SOPRA LA PRETESA DISTINZIONE FRA IL NULLA REALE, E IL NULLA IMMAGINARIO.

Di Gregorio Fontana.

Ricevuta li 13. Fruttidoro An. VI. (31. Agosto 1798.)

1 Il Cel. Frisi nella sua Algebra Cap. I. pretende, che sia un assurdo l' asserire, che lo zero moltiplicato per una quantità immaginaria dà un prodotto uguale a zero, cioe $o\sqrt{-1}=o$, e ciò per la ragione, che dovendo nella moltiplicazione essere tra loro proporzionali l' unità, il moltiplicatore, il moltiplicando, e il prodotto, e non potendo sussistere la proporzione $1:\sqrt{-1}::o:o$, non può in conseguenza neppur sussistere l' equazione $o\sqrt{-1}=o$. Dal che egli conchiude, che il niente d' immaginario indica piuttosto una quantità reale, che il nulla di quantità.

2. Anche Giordano Riccati in una Memoria intitolata, *Teorema; il nulla immaginario non può confondersi col reale*: nel Tomo IV. della Società Italiana, impegnato a combattere l' opinione di Eulero, e di que' Geometri, che sostengono essere immaginarj i logaritmi de' numeri negativi ricava dall' equazione del ramo inferiore della Concoide, che il prodotto del nulla moltiplicato per l' immaginario non può essere un vero nulla. Egli considera il ramo inferiore *id*BDI (Fig. 3.) della Concoide, la quale è fornita della proprietà, che tirata la retta indefinita fF e dal punto fisso C fuori di lei la retta CA perpendicolare alla fF, e l' inclinata qualunque CF, indi tagliate le parti uguali AB, FD, i punti B, D, e così tutti gli altri, che per simil modo si determinano, appartengono alla Curva. Pongasi $AB=FD=a$, $AC=b$, $AE=GD=x$, $ED=AG=y$; ed i triangoli simili CDG, DFE danno l' analogia.

GD : GC : : EF : ED, ossia $x:b-y::\sqrt{(a^2-y^2)}:y$ da cui si raccoglie la nota equazione del ramo inferiore della Concoide $x=\frac{b-y}{y}\cdot\sqrt{(a^2-y^2)}$. Suppongasi, come porta la Figura, AC $<$AB, ovvero $b<a$, e fatta ED $=y=$ AC$=b$, risulta $x=0.\sqrt{(a^2-b^2)}=0.\sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{-1}$, cioè a dire x uguale al nulla moltiplicato per l' immaginario. Ora se l' ascissa $x=0.\sqrt{(b^2-a^2)}\sqrt{-1}$ fosse veramente uguale al nulla, ad essa corrisponderebbe l' ordinata $y=b=$AC; e conseguentemente il punto C, che è il Polo della Concoide, apparterrebbe al perimetro della Curva; il che è manifestamente falso, posciachè il punto descrivente D non passa, nè può passare pel polo C.

3. Ma io confesso, che ad onta di queste ragioni prodotte da Frisi e Riccati per dimostrare, che il nulla immaginario è una quantità affatto diversa dal nulla o dallo zero, a me sembra d' un' evidente falsità una siffatta proposizione, la quale tende a sconvolgere tutti i principj dell' Algebra, e ad oscurare le idee fondamentali della moltiplicazione. E divero, moltiplicare per zero una quantità, qualunque ella sia, o reale, o immaginaria, altro non è, che porre, e levare quella quantità; e questo porre, e sottrarre la stessa quantità produce manifestamente il vero nulla, ossia lo zero. Così $0.a=a-a=0$; come pure $0.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}-\sqrt{-1}=0$.

4. Gli assurdi, che nascono dalla proposizione di Frisi, e Riccati, ne dimostrano immantinente la falsità. Imperocchè o si vuole che $0.\sqrt{-1}$ sia uguale ad una quantità reale, oppure ad una quantità immaginaria. Sia primieramente $0.\sqrt{-1}=a$, quantità reale; e dividendo per $\sqrt{-1}$, avremo $0=\frac{a}{\sqrt{-1}}$, vale a dire il reale diviso per l' immaginario dà zero per quoto; il che è delle più palpabili assurdità.

Sia secondariamente $0.\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}$, alla qual forma binomiale è noto ridursi tutti gl' immaginarj di ogni genere. Fatta anche qui la divisione per $\sqrt{-1}$, ci si presenta $0=b+\frac{a}{\sqrt{-1}}$, cioè l' immaginario uguale allo zero, che è un assurdo niente minore del primo; oppure lo zero uguale alla quantità effettiva b caso che $a=0$, il che è pure ripugnante.

5. La ragione addotta da Frisi per convalidare la sua

asserzione sembra affatto insussistente; avvegnachè se sussiste la proporzione $1:a::0:0$, la qual si ricava dal prodotto $0.a$, dee sussistere ugualmente l' altra gratuitamente negata da Frisi $1:\sqrt{-1}::0:0$, sapendosi altronde che il rapporto indeterminato $\frac{0}{0}$ uguaglia qualunque quantità, non esclusa la quantità immaginaria. Ciò si dimostra immantinente gettando l' occhio sulla frazione $\frac{n-n}{1-1}=\frac{0}{0}$, nella quale n significa qualsisia quantità così reale, che immaginaria: se di questa frazione si divide attualmente il numeratore pel denominatore; si ottiene per quoto la quantità n, e però si ha $\frac{0}{0}=n$, valore indeterminatissimo, tanto reale quanto immaginario.

6. Meglio fondato e a prima vista perentorio è l' argomento del Riccati, tratto dalla Concoide. Ma esaminato a dovere trovasi appoggiato ad un falso supposto, che il Polo della Concoide sia un punto affatto estraneo a questa Curva, il quale non venga compreso, nè rappresentato dall' equazione di lei. Si risponde per tanto, che il Polo di tal Curva è un punto appartenente al sistema della medesima, e che resta compreso ancor esso nell' equazione della Curva. Questo è uno di que' punti, che si chiamano *conjugati*, i quali sebbene isolati e separati dal Contorno della Curva, a cui appartengono, formano però una parte essenziale di quella, in quanto che vengono regolati dalla stessa equazione, che esprime e caratterizza l' intero sistema della Curva. Intorno a ciò è da vedersi la famosa *Introduction à l' Analyse des Lignes Courbes algébriques* di Gabriele Cramer, il quale al num. 174. *Es.* IV. dimostra indipendentemente dall' espressione $0.\sqrt{-1}$, che il Polo della Concoide altro non è che un punto conjugato. A questo proposito non sarà inutile l' avvertire, che fu una mera sottigliezza ed un puro giuoco d' ingegno quello di Jacopo Bernoulli, allorchè nel Tomo II. delle sue opere pag. 540. considerando l' ovale conjugata (Fig. 4.) ACBD, come disgiunta insieme, e legata all' altra Curva FEG (e lo stesso potrebbe dirsi de' punti conjugati) avanzò quella strana e pa-

paradossa proposizione: *Nec absurdum est, unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis & separatis simul existere. Sic duæ Curvæ non obstante intervallo, quo dirimuntur, nonnumquam constituunt unam eandemque numero Curvam; qualis est, quæ exprimitur per* $aax - x^3 = ayy$. Quindi meritamente il prelodato Cramer nella nota apposta a questa proposizione Bernoulliana soggiunge: *Nollem tamen inde concludere unam eandemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis existere posse. Nam qui Curvas* ACBD, FEG, *unam eandemque numero curvam pronunciat, quoniam una eademque æquatio utriusque naturam exprimit, mihi videtur signum cum re significata confundere.*

7. Una prova diretta del nostro assunto, che $o.\sqrt{-1}$ non sia altro, che il zero assoluto, ci viene porta dalla comune equazione del cerchio $y^2 = a^2 - x^2$, nella quale x è l' ascissa computata dal centro, ed a il raggio. Se in essa si fa $a = o$, che è quanto dire se si riduce il cerchio ad un solo punto: nasce $y = \sqrt{-x^2} = x\sqrt{-1}$, il che dà a divedere, che l' ordinata y è sempre immaginaria, quando l' ascissa x è qualche cosa, e ciò è pienamente conforme al supposto del cerchio descritto col raggio zero. Che se al contrario si prende $x = o$, allora è evidente, che non più immaginaria, ma bensì uguale a zero dee risultare anche l' ordinata y; e però in questo caso essendo $y = o.\sqrt{-1}$, ne viene in conseguenza, che $o.\sqrt{-1} = o$.

8. Altra prova dimostrativa del nostro assunto si trae dall' equazione trascendente $y = \left(-\log . x\right)^{\frac{1}{2}}$, che rappresenta la Curva campaniforme (Fig. 5.) FBE dotata di due rami asintotici BF, BE, nella quale AB è l' asse delle ascisse x, e l' asintoto SO normale ad AB è l' asse delle ordinate y, e l' intersezione A è l' origine delle coordinate. L' andamento di questa Curva ci fa subito conoscere, che essa taglia in B ad angoli retti l' asse AB, prendendo AB $=$ $x = 1$, ed allora diventa $y = o$. Ma in questo supposto di $x = 1$ l' equazion della Curva si cangia in $y = \left(-\log . 1\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{-0}=0.\sqrt{-1}$. Dunque dovendo in B essere $y=0$, sarà conseguentemente anche $0.\sqrt{-1}=0$.

9. Ma una prova affatto decisiva e perentoria della nostra asserzione ci viene somministrata dall' equazione $y=x\sqrt{\left(x^2-a^2\right)}$, la quale appartiene ad una Curva di quart' ordine facilmente descrivibile per punti. Imperciocchè se ponghiamo in essa equazione $x=0$, ne risulta $y=0\sqrt{-a^2}$; e che questo valore $0\sqrt{-a^2}$ sia effettivamente zero si dimostra così: Tolta dall' equazione proposta l' irrazionalità, essa convertesi in quest' altra $y^2=x^4-a^2x^2$, dalla quale si ottien subito $x^2=\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+y^2\right)}$, e quindi $x= \pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+y^2\right)}\right)}$. Perlocchè posto $x=0$, si avrà $\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+y^2\right)}\right)}=0$, e quadrando, $\frac{1}{2}a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+y^2\right)}=0$, ovvero $\frac{1}{2}a^2=\mp\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4+y^2\right)}$; e quadrando di nuovo, $\frac{1}{4}a^4=\frac{1}{4}a^4+y^2$; e quindi per ultimo $y^2=0$, cioè $y=0$. Dunque il valore di $y=0\sqrt{-a^2}$ non è altro, nè altro può essere che lo zero assoluto; come ci siamo proposti di dimostrare.

PROBLEMA ANALITICO

DI GREGORIO FONTANA.

Ricevuta li 13. Fruttidoro An. VI. (31. Agosto 1798.)

SE x *esprime un angolo, ed* a, b *due qualunque costanti; dico, che l' equazione* $\text{sen}.x \cos.x = a \cos.x + b\,\text{sen}.x$ *ha i quattro valori dell' angolo* x *tali che la loro somma è sempre* $= \pm(1+2m)180°$, *essendo* m *qualunque numero intero.*

Dimostraz. Si sa dall' Analisi delle funzioni circolari essere $\cos.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$ $\text{sen}.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, essendo e la base de' logaritmi iperbolici.

Sarà dunque l' equazione $\text{sen}.x \cos.x = a\cos.x + b\,\text{sen}.x$ ridotta a quest' altra $\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}} =$

$$\frac{a(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})}{2} + \frac{b(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{2a\sqrt{-1}\,(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}) + 2b(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{4\sqrt{-1}},$$

ovvero

$$e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}} = 2a\sqrt{-1}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$$

$+ 2b(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})$; e trasponendo, e moltiplicando per $e^{2x\sqrt{-1}}$ abbiamo $e^{4x\sqrt{-1}} - (2b+a\sqrt{-1})e^{3x\sqrt{-1}}$ $* + (2b-2a\sqrt{-1})\,e^{x\sqrt{-1}} - 1 = 0$. Laonde per la natura delle equazioni le quattro radici $e^{x\sqrt{-1}}$ di questa equazione sono tali, che il loro prodotto è $=-1$; e però

$$e^{x\sqrt{-1}} \cdot e^{x''\sqrt{-1}} \cdot e^{x'''\sqrt{-1}} = e^{(x+x'+x''+x''')\sqrt{-1}} = -1$$

Ma è già noto altronde che $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos.\varphi + \text{sen}.\varphi\sqrt{-1}$. Dunque $e^{(x+x'+x''+''')\sqrt{-1}} = \cos.(x+x'+x''+x''') + \text{sen}.(x+x'+x''+x''').\sqrt{-1} = -1$. Quest' equazione fa a un tratto conoscere, che dunque dev' essere necessariamente $\text{sen}.(x+x'+x''+x''') = 0$, e $\cos.(x+x'+x''+x''') = -1$; onde si ricava $x+x'+x''+x''' = \pm(1+2m)\,180°$. Il che ec.

Scolio. Rifletto ora, che se l'equazione proposta fosse $\text{sen}.x^m \cos.x^n = a\,\text{sen}.x^p + b\cos.x^q$, questa mediante la praticata sostituzione si trasformerebbe nella seguente

$$\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^m \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^n$$

$$= a\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)^p + b\left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)^q,$$

e supposti m, n, p, q interi affermativi si avrebbe

$$\frac{1}{(2\sqrt{-1})^m}\left(e^{mx\sqrt{-1}} - me^{(m-2)x\sqrt{-1}} + \right.$$

$$\frac{m(m-1)}{2}e^{(m-4)x\sqrt{-1}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}e^{(m-6)x\sqrt{-1}}$$

$$\left.\ldots \pm e^{-mx\sqrt{-1}}\right) \cdot \frac{1}{2^n}\left(e^{nx\sqrt{-1}} + ne^{(n-2)x\sqrt{-1}} + \right.$$

$$\frac{n(n-1)}{2}e^{(n-4)x\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}e^{(n-6)x\sqrt{-1}} \ldots$$

$$\left.\ldots + e^{-nx\sqrt{-1}}\right) = \frac{a}{(2\sqrt{-1})^p}\left(e^{px\sqrt{-1}} - pe^{(p-2)x\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left. + \frac{p(p-1)}{2}e^{(p-4)x\sqrt{-1}} \ldots\ldots \pm e^{-px\sqrt{-1}}\right) +$$

$$\frac{b}{2^q}\left(e^{qx\sqrt{-1}} + qe^{(q-2)x\sqrt{-1}} + \frac{q(q-1)}{2}e^{(q-4)x\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots + e^{-qx\sqrt{-1}}\right).$$

Facendo l' attuale moltiplicazione si troverà, che nel primo membro il termine dell' esponente massimo positivo è $e^{(m+n)x\sqrt{-1}}$, ed il termine del massimo esponente negativo è $e^{-(m+n)x\sqrt{-1}}$; perlocchè, indicando co' punti i termini intermedj avremo

$$\frac{1}{2^{m+n}(\sqrt{-1})^m}\left(e^{(m+n)x\sqrt{-1}}\ldots\ldots\pm e^{-(m+n)x\sqrt{-1}}\right)$$

$$=\frac{a}{2^p(\sqrt{-1})^p}\left(e^{px\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots\pm e^{-px\sqrt{-1}}\right)$$

$$+\frac{b}{2^q}\left(e^{qx\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+e^{-qx\sqrt{-1}}\right)$$

ovvero $e^{(m+n)x\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots\pm e^{-(m+n)x\sqrt{-1}}=$ $2^{m+n-p}(\sqrt{-1})^{m-p}a\left(e^{px\sqrt{-1}}\ldots\pm e^{-px\sqrt{-1}}\right)+$ $2^{m+n-q}(\sqrt{-1})^m b\left(e^{qx\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots+e^{-qx\sqrt{-1}}\right)$.

Ora moltiplico tutto per $e^{(m+n)x\sqrt{-1}}$, ed ottengo

$$e^{2(m+n)x\sqrt{-1}}\ldots\pm 1=2^{m+n-p}(\sqrt{-1})^{m-p}$$
$$a\left(e^{(m+n+p)x\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots\pm e^{(m+n-p)x\sqrt{-1}}\right)+$$
$$2^{m+n-q}(\sqrt{-1})^m\,b\left(e^{(m+n+q)x\sqrt{-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots+\right.$$
$$\left.e^{(m+n-q)x\sqrt{-1}}\right).$$

Dalla forma di quest' equazione apparisce, che quando $m+n>p$, e parimente $>q$, il prodotto di tutte le radici, cioè di tutti i $2m+2n$ valori di $e^{x\sqrt{-1}}$ dee risultare $=\pm 1$ preso col segno suo naturale, perchè il numero $2m+2n$ delle radici è pari. Perlocchè chiamando $e^{x\sqrt{-1}}$, $e^{x'\sqrt{-1}}$, $e^{x''\sqrt{-1}}$, ec. questi $2m+2n$ valori, otterremo allora $e^{(x+x'+x''\ldots)\sqrt{-1}}=\pm 1$. Dunque cos. $(x+x'+x''\ldots\ldots)$ + sen. $(x+x'+x''\ldots\ldots)\sqrt{-1}=\pm 1$; e quindi

Fig. 1.

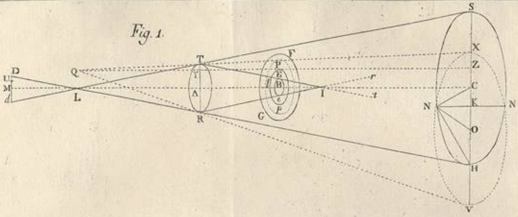


Fig. 2.

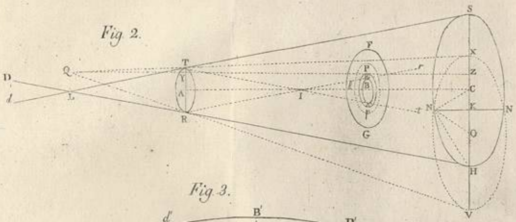


Fig. 3.

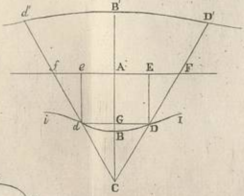


Fig. 4.

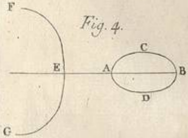
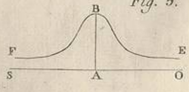


Fig. 5.



sen. $(x+x'+x''\ldots\ldots)=0$, e cos. $(x+x'+x''\ldots\ldots)=\pm 1$; il che dà a divedere, che qualora per l' unità abbia luogo il segno superiore, nasce $x+x'+x''\ldots=\pm\lambda\, 360^\circ$, essendo λ qualunque numero intero affermativo, incluso il zero; e quando vaglia il segno inferiore, risulta $x+x'+x''\ldots\ldots=\pm(1+2\lambda)\, 180^\circ$. Ecco dunque due interessanti, e singolarissimi Teoremi nuovi:

I. *Data l' equazione* sen.x^m cos.$x^n = a$ sen.$x^p + b$ cos.x^q, *nella quale* a, b *sono due costanti qualunque*, m, n p, q *sono numeri interi affermativi*, *ed* $m+n<p$, *e parimente* $<q$, *ed oltracciò* m *è un numero pari; la somma di tutti i* $2m+2n$ *valori dell' angolo* x, *i quali soddisfanno alla detta equazione è* $=\pm 2\lambda.180^\circ$, *essendo* λ *un numero qualunque intero, incluso il zero*.

II. *Sussistendo tutto come nel Teorema precedente, colla sola diversità, che ora si suppone* m *un numero dispare; la somma di tutti i* $2m+n$ *valori dell' angolo* x, *ciascuno de' quali soddisfa all' equazione*, è $=\pm(2\lambda+1)\, 180^\circ$.

Si arriva all' equazione sen.x cos.$x = a$ cos.$x + b$ sen.x, (la quale si trasforma subito in una di quarto grado espressa solamente per cos.x), trattando il curioso Problema dell' Arabo Alhazeno, che lo propone nel lib. V. Prop. 39. della sua Ottica, stampata unitamente a quella di Vitellione da Federico Risner in Basilea nel 1572. Il Problema consiste in questo: *Data la posizione dell' occhio, ed inoltre quella d' un punto radiante, che tramanda la luce in uno specchio sferico, si domanda quel tal luogo dello specchio, nel quale cadendo il Raggio viene quindi riflettuto all' occhio talmente, che coperto quel luogo l' oggetto in tutto il rimanente dello specchio più non si vede*.

Il Kaestner ha data di questo Problema una soluzione ingegnosa, intitolata *Problematis Alhazeni Analysis Trigonometrica*, nel VII. Tomo de' *Nuovi Commentarj* dell' Accademia di Gottinga; dove in proposito dell' equazione di quarto grado, a cui perviene, dice con molto acume: *istis consideratis facile pervenitur ad id, quo obtento Problema resolutum solet pronunciari, nempe ad æquationem. Sed illa quarti gradus evadit, & adeo indicat quæstionem, quam de uno puncto esse credebamus, ad quatuor pertinere. Habent æquationes Algebraicæ id commune cum oraculis, ut non saltim quæstioni pro-*

positæ respondeant, *sed aliis simul*, *de quibus forte quærens non cogitavit*. *Æquatio quadratica*, *duas radices habens*, *easdem futuras*, *nisi altera affirmativa esset*, *altera negativa*, *omnino similis est pronunciato illi*: „ Ajo te Æacidam Romanos vincere posse „.

Sed quo artificio Vates Grecorum ignorantiam suam tegebant, *illo Algebra de quærentis ignorantia eum admonet*, *& studium rei*, *de qua quærit*, *accuratius cognoscendæ commendat*. *Hæc oracula non sunt Apollinis Reges*, *& Populos fallentis*, *sed cubum duplicandum imperantis*.

Tra gli Autori, che hanno trattato di questo Problema, e che il Kaestner annovera, quali sono Alhazeno, e Vitellione ne' luoghi citati, Barrow *Lect. Opt.* IX., Slusio, e Huygens *Trans. Phil.* n. 97. e 98., e Hugenii *Opera Astronomica*, dicendo di non sapere chi altri ne abbia scritto, tralascia uno de' più celebri, cioè l' Hospital, il quale nella sua *Anal. des infin. petits* §. 58. scioglie il seguente Problema: *Dato di posizione un Cerchio con due punti fuori di esso: ritrovare nella sua circonferenza un punto tale*, *che la somma delle rette da esso condotte ai due punti dati sia la minima possibile*; ed è poi chiaro, che questo in altri termini non è altro, che il Problema di Alhazeno. Anche Scherffer nelle sue *Istituzioni Ottiche* stampate in Vienna nel 1775. scioglie nella Catottrica §. 81. un tal Problema, anteriormente al Kaestner, la cui Dissertazione è dell' anno Accademico 1776., e di stampa 1778.