DELL' AZIONE

DI UN CORPO RETTO DA UN PIANO IMMOBILE ESERCITATA NE' PUNTI DI APPOGGIO CHE LO SOSTENTANO.

TENTATIVO

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

QUando un corpo è retto da un piano, la Meccanica non è giunta ancora a determinare, quanto sostenga respetttivamente ciascun punto del medesimo piano. L' incomparabile *Eulero* fece un tentativo per rendere determinato in tutti i casi questo difficilissimo Problema, abbandonando i principj della Meccanica, con le forze della quale non vedeva possibile di superare sì fatto scoglio (Novi Com. Ac. Sc. Petrop. T. XVIII.). Ma la supposizione ch' egli ha fatto è insussistente per comune consentimento, e non può ammettersi per alcun modo. L' illustre d' *Alembert* dimostrò, che co' soli principj di questa scienza, non può neppure determinarsi la pressione esercitata da un corpo su tre appoggi in un piano posti per diritto col punto, ove la direzione del centro di gravità sega il medesimo piano (T. VIII. de' suoi Opuscoli). Il Sig. Ab. *Bossut* nel versare su questa materia (Tratt. di Meccan. T. I.) conchiuse anch' esso, che secondo le regole ordinarie della Meccanica il Problema è indeterminato, se il corpo si appoggi sul piano con più di tre punti, qualunque sia la disposizione respettiva degli appoggi, dopo di aver dato un' elegante soluzione del caso di tre appoggi non situati in linea retta, o piuttosto una dimostrazione della soluzione, che n' aveva dato l' *Eulero*.

Ultimamente il Sig. *Delanges* (Mem. della Soc. Italiana T. V.) prese a trattare di questo soggetto, introducendo nelle soluzioni successivamente tanti assi di rotazione quanti

ſono i punti di appoggio che ſoſtengono il corpo. Ma il Sig. *Paoli* nel T. VI. della medeſima Società, avendo ripigliato un tale argomento, dimoſtrò ſapientemente, che i movimenti di rotazione non poſſono riferirſi al più che a tre aſſi, onde ottenere equazioni tra di sè indipendenti, e che però un' equazione nel caſo di quattro appoggi, due equazioni nel caſo di cinque appoggi, e così ſucceſſivamente, ſono neceſſariamente compreſe nelle tre fondamentali, e tra di sè indipendenti; onde reſta ſempre indeterminato il Problema, allorchè ſono più di tre gli appoggi non poſti per diritto. Tale è lo ſtato in cui attualmente ſi trova queſto ormai celebre e importantiſſimo Problema, a propoſito del quale non dubitò di dire l' *Alembert*, *qu' il manque encore quelque choſe aux principes de Mechanique*, *& qu' il y á des cas ou les loix connues juſque' ici paroiſſent inſuffiſantes* (Opuſc. T. VIII. pag. 45). Ma di ciò vedremo più innanzi. Sia dunque permeſſo un nuovo tentativo, che potrebbe fruttificare, come mi ſembra, anche in altri Problemi di Meccanica difficiliſſimi.

§. I.

Qualunque ſia il numero de' punti di appoggio non coſtituiti in una linea retta, ſu' quali è ſoſtenuto un corpo da un piano orizzontale immobile, ſi conſiderino ſempre detti punti diſpoſti agli angoli di un poligono riſultante dal congiugnere queſti punti con rette linee; il qual poligono ſarà di tanti lati, quanti ſono i medeſimi punti. Perciò la direzione verticale del centro di gravità del corpo, ſi ſupporrà ſempre compreſa nell' area di queſto poligono.

§. II.

Se pertanto venga diviſo in triangoli il medeſimo poligono, ſiccome i punti di appoggio rieſcono ſempre agli angoli di queſti triangoli, così ciaſcuno di queſti triangoli ſia detto ſiſtema di tre appoggi; e tanti ſaranno queſti ſiſtemi, quante ſono le combinazioni a tre a tre, che riſultano dal

numero n di angoli del poligono, cioè $\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}$ secondo la legge notissima delle combinazioni.

§. III.

Cadendo perciò la direzione verticale del centro di gravità entro il poligono, sarà sempre l' intersezione di questa direzione col piano immobile compresa in uno, o in più triangoli secondo il numero degli appoggi.

§. IV.

E siccome tre appoggi bastano per sostenere il corpo, allorchè detta direzione cade fuori della linea che congiugne due appoggi, così nel caso di più che tre appoggi non costituiti in linea retta, essendo tutti gli appoggi ugualmente immobili, ciascuna combinazione di tre appoggi, rappresentata da uno de' predetti triangoli, quando la direzione del centro di gravità del corpo cada nel triangolo, si chiami *Sistema attivo;* e *Sistema inoperante* quella combinazione di tre appoggi in cui il centro di gravità del corpo, o per dir meglio la sua direzione cade fuori del triangolo, che la rappresenta. Sia per esempio *ABCD* (fig. II.) il poligono, agli angoli del quale sono costituiti i punti di appoggio, *P* il centro di gravità del corpo concentrato nel piano de' punti *A*, *B*, *C*, *D*. Condotte le diagonali *AC*, *BD*, sarà il trapezio diviso ne' quattro triangoli *ACD*, *ADB*, *BDC*, *ACB*, come appunto porta la formula delle combinazioni per $n = 4$ (§. II.).

Certo è, che i due sistemi *ACD*, *ADB* non hanno per sè alcuna attitudine a sostenere il peso *P*, mentre il centro cade totalmente fuori dei perimetri di entrambi. Ma è certissimo, che ciascuno degli altri due *BDC*, *ACB* è atto per sè, stante l' immobilità di tutti gli appoggi, a sostenere l' intero peso *P*; e però questi due sono i sistemi, ch' io chiamo attivi, e inoperanti gli altri due in qualità di sistemi.

§. V.

Posto ciò, decompongo ne' due sistemi attivi il sistema di quattro appoggi A, B, C, D, e considero, che la forza di pressione in P non sia sostenuta che da' tre appoggi B, D, C, cioè dal sistema attivo BDC solitario, come se l' appoggio A non avesse luogo. Con ciò determino la pressione esercitata da questa forza sopra i tre appoggi B, D, C respettivamente.

E di nuovo considero, che la medesima forza di pressione non sia sostenuta che da' tre appoggi A, C, B, cioè dal sistema attivo ACB solitario, come se l' altro appoggio D non avesse luogo; e con ciò determino la pressione esercitata da detta forza sopra gli appoggi A, C, B respettivamente. Determinate queste pressioni per ciascun sistema separatamente, rimetto insieme i sistemi, ricomponendo quello di tutti quattro gli appoggi A, B, C, D operanti unitamente, e definisco le vere e proprie pressioni combinate respettivamente dovute a ciaschedun appoggio.

§. VI.

E' manifesto pertanto, che ciascuna delle azioni combinate sopra gli appoggi B, e C deve necessariamente essere composta di due parti, giacchè ciascuno di detti appoggi appartiene nel tempo stesso a due sistemi attivi.

§. VII.

Nello stesso modo qualunque sia il numero di sistemi attivi, in cui può essere risoluto un sistema di appoggi costituiti in un piano, sostenenti una forza di pressione qualunque, considero sempre, che la medesima forza sia prima sostenuta da un solo sistema attivo di tre appoggi, come se gli altri non avessero luogo, poi da un altro, e così successivamente, e determino le pressioni esercitate sopra i tre appoggi di ciascun sistema respettivamente. Rimettendo poscia insieme i sistemi, definisco per tutti i punti di appog-

gio operanti unitamente le pressioni vere combinate, dovute respettivamente e propriamente a ciascun di loro, giacchè è palese subitamente a quanti sistemi attivi appartenga un medesimo appoggio.

§. VIII.

Senza un nuovo principio non era mai possibile di affrontare questo difficilissimo Problema. Avendo pertanto considerato

I. Che la gravità operando con la sua naturale direzione in un punto, ove s'intenda concentrata, distribuisce sempre da quel centro la sua azione ugualmente su tutti gli ostacoli, che le oppongono in quel punto, ciascheduno da sè, una medesima simultanea resistenza.

II. Che nel caso nostro, stante l'immobilità del piano, ciaschedun sistema attivo è per se stesso dotato di pari attitudine a sostenere l'intero peso del corpo.

III. E che non v'è ragione, stante questa uguale attitudine di tutti i detti sistemi, per cui un sistema debba giudicarsi gravato da una parte del peso, e da altra diversa un altro sistema, mi sono indotto a tentare la soluzione del Problema col metodo, che ho esposto, fondato su questo principio

Ch' essendo retto un corpo da un piano immobile in più di tre punti non posti per diritto, possa considerarsi, che l'azione della gravità si eserciti distribuita ugualmente sopra tutti i sistemi di tre appoggi, tra i quali cada il centro di gravità del corpo, risultanti dalla posizione degli appoggi tra di sè, e relativamente a detto centro, e perciò atti ugualmente a sostenere, ciascheduno per sè, l'intera forza di pressione del corpo, cioè ad opporre all'azione della gravità, ciascuno da sè, una medesima simultanea resistenza.

§. IX.

Prima però di farne applicazione non credo infruttuoso l'internarmi un po più, che non s'è fatto nella cosa, parendomi di discernere non senza qualche chiarezza in che

propriamente le ſue difficoltà conſiſtano. Prendiamo per eſempio il primo caſo irreſolubile di quattro punti di appoggio. E' certo, che con le regole della Meccanica tre equazioni tra di sè indipendenti ſi ottengono, contenenti le quattro indeterminate, che eſprimono le preſſioni diſtribuite dal corpo ſopra detti appoggi. Una pertanto di queſte indeterminate reſta in noſtro arbitrio, a cui dando altro ed altro valore, troviamo, che in infinite maniere può eſſere diſtribuita ſu i quattro appoggi la data forza di preſſione del corpo da eſſi ſoſtenuto, ſoddisfatte ſempre pienamente le condizioni della Meccanica per l'equilibrio. Ma ſe per una parte le regole ordinarie della Meccanica laſciano indeterminato queſto Problema, ſe reſta luogo a infinite ſoluzioni, il medeſimo Problema per l'altra, naturalmente conſiderato, è determinatiſſimo, ſe così poſſo eſprimermi. In fatto ripoſando un corpo ſu quattro punti di un piano immobile, la preſſione del corpo riſentita da detti punti di appoggio reſpettivamente, è una, unica, e di valore unico e determinato. Adunque o manca qualche coſa ancora ai principj di Meccanica, come crede d'*Alembert*, o il Problema non è un caſo di ſemplici equilibrj. Io per me non credo, che le regole della Meccanica ſieno per queſto caſo inſufficienti, rigoroſamente parlando, ma credo, che ſia d'uopo adoperarle convenevolmente, e accomodarle alla natura particolare del Problema, che ha una determinazione ſua propria. E credo ancora, che non ſia il Problema un caſo di ſemplici equilibrj, perchè non vi ſi tratta che di conoſcere, quanta parte del peſo totale porti ciaſcuno de' quattro punti del piano immobile ſu quali ripoſa il corpo: il che non è propriamente affare di equilibrazione, ancorchè l'equilibrazione vi ſia implicita, e ſi verifichi puntualmente nel ripoſo del corpo. In conſeguenza ſembra, che il Problema richiegga per ſe, che ſe ne rintracci la ſoluzione per una via conducente al ſiſtema unico, proprio, e neceſſario di preſſioni, eſercitate dal corpo ſu ciaſcun appoggio reſpettivamente, in modo però, che l'equilibrazione vi ſia neceſſariamente implicita, e poſſa dimoſtrarſi inerente al ſiſtema trovato. Che ſe il ſi tratti con ordine inverſo, partendo dalla pura condizione dell'equilibrio, s'incorre nell'indeterminazione che ci pre-

ſenta la Meccanica, infiniti eſſendo i ſiſtemi di preſſione ne' quali può diſtribuirſi ſopra più di tre appoggi la forza premente di un corpo, tutti ſoddisfacenti alle leggi dell'equilibrio.

Quindi è, che ho tentato di liberare dell' indeterminazione il Problema, col farlo dipendere dalla riſoluzione di ſiſtemi combinati di tre appoggi, pe' quali non può mai averſi, che una ſola ed unica eſpreſſione delle tre preſſioni.

I valori, che daremo quì appreſſo di queſto caſo particolare di tre appoggi ſon quei medeſimi, che per altre vie trovò l'*Eulero*, e il Sig. *Boſſut*: quei medeſimi che provengono dalle eſpreſſioni più compoſte del Sig. *Delanges*, e che potrebbero provenire da altre ſoluzioni infinite, prendendo tre aſſi qualunque, come lo ha notato giuſtamente il Sig. *Paoli* nella Mem. cit. pag. 543. Riſoluto così il Problema, da sè vi ſi manifeſtano implicite e ſoddisfatte le leggi della Meccanica per l'equilibrio.

§. X.

PROBLEMA I.

Ripoſando un corpo ſu tre punti di un piano immobile orizzontale non poſti in linea retta, trovare la preſſione diſtribuita dal corpo ſu ciaſcun di loro.

Sieno A, B, C (Fig. I.) i tre punti di appoggio, P l'interſezione del piano con la direzione verticale del centro di gravità del corpo. Sarà il punto P centro comune di gravità dei peſi prementi il medeſimo piano ne' punti A, B, C. Si chiamino queſti peſi con le lettere de' reſpettivi appoggi A, B, C: ſi congiungano con la AC i punti A, C, e per P ſi meni dal punto B l'indefinita BR ſegante la AC in Q.

E' certo, che il centro di gravità de' peſi A, C deve trovarſi in qualche punto della retta AC. Ma deve pure trovarſi in qualche punto della retta BR neceſſariamente, in cui è collocato il terzo peſo B, e il comun centro di gravità P di tutti i peſi A, B, C. E' dunque il centro di gravità de' peſi A, C nell'interſezion comune Q delle rette

BR,

BR, AC. Posto ciò, se si chiami Q la somma de' pesi $A + C$ concentrati in Q, sarà $Q : B :: BP : PQ$, e componendo $Q + B : B :: BQ : PQ = P : B$. Dunque $B = \frac{P.PQ}{BQ}$, e $Q = \frac{B.BP}{PQ} = \frac{P.PQ}{BQ} . \frac{BQ}{PQ} = \frac{P.BP}{BQ}$.

Ma per essere il punto Q centro comune di gravità de' pesi A, C è pure $A : C :: CQ : AQ$, e componendo $A + C : C :: AC : AQ : Q : C$. Per la qual cosa sarà, sostituendo il valore di Q, $AC : AQ :: \frac{P.BP}{BQ} : C$, e $C = \frac{P.BP.AQ}{AC.BQ}$; e però, sostituendo il valore di C, sarà

$$A : \frac{P.BP.AQ}{AC.BQ} :: CQ : AQ, \text{ e } A = \frac{P.BP.CQ}{AC.BQ},$$

E questi sono i valori delle tre pressioni A, B, C; il che doveva trovarsi.

§. XI.

Ma queste espressioni de' pesi A, B, C possono semplificarsi. In fatto si congiungano con la BC i punti B, C, e con la BA i punti B, A, e dal punto A si tiri al lato opposto BC la perpendicolare AD, e dai punti P, Q alla AD si menino le parallele PE, QF. Per la similitudine de' Triangoli sarà $BP : BQ = PE : QF$, e $AC : CQ = AD : QF$, e però $\frac{BP.CQ}{BQ.AC} = \frac{PE.QF}{QF.AD} = \frac{PE}{AD}$. Ma abbiamo trovato il peso $A = \frac{P.BP.CQ}{BQ.AC}$; sarà dunque $A = \frac{P.PE}{AD}$.

Condotte similmente dal punto B al lato opposto AC la perpendicolare BH, e dal centro P alla BH la parallela PG, sarà per la similitudine de' Triangoli $PQ : BQ = PG : BH$; e però essendosi trovato $B = \frac{P.PQ}{BQ}$, sarà $B = \frac{P.PG}{BH}$.

Finalmente condotte dal punto C al lato opposto AB la

perpendicolare CK, e alla CK le parallele PL, QM, per la ſimilitudine de' Triangoli ſarà $\frac{BP.AQ}{BQ.AC} = \frac{PL.QM}{QM.CK} = \frac{PL}{CK}$. Ma abbiamo trovato il peſo $C = \frac{P.BP.AQ}{BQ.AC}$; ſarà dunque $C = \frac{P.PL}{CK}$. Queſte eſpreſſioni de' peſi A, B, C ſono le più ſemplici che poſſano trovarſi. Ma baſti che ciò ſia accennato per valerſene ſe piaccia, mentre nelle ſeguenti ſoluzioni farò uſo delle eſpreſſioni che abbiamo ricavate in queſto Problema ſenza introdurre nuove linee, eſſendo faciliſſimo il traſmutarle e ſemplificarle, come qui s'è fatto.

§. XII.

PROBLEMA II.

Eſſendo retto un corpo ſu quattro punti A, B, C, D (Fig. II.) *di un piano orizzontale immobile, determinare la preſſione, che ſoffre ciaſcheduno di detti appoggi eſercitata dal corpo nel punto P, ove la direzione verticale del centro di gravità incontra il medeſimo piano.*

Poſta la coſtruzione e denominazione preſcritta nel §. IV., due ſono i Siſtemi attivi, che debbono trattarſi ſeparatamente nel Problema, uno ſugli appoggi B, D, C, l'altro ſugli appoggi A, C, B. Seguendo pertanto il metodo eſpoſto nel §. V. ſi conduca pel primo Siſtema la retta DE pel punto P, e ſi nominino m, n, p le preſſioni eſercitate ſugli appoggi B, D, C dalla forza di preſſione F operante in P. In forza del I. Probl. ſarà

$$m = \frac{F.DP.CE}{DE.BC}, \quad n = \frac{F.PE}{DE}, \quad p = \frac{F.DP.BE}{DE.BC}.$$

Di nuovo ſi conduca pel ſecondo Siſtema la retta AF pel punto P, e ſi chiamino m', n', p', le preſſioni eſercitate ſugli appoggi B, A, C dalla forza di preſſione F operante in P.

Col metodo ſteſſo del Probl. I. ſi troverà

$$m' = \frac{F.AP.CF}{AF.BC}, \; n' = \frac{F.PF}{AF}, \; p' = \frac{F.AP.BF}{AF.BC}.$$

Posto ciò, si rimettano insieme (§. §. V. VI.) i sistemi applicando a' respettivi punti le pressioni combinate, onde riformare l'intero Sistema di quattro appoggi del Problema, nominando A, B, C, D dette pressioni combinate respettivamente ne' punti A, B, C, D. Sarà

$$A = n' = \frac{F.PF}{AF}, \; B = m + m' = F\left(\frac{DP.CE}{DE.BC} + \frac{AP.CF}{AF.BC}\right)$$

$$C = p + p' = F\left(\frac{DP.BE}{DE.BC} + \frac{AP.BF}{AF.BC}\right), \; D = n = \frac{F.PE}{DE}.$$

Rappresentando pertanto queste espressioni i pesi combinati sugli appoggi A, B, C, D de' due Sistemi attivi uniti insieme, si avranno queste serie di proporzionali

$$A:B:C:D :: \frac{F.PF}{AF} : F\left(\frac{DP.CE}{DE.BC} + \frac{AP.CF}{AF.BC}\right) : F\left(\frac{DP.BE}{DE.BC} + \frac{AP.BF}{AF.BC}\right) : \frac{F.BE}{DE}$$

cioè le seguenti, moltiplicando la seconda serie per $AF.DE.BC$, e dividendola per F

$$A:B:C:D :: DE.PF.BC : (AF.DP.CE + AP.CF.DE) : (AF.DP.BE + AP.BF.DE) : AF.PE.BC$$

E' dunque manifesto, che generalmente, qualunque sia la forza di pressione concentrata in P, saranno sempre tra di loro le pressioni risentite dagli appoggi A, B, C, D, come sono tra di loro i termini corrispondenti di questa seconda serie di proporzionali. Per la qual cosa, se si faccia la somma di questi termini

$$DE.PF.BC + AF.DP.CE + AP.CF.DE + AF.DP.BE + AP.BF.DE + AF.PE.BC = S$$

sarà pure

$$S : DE.PF.BC : (AF.DP.CE + AP.CF.DE) : (AF.DP.BE + AP.BF.DE) : AF.PE.BC :: (A + B + C + D) : A : B : C : D$$

Sieno pertanto A', B', C', D' le pressioni dovute ad un peso dato P sostenute da' punti di appoggio A, B, C, D respettivamente. Avranno luogo le seguenti serie di proporzionali

$S : DE . PF . BC : (AF . DP . CE + AP . CF . DE) : (AF . DP . BE + AP . BF . DE) : AF . PE . BC :: (A' + B' + C' + D') : A' : B' : C' : D' :: P : A' : B' : C' : D'$.

In conseguenza sarà

$$A' = \frac{P}{S} (DE . PF . BC)$$

$$B' = \frac{P}{S} (AF . DP . CE + AP . CF . DE)$$

$$C' = \frac{P}{S} (AF . DP . BE + AP . BF . DE)$$

$$D' = \frac{P}{S} (AF . PE . BC)$$

E queste sono le pressioni esercitate dal corpo P su i quattro punti A, B, C, D del piano immobile. Il che era da determinarsi.

§. XIII.

Che se si fosse trattato il sistema BCD col condurre per P la Cc in vece di condurre la DE, e similmente l'altro sistema ABC col condurre per P la Bb in luogo della AF, è manifesto, che sarebbesi sempre trovato ciascuna delle forze in C, e B composta di due parti, l'una in azione in un sistema, l'altra nell'altro, come precedentemente, e il risultamento in fondo sarebbe stato il medesimo nell'una e nell'altra soluzione del Problema, con le stesse stessissime pressioni di prima ne' punti di appoggio.

§. XIV.

PROBLEMA III.

Riposando un corpo su cinque punti di un piano immobile orizzontale, trovare la pressione che soffre ciascheduno di detti punti di appoggio.

Sieno A, B, C, D, E (Fig. III.) gli appoggi, P l'intersezione della linea di direzione del corpo col piano sottoposto. Si congiungano con rette linee gli appoggi, on-

de risulti il Poligono $ABCDE$ (§. §. I. II.), e da ciascun angolo del Poligono si menino a tutti gli altri linee rette. Dalla formula delle combinazioni a tre a tre, e dall'inspezione della figura risulta, che dieci sono i triangoli compresi nel Poligono, de' quali sono manifestamente (§. IV.) sistemi inoperanti li cinque ABC, CDE, ABE, BCD, ADE, siccome quelli entro l'area de' quali non cade il punto P; e sistemi attivi sono gli altri cinque (M)

(M)..... BCE, ABD, ACD, ACE, BDE

entro l'area de' quali è sempre compreso il medesimo punto P. In questi sistemi attivi si menino da ciascun punto di appoggi pel punto P ai lati opposti respettivamente le linee rette Bn, Cm, Db, Ef, Ag. E' facile da conoscere, che ciascuno degli appoggi A, B, C, D, E, entra in tre combinazioni o sistemi, e che perciò l'azione sopra ciascheduno di essi deve essere composta (§. VI.) di tre parti. Pertanto si prenda a trattate, secondo il metodo (§. V.), ciascun sistema attivo separatamente, come se gli altri non avessero luogo, secondo l'ordine (M) a scansamento di confusione; e perciò si chiamino m, m', m'' le parti della pressione in A; n, n', n'' le parti della pressione in B; p, p', p'' quelle della pressione in C; q, q', q'' le parti della pressione in D; r, r', r'' quelle della pressione in E. Sia poi F la forza di pressione qualunque concentrata in P. E quanto al primo sistema BCE, in forza del I. Probl., si troverà essere in B la pressione $n = \frac{F \,.\, EP \,.\, Cf}{Ef \,.\, BC}$, in C la pressione $p = \frac{F \,.\, EP \,.\, Bf}{Ef \,.\, BC}$, in E la pressione $r = \frac{F \,.\, Pf}{Ef}$. Quanto al secondo ABD, si troverà in A la pressione $m = \frac{F \,.\, DP \,.\, Bb}{Db \,.\, AB}$, in B la pressione $n' = \frac{F \,.\, DP \,.\, Ab}{Db \,.\, AB}$, in D la pressione $q = \frac{F \,.\, Pb}{Db}$. Così passando al terzo sistema ACD si troverà con lo stesso metodo in A la pressione $m' = \frac{F \,.\, Pg}{Ag}$, in C la pressione $p' = \frac{F \,.\, AP \,.\, Dg}{Ag \,.\, CD}$, in D la pressione $q' = \frac{F \,.\, AP \,.\, Cg}{Ag \,.\, CD}$. E pel

quarto ſiſtema ACE ſi troverà in A la preſſione $m'' = \frac{F.CP.Em}{Cm.AE}$, in C la preſſione $p'' = \frac{F.Pm}{Cm}$, e in E la preſſione $r' = \frac{F.CP.Am}{Cm.AE}$. Finalmente pel quinto ſiſtema BDE ſarà in B la preſſione $n'' = \frac{F.Pn}{Bn}$, in D la preſſione $q'' = \frac{F.BP.En}{Bn.DE}$, e in E la preſſione $r'' = \frac{F.BP.Dn}{Bn.DE}$.

Poſto cio, ſi rimettano inſieme i ſiſtemi (§. §. V. VI.), e ſi applichino a' reſpettivi punti le preſſioni combinate, onde riſormare l'intero ſiſtema di cinque appoggi del Problema, nominando A, B, C, D, E dette preſſioni combinate reſpettivamente ne' punti A, B, C, D, E. Si avrà

$$A = m + m' + m'' = F\left(\frac{DP.Bb}{Db.AB} + \frac{Pg}{Ag} + \frac{CP.Em}{Cm.AE}\right) = F.a$$

$$B = n + n' + n'' = F\left(\frac{EP.Cf}{Ef.BC} + \frac{DP.Ab}{Db.AB} + \frac{Pn}{Bn}\right) = F.b$$

$$C = p + p' + p'' = F\left(\frac{EP.Bf}{Ef.BC} + \frac{AP.Dg}{Ag.CD} + \frac{Pm}{Cm}\right) = F.c$$

$$D = q + q' + q'' = F\left(\frac{Pb}{Db} + \frac{AP.Cg}{Ag.CD} + \frac{BP.En}{Bn.DE}\right) = F.d$$

$$E = r + r' + r'' = F\left(\frac{Pf}{Ef} + \frac{CP.Am}{Cm.AE} + \frac{BP.Dn}{Bn.DE}\right) = F.e$$

e perciò avranno luogo queſte ſerie di proporzionali

$A:B:C:D:E::Fa:Fb:Fc:Fd:Fe::a:b:c:d:e$

Per la qual coſa, ſe ſi faccia $a + b + c + d + e = S$, ſarà pure

$S:a:b:c:d:e::(A+B+C+D+E):A:B:C:D:E$

Siano pertanto A', B', C', D', E' le preſſioni dovute ad un peſo dato P concentrato nel punto P, ſoſtenuto da' punti di appoggio A, B, C, D, E reſpettivamente. Avranno luogo le ſeguenti ſerie di proporzionali

$S:a:b:c:d:e::(A'+B'+C'+D'+E'):A':B':C':D':E'$
$::P:A':B':C':D':E'$.

In conseguenza sarà

$$A' = \frac{aP}{S} = \frac{P}{S}\left(\frac{DP.Bb}{Db.AB} + \frac{Pg}{Ag} + \frac{CP.Em}{Cm.AE}\right)$$

$$B' = \frac{bP}{S} = \frac{P}{S}\left(\frac{EP.Cf}{Ef.BC} + \frac{DP.Ab}{Db.AB} + \frac{Pn}{Bn}\right)$$

$$C' = \frac{cP}{S} = \frac{P}{S}\left(\frac{EP.Bf}{Ef.BC} + \frac{AP.Dg}{Ag.CD} + \frac{Pm}{Cm}\right)$$

$$D' = \frac{dP}{S} = \frac{P}{S}\left(\frac{Pb}{Db} + \frac{AP.Cg}{Ag.CD} + \frac{BP.En}{Bn.DE}\right)$$

$$E' = \frac{eP}{S} = \frac{P}{S}\left(\frac{Pf}{Ef} + \frac{CP.Am}{Cm.AE} + \frac{BP.Dn}{Bn.DE}\right)$$

le quali sono le pressioni esercitate dal corpo P su i cinque punti A, B, C, D, E del piano immobile; il che era da determinarsi.

§. XV.

Non è necessario per alcun conto, che dimostriamo essere l'equilibrazione di tutte le forze implicita necessariamente nelle nostre soluzioni, e che le leggi della Meccanica per l'equilibrio vi sono pienamente soddisfatte; quand'anche da sè non lo palesasse il riposo del corpo sugli appoggi; perchè in ciascuno de' Sistemi di tre appoggi che abbiamo combinato ne' Problemi precedenti, la determinazione delle respettive pressioni esclude manifestamente e necessariamente ogni movimento secondo un Asse qualunque; diventando sempre il centro di gravità del corpo P centro comune di gravità de' pesi parziali prementi all'intorno i punti di appoggio del piano che sostentano il corpo (§. X.).

§. XVI.

Il metodo essendo generale, non fa d'uopo che in altri esempj ci diffondiamo inutilmente. Egli si estende, come non è difficile ch'altri il vegga da sè, anche ne' casi di appoggi posti in una stessa retta linea col centro di gravità del corpo sostenuto. Imperciocchè, considerando i punti di

appoggio tutti immobili, è certo, che due qualunque di essi tra' quali sia costituito il centro di gravità del corpo per diritto, hanno pari attitudine a sostenere l'intero peso del corpo. Per la qual cosa ciascuna combinazione di due appoggi tra' quali sia il centro di gravità posto con essi nella stessa retta linea sarà quello che, secondo il nostro metodo, si dovrà dire *sistema attivo:* e *sistema inoperante* quella combinazione in cui il centro di gravità non cade tra i due appoggi. In conseguenza adattando a questi sistemi attivi di due appoggi i principj esposti nel §. V. e sussegu. pe' sistemi attivi di tre appoggi, nel caso che sieno più di due gli appoggi per diritto su quali riposa il corpo, si potrà procedere con pari andamento nel determinare le pressioni per ciascun sistema attivo separatamente; rimettendo poscia insieme i sistemi, si otterranno le pressioni combinate respettivamente dovute a ciaschedun appoggio, come ne' casi degli appoggi non posti per diritto, de' quali abbiamo trattato quì addietro.

ESPOSIZIONE

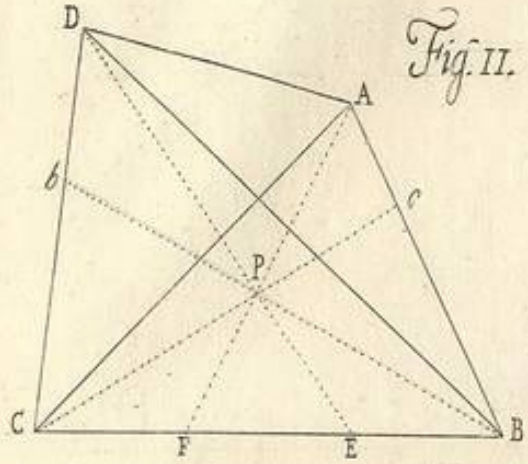

Fig. II.

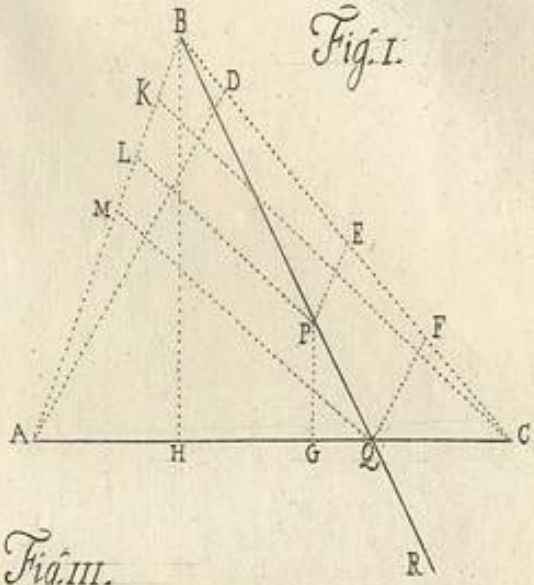

Fig. I.

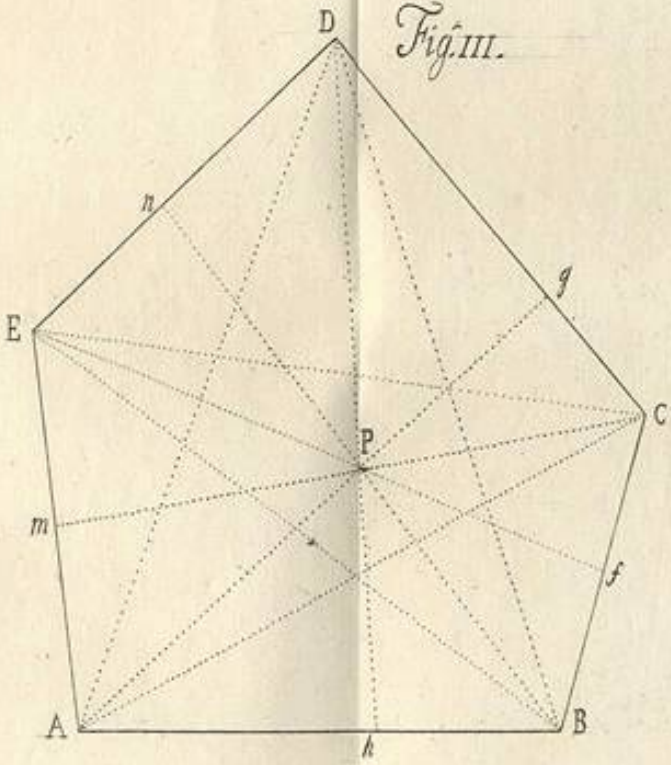

Fig. III.