{1}{2}$ rappresenta la funzione $\frac{ZX'}{XZ}$, e il prodotto di tutti i fattori della serie (C) il valore della pressione in X. Se in vece di $\frac{ZX'}{XZ}$ sostituisco $\frac{XX'}{XZ}$, ho la pressione in Z. Ma ciò facendo levo $\frac{1}{2}$ e metto $\frac{1}{2}$, che è il complemento a 1 della prima metà. Dunque (n. 31) anche in Z avrò la pressione $\frac{2}{n}$, la quale distribuita agli appoggj F''', F'''' dal vette F'''F'''' fa provare a ciascun d' essi la pressione $\frac{1}{n}$. Il vette che seguita è ZX', la sua funzione già esaurita è $\frac{Z'X''}{X'Z'} = \frac{2}{3}$, che insiem colle altre ha servito a determinare la pressione in X'. L' altra sua funzione, che spetta alla pressione in Z', è $\frac{X'X''}{X'Z'} = \frac{1}{3}$. Dunque nella serie (B) in vece di $\frac{Z'X''}{X'Z'}$ dobbiamo mettere $\frac{X'X''}{X'Z'}$ e trascurare la funzione unica susseguente $\frac{ZX'}{XZ}$. Ora perchè $\frac{X'X''}{X'Z'}$ è il complemento all' unità di

$\frac{Z'X''}{X'Z'}$, nella serie (C) dobbiam surrogare al penultimo fattore $\frac{2}{3}$ il suo complemento all' unità, cioè $\frac{1}{3}$ non valutando l' ultimo fattore $\frac{1}{2}$; e avrem tuttavia il prodotto degli esistenti fattori, ossia la pressione in $Z' = \frac{2}{n}$ (n. 31), della quale il vette $F''''' F'''''$ ne dà la metà ovvero $\frac{1}{n}$ all' appoggio F'''', e l' altra metà all' appoggio F'''''. Il raziocinio riuscendo sempre il medesimo pei vetti susseguenti $Z''X''$ &c. sino al vette ultimo dalla parte sinistra, che è l' immediatamente precedente a VM, concluderemo, che la pressione in Z'' &c. sino all' ultima, la quale cade alla metà del lato che di un altro dista dall' ultimo aa', è $\frac{2}{n}$, e in conseguenza che tutti gli appoggj alla sinistra di num. $\frac{n-2}{2}$ sentono la stessa pressione $\frac{1}{n}$.

32 Passando dalla sinistra alla destra col vette d' unione KM, di cui sino ad ora abbiam fatto uso, in vece della funzione $\frac{K\gamma}{KM}$ dobbiam prendere la funzione $\frac{M\gamma}{KM}$, poi la funzione $\frac{VK}{VW}$, e fare il prodotto $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{KM} \cdot \frac{VK}{VW}$; indi, siccome le rette TS', $T'S'$, $T''S'' \ldots\ldots VW$ sono respettivamente eguali alle rette XZ, $X'Z'$, $X''Z'' \ldots VM$ e similmente poste, così diremo essere le funzioni di quelle che portano alla pressione in T nella destra, le medesime con queste che trasferiscono la pressione in X. Ma il valore delle funzioni destre era rappresentato da $\frac{(n-12)}{n-8}, \frac{(n-16)}{n-12}, \frac{(n-20)}{n-16}, \ldots \frac{1}{2}$. Dunque anche quel delle sinistre. E perchè $\frac{M\gamma}{KM} = \frac{n-4}{2(n-6)}$ (n. 29), $\frac{VK}{VW} = \frac{n-8}{n-4}$ (n. 27), sarà $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{KM} \cdot \frac{VK}{VW} = \frac{(n-3)}{n}$.

$\frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-4)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-8)}{n-4} = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)}$;
onde la press. in T $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-8)}{2(n-6)} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \cdot \frac{(n-16)}{n-12} \ldots \frac{1}{2} =$ Pr. in X (n. 30) $= \frac{2}{n}$; e distribuita essa agli appoggj B', B'' col vette B'B'', $\frac{1}{n}$ sarà la quantità di pressione che carica B' e B''.

33 Replicando il discorso, che abbiamo fatto ne' precedenti numeri, troveremo le vere pressioni sui punti S, S', S'' &c., ciascuna delle quali è $\frac{2}{n}$, e non rimane che l' ultima in V, che si ottiene colla funzione $\frac{WK}{VW}$ in vece della funzione $\frac{VK}{VW}$, ossia di $\frac{4}{n-4}$ in vece di $\frac{n-8}{n-4}$. Ora $\frac{4}{n-4}$ è il complemento all' unità di $\frac{n-8}{n-4}$, che è il termine precedente al primo della serie $\frac{n-12}{n-8}, \frac{n-16}{n-12} \ldots \frac{1}{2}$. Dunque per la proprietà dimostrata di questa serie, $\frac{4}{n-4} = \frac{(n-8)}{n-4} \cdot \frac{(n-12)}{n-8} \ldots\ldots \frac{1}{2}$; e la pressione in V $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{KM} \cdot \frac{WK}{VW} = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{(n-4)}{2(n-6)} \cdot \frac{4}{n-4} = \frac{2}{n}$; che rende ciascuna delle pressioni in a, $a' = \frac{1}{n}$. Alla destra i due appoggj in a', a fanno esservene due di più di que' che sono alla sinistra, e però tutti i destri saranno di num.° $\frac{n+2}{2}$, laddove i sinistri erano $\frac{n-2}{2}$. Questi due numeri in somma fanno n; ed ecco dimostrato, che colla divisata collocazione de' nostri vetti resta ca-

ricato ogni appoggio della pressione $\frac{1}{n}$, in una figura parilatera ed equilatera di num.° di lati n, essendo questo numero pari-pari.

34 Nell' ottogono (Fig. 8) QX cade su QV, e IT sopra IV. Dunque son nulli tutti gli altri vetti della Fig. generale XZ, X'Z' &c..... MV; TS, T'S' &c..... VW; e coincidendo i punti M, K del vette d' unione della generale, e così W, R nel punto V della ottogona, ivi ancora cadrà il punto γ, onde da V guidata a θ la retta $V\theta$, e prodotta δP sino all' incontro con essa in β, sarà $\beta\delta$ il vette primario, il quale combinato col vette AQ e con EF alla sinistra, indi coi vetti $V\theta$, HI, aa' alla destra, darà le 8 eguali pressioni, ciascuna delle quali è $\frac{1}{8}$, agli angoli dell' ottogono. Che sia $P\gamma = PV$, il ricaveremo eziandio dalla formola generale $P\gamma = \frac{2\cos.x\,\text{sen}.6x}{(n-6)\,\text{sen}.2x} = \frac{\cos.x\,\text{sen}.6x}{\text{sen}.2x}$, perchè $n = 8$. Ora, essendo nell' ottogono $x = \frac{R}{4}$, e quindi $\text{sen}.2x = \text{sen}.\frac{R}{2}$, $\text{sen}.6x = \text{sen}.\frac{3R}{2} = \text{sen}.\frac{R}{2}$, è chiaro che si fa $P\gamma = \cos.x = PV$.

35 Nel quadrato (Fig. 9) fatte le prime operazioni, che prescrive la nostra regola per la determinazione de' punti δ, θ, si vede che I cade in Q, ove è parimente situato il punto V, e dove dico che dee trovarsi anche γ. Perchè avendosi in generale $P\gamma = \frac{2\cos.x\,\text{sen}.6x}{(n-6)\,\text{sen}.2x}$, quando $n = 4$, si fa $x = \frac{2R}{n} = \frac{R}{2}$; onde $\text{sen}.2x = R$, $\text{sen}.6x = \text{sen}.3R = -\text{sen}.R$; sicchè $P\gamma = -\frac{2\cos.x\,\text{sen}.R}{-2\,\text{sen}.R} = \cos.x = PQ$. Nella costruzione generale veniva determinato il punto β dal concorso delle rette δP, $\gamma\theta$. Ma queste è visibile che pel quadrato concorrono nel punto H. Dunque β cade in H, e δPH è il vette primario. I comunicanti alla

sinistra sono $A\delta Q$, EQF, e questi 3 soli vetti esauriscono colle loro funzioni le 4 pressioni agli angoli del quadrato non avendo luogo le ulteriori delle ZX, Z'X', Z''X'' &c., che si presentano nelle figure superiori. Sarà pertanto

$$\text{Pr. in H} = \frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n} = \frac{1}{4}\text{; Pr. in A} = \frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{Q\delta}{AQ}$$

$$= \frac{3}{n}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\text{; Pr. in E} = \frac{P\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{A\delta}{AQ}\cdot\frac{QF}{EF} = \frac{3}{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} =$$

$\frac{1}{4}$ = Pr. in F, come dev' essere.

36 Regola II per istabilire il sistema de' vetti, che servono a portar le pressioni dal peso collocato nel centro della figura regolare agli angoli ove sono gli appoggj, quando essa è denominata da un numero pari-dispari.

Scelgo per figura generale il poligono di 18 lati eguali (Fig. 10); e praticate le stesse preparazioni, che si sono eseguite nella Fig. 7, indi tirata sino al lato sublime aa' la OPV, veggo che la serie delle sottese a 4 mezzi lati, QX, XZ, ZZ', Z'Z'' &c. non può per ragion del num.° de' lati pari-dispari arrivare al punto V, da cui l' ultima terminerà alla distanza di 2 mezzi lati. Nella Fig. di 18 lati le sottese alla sinistra son tre, QX, XZ, ZZ', e il punto Z' è distante da V perimetricamente dei 2 mezzi lati Z'a, aV. Lo stesso pur si dica delle sottese alla destra, che comincian da I, e terminano alla distanza di 2 mezzi lati da V, i quali sono nella Fig. di 18 S'a', a'V. Ciò posto, poichè abbiamo tra Q e il punto estremo dell' ultima sottesa un num.° di mezzi lati pari-pari, è chiaro che le altre linee X'Z', X''Z'' &c. determinate col metodo della 1.ª regola hanno l' ultima terminante alla stessa distanza di 2 mezzi lati da V; il che vuolsi dir pure delle linee analoghe alla destra. Siano R, K questi estremi punti, e M, W siano i punti d' intersezione degli ultimi vetti comunicanti a sinistra e a destra colle ultime delle linee PZ, PZ' &c..... PS che vanno al centro. Congiungo RK che si fa parallela ad aa', siccome il sarà anche la MW. Ora dico, che MW taglia la OV in γ per modo che, condotta $\gamma\theta$, e prolungata la δP sino al concorso con essa in β, sarà $\delta\beta$ il vette primario, l' altro principale $\gamma\theta$, e MW il vette d' unione de' due sistemi.

37 Per dimostrare la proposizione, cominciamo dalla serie degli angoli ZPX', Z'PX'', Z''PX''' &c. ..... MPR. Questi sono, come dà la 1.ª regola, $2x$, $4x$, $6x$, $8x$ &c. sino all' ultimo MPR. Nella Fig. di 18 lati l' ultimo è $4x$, in quella di 22 sarà $6x$ &c. Dunque, pei canoni de' termini generali delle serie aritmetiche, l' ang.° ultimo MPR nella Fig. generale è $= \frac{(n-10)x}{2}$. Aggiungiamo a MPR l' ang.° RPV $= 2x$, e verremo a formar l' ang.° MPV $=$ MPγ $= \frac{(n-6)x}{2}$. A questo è eguale WPγ; onde tutto l' ang.° MPW$=(n-6)x$. In oltre alla serie PX, PX', PX'', PX''' &c. corrispondono i valori seguenti: $\frac{\cos.x \text{ sen.}2x}{1 \text{ . sen.}2x}$, $\frac{\cos.x \text{ sen.}4x}{2 \text{ sen.}2x}$, $\frac{\cos.x \text{ sen.}6x}{3 \text{ sen.}2x}$ &c. (n. 25), e nella Fig. di 18 lati l' ultima linea è PX'' $= \frac{\cos.x \text{ sen.}6x}{3 \text{ sen.}2x} =$ PM. Dunque in generale

$$PM = \frac{\cos.x \text{ sen.}\frac{(n-6)x}{2}}{\frac{(n-6)}{4} \text{ sen.}2x} = PW.$$ Quindi viene Pγ $=$

$$\frac{PM.PW \text{ sen.}MPMW}{PM \text{ sen.}MP\gamma + PW \text{ sen.}WP\gamma} \text{ (lem. 3)} = \frac{PM \text{ sen.}MPW}{2 \text{ sen.}MP\gamma} =$$

$$\frac{\cos.x \text{ sen.}\frac{(n-6)}{2}x \text{sen.}(n-6)x}{\frac{(n-6)}{2} \text{ sen.}2x \text{ sen.}\frac{(n-6)}{2}x};$$ cioè $P\gamma = \frac{\cos.x \text{sen.}(n-6)x}{\frac{(n-6)}{2} \text{sen.}2x}$

$= \frac{2 \cos.x \text{ sen.}6x}{(n-6) \text{ sen.}2x}$, perchè sen.$nx =$ sen.2R, e sen.$(n-6)x =$ sen.$(2R-6x) =$ sen.$6x$. Ciò posto, poichè è l' ang.° $\gamma P\beta$ $=$ ang.° $\delta PO = 3x$, l' ang.° $\theta P\beta = 2R - \delta P\theta = 2R - 6x$, l' ang.° $\theta P\gamma = 2R - 6x + 3x = 2R - 3x$, e oltracciò P$\theta$ $= P\delta = \frac{2 \cos.x \text{ sen.}3x}{3 \text{ sen.}2x}$ (n. 21), $P\beta = \frac{P\gamma . P\theta \text{ sen.}\theta P\gamma}{P\gamma \text{ sen.}\gamma P\beta + P\theta \text{ sen.}\theta P\beta}$

(lem. 3), sarà coi simboli e colle riduzioni $P\beta = \frac{2 \cos.x \, \text{sen}.3x}{(n-3) \, \text{sen}.2x}$, valore identico col trovato nella precedente regola, il quale costituisce $\beta\delta$ vette primario delle nostre pressioni. Ma dallo stesso lem. 3 abbiamo $\frac{\beta\gamma}{\gamma\theta} = \frac{P\beta \, \text{sen}.\gamma P\beta}{P\theta \, \text{sen}.\gamma P\theta}$, coi simboli $= \frac{3}{n-3}$. Dunque $\theta\gamma$ è l' altro vette principale, e pei valori di questi 2 vetti son conformi i risultati della 1.ª e della 2.ª regola, che li presentano colle medesime espressioni.

38 Anche i valori delle funzioni de' vetti comunicanti, $\frac{ZX'}{XZ}, \frac{Z'X''}{X'Z'}, \frac{Z''X'''}{X''Z''}$ &c. devon' esser gl' istessi che quelli della 1.ª regola, perchè nella 1.ª e nella 2.ª sono affatto simili le costruzioni; e però costituiscono essi la serie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ &c., che ha per termine generale $\frac{n-10}{n-6}$. In fatti, posto $n = 18$, diventa $\frac{n-10}{n-6} = \frac{2}{3}$, e nella Fig. di 18 lati, essendo $Z'X'$ l' ultimo vette comunicante del sistema sinistro, si fa realmente $\frac{Z'X''}{Z'X'} = \frac{2}{3}$. Dunque il prodotto delle funzioni di questi che trasferiscono la pressione al punto X, equivale, prendendo al rovescio la serie, a $\frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \cdot \frac{(n-18)}{n-14} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{n-6}$; la quale ugualità si proverà, come s' è fatto al n. 30. Sarà altresì vero, che in vece di qualunque dei fattori del prodotto si può sostituire il suo complemento all' unità, non valutando tutti i susseguenti, senza cangiamento nel risultato $\frac{4}{n-6}$, come si ha dall' intero prodotto: e con queste sostituzioni successive verremo a rappresentare le funzioni ultime ascendendo, $\frac{XX'}{XZ}, \frac{X'X'}{X'Z'}, \frac{X''X''}{X''Z''}$ &c.,

che trasferiscono le pressioni ai punti Z, Z', Z'' . . . . R. Finalmente tutto ciò, che si è detto relativamente al sistema sinistro de' vetti, converrà pure al destro, ove i vetti sono simili nella posizione ai primi, ed eguali di numero, mentre nelle figure della 1.ª regola il num.° de' vetti alla destra superava di un' unità quelli della sinistra.

39 Un' altra diversità, che passa tra le figure soggette alla 1.ª regola e quelle della 2.ª, sta nel vette d' unione MW, e nelle sue eguali funzioni $\frac{M\gamma}{MW}$, $\frac{W\gamma}{MW}$. Il valore di ciascuna di queste funzioni non è altro che $\frac{1}{2}$, laddove nella Fig. 7 era la funzione del vette d' unione $\frac{K\gamma}{KM} = \frac{n-8}{2(n-6)}$, e l' altra $\frac{M\gamma}{KM} = \frac{n-4}{2(n-6)}$. La qual cosa avvertita, noi possiam tosto presentare il valore dell' intero prodotto delle funzioni, che ci guidano alle pressioni ne' punti X, Z, Z', Z'' &c., o ai punti T, S, S', S'' &c. Imperocchè, essendo la quantità della pressione in X = $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\theta\beta}{\theta\gamma} \cdot \frac{W\gamma}{MW} \cdot \frac{MR}{MN} \ldots\ldots \frac{Z''X'''}{X''Z''} \cdot \frac{Z'X''}{XZ'} \cdot \frac{ZX'}{XZ}$, colle specie analitiche abbiamo Pres. in X = $\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \cdot \frac{(n-18)}{n-14} \ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; ossia, perchè $\frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \ldots\ldots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{n-6}$ (n. 38), Press. in X = $\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n-6} = \frac{2}{n}$ = Pr. in T. E per ciò che si è detto al n. 38, anche le pressioni in Z, Z', Z'' . . . . . R, o in S, S', S'' . . . . . K saranno ciascuna = $\frac{2}{n}$; e quindi ad ogni appoggio F', F'' . . . . . *a*, e così B', B'' . . . . *a'*, verrà trasferita dai vetti la pressione $\frac{1}{n}$.

40 Si è veduto essere il prodotto $\frac{(n-10)}{n-6} \cdot \frac{(n-14)}{n-10} \cdot \frac{(n-18}{n-14}$ . . . .

..... $\frac{1}{2} = \frac{4}{n-6}$. Laonde, fatto $n = 10$, risulta esso $= \frac{4}{4} = 1$. Dal che si deduce, che i soli 3 primi fattori $\frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2}$ danno la pressione in X nel decagono (Fig. 11); e che si ha Press. in X o in T $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-6)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10}$.

41 L'essagono (Fig. 12), che è la più semplice delle figure di num.° di lati pari-dispari, pare a prima vista che si sottragga dall' inclusione nelle nostre formole generali, e voglia un trattamento a parte; atteso che, essendo per l' essagono $x = \frac{R}{3}$, $2x = \frac{2R}{3}$, $6x = 2R$, che dà sen.$6x$ $=$ sen.$2R = 0$, se si pongono questi valori nel generale di $P\gamma = \frac{2 \cos.x \text{ sen}.6x}{(n-6) \text{ sen}.2x}$, perchè $n = 6$, risulta $P\gamma = \frac{0}{0}$, che ci lascia affatto al bujo. Ma rimoveremo questa oscurità col rivolgerci all' espressione generale di $P\delta = \frac{2 \cos.x \text{ sen}.3x}{3 \text{ sen}.2x}$, la quale si cangia per la nostra figura in $P\delta = \frac{2 \cos.\frac{R}{3} \text{ sen}.R}{3 \text{ sen}.\frac{2R}{3}}$; e siccome $\cos.\frac{R}{3} = \text{sen}.\frac{2R}{3}$, sen.$R = r = PE$, avrem $P\delta = \frac{2r}{3} = P\theta$. Ma in generale $P\beta = \frac{3P\delta}{n-3}$. Dunque $P\beta = \frac{2r}{3} = P\delta$ nell' essagono. Adattando pertanto la Fig. 10 alla presente, riusciranno eguali le rette $P\beta$, $P\theta$, sarà isoscele il triangolo $\theta P\beta$, e l' angolo $\delta P\theta$ esterno doppio dell' ang.° $P\theta\beta$. Ma l' ang.° $\delta P\theta = 6x = 2R$. Dunque $P\theta\beta = R$. Ora, congiunta $\theta\delta$ che sega la PO in ω, anche l' ang.° $\omega P\theta$, metà dell' ang.° $\delta P\theta$, è un retto; in conseguenza le rette ωP, $\theta\beta$ diventan parallele. Ma il concorso di queste rette determina il pun-

to γ. Dunque questo punto nell' essagono è a un' infinita distanza da P, e però $P\gamma$ infinita. In oltre sta $r : \cos.3x :: P\theta : P\omega$; e per l' essagono, $r : \cos.R :: P\theta : P\omega$, cioè $P\omega = 0$, perchè $\cos.R = 0$. Onde il punto ω cade in P; ed essendo $\delta P\theta = 2R$, $P\theta$ sarà nella direzione di $\delta P\beta$; e poichè $P\theta = P\beta$, il punto θ cadrà in β, e nulla si farà la $\theta\beta$; il che rende nulle le pressioni, che derivano dalla pressione in γ colla funzione $\frac{\theta\beta}{\theta\gamma} = \frac{n-6}{n-3} = 0$, nel nostro caso di $n = 6$. Ecco perciò, come dalle nostre formole generali si deduce il modo di determinare il vette primario $\beta\delta$ nell' essagono. Trovati secondo il solito i punti δ, θ (Fig. 12), si tiri pel centro la δP, che prodotta va a θ. Ma in θ pure cade il punto β. Dunque abbiamo in pronto la direzione e la grandezza del vette primario $\beta\delta$, il quale combinato cogli altri vetti AQ, EF, IH, BC ci dà la pressione $\frac{1}{6}$ per ciascun angolo della figura.

42 Regola III. per determinare il vette primario e la posizione degli altri vetti, che portano la pressione $\frac{1}{n}$ a ciascun appoggio negli angoli delle figure impari-latere, quando $n+1$ è un numero pari-pari, posto il peso P nel centro della figura.

Assunto un angolo qualunque A della fig. 13, che quantunque di 23 lati eguali si deve considerare come generale, alla sinistra procederemo collo stesso metodo, che si è praticato per le figure pari-latere. Verremo per tal modo a determinare il punto δ, il braccio δP del vette primario e in seguito gli altri vetti utili del sistema sinistro XZ, X'Z', X''Z'', X'''Z''' &c. Condotta da A pel centro P sino al punto V del lato sublime aa' la retta APV, l' ultimo vette MRV terminerà nel punto V, perchè tra A ed V rimanendo frapposti num.° n di mezzi lati, levati i 3 mezzi lati tra A e Q, tra Q ed V vi sarà il numero di mezzi lati $n-3 = n+1-4$; e siccome $n+1$ è per l' ipotesi num.° pari-pari, lo sarà pure $n+1-4 = n-3$; onde

per ciò che si è detto nella 1.ª regola, l' ultimo vette MRV avrà un de' suoi termini nel punto V, e il punto R d' intersezione dell' ultimo vette coll' ultima linea centrale verrà determinato con operazioni simili alle praticate nelle figure di num.° di lati pari-pari. Alla destra sottendo la AI a 3 mezzi lati, e principiando da I replico le medesime costruzioni eseguite nella sinistra da Q sino all' ultimo vette destro WKV, essendo chiaro che quest' ultimo vette eziandio dee terminare in V, e che i punti W, K sono gli analoghi ai punti M, R. Come siam giunti a questi ultimi vetti, dobbiam condurre le rette RW, KM. Queste si segano in qualche punto γ, che sarà un punto della retta APV, il che è evidente. Ora da γ ad I tiriamo una retta, che sarà incontrata dalla δ^2 prodotta in un punto β. Sarà $\delta\beta$ il vette primario, γI il 2.° vette principale, KM il vette d' unione; e combinati questi vetti col sistema sinistro e destro degli altri vetti comunicanti, si avrà a ciascun degli appoggj la pressione $\frac{1}{n}$.

43 Per dimostrare la proposizione, rifletteremo, che essendo state condotte le rette PX, PX', PX'' ec. collo stesso metodo adoperato nelle figure pari-latere, i loro valori saranno espressi come sopra al num.° 25; cioè sarà

$$PX = \frac{\cos.x \,\text{sen}.2x}{1 \,.\, \text{sen}.2x},\quad PX' = \frac{\cos.x \,\text{sen}.4x}{2\,\text{sen}.2x},\quad PX'' = \frac{\cos.x \,\text{sen}.6x}{3\,\text{sen}.2x}$$

&c. Prendendo la KM per vette d' unione, nel poligono di 23 lati la PM diventa $= PX''' = \frac{\cos.x \,\text{sen}.8x}{4\,\text{sen}.2x}$. Sarà quindi facile lo stabilire, che dev' essere in generale

$$PM = \frac{\cos.x \,\text{sen}.\left(\frac{n-7}{2}\right) x}{\left(\frac{n-7}{4}\right) \text{sen}.2x} = PW;$$

per ragione dell' eguaglianza de' due sistemi. Così nello stesso poligono la PR si fa $= PX'''' = \frac{\cos.x \,\text{sen}.10x}{5\,\text{sen}.2x}$; e quindi generalmente

$$PR = \frac{\cos.x \,\text{sen.}\left(\frac{n-3}{2}\right) x}{\left(\frac{n-3}{4}\right) \text{sen.}2x} = PK.$$ Rapporto agli angoli XPZ, X'PZ', X''PZ'', si sa che per la costruzione fatta crescono colla legge di questa serie $4x$, $6x$, $8x$, $10x$ &c.; e si vede, che l' ultimo MPV nel poligono di 23 lati è $X'''PZ''' = 10x$. Dunque in generale $MPV = \frac{(n-3)x}{2}$, e $\text{sen.}MPV = \text{sen.}MP\gamma = \text{sen.}\frac{(n-3)x}{2}$. Perchè poi $RPV = MPV - 2x = \frac{(n-7)x}{2}$, avrem $\text{sen.}RPV = \text{sen.}KPV = \text{sen.}KP\gamma = \text{sen.}\frac{(n-7)x}{2}$; e in conseguenza $\text{sen.}MPK = \text{sen.}(n-5)x = \text{sen.}5x$, perchè $\text{sen.}nx = \text{sen.}2R = 0$. Ma (lem. 3) $P\gamma = \frac{PM \,.\, PK \,\text{sen.}MPK}{PM \,\text{sen.}MP\gamma + PK \,\text{sen.}KP\gamma}$. Dunque in analisi $P\gamma = \frac{2\cos.x \,\text{sen.}5x}{(n-5)\,\text{sen.}2x}$. In oltre si trova essere $\frac{K\gamma}{MK} = \frac{P\gamma \,\text{sen.}KP\gamma}{PM \,\text{sen.}MPK}$, cioè $\frac{K\gamma}{MK} = \frac{n-7}{2(n-5)}$; e però $\frac{M\gamma}{MK} = \frac{n-3}{2(n-5)}$. Sicchè restan note le due funzioni del vette d' unione MK, che trasferisce col mezzo de' due sistemi de' vetti le pressioni agli appoggj.

44 Le funzioni del sistema sinistro de' vetti, che ci portano all' ultima pressione in X, sono $\frac{ZX'}{ZX}$, $\frac{Z'X''}{Z'X'}$ &c. sino al vette che immediatamente precede all' ultimo MV. Ora i valori di queste funzioni è già noto osservar la legge della serie $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ &c., di maniera che nella figura di 23 lati termina alla funzione $\frac{Z''X'''}{X''Z''} = \frac{3}{4}$. Laonde il termine ultimo e generale viene ad essere $\frac{n-11}{n-7}$; e presa al

rovescio, la serie sarà $\frac{n-11}{n-7}, \frac{n-15}{n-11}, \frac{n-19}{n-15} \ldots \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.

E poichè la pres. in X è eguale a $\frac{I\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM}$ moltiplicato nel prodotto delle suddette funzioni, di cui le ultime discendendo sono $\frac{Z''X'''}{Z'X''}, \frac{Z'X''}{ZX'}, \frac{ZX'}{ZX}$; sostituiti alla serie i corrispondenti valori analitici, si ottiene la Pres. in X $= \frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} \cdot \frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \cdot \frac{(n-19)}{n-15} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$.

Di più osservo, che se nel prodotto de' fattori della suddetta serie faccio successivamente $n = 15$, $n = 19$, $n = 23$, mi risulta questo prodotto $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Quindi generalmente sarà esso prodotto $\frac{1}{\frac{n-7}{4}} = \frac{4}{n-7}$. Posso dunque sostituire nella pressione in X questo valore; e nasce Pr. in X $= \frac{I\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{K\gamma}{KM} \cdot \frac{4}{n-7}$. Ora, perchè è l'angolo API $= 3x$, $\delta PA = \gamma P\beta = 2x$; sarà $IP\gamma = 2R - 3x$, $IP\beta = 2R - 5x$; e perciò sen.$\gamma P\beta$ = sen.$2x$, sen.$IP\beta$ = sen.$5x$., sen.$IP\gamma$ = sen.$3x$. Ma $P\beta = \frac{P\gamma \cdot PI \text{ sen. } IP\gamma}{P\gamma \text{ sen.} \gamma P\beta + PI \text{ sen.} IP\beta}$; $\frac{\beta\gamma}{I\gamma} = \frac{P\beta \text{ sen.} \gamma P\beta}{PI \text{ sen.} \gamma PI}$ (lem. 3). Dunque colle specie e colle riduzioni, $P\beta = \frac{2\cos.x \text{ sen.} 2x}{(n-3) \text{ sen.} 2x}$, come al n. 21; $\frac{\beta\gamma}{I\gamma} = \frac{2}{n-3}$, e quindi $\frac{I\beta}{I\gamma} = \frac{n-5}{n-3}$, $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{3}{n}$, $\frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n}$. Onde nasce, sostituendo, Pres. in X $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{(n-7)}{2(n-5)} \cdot \frac{4}{n-7} = \frac{2}{n}$, che è pression vera, mentre con questa ho le pressioni agli appoggj F', F'', che son la metà, cioè $\frac{1}{n}$.

45 Il prodotto $\frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$ è fornito della proprietà medesima, che aveva il prodotto analogo nelle figure pari-latere. Se a qualunque fattore sostituisco il suo complemento all' unità, ommettendo gli altri che seguono, ho il medesimo risultato dell' intero prodotto. E le cose altrove già dette manifestano, che con queste successive sostituzioni io voglio rappresentar le funzioni $\frac{XX'}{XZ}$, $\frac{XX'}{X'Z'}$ &c. sino all' ultima della parte sinistra, che nella fig. di 23 lati è $\frac{X''X'''}{X''Z''}$; le quali servono alla determinazione delle pressioni in tutti i punti Z, Z', Z'' &c. Ciascuna di queste è $\frac{2}{n}$; e quindi $\frac{1}{n}$ ciascuna delle altre in F', F'', F''' &c.

46 Avendo noi adoperato il vette d' unione KM, relativamente al sistema destro, oltre il numero eguale de' vetti similmente collocati che nel sinistro, entra in azione anche il vette VKW colle sue funzioni $\frac{VK}{VW}$, $\frac{WK}{VW}$; e alla funzione $\frac{K\gamma}{MK}$, che spettava all' altro sistema, devesi ssotituir la funzione $\frac{M\gamma}{MK} = \frac{n-3}{2(n-5)}$ (n. 43). Ora, essendo sen.MPV = sen.VPW = sen.$\frac{(n-3)x}{2}$, sen.KPV = sen.K?γ = sen.$\frac{(n-7)x}{2}$, come altresì sen. KPW = sen.$2x$, IK = $\frac{\cos.x \text{ sen.}\frac{(n-3)}{2}x}{\frac{(n-3)}{4} \text{ sen. } 2x}$ (n. 43), PV = cos.x, e pel lem. 3, $\frac{WK}{VW} = \frac{PK \text{sen.KPW}}{PV \text{sen.VPW}}$, avremo in analisi $\frac{WK}{VW} = \frac{4}{n-3}$; e quindi $\frac{VK}{VW} = \frac{n-7}{n-3}$. Il resto è lo stesso come nel

sistema sinistro. Onde ne risulta la pressione in T = $\frac{P\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{M\gamma}{MK} \cdot \frac{VK}{VW} \cdot \frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; ossia Pres. in T $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{(n-3)}{2(n-5)} \cdot \frac{(n-7)}{n-3} \cdot \frac{(n-11)}{n-7} \cdot \frac{(n-15)}{n-11} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. Ma il 3.° e il 4.° fattore danno il risultato $\frac{n-7}{2(n-5)}$, che rende identico il valore della pres. in T con quello della pres. in X. Dunque anche la pres. in T $= \frac{2}{n}$; e tale sarà ancora per le cose dimostrate la pressione in S, S', S'', &c. Perchè poi $\frac{n-7}{n-3}$ è il termine precedente della serie de' fattori $\frac{n-11}{n-7}, \frac{n-15}{n-11} \ldots \frac{1}{2}$, avrà esso pure la proprietà, che sostituendo in sua vece il suo complemento all' unità, cioè $\frac{4}{n-3}$, coll' ommissione de' fattori susseguenti troveremo essere anche la pressione in V $= \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{(n-3)}{2(n-5)} \cdot \frac{4}{n-3} = \frac{2}{n}$; e questa serve a caricar della pres. $\frac{1}{2}$ gli ultimi appoggj a, a'. Finalmente è la pres. in I $= \frac{I\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{\beta\gamma}{I\gamma} = \frac{(n-3)}{n} \frac{2}{n-3} = \frac{2}{n}$; il che fa sentire la pressione $\frac{1}{n}$ anche agli appoggj B, B'. Dunque &c.

47 Nell' eptagono (Fig. 14), perchè $x = \frac{2R}{7}$, abbiamo sen.$5x$ = sen.$\frac{10R}{7}$ = sen.$(2R - \frac{10R}{7})$ = sen.$\frac{4R}{7}$ = sen.$2x$, ed è $P\gamma = \frac{2\cos.x \,\text{sen}.5x}{(n-5)\,\text{sen}.2x} = \cos.x$; onde diventa $P\gamma = PV$,

e γ cade in V. Condotta perciò γI, che incontra in β la δP protratta, si determina il vette primario $\beta\delta$ dell' eptagono, il quale insiem cogli altri vetti γI, AQ &c. dà ciascuna delle pressioni agli angoli $= \frac{1}{7}$. L' ambiguità che nasce dalla generale espressione di $PM = \frac{\cos.x \text{ sen.} \frac{(n-7)}{2} x}{\frac{(n-7)}{4} \text{ sen.} 2x}$, la quale modificata all' ipotesi di $n = 7$ si cangia in $PM = \frac{0}{0}$, resta tolta colla riflessione, che nella costruzione generale eseguita nella fig. 13. la QX è stata sottesa a 4 mezzi lati del poligono; sicchè facendo lo stesso nell' eptagono, X cade in V, Q in M, e la QX diventa l' ultima sottesa MV. Dunque $PM = PQ = \cos.x$; con che si fa noto il valore indeterminato $\frac{0}{0}$, che risulta nel caso nostro dalla formola generale del valore di PM.

48 Anche il triangolo equilatero AEF (Fig. 15) resta compreso nelle nostre formole tosto che avremo dilucidati gli equivoci che nascono nelle generali ad esso adattate. A buon conto vediamo, che coincidono i punti Q V, che l' intersezion delle rette AQ LF dev' essere in P, e in conseguenza ivi è pur δ. In oltre, poichè nel triang.° AEF $x = \frac{2R}{3}$, $2x = \frac{4R}{3}$, $5x = \frac{10R}{3}$; sarà $\text{sen.}5x = \text{sen.}\frac{10R}{3}$ $= \text{sen.}\left(2R - \frac{10R}{3}\right) = \text{sen.}\left(-\frac{4R}{3}\right) = -\text{sen.}\frac{4R}{3} = -\text{sen.}2x$. Laonde nella formola generale di $P\gamma = \frac{2 \cos.x \text{ sen.}5x}{(n-3) \text{ sen.}2x}$, fatto $n = 3$, risulterà $P\gamma = \cos.x = PQ$; ed ecco che anche γ cade in V. Egli è poi nel valor di $P\beta$ che si presenta l' ambiguità; perchè essendo $P\beta = \frac{2 \cos.x \text{ sen.}3x}{(n-3) \text{ sen.}2x}$ (n. 44), quando $n = 3$, facendosi $\text{sen.}3x = \text{sen.}2R = 0$, diventa $P\gamma$

=

$= \frac{0}{0}$. Ma a toglier l'equivoco, avendo sotto agli occhj la general figura 13, ragioneremo così. Poichè si è trovato $P\gamma = \cos.x = PI$, sarà isoscele il triang.° γPI, ed essendo ang.° $API = 3x$, viene pel caso nostro $P\gamma\beta = \frac{3x}{2}$, $\text{sen.}P\gamma\beta = \text{sen.}\frac{3x}{2}$, $\cos.P\gamma\beta = \cos.\frac{3x}{2}$. Otracciò $\text{sen.}\gamma P\beta = \text{sen.}\delta PA = \text{sen.}2x$, $\cos.\gamma P\beta = \cos.2x$; e quindi $\text{sen.}P\beta\gamma = \text{sen.}\frac{7x}{2} = \text{sen.}\left(2R - \frac{7R}{3}\right) = \text{sen.}\left(-\frac{R}{3}\right) = -\text{sen.}\frac{R}{3}$. Ma $\text{sen.}P\beta\gamma : \text{sen.}P\gamma\beta :: P\gamma : P\beta$. Dunque $-\text{sen.}\frac{R}{3} : \text{sen.}\frac{3x}{2} :: \cos.x (= \cos.\frac{2R}{3} = \text{sen.}\frac{R}{3}) : P\beta$, e $P\beta = -\text{sen.}\frac{3x}{2} = -\text{sen.}R = -r = PE$, perchè il valor di $P\beta$ è negativo. Cadendo β in E (Fig. 15), il vette primario nel triang. equilatero è $\beta P\delta$, di cui un braccio βP è eguale al raggio PE, l'altro $P\delta$ è nullo. Onde tutte le pressioni che dipendono dalla funzione $\frac{P\delta}{\beta\delta}$ nella Fig. 13, pel triangolo son nulle. Rispetto poi a quelle che dipendono dalla funzione $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{P\beta}{P\beta} = 1$, non essendovi altri vetti comunicanti che APQ, ed EQF, sarà la pres. in $A = \frac{\beta P}{\beta\delta} \cdot \frac{QP}{AQ} = \frac{QP}{AQ} = \frac{1}{3}$. Così la pressione in $E = \frac{\beta P}{\beta\delta} \cdot \frac{AP}{AQ} \cdot \frac{QF}{EF} = 1 . \frac{2}{3} . \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. E perchè tale è ancora la pres. in F, noi abbiam già dalle nostre formole generali dedotte le 3 pressioni eguali agli angoli del triangolo equilatero: E possiamo francamente asserire, che tutte le figure, le quali soggiacciono alla condizione di questa terza regola, sono comprese nella nostra general costruzione.

49 Regola IV per determinar le pressioni agli angoli nelle figure regolari impari-latere, quando, il num.° n di

lati sia tale, che $n+1$ sia un numero pari-dispari, supposto il peso nel centro della figura.

Quest' ultima regola accetta le medesime preparazioni e costruzioni che si sono eseguite per le figure della 3.ª regola; e la Fig. 16 di 25 lati si assume come generale. Però in questa si vede che tra A ed V sono frapposti n mezzi lati alla sinistra e alla destra; e perchè sì AQ che AI son sottese di 3 mezzi lati, sarà $n-3$ il num.° de' mezzi lati tra Q ed V, come tra I ed V. Ma è $n-3=n+1-4$, e $n+1$ è num.° pari-dispari. Dunque non può essere $n+1-4$ ossia $n-3$ num.° pari-pari, e in vigore delle nostre operazioni consuete non può l' ultimo vette del sistema sinistro o destro arrivare ad V. Dico in oltre che terminerà di quà e di là 2 mezzi lati al di sotto di V in R, e in K, perchè essendone il num.°, tra Q, R, e tra I, K, $=n-5=n+1-6$, dall' essere $n+1$ pari-dispari, risulterà il num.° $n+1-6=n-5$ pari-pari. Tosto che siam giunti alle intersezioni M, W delle ultime rette PM, PW cogli ultimi vetti de' due sistemi, dobbiam guidare la MW, che sega la AV in γ. Questa è parallela al lato sublime aa', cui anche è parallela KK. Si conduca la γI incontrata da δP in β; e $\delta\beta$ è il vette primario, γI il 2.° vette principale, MW il vette d' unione. Eccone la prova. Le PX, PX', PX''.... PM costituiscono la serie $\frac{\cos.x \operatorname{sen}.2x}{1 . \operatorname{sen}.2x}$, $\frac{\cos.x \operatorname{sen}.4x}{2 \operatorname{sen}.2x}$, $\frac{\cos.x \operatorname{sen}.6x}{3 \operatorname{sen}.2x}$ &c.; il termine generale, cioè PM, sarà espresso così, $PM = \frac{\cos.x \operatorname{sen}.\frac{(n-5)x}{2}}{\frac{(n-5)}{4} \operatorname{sen}.2x} = PW$.

Gli angoli XPZ, X'PZ', X''PZ'' &c. sino all' ultimo sono nella serie $4x$, $6x$, $8x$ &c., la quale nel nostro poligono generale ha l'ultimo termine $=\frac{n-5x}{2}$. Levato da questo estremo ang.° quel che vien sotteso da 2 mezzi lati, riman l' ang.° MPR $=\frac{n-7x}{2}$, e aggiunto a questo l' ang.° RPV

cioè un angolo eguale al tolto, si fa $MPV = MP\gamma = \frac{(n-5)x}{2}$ $= WPV$. Onde $P\gamma = \frac{PM.PW \text{ sen.}MPW}{PM \text{ sen.}MP\gamma + PW \text{ sen.}WP\gamma} = \frac{PM \text{ sen.}2MP\gamma}{2 \text{ sen.}MP\gamma} = \frac{2 \cos x \text{ sen.}5x}{(n-5) \text{ sen.}2x}$.

50 Perchè le funzioni $\frac{ZX'}{ZX}$, $\frac{Z'X''}{Z'X'}$ &c. forman la serie $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ &c., dopo ciò che si è detto nelle precedenti regole, è facile il vedere, che sarà l' ultima funzione $= \frac{n-9}{n-5}$, la penultima $\frac{n-13}{n-9}$ &c. Quindi la serie rovesciata di queste funzioni in prodotto sarà $= \frac{(n-9)}{n-5} \cdot \frac{(n-13)}{n-9} \cdot \frac{(n-17)}{n-13} \ldots\ldots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = p$. Le funzioni del vette d' unione sono, ciascuna $= \frac{1}{2}$. Poi, come nell' altra regola, $\frac{P\beta}{\beta\delta} = \frac{3}{n}$, $\frac{P\delta}{\beta\delta} = \frac{n-3}{n}$, $\frac{\gamma\Gamma}{\gamma I} = \frac{2}{n-3}$, $\frac{I\beta}{\gamma I} = \frac{n-5}{n-3}$. Laonde, poichè è la pres. in $X = \frac{\Gamma\delta}{\beta\delta} \cdot \frac{I\beta}{I\gamma} \cdot \frac{W\gamma}{MW} \cdot p$, coi simboli analitici risulta Pr. in $X = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-9)}{n-5} \cdot \frac{(n-13)}{n-9} \cdot \frac{(n-17)}{n-13} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$. In modo simile a quello che si è praticato nelle precedenti regole, proveremo essere $\frac{(n-9)}{n-5} \cdot \frac{(n-13)}{n-9} \ldots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = p = \frac{4}{n-5}$. Dunque Pr. in $X = \frac{(n-3)}{n} \cdot \frac{(n-5)}{n-2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{n-5} = \frac{2}{r}$. Non manca la proprietà più volte ripetuta della serie p, di poter cioè sostituire a ciascun de' fattori il complemento all' unità, coll' ommissione de' seguenti, senza che si cangi il ri-

sultato $\frac{4}{n-5}$; e da ciò emanano le pressioni in Z, Z', Z" &c. eguali ciascuna a $\frac{2}{n}$; finalmente tutto ciò che si è detto sin quì vale egualmente pei punti analoghi del sistema de' vetti sinistro. Sarà dunque completa coll' unione delle nostre 4 regole la dimostrazione, che la grandezza e collocazione de' nostri vetti risultante dalle eseguite costruzioni trasferiscono effettivamente la pressione $\frac{1}{n}$ a ciascun appoggio in tutte le figure ordinate, che abbiano nel centro della figura il peso P.

51 Avendosi generalmente $P\delta = \frac{2 \cos.x \, \text{sen}.3x}{3 \, \text{sen}.2x}$; per il pentagono che dà $\text{sen}.3x = \text{sen}.2x$, abbiam $P\delta = \frac{2 \cos.x}{3} = \frac{2PI}{3}$; e perchè in generale $n-3 : 3 :: P\delta : P\beta$, cioè nel nostro caso $2 : 3 :: P\delta : P\beta :: \frac{2PI}{3} : P\beta$, risulta $P\beta = PI$. Onde (Fig. 17), siccome, per proprietà della figura, δP prodotta deve cadere in I, ivi pur sarà β'; cosicchè il vette primario $\beta\delta$ combinato coi vetti BC, AQ, EF tramanderà a ciascuno apppoggio la pressione $\frac{1}{5}$. Se nel pentagono si vuol sapere, ove cade γ, la formola generale $P\gamma = \frac{2 \cos.x \, \text{sen}.5x}{(n-5) \, \text{sen}.2x}$ non ci è utile a motivo che essendo per il pentagono $5x = 2R$, $\text{sen}.5x = 0$, come lo è $n-5$, si fa $P\gamma = \frac{0}{0}$. Ma un semplice raziocinio sulla Fig. 16 generale ci farà conoscere questo valore celato sotto l' espressione indeterminata. L'ang.° δPI è eguale a $5x = 2R = PI\beta + P\beta I$. Ma PI cade su $P\beta$ in maniera che l'ang.° $PI\beta$ dee farsi $= 2R$. Dunque nullo l' ang.° $P\beta I$. Ma $P\beta I = P\gamma\beta + \gamma P\beta$; onde, poichè è sempre l' ang.° $\gamma P\beta = 2x$, fa d' uopo che

sia $P\gamma\beta = -2$, cioè nel medesimo senso di $\gamma P\beta$, che in quantità gli è eguale: e quindi γ cade in P, e diventa $P\gamma = 0$.

52 Sino a quest' ora ho messo insieme molti preparativi da viaggio, ma realmente ho fatto poco o niente di strada. Dal sapersi, come si debban tagliare i lati di un poligono regolare, ossia dividere gli angoli centrali, onde poter determinare col mezzo delle altre facili operazioni il vette primario e i due sistemi de' vetti comunicanti, posto il peso nel centro della figura, non risulta, che si sappia eziandio, quale, chiamato centro il punto dov' è il peso, debba essere la divisione, che esige la Natura, de' medesimi angoli, ove il peso sia collocato fuori del centro della figura, o in quelle che sono regolari, o nelle altre che nol sono, onde coll' uso de' vetti situati in modo simile a quello delle 4 regole si abbiano agli angoli le vere e giuste pressioni. Abbiam già veduto, che nel trapezio, cioè nella Fig. più semplice dopo il triangolo pienamente esaurito, colla sola legge de' momenti, o colla equivalente de' vetti comunicanti il problema delle pressioni è di sua natura indeterminato, essendo sempre arbitrario un de' segmenti, come EQ del lato EF (Fig. 4), il quale però se fosse cognito, renderebbe noti tutti gli altri segmenti, ovvero tutte le divisioni, che far si debbono degli angoli centrali. Ciò non ostante, potendoci forse esser utile il conoscere qual forma vestano i valori delle 4 pressioni, se esprimiamo con qualche simbolo l' angolo EPQ, che realmente ci è incognito, intraprendiamone il calcolo, e veggiamo qual siane il risultato.

53 Sia pertanto $AP = a$, $PE = b$, $PF = c$, $PC = d$; sen.APE $=$ sen.i; sen.EPF $=$ sen.l, sen.FPC $=$ sen.g; onde sen.APC $= -$ sen.$(i + l + g)$, cos.APC $=$ cos.$(i + l + g)$. In oltre sen.EPQ $=$ sen.y, e quindi sen.QPF $=$ sen.$(l - y)$. Si potrebbe, volendo andar per la lunga, determinare analiticamente il valore del vette primario δC, o $\delta\beta$, perchè, come si è dimostrato nelle figure quadrilatere generalmente, δP prodotta va a C; e poi coll' ajuto degli altri vetti AQ, EF esprimere le 4 pressioni. Ma poichè nello scolio del n. 15 abbiam veduto, che eguali pressioni si ottengono anche pigliando per vette primario QO, combinato poi co-

gli altri vetti AC, EF, riuscendo assai più semplice il calcolo, batteremo questa seconda strada. Ora ci si offre subito il valore di PQ, mediante il nostro lem. 3, perchè

$$PQ = \frac{PE.PF\ sen.EPF}{PE\ sen\ EPQ + PF\ sen.FPQ} = \frac{bc\ sen.l}{b\,sen.y + c\,sen.(l-y)}.$$

Di più, $sen.APQ = sen.(i+y) = sen.APO$; $cos.APO = -\ cos.(i+y)$; finalmente $sen.CPO = sen.(CPF + FPQ) = sen.(g+l-y)$. Ma $PO = \frac{AP.PC\ sen.APC}{AP\ sen.APO + CP\ sen.CPO} = -\frac{ad\ sen.(i+l+g)}{a\ sen.(i+y) + d\ sen.(g+l-y)}$. Dunque sarà espresso anche il 2.° braccio del vette QO; e però tutto il vette $QO = PQ + QO = \frac{bc\ sen.l}{b\ sen.y + c\ sen.(l-y)} - \frac{ad\ sen.(i+l+g)}{a\ sen.(i+y) + d\ sen.(g+l-y)}$; cioè riducendo, avremo

$$QO = \frac{\left\{\begin{array}{l} abc\,sen.l\,sen.(i+y) + bcd\,sen.l\,sen.(g+l-y) \\ -abd\,sen.y\,sen.(i+l+g) - acd\,sen.(l-y)\,sen.(i+l+g) \end{array}\right.}{[b\,sen.y + c\,sen(l-y)][a\,sen.(i+y) + d\,sen.(g+l-y)]}.$$

Calcolando coi medesimi simboli, ne risulterà la funzione

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{bc\,sen.l(a\,sen.(i+y) + d\,sen.(g+l-y))}{\left\{\begin{array}{l} abc\,sen.l\,sen.(i+y) - abd\,sen.y\,sen.(i+l+g) \\ -acd\,sen.(l-y)\,sen.(i+l+g) + bcd\,sen.l\,sen.(g+l-y) \end{array}\right.}.$$

Chiamo per comodo il divisore di questa funzione = D, onde

$$\frac{PQ}{QO} = \frac{bc\,sen.l(a\,sen.(i+y) + d\,sen.(g+l-y))}{D};$$ da cui nasce

$$\frac{PO}{QO} = -\frac{ad\,sen.(i+l+g)(b\,sen.y + c\,sen.(l-y))}{D}.$$ Rimane ora di esprimere le funzioni de' vetti AC, EF, le quali ci vengono somministrate dal citato lemma, essendo

$$\frac{CO}{AC} = \frac{PO\,sen.CPO}{AP\,sen.APC} = \frac{d\,sen.(g+l-y)}{a\,sen.(i+y) + d\,sen.(g+l-y)};$$

$\frac{FQ}{EF} = \frac{PQ\text{sen.}FPQ}{PE\text{sen.}EPF} = \frac{c\text{sen.}(l-y)}{b\text{sen.}y + c\text{sen.}(l-y)}$; e quindi poi

$\frac{AO}{AC} = \frac{a\text{sen.}(i+y)}{a\text{sen.}(i+y) + d\text{sen.}(g+l-y)}$; $\frac{EQ}{EF} = \frac{b\text{sen.}y}{b\text{sen.}y + c\text{sen.}(l-y)}$.

Ma Press. in $A = \frac{PQ}{OQ} \cdot \frac{CO}{AC}$; Press. in $E = \frac{PO}{OQ} \cdot \frac{FQ}{EF}$;

Press. in $F = \frac{PO}{OQ} \cdot \frac{EQ}{EF}$; Pr. in $C = \frac{PQ}{OQ} \cdot \frac{AO}{AC}$. Dunque

Press. in $A = \frac{bcd\text{sen.}l\text{sen.}(g+l-y)}{D}$;

Press. in $E = -\frac{acd\text{sen.}(l-y)\text{sen.}(i+l+g)}{D}$;

Press. in $F = -\frac{abd\text{sen.}y\text{sen.}(i+l+g)}{D}$;

Press. in $C = \frac{abc\text{sen.}l\text{sen.}(i+y)}{D}$.

54 Non si tralasci di avvertire, che ogni numeratore ne' valori delle suddette pressioni è un de' 4 termini componenti il denominatore, il quale perciò è eguale alla somma di tutti i numeratori: che il numeratore della pres. in A ha per fattore il terno *bcd* formato dal prodotto delle 3 linee centrali EP, PF, PC opposte all' angolo A; il numeratore della pres. in E ha per fattore il terno *acd* delle 3 centrali FP, AP, CP opposte all' angolo E; il che respettivamente si verifica ancora per le altre pressioni in F, e in C: finalmente, che ciò essendo vero, qualunque sia y, debb' esser vero anche quando venga determinato l' angolo y come richiede la Natura.

55 Facciasi ora il confronto tra i certi valori delle pressioni trovate pel triangolo con quelli delle pressioni ai 4 appoggj del trapezio; e vedrem per più d' un verso un' analogia luminosa che passa tra le une e le altre. La pressione in A del triangolo AEC (fig. z.) si trova $= \frac{bc\text{sen.}l}{ab\text{sen.}i - ac\text{sen.}(i+l) + bc\text{sen.}l}$ (n. 9). Quì non abbiamo di opposto all' angolo A che le due centrali $EP = b$, $CP = c$, colle quali vien formato l' ambo *bc*, laddove nel

trapezio essendo 3 le centrali opposte ad A, che sono b, c, d, si forma il terno bcd: l' ambo bc è un fattore del numeratore della pres. in A per il triangolo, siccome nel trapezio del numeratore della simil pressione in A è un fattore il terno bcd; e fatto il confronto delle altre pressioni nell' una e nell' altra figura, si vedrà esattamente aver luogo la stessa corrispondenza. In oltre i numeratori delle pressioni nel triangolo sono precisamente un de' tre termini del comune denominatore in quella guisa che è un de' 4 termini del respettivo denominatore ciascun de' numeratori delle pressioni nel trapezio. Da ultimo il divisore comune nelle pressioni del triangolo è composto della somma de' 3. numeratori, come quel delle altre per il trapezio vien formato dalla somma de' 4 numeratori; anzi è evidente che ciò debb' essere per la ragione che le 3 nella prima e le 4 nell' altra prese in somma non possono far altro che 1, essendo 1 il peso totale.

56 Verificati questi capi d' analogia tra il triangolo e il trapezio, giova sperare, che possa essa pure manifestarsi nelle figure di numero di lati maggiore. Noi ne intraprenderemo l' indagine nella figura pentagona irregolare, esprimendo con simboli due porzioni di angoli centrali, e stabilendo il vette primario e gli altri vetti comunicanti colla scorta delle operazioni insinuate dalla 4.ª regola, alla quale va soggetta la figura di 5 lati. Sia dunque AEFCH (Fig. 18.) un pentagono qualunque, il peso P in un punto dentro l' aja, e gli appoggj ai 5. angoli. Prendo due lati contigui AE, EF, e tirate le cinque centrali AP$=a$, PE$=b$, PF$=c$, PC$=d$, PH$=f$, chiamo gli angoli centrali APF$=i$, EPF$=l$, FPC$=g$, CPH$=h$. Oltracciò suppongo, che i cercati segmenti ne' due lati contigui siano AS, EQ, e guidate le rette PS, PQ, faccio l' angolo APS $= x$, l' angolo EPQ$= y$. A tenor della 4.ª regola applicata al pentagono ordinato (n. 51.) e trasferita al nostro, io devo condur le rette FS, AQ, che s' incrociano in qualche punto δ, congiungere la δP, e prolungarla sinchè incontra il lato CH della figura in qualche punto β. Diventa $\beta\delta$ il vette primario, e i vetti comunicanti sono AQ, EF, HC, che uniti al primo ci somministrano le 5 pressioni. Poichè sen.APE=sen.i, sen.EPF = sen.l, sen.FPC = sen.g, sen.CPH = sen.h; onde

sen.

sen.APH $= -$ sen.$(i+l+g+h)$, cos.APH $=$ cos.$(i+l+g+h)$: poi sen.APS $=$ sen.x, sen.EPQ $=$ sen.y, e quindi sen.EPS $=$ sen.$(i-x)$, sen.FPQ $=$ sen.$(l-y)$; sarà, come nel trapezio,

$$PQ = \frac{bc\,\text{sen}.l}{b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)}; \quad \frac{EQ}{EF} = \frac{b\,\text{sen}.y}{b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)};$$

$$\frac{FQ}{EF} = \frac{c\,\text{sen}.(l-y)}{b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)}; \text{ e (lem. 3.) } PS = \frac{ab\,\text{sen}.i}{a\,\text{sen}.x + b\,\text{sen}.(i-x)};$$

$$\frac{ES}{AE} = \frac{b\,\text{sen}.(i-x)}{a\,\text{sen}.x + b\,\text{sen}.(i-x)}; \quad \frac{AS}{AE} = \frac{a\,\text{sen}.x}{a\,\text{sen}.x + b\,\text{sen}.(i-x)}.$$

In oltre $\frac{A\delta}{AQ} = \frac{AS.EF}{AS.EF + FQ.ES}$ (lem. 2); e perciò in analisi,

$$\frac{A\delta}{AQ} = \frac{a\,\text{sen}.x[b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)]}{ab\,\text{sen}.x\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)};$$

da che nasce

$$\frac{Q\delta}{AQ} = \frac{bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)}{ab\,\text{sen}.x\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)};$$

Pongo sen.APδ $=$ sen.z. Poichè sen.APQ $=$ sen.$(i+y)$, ne viene sen.QPδ $=$ sen.$(i+y-z)$. Ma abbiamo $\frac{A\delta}{AQ} = \frac{AP\,\text{sen}.AP\delta}{AP\,\text{sen}.AP\delta + PQ\,\text{sen}.QP\delta}$ (lem. 3). Dunque coi valori analitici,

$$\frac{A\delta}{AQ} = \frac{a\,\text{sen}.z[b\,\text{sen}.y + c\,\text{sen}.(l-y)]}{ab\,\text{sen}.z\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.z\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.l\,\text{sen}.(i+y-z)}.$$

Instituiscasi ora un' equazione tra i 2 valori di $\frac{A\delta}{AQ}$; ed essa ridotta si converte in quest' altra, sen.$l$sen.$x$sen.$(i+y-z)$ $=$ sen.$z$sen.$(i-x)$sen.$(l-y)$; cioè sen.$l$sen.$x$sen.$(i+y)$cos.z $=$ sen.z[sen.$l$sen.$x$cos.$(i+y)$ $+$ $r$sen.$(i-x)$sen.$(l-y)$]. Quadrata questa equazione, e posto in vece di $(\cos.z)^2$ il suo valore $r^2 - (\text{sen}.z)^2$, si avrà in ultima analisi

$$\text{Sen}.z = \frac{r\,\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(i+y)}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(\text{sen}.l)^2(\text{sen}.x)^2[\text{sen}.(i+y)]^2 + [\text{sen}.l\,\text{sen}.x \\ \cos.(i+y) + r\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)]^2\end{array}\right.}}.$$

Faccio per brevità il radicale $=$ O. Quindi ne risulta

$\text{sen}.z = \frac{r\,\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(i+y)}{O}$, e in conseguenza $\cos.z =$ $\frac{r[\,\text{sen}.l\,\text{sen}.x\cos.(i+y)+r\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)\,]}{O}$. I canoni trigonometrici mi danno poi $\text{sen}.(i+y-z) = \text{sen}.QP\delta =$ $[\,r\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(i+y)\,\text{sen}.(l-y)\,] : O$; ed essendo $P\delta = \frac{AP \cdot PQ\,\text{sen}.APQ}{AP\,\text{sen}.AP\delta + PQ\,\text{sen}.PQ\delta}$ (lem. 3), verrà espresso il braccio $P\delta$ del vette primario con questa egualità

$$P\delta = \frac{Oabc}{r[ab\,\text{sen}.x\,\text{sen}.y + ac\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l-y) + bc\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)]}.$$

Ora, perchè l' angolo $HP\delta$ è composto de' due angoli APH, $AP\delta$; i seni de' quali sono $-\text{sen}.(i+l+g+h)$, $\text{sen}.z$, i coseni, $\cos.(i+l+g+h)$, $\cos.z$; coll' uso della trigonometria, e de' valori di $\text{sen}.z$, $\cos.z$, troverem facilmente,

$$\text{sen}.HP\delta = \text{sen}.HP\beta = \frac{r\left\{\begin{array}{l}-\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}(l+g+h-y) - \\ \text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)\,\text{sen}.(i+l+g+h)\end{array}\right.}{O};$$

$$\cos.HP\beta = \frac{r\left\{\begin{array}{l}-\text{sen}.l\,\text{sen}.x\cos.(l+g+h-y) - \text{sen}. \\ (i-x)\,\text{sen}.(l-y)\cos.(i+l+g+h)\end{array}\right.}{O}.$$ Ma si ha

$\text{sen}.CPH = \text{sen}.h$, $\cos.CPH = \cos.h$. Dunque $\text{sen}.(CPH - HP\beta)$

$$= \text{sen}.CP\beta = \frac{r\left\{\begin{array}{l}\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l+g-y) + \\ \text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)\,\text{sen}.(i+l+g)\end{array}\right.}{O}.$$ Sarà quindi espressa anche la $P\beta = \frac{PH \cdot CP\,\text{sen}.CPH}{PH\,\text{sen}.HP\beta + CP\,\text{sen}.CP\beta}$ (lem. 3); e coi simboli avremo

$$P\beta = \frac{Odf\,\text{sen}.h}{r\left\{\begin{array}{l}-f\,\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(l+g+h-y) \\ -f\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)\,\text{sen}.(i+l+g+h) \\ +d\,\text{sen}.l\,\text{sen}.x\,\text{sen}.(g+l-y) \\ +d\,\text{sen}.(i-x)\,\text{sen}.(l-y)\,\text{sen}.(i+l+g)\end{array}\right.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} -\text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l+g+h-y) \\ -\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)\,\text{sen.}(i+l+g+h) \end{array}\right\} = \text{P};$$

$$\text{Faccio}\left\{\begin{array}{l} \text{sen.}l\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(g+l-y) \\ +\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)\,\text{sen.}(i+l+g) \end{array}\right\} = \text{Q};$$

$$\left\{\begin{array}{l} ab\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y + ac\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y) \\ +bc\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y) \end{array}\right\} = \text{R};$$

e più brevemente si ha $\text{P}\beta = \frac{\text{O}df\,\text{sen.}h}{r(\text{P}f+\text{Q}d)}$, $\text{P}\delta = \frac{\text{O}abc}{r\text{R}}$; onde $\beta\delta = \frac{\text{O}(\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd)}{r\text{R}(\text{P}f+\text{Q}d)}$; e quindi ancora

$$\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta} = \frac{abc(\text{P}f+\text{Q}d)}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd};\ \frac{\text{P}\beta}{\beta\delta} = \frac{\text{R}df\,\text{sen.}h}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{A}\delta}{\text{AQ}} = \frac{a\,\text{sen.}x[b\,\text{sen.}y+c\,\text{sen.}(l-y)]}{\text{R}};\ \frac{\text{Q}\delta}{\text{AQ}} = \frac{bc\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)}{\text{R}};$$

$$\frac{\text{H}\beta}{\text{HC}} = \frac{\text{P}\beta\,\text{sen.}\text{A}\Gamma\beta}{\text{PC}\,\text{sen.}h}\ (\text{lem. 3}) = \frac{\text{P}f}{\text{P}f+\text{Q}d};\ \frac{\text{C}\beta}{\text{HC}} = \frac{\text{Q}d}{\text{P}f+\text{Q}d};$$

$$\frac{\text{EQ}}{\text{EF}} = \frac{b\,\text{sen.}y}{b\,\text{sen.}y+c\,\text{sen.}(l-y)};\ \frac{\text{FQ}}{\text{EF}} = \frac{c\,\text{sen.}(l-y)}{b\,\text{sen.}y+c\,\text{sen.}(l-y)}.$$

Per tal modo restano espresse tutte le funzioni de' nostri vetti, che entrano in azione. Onde sarà

$$\frac{\text{P}\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{Q}\delta}{\text{AQ}} = \text{Pr. in A} = \frac{bcdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{A}\delta}{\text{AQ}}\cdot\frac{\text{FQ}}{\text{EF}} = \text{Pr. in E} = \frac{acdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y)}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\beta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{A}\delta}{\text{AQ}}\cdot\frac{\text{EQ}}{\text{EF}} = \text{Pr. in F} = \frac{abdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{H}\beta}{\text{CH}} = \text{Pr. in C} = \frac{\text{P}abcf}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd};$$

$$\frac{\text{P}\delta}{\beta\delta}\cdot\frac{\text{C}\beta}{\text{CH}} = \text{Pr. in H} = \frac{\text{Q}abcd}{\text{R}df\,\text{sen.}h+\text{P}abcf+\text{Q}abcd}.$$

Osserviamo ora, essere $\text{R}df\,\text{sen.}h = abdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y + acdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y) + bcdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)$, cioè eguale alla somma de' numeratori delle 3 prime pressioni in A, E, F, siccome i rimanenti termini del comun divisore sono la somma dei numeratori delle 2 ultime. Di

più rifletteremo, che P, Q sono unicamente funzioni di seni d' angoli, senza che ne' loro valori compariscano le distanze a, b, c, d, f: e che le quaderne di queste distanze sono respettivamente fattori del prodotto costituente la quantità de' numeratori; finalmente che la somma de' numeratori equivale al comune denominatore. Simili affezioni sono state da noi osservate nei valori delle pressioni pel trapezio e pel triangolo; e ragion vuol che si concluda, convenire simili forme di espressione anche in quelli che spettano all' essagono, eptagono &c. coll' introduzione delle cinquine, sestine &c. delle distanze, sempre che si determinino i vetti trasferenti con simil metodo a quello, che si è praticato per gli essagoni, eptagoni &c. regolari.

57 Resta ora da vincersi la maggiore difficoltà, che abbia il nostro problema, la quale consiste nella determinazione delle sezioni degli angoli centrali, cioè degli angoli denominati x, y &c. che abbiamo assunti nel calcolo. Questi angoli son già trovati nel rettangolo, e nel bomisco, qualora il peso sia collocato in un punto della perpendicolare, che divide per metà la figura, e generalmente nel triangolo. Dunque dalla forma dei valori delle pressioni per quest' ultima figura, e dalla combinazione di tutto ciò, che ci ha somministrato l' analogia per le altre superiori, noi dobbiam trarre il filo, che ci guidi per questo intralciato labirinto.

58 Ecco il raziocinio che ho fatto. Nel triang.° AEC (Fig. 2) tre sono le distanze centrali; AP $= a$, PE $= b$, PC $= c$; Gli ambi di queste distanze, ab, ac, bc; ed essendo sen.APE $=$ sen.i, sen.EPC $=$ sen.l, sen.APC $= -$ sen.$(i + l)$, si è trovato (n. 9), che i numeratori delle pressioni in A, E, C sono bcsen.l, $- ac$sen.$(i + l)$, ab sen.i. L' ambo bc nel numeratore di A è il prodotto delle distanze PE, PC, che sono in opposizione ad A; l' altro ac spettante ad E è quello delle distanze AP, PC, che allo stesso punto E si oppongono; così l' ultimo ab, che appartiene a C, è quello delle opposte al punto C, cioè AP, PE. Queste, che abbiam chiamate sin dal principio distanze opposte al luogo della pressione, nel triangolo essendo due non posson comprendere che l' unico ang.° centrale EPC, o APC, o APE; e perciò il solo seno di

quest' angolo dev' essere moltiplicato dall' ambo delle rispettive distanze. Ma nel trapezio (Fig. 4), relativamente alla pressione in A, 3 sono le distanze opposte, PE $= b$, PF $= c$, PC $= d$. Colla scorta dell' analogia veggo bene, che nel numeratore della pressione in A deve aver luogo come fattore il terno bcd. Ma qual sarà il 2.° fattore? Consideriam, per conoscerlo, esser 3 gli angoli che son compresi da queste rette; l' angolo EPF dalle due EP, PF, l' ang.° FPC dalle 2 FP, PC, l' angolo EPC dalle 2 EP, PC; e perchè APE $= i$, EPF $= l$, FPC $= g$, i seni de' suddetti angoli sono sen.EPF $=$ sen.l, sen.FPC $=$ sen.g, sen.EPC $=$ sen.$(l+g)$. Ora, ho dett' io, l' analogia desunta dal triangolo m' invita a stabilire che l' altro fattore moltiplicato dal terno bcd nel numeratore della pres. in A sia appunto la somma di questi seni, cioè sen.l + sen.g + sen.$(l+g)$. Reggendo questo discorso, poichè alla pres. in E spetta il terno acd, e gli angoli FPC, CPA, FPA, i cui seni sono sen.g, — sen.$(i+l+g)$, — sen.$(i+l)$, sarebbe il suo numeratore acd[sen.g — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$]; e con simil raziocinio il numeratore della pressione in F $=$ abd[sen.i — sen.$(i+l+g)$—sen.$(l+g)$], e il numeratore della pres. in C $=$ abc[sen.i + sen.l + sen.$(i+l)$], essendo poi il comune denominatore la somma di questi numeratori. Onde fatta S questa somma, risulterebbero le pressioni come segue

$$\text{Pr. in A} = \frac{bcd[\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l+g)]}{S}$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{acd[\text{sen.}g - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)]}{S}$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{abd[\text{sen.}i - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(l+g)]}{S}$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{abc[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)]}{S}.$$

59 La forma di queste pressioni è sino ad ora puramente congetturale; ma il bomisco, il rettangolo, il quadrato, quando il peso è posto nella perpendicolare, che divide la figura in 2 parti eguali, e il triangolo in generale (avendosi in tutte queste figure pressioni certe e dimostra-

te) devon essere la pietra del paragone della giustezza delle nostre formole. Comincio dal bomisco (Fig. 1), ove abbiamo AP = PC, PE = PF, APE = FPC, ossia $d = a$, $c = b$, sen.g = sen.i. Con tali modificazioni nelle formole generali del trapezio risulta il comun denominatore $S = 2ab\left(b[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)] + a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)]\right)$. Onde, introdotte le convenienti modificazioni anche nei numeratori, e ridotto tutto ai minimi termini, nasce pel bomisco

$$\text{Pr. in A} = \frac{b[\text{sen.}l + \text{sen.}i + \text{sen.}(i+l)]}{2\left\{\begin{array}{l} l[(\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)] + \\ a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)] \end{array}\right.}$$

= Pr. in C;

$$\text{Pr. in E} = \frac{a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)]}{2\left\{\begin{array}{l} b[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)] + \\ a[\text{sen.}i - \text{sen.}(2i+l) - \text{sen.}(i+l)] \end{array}\right.}$$

= Pr. in F; ed ecco a buon conto salvata dalle nostre formole l' eguaglianza delle pressioni in A, e in C, e delle altre in E e in F, la quale deducevasi al n. 6 dal principio metafisico della ragion sufficiente al bomisco applicato. Per provar poi l' identità delle 2 pressioni in A e in E con quelle del citato numero, farem uso de' 4 teoremi trigonometrici già noti, che son compresi nelle 4 seguenti equazioni; 1.° $r[\text{sen.}i + \text{sen.}(i+l)] = 2\cos.\frac{l}{2}\text{sen.}(i+\frac{l}{2})$; 2.° $r[\text{sen.}i - \text{sen.}(i+l)] = -2\text{sen.}\frac{l}{2}\cos.(i+\frac{l}{2})$; 3.° $r\,\text{sen.}l = 2\,\text{sen.}\frac{l}{2}\cos.\frac{l}{2}$; 4.° $r\text{sen.}(2i+l) = 2\text{sen.}(i+\frac{l}{2})\cos.(i+\frac{l}{2})$. Messi questi valori nel comun Divisore, esso diventa $\frac{4}{r}[\text{sen.}\frac{l}{2} + \text{sen.}(i+\frac{l}{2})][-a\cos.(i+\frac{l}{2}) + b\cos.\frac{l}{2}]$. Quindi fatte anche le sostituzioni ne' numeratori, troveremo il Numeratore della press. in $A = \frac{2b}{r}[\text{sen.}\frac{l}{2}\cos.\frac{l}{2} +$

$\cos.\frac{l}{2}\,\text{sen.}(i+\frac{l}{2})] = \frac{2b}{r}\cos.\frac{l}{2}[\text{sen.}\frac{l}{2}+\text{sen.}(i+\frac{l}{2})]$; Numeratore pres. in $E = \frac{2a}{r}[-\text{sen.}\frac{l}{2}\cos.(i+\frac{l}{2}) - \text{sen.}(i+\frac{l}{2})$ $\cos.(i+\frac{l}{2})] = -\frac{2a}{r}\cos.(i+\frac{l}{2})[\text{sen.}\frac{l}{2}+\text{sen.}(i+\frac{l}{2})]$. E riducendo, Pr. in $A = \dfrac{b\cos.\frac{l}{2}}{2[-a\cos.(i+\frac{l}{2})+b\cos.\frac{l}{2}]} =$ Pr. in C;

Pr. in $E = -\dfrac{a\cos.(i+\frac{l}{2})}{2[-a\cos.(i+\frac{l}{2})+b\cos.\frac{l}{2}]} =$ Pr. in F.

Ora le pressioni calcolate al Num. 6, che hanno le denominazioni delle distanze a, b come le presenti, sono Pres. in $A = \dfrac{b\cos.h}{2(b\cos.h+a\cos.k)}$; Pr. in $E = \dfrac{a\cos.k}{2(b\cos.h+a\cos.k)}$; ed ivi erasi chiamato h la metà dell' ang.° EPF $= \frac{l}{2}$; k la metà dell' ang. APC, cioè APO. Ma sen.APO = sen.(APE + EPQ) = sen.k; cos.APO = $-$cos.(APE+EPQ) = $-\cos.(i+\frac{l}{2}) = \cos.k$. Dunque resta dimostrata l' identità delle nostre formole con quelle, e giusto per conseguenza il raziocinio dedotto dall' analogia, che ha guidato il nostro calcolo e le nostre operazioni.

6o La divisione dell' ang.° centrale EPF nel bomisco, che dà col mezzo dei vetti trasferenti le vere pressioni, era la division per metà fatta dalla QO normale ai 2 lati opposti. Dunque EPQ $= y = \frac{l}{2}$. Sostituiscasi questo valore nella pression generale in A del trapezio modificata all' ipotesi di $d = a$, $c = b$, sen.g = sen.i; e risulta Pr. in A =

$$\frac{ab^2 \text{ sen.}l \text{ sen.}(i+\frac{l}{2})}{\left\{\begin{array}{l} ab^2 \text{ sen.}l \text{ sen}(i+\frac{l}{2}) - a^2b\text{sen.}\frac{l}{2}\text{ sen.}(2i+l) - a^2 b \text{ sen.}\frac{l}{2} \\ \text{sen.}(2i+l) + ab^2\text{sen.}l\text{sen.}(i+\frac{l}{2}) \end{array}\right.}$$

$$= \frac{b \text{ sen.}l \text{ sen.}(i+\frac{l}{2})}{2\,[b \text{ sen.}l \text{ sen.}(i+\frac{l}{2}) - a \text{ sen.}\frac{l}{2} \text{ sen.}(2i+l)]}.$$ Ma sen.l

$$= \frac{2 \text{ sen.}\frac{l}{2} \cos.\frac{l}{2}}{r};$$ $\text{sen.}(2i+l) = \text{sen.}2\,(i+\frac{l}{2}) =$

$$\frac{2 \text{ sen.}(i+\frac{l}{2}) \cos.(i+\frac{l}{2})}{r}.$$ Dunque sostituendo e riducendo al retto; Pr. in A $= \dfrac{b \cos.\frac{l}{2}}{2\,[b\cos.\frac{l}{2} - a\cos.(i+\frac{l}{2})]}$, come al n. 59; il che convalida sempre più il metodo da noi praticato.

61 Se nel trapezio (Fig. 4) gli angoli in A, E, F diventan retti, esso si converte in un rettangolo; e ciò induce tre modificazioni nelle specie a, b, c, d, sen.i, sen.l, sen.g, di maniera che 3 di esse son date per le altre 4. Il calcolo, ritenendo i suddetti simboli, riesce lungo e penoso: Ma noi l' accorcieremo alquanto sostituendone de' nuovi. Mi presento il rettangolo AEFC (Fig. 19) col peso dentro l' aja in P. Condotte le 4 distanze AP, PE, PF, PC, faccio passar per P le due rette QO, ST, che vanno a incontrare due lati opposti, e ad essi respettivamente sono perpendicolari. Chiamo PQ $= m$, PO $= n$, SP $= p$, PT $= q$, onde risulta AP $= \sqrt{(n^2+p^2)} = a$, PE $= \sqrt{(m^2+p^2)} = b$, PF $= \sqrt{(m^2+q^2)} = c$, PC $= \sqrt{(n^2+q^2)} = d$. In oltre

tre abbiamo sen.APS $= \frac{nr}{a}$, cos.APS $= \frac{pr}{a}$, sen.SPE $= \frac{mr}{b}$, cos.SPE $= \frac{pr}{b}$, senAPE $=$ sen.$i = \frac{r(mp+np)}{ab}$, cos.APE $=$ cos.$i = \frac{r(p^2-mn)}{ab}$, sen.EPQ $= \frac{pr}{b}$, cos.EPQ $= \frac{mr}{b}$, sen.QPF $= \frac{qr}{c}$, cos.QPF $= \frac{mr}{c}$; sen.EPF $=$ sen.$l = \frac{r(mp+mq)}{bc}$, cos.EPF $=$ cos.$l = r\frac{(m^2-pq)}{bc}$, sen.FPT $= \frac{mr}{c}$, cos.FPT $= \frac{pr}{c}$, sen.CPT $= \frac{nr}{d}$, cos.CPT $= \frac{qr}{d}$, sen.FPC $=$ sen.$g = \frac{r(mq+nq)}{cd}$, cos.FPC $= \frac{r(q^2-mn)}{cd}$, sen.CPO $= \frac{qr}{d}$, cos.CPO $= \frac{nr}{d}$, sen.APO $= \frac{pr}{a}$, cos.APO $= \frac{nr}{a}$, sen.APC $= -$ sen.$(i+l+g) = \frac{r(nq+np)}{ad}$, cos.APC $=$ cos.$(i+l+g) = r\frac{(n^2-pq)}{ad}$. Da tutte queste determinazioni emanano pure queste altre: sen.(EPF + FPC) $=$ sen.$(l+g) = \frac{r(mq-np)}{bd}$, cos.(EPF + FPC) $=$ cos.$(l+g) = \frac{r(-mn-pq)}{bd}$, sen.(FPC + APC) $= -$ sen.$(i+l) = \frac{r(nq-mp)}{ac}$, sen.(APE + APC) $= -$ sen.$(l+g) = \frac{r(np-mq)}{bd}$, sen.(APE+EPF $=$ sen.$(i+l) = \frac{r(mp-nq)}{ac}$. Facciam uso della nostra regola, e sarà il Numeratore della Pres. in A $=$ EP.PF.PC[sen.EPF + sen.FPC + sen.(EPF + FPC)]; ossia Numeratore pres. in A $= bcdr\left(\frac{mp+mq}{bc} + \frac{mq+nq}{cd} + \frac{mq-np}{bd}\right) = r[d(mp+mq) + b(mq+nq) + c(mq-np)]$. Andando avanti; Num.^{r} pres.

in E = AP . PC . PF[sen.FPC + sen.APC + sen.(FPC+APC)]; cioè Num.^{e} pres. in E $= acdr\left(\frac{mq+nq}{cd}+\frac{nq+np}{ad}+\frac{nq-mp}{ac}\right) = r[a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)]$. Così Num.^{e} pres. in F = EP . AP . CP[sen.APE + sen.APC + sen.(APE + APC)]; vale a dire Numeratore pres. in F $= abdr\left(\frac{mp+np}{ab}+\frac{nq+np}{ad}+\frac{np-mq}{bd}\right) = r[d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)$. Finalmente Numer. pres. in C = AP . PE . PF[sen.APE + sen.EPF + sen.(APE + EPF)], cioè Numer. pres. in C $= abcr\left(\frac{mp+np}{ab}+\frac{mp+mq}{bc}+\frac{mp-nq}{ac}\right) = r[c(mp+np)+a(mp+mq)+b(mp-nq)]$. Trovati i numeratori di queste pressioni; poichè il denominator comune D dev' essere eguale alla somma di tutti i numeratori, ponendo in ordine i termini, sarà

$$D = \begin{cases} dr(mp+mq+nq-mp+mp+np) \\ +br(mq+nq+nq+np+mp-nq) \\ +cr(mq-np+nq+np+mp+np) \\ +ar(mq+nq+np-mq+mp+mq); \end{cases}$$

ossia $D = r(a+b+c+d)(m+n)(p+q)$. Sicchè risulta

$$\text{Pr. in A} = \frac{d(mp+mq)+b(mq+nq)+c(mq-np)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)};$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)};$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)};$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{c(mp+np)+a(mp+mq)+b(mp-nq)}{(a+b+c+d)(m+n)(p+q)}.$$

S' intenda ora trasferito il peso P nel centro della figura rettangolare, e diventa $n=m$, $q=p$, e le distanze a, b, c, d sono tra loro eguali. La sostituzione poi nelle formole di questi valori dà ciascuna pressione $= \frac{4amp}{16amp} = \frac{1}{4}$: il che corrisponde al vero.

62 Determinate le pressioni ai 4 appoggj del rettango-

lo, abbiam già ottenuto il nostro intento, nè altro ci resta da fare. Pur se piacesse di conoscere eziandio come debbasi per esempio dividere l'angolo centrale EPF, per aver la serie de' vetti comunicanti, che colle loro funzioni ci somministrano le medesime pressioni, ecco una maniera assai semplice per eseguire tal divisione, la quale ci fa schivare de' calcoli assai prolissi, qualora si scelga qualch'altra via. Prendo le 2 generali pressioni in E e in F (n. 53) appartenenti al trapezio, che sono, Pr. in E $= -\frac{acd \text{ sen.}(l-y) \text{ sen.}(i+l+g)}{D}$, Pr. in F $= -\frac{abd \text{ sen.}y \text{ sen.}(i+l+g)}{D}$; e veggo, che sta Pr. in F : Pres. in E : : b sen.y : c sen.$(l-y)$. Alle suddette pressioni devon esser eguali le pres. in F e in E determinate nel num.° antecedente, da cui si rileva essere Pr. in F : Pr. in E : : $d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)$: $a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)$. Dunque b sen.y : c sen.$(l-y)$: : $d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)$: $a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)$; e dividendo gli antecedenti per b, e i conseguenti per c, sen.y : sen.$(l-y)$: : $\frac{d(mp+np)+b(nq+np)+a(np-mq)}{b}$: $\frac{a(mq+nq)+c(nq+np)+d(nq-mp)}{c}$. Le distanze a, b, c, d son già date per m, n, p, q, e conseguentemente è data la 2.ª ragione. Sia essa $h:k$. Sulla EP prodotta prendo PM $= k$, e sulla PF la PN $= h$, e congiungo MN, cui conduco parallela la PR, che va al lato EF. Poichè, per il lem. 4 n. 17, sta sen.EPR : sen.RPF : : PN : PM, e sen.EPR = sen.y, sen.RPF = sen.$(l-y)$, sarà sen.y : sen.$(l-y)$: : $h:k$, cioè nella ragion data. Trovato il segmento ER nel trapezio, si fan noti col metodo del n. 15 gli altri 3 che ci somministrano il vette primario, e gli altri conduttori delle pressioni agli angoli della figura. Se il peso è nel centro del rettangolo, si fa $h=k$, e sen.y = sen.$(l-y)$; il che fa vedere, che in questo caso basta dividere per metà l'ang.° EPF.

63 Semplicissima è la forma de' valori delle pressioni nel parallelogrammo, situando il peso nel centro della fi-

gura (Fig. 20). In tale ipotesi si fa PE = PC, PF = PA, cioè $d = b$, $c = a$; e di più sen.g = sen.i, sen.$(i + l + g)$ = sen.l = sen.i, perchè l' ang.° l è il complemento a 2 retti dell' ang.° i, onde sen.$(i + l) = 0$: Si osservino i Numeratori delle pressioni generali pel trapezio notati al n. 58, e si adattino al caso nostro. Troverem subito Num.^{e} pres. in A $= ab^2$[sen.l + sen.i + sen.$(i + l)$] $= 2ab^2$ sen.i; Num.^{e} pres. in E $= a^2 b$ [sen.i + sen.l — sen.$(i + l)$] $= 2a^2 b$ sen.i; Num.^{e} pres. in F $= ab^2$ [sen.i + sen.l — sen.$(i + l)$] $= 2ab^2$ sen.i; Num.^{e} pres. in C $= a^2 b$[sen.i + sen.l + sen.$(i + l)$] $= 2a^2 b$ sen.i: Onde il denominatore comune risulta $= 4ab$ sen.$i\,(a + b)$; e quindi Pres. in A $= \dfrac{b}{2(a+b)}$ = Pr. in F; Pr. in E $= \dfrac{a}{2(a+b)}$ = Pr. in C.

64 Ritorniamo al quadrilatero generale (Fig. 4), e consideriamo qual cangiamento subiscano le pressioni nel caso che diventi eguale a 2 retti l' ang.° AEF, e il punto E cada sul diametro AF. Quest' è il caso di un triangolo, il quale oltre i 3 appoggj agli angoli A, F, C ne abbia un altro nel lato AF, onde tre di essi vengano collocati in una retta. Essendo generalmente sen.AEP $= \dfrac{a \text{ sen.}i}{\text{AE}}$, cos.AEP $= \dfrac{br - a \cos.i}{\text{AE}}$, sen.PEF $= \dfrac{c \text{ sen.}l}{\text{EF}}$, cos.PEF $= \dfrac{br - c \cos.l}{\text{EF}}$, risulta sen.AEF $= \dfrac{ab \text{ sen.}i + bc \text{ sen.}l - ac \text{ sen.}(i + l)}{\text{AE . EF}}$. Dunque, per la nostra ipotesi, $\dfrac{ab \text{ sen.}i + bc \text{ sen.}l - ac \text{ sen.}(i + l)}{\text{AE . EF}}$ = sen.2R = 0, onde $b = \dfrac{ac \text{ sen.}(i + l)}{a \text{ sen.}i + c \text{ sen.}l}$. Si sostituisca questo valore nelle formole generali delle pressioni nel trapezio (n. 58); e cominciando dai numeratori, avremo Num.^{e} pres. in A $= \dfrac{ac^2 d \text{ sen.}(i + l)\,[\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l + g)]}{a \text{ sen.}i + c \text{ sen.}l}$; Num.^{e} pres. in E $= acd$[sen.g — sen.$(i + l + g)$ — sen.$(i + l)$]. Num.^{e} pres. in F $= \dfrac{a^2 cd \text{ sen.}(i + l)\,[\text{sen.}i - \text{sen.}(i + l + g) - \text{sen.}(l + g)]}{a \text{ sen.}i + c \text{ sen.}l}$;

$$\text{Num.}^{r}\text{ pres. in C} = \frac{a^2c^2\,\text{sen.}(i+l)\,[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)]}{a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l}.$$

Si riduca il 2.° Num.^{r} al comun denominatore degli altri, e si faccia la somma di tutti i Numeratori, ordinandone i termini. Il risultato, che equivale al divisore S del n. 58, verrà così espresso,

$$S = \frac{\left\{\begin{array}{l} ac^2d[\text{sen.}l\,\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}g\,\text{sen}(i+l) + \text{sen.}(i+l)\,\text{sen.}(l+g) \\ \quad + \text{sen.}g\,\text{sen.}l - \text{sen.}l\,\text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)\,\text{sen.}l] + \\ a^2cd[\text{sen.}g\,\text{sen.}i - \text{sen.}i\,\text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}i\,\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}i\,\text{sen.} \\ \quad (i+l) - \text{sen.}(i+l)\,\text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)\,\text{sen.}(l+g)] \\ + a^2c^2[\text{sen.}i\,\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}l\,\text{sen.}(i+l) + \text{sen.}(i+l)^2]. \end{array}\right.}{a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l}$$

Ora avendosi pei canoni trigonometrici, $\text{sen.}(i+l)\,\text{sen}(l+g) - \text{sen.}l\,\text{sen.}(i+l+g) = \text{sen.}g\,\text{sen.}i$, surrogando questo valore, nasce, fatte le riduzioni,

$$S = \frac{ac\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\,\text{sen.}g \\ - ad\,\text{sen.}(i+l+g) + ac\,\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.}{a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l};$$

$$\text{e quindi Pr. in A} = \frac{cd\,\text{sen.}(i+l)[\text{sen.}l + \text{sen.}g + \text{sen.}(l+g)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\,\text{sen.}g \\ - ad\,\text{sen.}[(i+l+g) + ac\,\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.};$$

$$\text{Pr. in E} = \frac{d(a\,\text{sen.}i + c\,\text{sen.}l)[\text{sen.}g - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(i+l)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\,\text{sen.}g \\ - ad\,\text{sen.}(i+l+g) + ac\,\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.};$$

$$\text{Pr. in F} = \frac{ad\,\text{sen.}(i+l)[\text{sen.}i - \text{sen.}(i+l+g) - \text{sen.}(l+g)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\,\text{sen.}g \\ - ad\,\text{sen}(i+l+g) + ac\,\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.};$$

$$\text{Pr. in C} = \frac{ac\,\text{sen.}(i+l)[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)]}{\left\{\begin{array}{l}[\text{sen.}i + \text{sen.}l + \text{sen.}(i+l)][cd\,\text{sen.}g \\ - ad\,\text{sen.}(i+l+g) + ac\,\text{sen.}(i+l)]\end{array}\right.}.$$

65 Se supponiamo, che PE già divenuta PZ cada sulla PF, e coincidano i punti Z, F, si fa $l = 0$, $\text{sen.}l = 0$, $\text{sen.}(i+l) = \text{sen.}i$, $\text{sen.}(l+g) = \text{sen.}g$, $-\text{sen.}(i+l+g) = -\text{sen.}(i+g)$; le due pressioni in F e in Z diventano una sola pressione sull' appoggio F, e siamo al caso delle 3 pressioni nel triangolo AFC. Colle accennate modificazioni pertanto

avremo Pres. in A $= \dfrac{2cd\text{sen}.g\text{sen}.i}{2\text{sen}.i[cd\text{sen}.g - ad\text{sen}.(i+g) + ac\text{sen}.i]}$

$= \dfrac{cd\text{sen}.g}{cd\text{sen}.g - ad\text{sen}.(i+g) + ac\text{sen}.i}$;

Pr. in (E+F) $= - \dfrac{ad\text{sen}.(i+g)}{cd\text{sen}.g - ad\text{sen}.(i+g) + ac\text{sen}.i}$;

Pr. in C $= \dfrac{ac\text{sen}.i}{cd\text{sen}.g - ad\text{sen}.(i+g) + ac\text{sen}.i}$.

Ora queste sono le pressioni, che soffrono per consenso di tutti i Geometri i tre appoggj agli angoli d'un triangolo. Dunque avendole noi pur derivate dai nostri generali teoremi, servon esse di nuovo argomento per convalidarne la verità e la certezza.

66 Ma se anche P cade sul diametro AF, qual forma assumeranno i valori delle pressioni notati al n. *64*? In tal caso segando la PE il diametro in Z, la PZ, in cui s'è cangiata la PE, deve stendersi tutta sulla stessa AF, e farsi eguale a 2 retti l'angolo APZ, e però nullo l'angolo FPZ, ovvero eguale a 2 retti l'angolo FPZ, e quindi nullo l'angolo APZ. Supponiamo APZ $= 2R$, FPZ $= 0$. Ciò fa che P dee cadere tra i punti A, Z, e che dev'essere sen.$i = 0$, cos.$i = -r$, sen.$l = 0$, cos.$l = r$, sen.$(i+l) = 0$, cos.$(i+l) = -r$, sen.$(l+g) =$ sen.g, sen.$(i+l+g) = -$sen.g. Posti questi valori nelle formole del citato numero, ciascuna d'esse diventa $= \frac{0}{0}$ e ci lasciano ne l'oscurità sul vero valore delle pressioni.

67 Per emergere da queste tenebre, ritorniamo all'equazione $ab\text{sen}.i + bc\text{sen}.l - ac\text{sen}.(i+l) = 0$ (n. *64*) originata dalla ipotesi dello schiacciamento dell'angolo AEF. Poichè $r\,\text{sen}.(i+l) = \text{sen}.i\cos.l + \cos.i\text{sen}.l$, colla sostituzione de' valori di cos.l, e di cos.i del n.° precedente, si ha $r\text{sen}.(i+l) = r\text{sen}.i - r\text{sen}.l$. Laonde l'equazione superiore si cangia in quest' altra; $ab\text{sen}.i + bc\text{sen}.l - ac\text{sen}.i + ac\text{sen}.l = 0$, e perciò sen.$l = \dfrac{a\text{sen}.i(c-b)}{c(a+b)}$. Da questa emanano tutte le seguenti egualità; sen.$(i+l) = \dfrac{b\text{sen}.i(a+c)}{c(a+b)}$, sen.$i$ + sen.l + sen.$(i+l = 2\text{sen}.i$; $ac\text{sen}.(i+l) + cd\text{sen}.g -$

$ad\text{sen}.(i+l+g) = d\text{sen}.g(a+c)$; perchè, essendo sen.$g$ quantità finita, il 1.° termine $ac\text{sen}.(i+l)$ rispetto ai seguenti è nullo, e $-\text{sen}.(i+l+g) = \text{sen}.g$. Di più sen.$l$ $+ \text{sen}.g + \text{sen}.(g+l) = 2\text{sen}.g$; $-\text{sen}.(i+l+g) + \text{sen}.g$ $- \text{sen}.(i+l) = 2\text{sen}.g$; $\text{sen}.i - \text{sen}.(i+l+g) - \text{sen}.(g+l)$ $= \text{sen}.i$; $a\text{sen}.i + c\text{sen}.l = \dfrac{a\text{sen}.i(a+c)}{a+b}$. Facciasi ora uso di questi valori in quelli delle pressioni; e nasce Pr. in A $= \dfrac{2bcd\text{sen}.g\ \text{en}.i(a+c)}{2cd\text{sen}.g\ \text{en}.i(a+c)\,(a+b)} = \dfrac{b}{a+b}$. Così, colle sostituzioni e colle debite riduzioni, ritroveremo Pr. in Z $= \dfrac{a}{a+b}$; Pr. in F $= \dfrac{ab\text{sen}.i}{2c\text{sen}.g(a+b)} = 0$; Pr. in C $= \dfrac{ab\text{sen}.i}{d\text{sen}.g(a+b)} = 0$.

68 Poichè il peso P, quando è sul lato AF del triangolo AFC, non fa sentire alcuna pressione all' appoggio nell' ang.° opposto C, si può prescindere dalla figura triangolare, e considerare il peso posto sopra una linea retta, ove sono 3 appoggj A, E, F. Noi abbiam fatto l' appianamento dell' ang.° APF, cosicchè cada P tra i punti A, e Z. Ma gli appoggj A, Z sostentano tutto il peso del corpo, non provando alcuna pressione l' appoggio più rimoto in F. Dunque questo caso da noi considerato ci fa conoscere la importante verità, sulla quale divisi erano i sentimenti de' Geometri, cioè: che dato un vette situato orizzontalmente su più di due appoggj, e un peso tra due di essi qualunque, i due soli appoggj, tra i quali sta il peso, se ne dividono tutto il carico, e non soffrono pressione alcuna quelli che altrove son collocati. Non mi fermo sull' altro caso di appianamento dell' ang.° APF per modo che P resti tra Z e F, mentre è chiaro, come si vedrà volendo intraprenderne il calcolo, che allora A non prova alcuna pressione, venendo tutto il peso distribuito sugli appoggj F, Z.

69 Inerendo ai nostri principj, non sarà ora difficile il presentar le pressioni, che soffrono gli appoggj agli angoli, qualunque sia la figura. Per esempio nel pentagono ir-

regolare della Fig. 18 devon' essere note le cinque distanze AP, PE, PF, PC, PH, e i 5 angoli centrali APE, EPF, FPC, CPH, APH. Chiamate queste quantità coi medesimi simboli del n. 56; a, b, c, d, f le distanze; sen.i, sen.l, sen.g, sen.h, — sen.$(i+l+g+h)$ i seni de' suddetti angoli, formiamo prima le 5 quaderne, che nascono dalle 5 distanze, e sono; $abcd$, $abcf$, $abdf$, $acdf$, $bcdf$. Per esprimere poi il Num.^{r} della pres. in A, si osservi, 4 essere le distanze opposte, PE, PF, PC, PH, cioè b, c, d, f, e in conseguenza la quaderna $bcdf$ un fattore di questo Numeratore. L'altro fattore essendo, secondo la nostra regola, la somma de' seni degli angoli, che nascono da tutte le combinazioni de' tre opposti EPF, FPC, CPH, ovvero l, g, h, e presi semplicemente e presi in composizione, sarà questa somma la seguente, sen.l + sen.g + sen.h + sen.$(g+l)$ + sen.$(g+h)$ + sen.$(l+h)$ + sen.$(g+l+h)$. Onde risulta Num.^{r} Pr. in A = $bcdf$[sen.l + sen.g + sen.h + sen.$(g+l)$ + sen.$(g+h)$ + sen.$(l+h)$ + sen.$(g+l+h)$]. Passiamo alla pres. in. E, che ha opposte le 4 distanze AP, PF, PC, PH, ossia a, c, d, f, colle quali si forma la quaderna $acdf$, e notiamo le 7 combinazioni de' 3 angoli opposti FPC, CPH, APH. Perchè FPC = g, CPH = h, APH = 4R — $(i+l+g+h)$; esse riescono, g, h, 4R — $(i+l+g+h)$, $g+h$, 4R — $(i+l+h)$, 4R — $(i+l+g)$, 4R — $(i+l)$; onde la somma de' seni = sen.g + sen.h + sen.$(g+h)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(i+l+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$. Quindi Num.^{r} Pr. in E = $acdf$[sen.g + sen.h + sen.$(g+h)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(i+l+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$]. La quaderna, che corrisponde al punto F, è fatta dalle 4 distanze EP. AP. PH. PC, cioè $abdf$; gli angoli opposti sono APF, APH, CPH, ovvero i, 4R — $(i+l+g+h)$, h; le 7 combinazioni, i, h, $h+i$, 4R — $(l+g+h)$, 4R — $(i+l+g)$, 4R — $(i+l+g+h)$, 4R — $(l+g)$; e la somma de' loro seni sen.i + sen.h + sen.$(h+i)$ — sen.$(l+g+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(l+g)$. Dunque Num.^{r} Pr. in F = $abdf$[sen.i + sen.h + sen.$(h+i)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(l+g+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(l+g)$]. Al punto C spetta la quaderna delle 4 distanze PF, PE, AP, PH, cioè $abcf$; e bisogna far le 7 combi-

binazioni, degli angoli FPE, EPA, APH, in analisi l, i, 4R $-(i+l+g+h)$; che sono, l, i, 4R $-(i+l+g+h)$, $i+l$, 4R $-(i+g+h)$, 4R $-(l+g+h)$, 4R $-(g+h)$; e danno la somma de' seni $=$ sen.i $+$ sen.l $+$ sen.$(i+l)$ $-$ sen.$(i+l+g+h)$ $-$ sen.$(i+g+h)$ $-$ sen.$(l+g+h)$ $-$ sen.$(g+h)$. Laonde Num.^{e} Pr. in C $= abcf[$ en.i $+$ sen.l $+$ sen.$(i+l)$ $-$ sen.$(i+l+g+h)$ $-$ sen.$(i+g+h)$ $-$ sen.$(l+g+h)$ $-$ sen.$(g+h)]$. Finalmente H ha in opposizione le 4 rette AP, PE, PF, PC, e gli compete la quaderna $abcd$. Coi 3 angoli, APE, EPF, FPC, ossia i, l, g formo le 7 combinazioni de' loro seni, ed ho Num.^{e} Pr. in H $= abcd[$sen.i $+$ sen.l $+$ sen.g $+$ sen$(i+l)$ $+$ sen.$(i+g)$ $+$ sen.$(l+g)$ $+$ sen.$(i+l+g)]$. Ma la somma di tutti questi numeratori costituisce il comun denominatore delle 5 pressioni, che chiamo S. Dunque saran cogniti i valori delle medesime per il pentagono, alle quali ci ha guidato l' analogia desunta dalle figure inferiori.

70 Se uno di questi angoli centrali, per esempio l'angolo CPH $= h$, si fa nullo, coincidendo PH sulla PC, il pentagono si converte in un trapezio; e in tale supposizione, quando delle 2 pressioni in H e in C ne facciamo una sola, le cinque pressioni del pentagono, per la coalizione delle due ridotte a quattro, devon riuscire identiche con quelle dell' altra figura. Veggiamolo. La nostra ipotesi esige, che sia $f = d$, sen.$h = 0$. Si surroghino questi valori in quelli de' numeratori pentagonici, e risulta Num.^{e} Pr. in A $= 2bcd^2[$sen.l $+$ sen.g $+$ sen.$(g+l)]$; Num.^{e} Pr. in E $= 2acd^2[$sen.g $-$ sen$(i+l+g)$ $-$ sen.$(i+l)]$; Num.^{e} Pr. in F $= 2abd^2[$sen.i $-$ sen.$(i+l+g)$ $-$ sen.$(l+g)]$; Num.^{e} Pr. in C $= abcd[$sen.i $+$ sen.l $+$ sen.$(i+l)$ $-$ sen.$(i+l+g)$ $-$ sen.$(i+g)$ $-$ sen.$(l+g)$ $-$ sen.$g]$; Num.^{e} Pr. in H $= abcd[$sen.i $+$ sen.l $+$ sen.g $+$ sen.$(i+l)$ $+$ sen.$(i+g)$ $+$ sen.$(l+g)$ $+$ sen.$(i+l+g)]$. I due ultimi Numeratori si uniscano in somma, perchè H cade in C, e sarà Pr. totale in C $= 2abcd[$sen.i $+$ sen.l $+$ sen.$(i+l)]$. Ciascuno di questi Numeratori è moltiplicato per $2d$, e quindi avrà pure il fattore $2d$ il comun divisore delle pressioni, perchè di quelli è la somma. Levato pertanto questo comun fattore, se si confrontano queste pressioni pel trapezio derivate da quelle del pentagono colle trovate al n. 58 per il quadrila-

tero direttamente, si veggono esse perfettamente identiche. E quindi è chiaro, che non venendo meno il nostro metodo in una figura superiore al trapezio, possiam benissimo estenderlo a qualunque altra figura.

71 Conosciute queste pressioni, si vuol egli di più situare nel pentagono il vette primario, e gli altri vetti comunicanti, che ne sono come i conduttori? E' necessario a questo fine sapere, in qual modo s' abbiano a dividere gli angoli centrali APE, EPF colle rette PS, PQ. Ora, poichè sen.APS = sen.x, sen.EPS = sen.$(i-x)$, sen.EPQ = sen.y, sen.QPF = sen.$(l-y)$, si scelgano dei 5 valori delle pressioni pel pentagono (n. 56) i 3 primi appartenenti a quelle degli appoggj A, E, F, che hanno per fattori ne' loro Numeratori i detti seni; e chiamato D il lor comune denominatore, verranno così espresse: Pres. in A = $\frac{bcdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}(i-x)\,\text{sen.}(l-y)}{D}$; Pr. in E = $\frac{acdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}(l-y)}{D}$; Pr. in F = $\frac{abdf\,\text{sen.}h\,\text{sen.}x\,\text{sen.}y}{D}$. Dunque Pr. in A : Pr. in E : : b sen. $(i-x)$: a sen.x; Pr. in E : Pr. in F : : c sen.$(l-y)$: b sen.y. Rivolgiamci ora alle pressioni stesse in A, E, F cognite del numero 69; le quali [fatto per brevità, sen.l + sen.g + sen.h + sen.$(g+l)$ + sen.$(g+h)$ + sen.$(l+h)$ + sen.$(g+l+h)$ = M; sen.g + sen.h + sen.$(g+h)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(i+l+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$ = N; sen.i + sen.h + sen.$(h+i)$ — sen.$(i+l+g+h)$ — sen.$(l+g+h)$ — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(l+g)$ = R; e il comun denominatore = S] sono: Pr. in A = $\frac{Mbcdf}{S}$, Pr. in E = $\frac{Nacdf}{S}$, Pr. in F = $\frac{Rabdf}{S}$; onde Pr. in A : Pr. in E : : bM : aN; Pr. in E : Pr. in F : : cN : bR; e perciò bM : aN : : b sen.$(i-x)$: $a$sen.x; cN : bR : : $c$sen.$(l-y)$: $b$sen.y; o più semplicemente sen.x : sen.$(i-x)$: : N : M; sen.y : sen.$(l-y)$: : R : N. Ma N : M, R : N sono ragioni note. Dunque coll' ajuto del 4.° lemma noi potremo con molta facilità ed eleganza eseguire la ricercata divisione degli angoli APE, FPE per mezzo delle rette PS, PQ. Guidate poi le FS, AQ,

che s' incrociano in δ, e la $\delta P \beta$ sino al lato CH, abbiamo cognita la posizione e la lunghezza del vette primario $\beta\delta$, e degli altri vetti, che trasferiscono le pressioni.

72 Nel triangolo (Fig. 2) la divisione dell' angolo centrale APE vien fatta della CPS; e ritenendo le specie del n. 9. diventa sen.APS $= -$ sen.$(i+l)$, sen.EPS $=$ sen.l; onde sen.APS : sen.EPS : : $-$ sen.$(i+l)$: sen.l. In oltre Num.^{e} Pr. in A : Num.^{e} Pr. in E : : brsen.l : $-ac$sen.$(i+l)$; e prendendo rispetto ad A la somma de' seni degli angoli che possono esser formati dalle distanze opposte ad A, siccome queste son le due PE $= b$, PC $= c$, non havvi altro seno d' angolo da computare che quello di EPC, cioè sen.l: e così, rispetto ad E, l' unico seno che, oltre l' ambo delle distanze AP, PC, entra nella composizione del Num.^{e} della pres. in E, è $-$ sen.$(l+i)$. Ma sen.APS : sen.EPS : : $-$ sen.$(i+l)$: sen.l. Dunque per il triangolo si verificherà questa proposizione: Che la divisione dell' ang.^{o} centrale APE deve esser fatta per modo che la porzione APS spettante ad A stia alla porzione EPS spettante ad E, come reciprocamente il seno dell' unico angolo opposto ad E al seno dell' unico angolo opposto ad A. In simil maniera si applicherà poi il teorema a ciascun degli altri 2 angoli centrali APC, CPE, e si farà nota la ragione che passa tra le due porzioni APO, OPC dell' ang.^{o} APC, e tra le due CPT, EPT dell' ang.^{o} CPE.

73 Vale pure il suddetto teorema nella figura trapezia, colla sola differenza in confronto del triangolo, che essendo, per esempio, rispetto ad E (Fig. 4) 3 le distanze opposte, AP, PC, PF, e venendo esse colle loro combinazioni a costituire 3 diversi angoli, la somma de' seni, che divien fattore del Num.^{e} della pres. in E, è somma di 3, che fanno sen.$g -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(i+l)$, siccome la somma analoga de' 3 seni, che appartengono al Numeratore della pres. in F, è sen.$i -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(l+g)$ (n. 58). S' instituisca un' analogia tra i Numeratori delle pressioni in E, F che contengono la specie y eguale all' angolo EPQ, e i Numeratori cogniti delle stesse pressioni. Avremo $-acd$sen.$(l-y)$sen.$(i+l+g)$: $-abd$sen.y sen.$(i+l+g)$: : acd[sen.$g -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(i+l)$] : abd(sen.$i -$ sen.$(i+l+g) -$ sen.$(l+g)$]; o anche sen.y :

sen.$(l-y)$: : sen.i — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(l+g)$: sen.g — sen.$(i+l+g)$ — sen.$(i+l)$, (n. 53, 58). E perchè sen.y : sen.$(l-y)$ è lo stesso che sen.EPQ : sen.FPQ, diremo anche nel trapezio verificarsi la proposizione; Che i seni delle porzioni dell' ang.° centrale EPF, cioè sen.EPQ spettante ad E, sen.FPQ spettante a F son tra loro reciprocamente come la somma de' seni, che formano un fattore del Num.^{r} della pres. in F, alla somma de' seni che forman quello del Num.^{r} della pres. in E. Similmente ragionando, proverem vero il teorema anche per le porzioni de' successivi angoli centrali FPC, CPA, APE.

74 Abbraccia la nostra proposizione anche la figura quinquilatera (Fig. 16). Perchè, essendo sen.x : sen.$(i-x)$: : N : M; sen.y : sen.$(l-y)$: : R : N (n. 71), e N la somma de' seni competenti al Numeratore della pres. in E; M la somma de' seni competenti al Numeratore della pres. in A; R quella de' seni, che spettano al Numeratore della pres. in F, la conseguenza è di per se chiara ed evidente. Ora ciò che si è detto relativamente alla divisione de' due angoli centrali APE, EPF nelle porzioni APS, EPS, EPQ, FPQ, è visibile che si può egualmente applicare anche agli altri angoli presi a due a due. Dunque, facendo uso del lem. 4, riuscirà facile l' assegnare i debiti segmenti a ciascun lato della figura, per mezzo de' quali risulteranno altri sistemi di vetti, ma tutti egualmente efficaci che il sistema di vette primario $\beta\delta$, a trasferire sui 5 appoggj le stesse identifiche pressioni. Aggiungeremo, che quest' ultimo nostro teorema veste ormai la dignità di porisma universale, e che potremo stabilirlo come applicabile a tutte le figure.

75 Se si farà riflessione alla composizione da noi praticata de' seni, che formano un de' due fattori de' Numeratori delle pressioni, si vedrà, che si son presi prima i seni di ciascuno degli angoli opposti, appresso i seni de' medesimi angoli combinati in somma a due a due, poi i seni degli angoli combinati in somma a tre a tre. Quindi andando avanti nelle figure superiori sarà d' uopo aggiungervi i seni degli angoli uniti in somma a 4 a 4, a 5 a 5 &c. Nel trapezio 4 sono gli angoli centrali, ma, rispetto a ciascun degli appoggj, 2 gli angoli in opposizione. Supponiamo questi angoli centrali m, n, p, q, e gli opposti

a un appoggio m, n. Secondo la regola stabilita il fattor composto de' seni che conviene al Numeratore della pressione sostenuta dal suddetto appoggio, è sen.m + sen.n + sen.$(m+n)$; e se a un altro degli appoggj saranno opposti gli angoli m, p, il respettivo fattore sarà sen.m + sen.p + sen.$(m+p)$; e così pei rimanenti. Nella Fig. pentagona 5 sono gli angoli centrali, e 3 sempre gli opposti a un dato appoggio. Chiamati tali angoli m, n, p, q, t, siano opposti a un appoggio m, n, p; e il fattor competente de' seni sarà, sen.m + sen.n + sen.p + sen.$(m+n)$ + sen.$(m+p)$ + sen.$(n+p)$ + sen.$(m+n+p)$. Così si dica degli altri. Dunque per l' essagono, dove 6 sono gli angoli centrali, che diremo, m, n, p, q, t, u, e 4 sempre in opposizione all' appoggio, se essi sono m, n, p, q, il fattor corrispondente verrà così espresso: sen.m + sen.n + sen.p + sen.q + sen.$(m+n)$ + sen.$(m+p)$ sen.$(m+q)$ + sen.$(n+p)$ + sen.$(n+q)$ + sen.$(p+q)$ + sen.$(m+n+p)$ + sen.$(m+n+q)$ + sen.$(n+p+q)$ + sen.$(m+p+q)$ + sen.$(m+n+p+q)$; e la stessa regola vale per tutte le altre figure. La serie de' numeri de' termini, che formano ciacsun de' suddetti fattori, è per il triangolo 1, per il trapezio 3, per il pentagono 7, per l' essagono 15, la cui legge è chiara; onde, chiamato n il num.° de' lati della figura, il num.° de' termini, che compongono ciascun de' fattori suddetti, sarà $2^{n-2} - 1$.

76 Sin dal principio di questa Memoria ho detto, che la soluzione del problema delle pressioni data dal Lorgna, ben noto per parecchie sue belle produzioni, non ha soddisfatto niente i Geometri, perchè stabilita sull' ipotesi affatto arbitraria de' suoi triangoli operatori, del peso tante volte replicato quanti sono questi triangoli, e poi della riduzione al peso semplice e alle pressioni competenti colla regola del 3, che relativamente al problema nostro non è fondata sopra nessuna legge di Natura. Io darò termine a questa mia indagine col dimostrare, che il metodo del Lorgna in un caso conduce patentemente all' assurdo, e non può in conseguenza accettarsi senza urtare in risultati, che sono assai lontani dal vero. Sia il trapezio AEFC (Fig. 21), che ha il peso P collocato in quel punto, ove

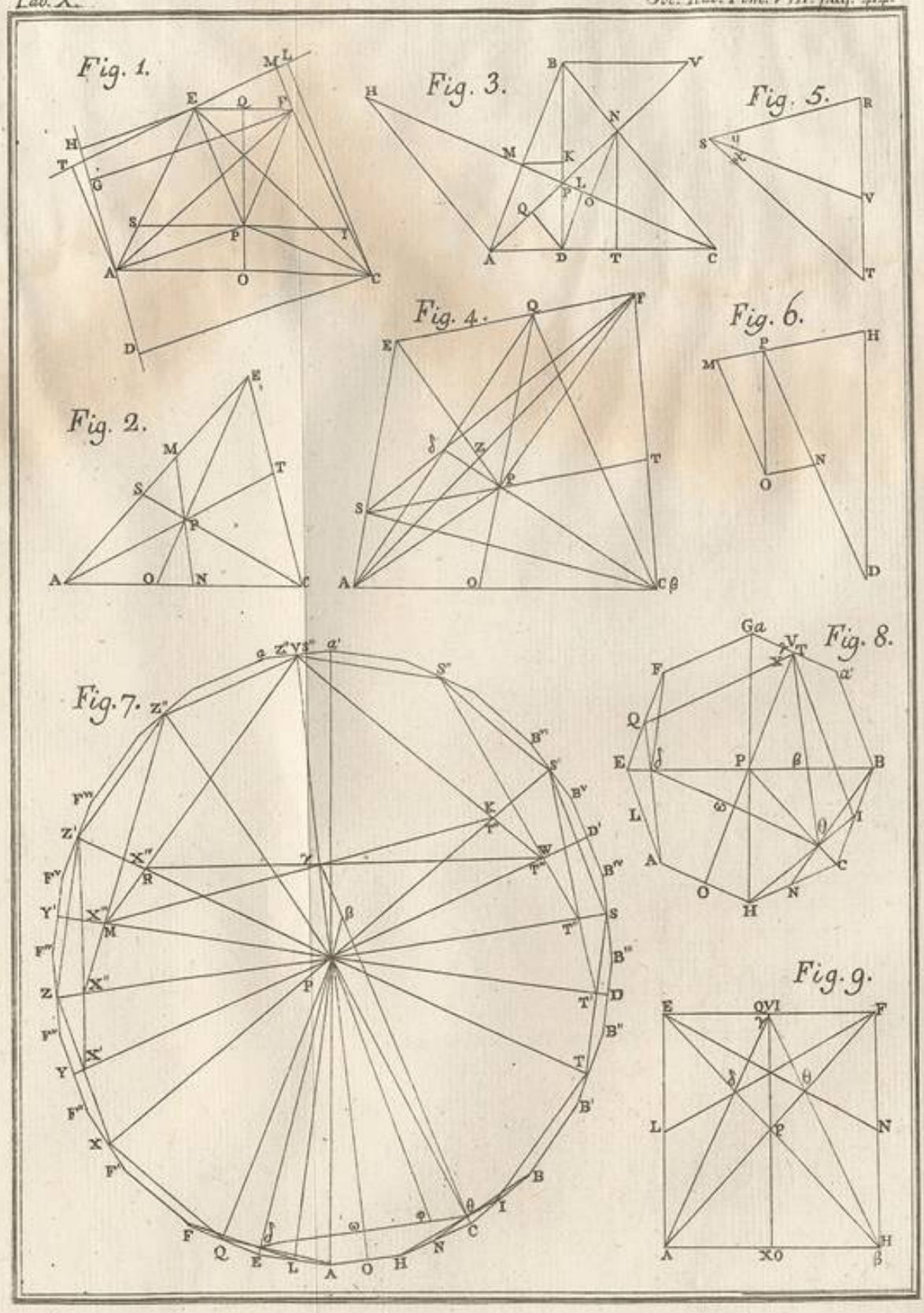


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Fig. 10.

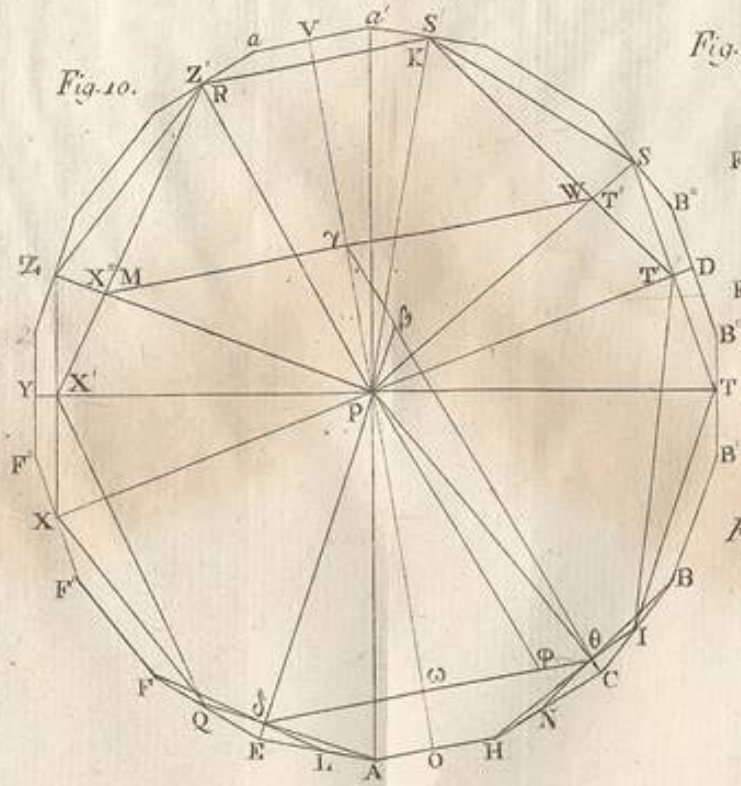


Fig. 11.

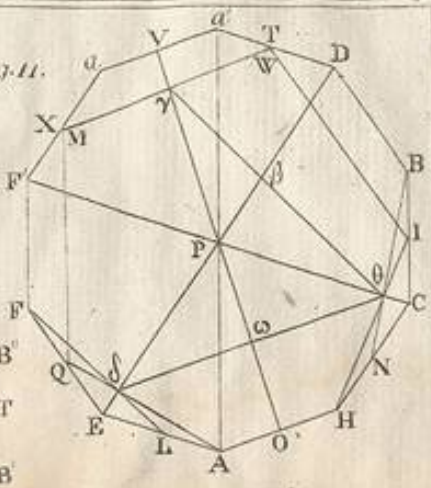


Fig. 12.

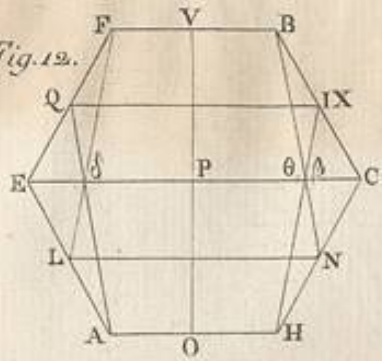


Fig. 13.

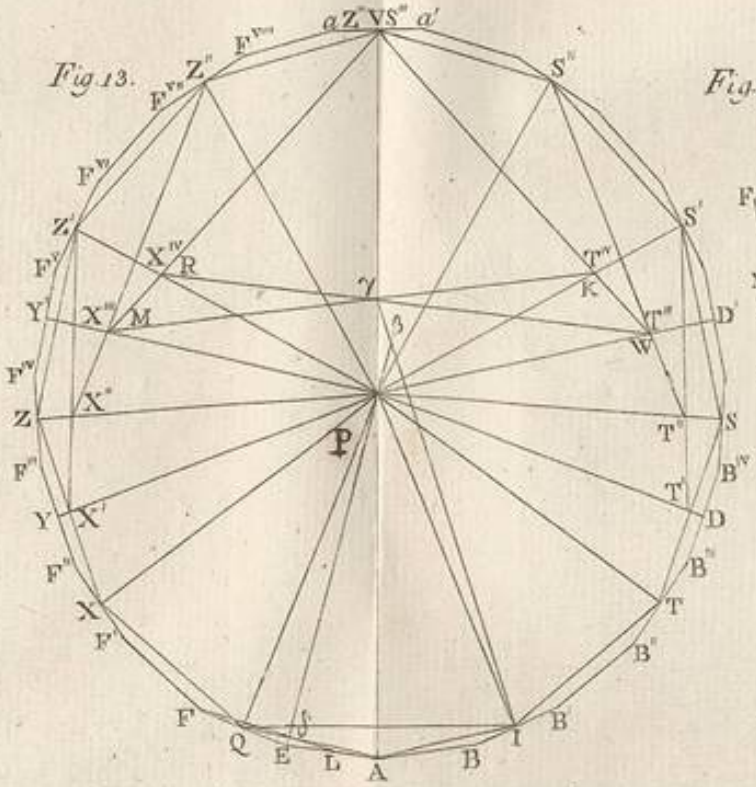
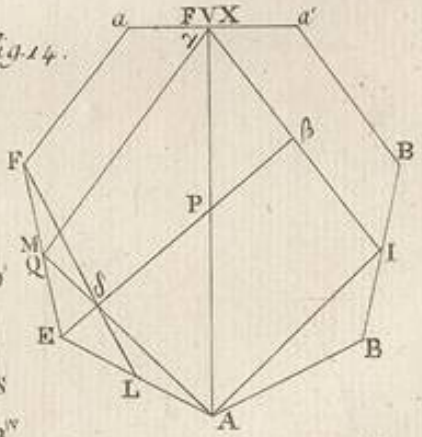


Fig. 14.



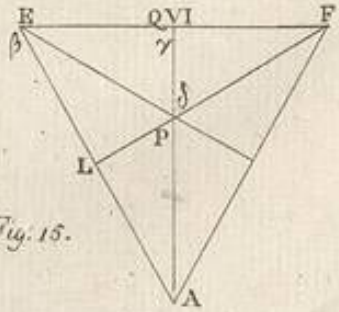


Fig. 15.

Fig. 16.

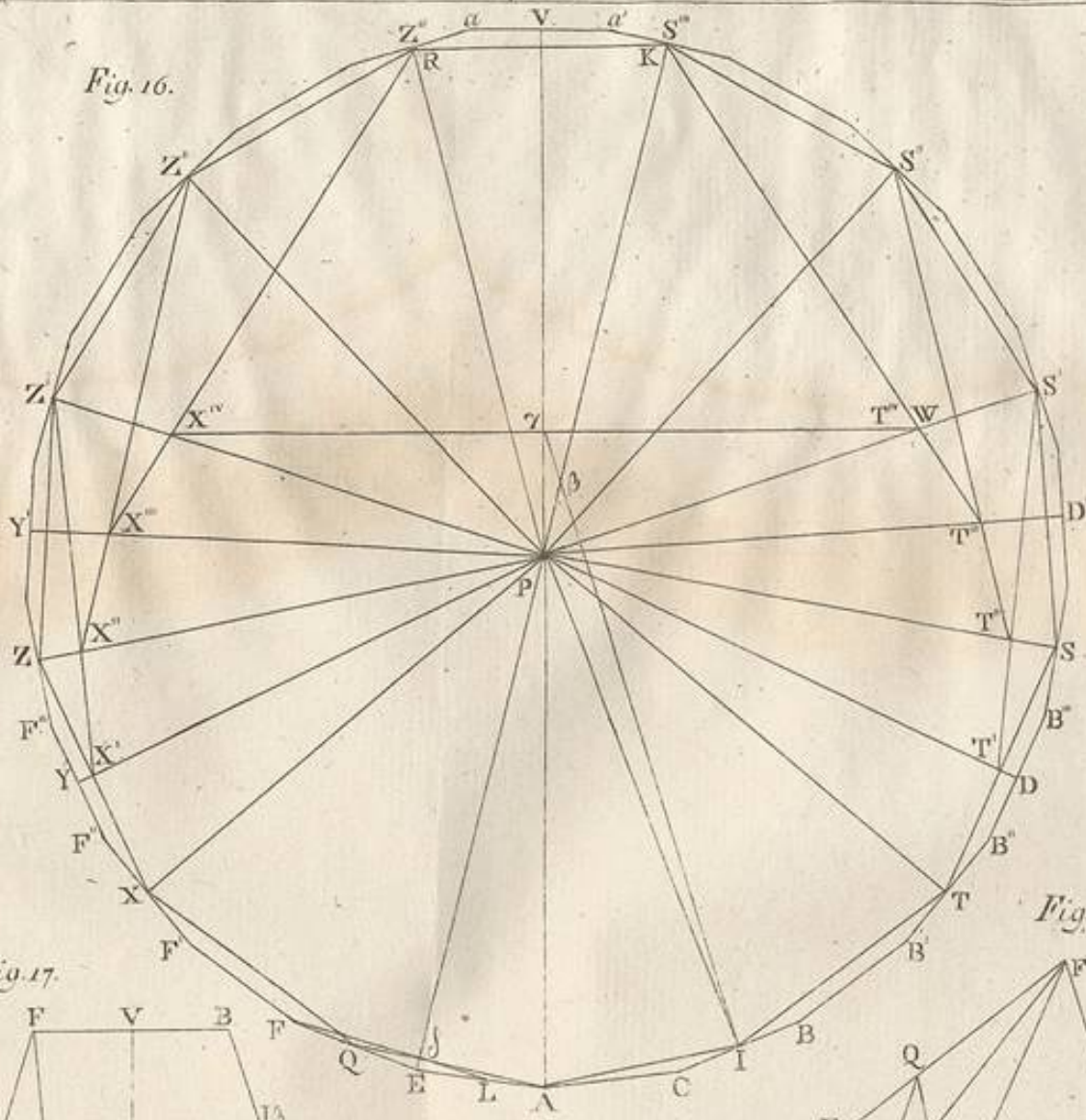


Fig. 17.

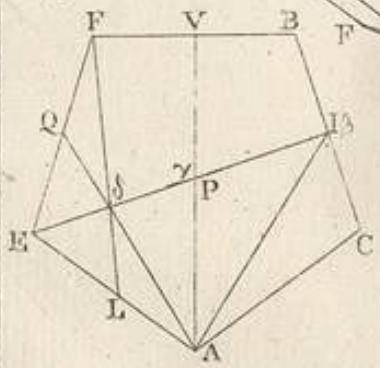


Fig. 18.

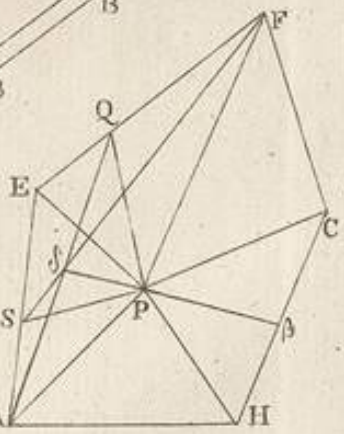


Fig. 19.

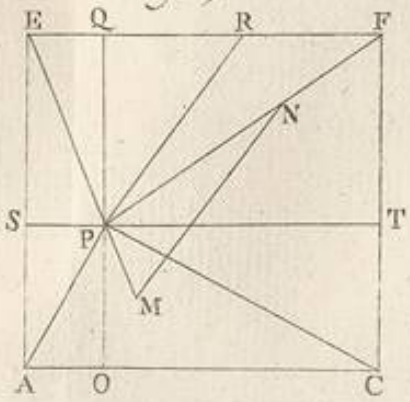


Fig. 20.

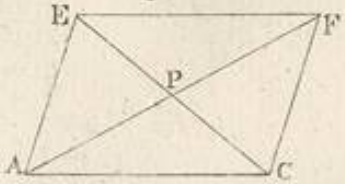
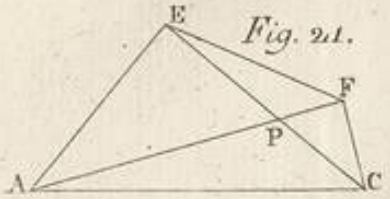


Fig. 21.



s' intersecano i due diametri AF, CE, e gli appoggj ne' 4 angoli. Perchè il peso P si trova in un punto comune ai 4 triangoli AEC, AEF, EFC, AFC fatti dai diametri e dai lati, prescrive il mentovato Autore, che colla regola nota si trovino le pressioni, che da P derivano agli appoggj di ciascun triangolo, come se questi appoggj fossero soli e non avessero comunicazione cogli altri. Onde, chiamata $AP = a$, $PE = b$, $FP = c$, $CP = d$, rapporto al triangolo AEC poichè P cade su un punto della base EC, nasce Pr. in $A = 0$, Pr. in $E = \frac{Pd}{b+d}$, Pr. in $C = \frac{Pb}{b+d}$. Per quest' istessa ragione le pressioni agli appoggj del triangolo AEF sono Pr. in $E = 0$, Pr. in $A = \frac{Pc}{a+c}$, Pr. in $F = \frac{Pa}{a+c}$; e andando avanti, rispetto al triangolo EFC, Pr. in $F = 0$, Pr. in $E = \frac{Pd}{b+d}$, Pr. in $C = \frac{Pd}{b+d}$; finalmente, rapporto al triang.° FCA, Pr. in $C = 0$, Pr. in $F = \frac{Pa}{a+c}$, Pr. in $A = \frac{Pc}{a+c}$. Dopo ciò vuole, che si faccia la somma delle pressioni competenti a ciasuno de' 4 appoggj; da che risulta Pr. in $A = \frac{2Pc}{a+c}$, Pr. in $E = \frac{2Pd}{b+d}$, Pr. in $F = \frac{2Pa}{a+c}$, Pr. in $C = \frac{2Pb}{b+d}$. In questa maniera operando ognun vede, che si considera P come quadruplicato, e che non possono esser giuste le suddette pressioni. Or che fa egli per aggiustar le partite? Instituisce un' analogia, e dice: come sta il peso quadruplicato a ciascuna delle false pressioni, così il peso semplice alla 4.ª proporzionale, che asserisce dover essere eguale alla pression vera. Applicando la regola al nostro trapezio direm dunque $4P : \frac{2Pc}{a+c} :: P :$ Pres. vera in $A = \frac{Pc}{2(a+c)}$. All' istessa maniera sarà Pres.

vera in $E = \frac{Pd}{2(b+d)}$, Pr. vera in $F = \frac{Pa}{2(a+c)}$, Pr. vera in $C = \frac{Pb}{2(b+d)}$. Per vedere la falsità di questi risultati, basta supporre che si appiani l'ang.° AEF, onde E cada in P. In tal caso abbiamo $b = o$, Pr. in $E = \frac{P}{2}$. Ma allora, per ragione della coincidenza del peso P e dell' appoggio E immobile ed inconcusso, è evidente che l' appoggio E dee sostener tutto il peso P, laddove col metodo del Lorgna ha il carico della sola metà. Dunque codesto metodo è erroneo, e dev' essere in conseguenza dalle teorie statiche perpetuamente eliminato.