MEMORIE
DI
MATEMATICA E FISICA

COSE TRIGONOMETRICHE

Del Sig. Antonio Cagnoli.

AVviene naturalmente a chi ha trattato con qualche ſtudio una ſcienza, che ogn'altra applicazione lo riconduce a quella di tanto in tanto, e gli dà occaſion di trovar coſe nuove, o di migliorare ed ampliare le già trovate. Ad eccitamento pertanto d'alcuni dotti amici, cui della mia Trigonometria, data in luce a Parigi nel 1786, piace far qualche conto, eſpongo diverſi Teoremi, Problemi, e Formule, che ſebbene non tutti nuovi, nè alcun forſe di grande importanza, godono per altro, ſe non m'inganno, la non diſpregevole proprietà di quel metodo facile, chiaro, e breve, che feci mio ſcopo primario nella mentovata Opera. M'avvalora altresì l'eſempio del Sig. Cav. *Lorgna*, del P. *Fontana*, dell'Ab. *Gua*, e di *Lexell*, che di sì fatte coſe ar-

ricchirono i Tomi di questa Società, e delle Accademie di Parigi, e di Pietroburgo.

CAPITOLO PRIMO.

Formule trigonometriche.

§. I.

I seni dell'arco di 3 gradi, e de' suoi multiplici, possono esprimersi esattamente per via di radici sorde. *Lambert* (*Supplementa tabularum logarithmicarum & trigonometricarum*) ne ha dato una tavola, ma senza dimostrazione. Il perchè non sia inutile esporla qui per via affatto semplice.

Fatto sen. $90° = 1$, ognun sa che (*Trigonom.* 18, 43, 44)

sen. $30° = \frac{1}{2}$

sen. $45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$

sen. $60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Se ne deduce sen. $15° =$ sen. $(45° - 30°) =$ sen. $45°$ cos. $30° -$ cos. $45°$ sen. $30° = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$. Onde

sen. $15° = \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

Nel modo stesso si trova sen. $(45° + 30°)$, o vero

sen. $75° = \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$

Se si nomina x il lato del decagono inscritto nel cerchio, il cui raggio $= 1$, è noto che $1 : x :: x : 1 - x$, donde $x^2 = 1 - x$, equazione da cui emerge $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$. Ma sen. $18° = \frac{1}{2}x$. Dunque

sen. $18° = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

Questo seno è la chiave di tutti li rimanenti, poichè somministra il fondamentale, cioè il sen. $3° =$ sen. $(18° - 15°)$. Giova per altro, a scanso di fatica, metter in opera, quanto si può, i valori più semplici, che sono li tre monomj recati in prima. Ecco la marcia, che al Sig. *Lambre*, ed a me par la più pronta.

sen. $72° = \sqrt{(1 - \text{sen.}^2\, 18°)} = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$

sen. $12° =$ sen. $(30° - 18°) = \frac{1}{2}(\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} - \sqrt{15 + \sqrt{3}})$

sen. $48° =$ sen. $(30° + 18°) = \frac{1}{2}(\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} + \sqrt{15 - \sqrt{3}})$

sen. $27° =$ sen. $(45° - 18°) = \frac{1}{4}(\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}})$

$$\text{sen. } 63^\circ = \text{sen. } (45^\circ + 18^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 42^\circ = \text{sen. } (60^\circ - 18^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \sqrt{5} + 1\right)$$
$$\text{sen. } 78^\circ = \text{sen. } (60^\circ + 18^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(30+6\sqrt{5})} + \sqrt{5} - 1\right)$$
$$\text{sen. } 33^\circ = \text{sen.}(45^\circ - 12^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{(5+\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 57^\circ = \text{sen.}(45^\circ + 12^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{(5+\sqrt{5})} - \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 3^\circ = \text{sen.}(45^\circ - 42^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 87^\circ = \text{sen.}(45^\circ + 42^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{(15+3\sqrt{5})} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 54^\circ = \text{sen. } (72^\circ - 18^\circ) = 1 - 2\,\text{sen}^2\, 18^\circ = \tfrac{1}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$
$$\text{sen. } 36^\circ = \sqrt{\left(1 - \text{sen}^2\, 54^\circ\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$$
$$\text{sen. } 24^\circ = \text{sen. } (60^\circ - 36^\circ) = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{15} - \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\right)$$
$$\text{sen. } 84^\circ = \text{sen. } (60^\circ + 36^\circ) = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{3} + \sqrt{15} + \sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}\right)$$
$$\text{sen. } 6^\circ = \text{sen. } (36^\circ - 30) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})} - \sqrt{5} - 1\right)$$
$$\text{sen. } 66^\circ = \text{sen. } (36^\circ + 30^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})} + \sqrt{5} + 1\right)$$
$$\text{sen. } 39^\circ = \text{sen.}(45^\circ - 6^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{(5-\sqrt{5})} - \sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 51^\circ = \text{sen.}(45^\circ + 6^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{(5-\sqrt{5})} + \sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$
$$\text{sen. } 21^\circ = \text{sen.}(45^\circ - 24^\circ) = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{\tfrac{15}{2}} - \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{(5-\sqrt{5})}\right)$$
$$\text{sen. } 69^\circ = \text{sen.}(45^\circ + 24^\circ) = \tfrac{1}{8}\left(\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{\tfrac{15}{2}} + \sqrt{\tfrac{5}{2}} - \sqrt{(5-\sqrt{5})}\right)$$
$$\text{sen. } 9^\circ = \text{sen. } (45^\circ - 36^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \sqrt{(5-\sqrt{5})}\right)$$
$$\text{sen. } 81^\circ = \text{sen. } (45^\circ + 36^\circ) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \sqrt{(5-\sqrt{5})}\right)$$

Se alcuno chiedesse la causa, perchè non di seni d'altri archi si diano cotali espressioni, fuorchè de' multiplici di quel di 3°, si risponderà che non altri, di numero intiero di gradi, esser possono compresi da lati di poligoni regolari inscritti nel cerchio.

§. II.

Abbiamo trovato (88), $\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\text{sen. } A + \text{sen. } B}{\text{cos. } A + \text{cos. } B}$ $= \dfrac{\text{cos. } B - \text{cos. } A}{\text{sen. } A - \text{sen. } B}$. Fatto $A = 90^\circ$, se ne ricava

$$\text{tang. } \left(45^\circ + \tfrac{1}{2}B\right) = \frac{1 + \text{sen. } B}{\text{cos. } B} = \frac{\text{cos. } B}{1 - \text{sen. } B}.$$

§. III.

Avendo calcolato anche il nono termine, non mai publicato, ch'io sappia, della Serie notissima (156), cot. $A = \frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{45} -$ ecc. Io do qui, a comodo di chi volesse valersene, e perchè me ne varrò io pure or ora: ed è

$$-\frac{3617\ A^{15}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13.15.17}$$

§. IV.

Dato l'arco, trovare il logaritmo del seno, del coseno, e della tangente.

Poichè (175), $d \log. \text{sen.} A = \frac{d\,\text{sen.}\,A}{\text{sen.}\,A} = \frac{dA \cos.\,A}{\text{sen.}\,A} = dA$ cot. $A = dA\left(\frac{1}{A} - \frac{A}{3} - \frac{A^3}{3^2.5} - \frac{2A^5}{3^3.5.7} - \text{ecc.}\right)$ (156); sarà, integrando, e nominando M il modulo per convertire il logaritmo iperbolico in tabulare,

$$\log. \text{sen.} A = \log. A - M\left(\frac{A^2}{2.3} + \frac{A^4}{2^2.3^2.5} + \frac{A^6}{3^2.5.7.9} + \frac{A^8}{3^3.5^2.7.8} + \frac{A^{10}}{3^2.5^2.7.9.11} + \frac{691\ A^{12}}{3^2.5^3.6.7^2.9^2.11.13} + \frac{2A^{14}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13} + \frac{3617\ A^{16}}{3^2.5^3.7^2.9^2.11.13.15.16.17} + \text{ecc.}\right)$$

Similmente $d \log. \cos.\,A = \frac{d \cos.\,A}{\cos.\,A} = -\frac{dA\,\text{sen.}\,A}{\cos.\,A} = -dA$ tang. $A = -dA\left(A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A5}{3.5} + \text{ecc.}\right)$ (153). Dunque integrando

$$\log. \cos.\,A = -M\left(\frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{3.4} + \frac{A^6}{5.9} + \frac{17\,A^8}{5.7.8.9} + \frac{31\,A^{10}}{5^2.7.9^2} + \frac{691\,A^{12}}{5^2.6.7.9^2.11} + \frac{10922\,A^{14}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{929569\ A^{16}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13.15.16.} + \text{ecc.}\right)$$

Finalmente essendo log. tang. A = log. sen. A — log. cos. A; prendendo la differenza delle due Serie trovate sopra, e riducendo, si ottiene

$$\log.\text{tang.}\,A = \log.A + M\left(\frac{A^2}{3} + \frac{7A^4}{9.10} + \frac{62A^6}{5.7.9^2} + \frac{127A^8}{3.4.5^2.7.9} + \frac{146A^{10}}{3.5^2.9^2.11} + \frac{1414477A^{12}}{3^3.5^3.7^2.9^2.11.13} + \frac{32764A^{14}}{3^3.5^2.7^2.9^2.11.13} + \frac{16931177A^{16}}{2^3.3^2.5^3.7.9^2.11.13.15.17} + \text{ecc.}\right)$$

L'enunziazione del problema è sodisfatta a rigore per rispetto al coseno solamente: poichè pel seno e per la tangente è mestieri che, oltre l'arco, sia dato anche il suo logaritmo. Ma questo si computa prestamente con le formule e metodi, che ho esibiti (175 e segg.). Del resto, per formar tavole, quando si fossero calcolati li logaritmi de' coseni da 0° a 45°, tutti li rimanenti, come anche quelli delle tangenti, si conseguiscono per via di semplici sottrazioni (189).

Le nuove serie, che ho date or ora, sono grandemente più comode e speditive, e rinvenute assai più facilmente, di quelle di *Eulero* (*Analys. infin. Tom. I.* 194).

CAPITOLO SECONDO.

Formule implicate d' immaginarj.

§. I.

Il P. *Fontana* è stato il primo, per quel ch' io sappia, a trovare direttamente l' espressioni immaginarie de' seni e coseni degli archi multiplici (*Tom. I di questa Società*, *pag.* 189), dimostrandole rigorosamente, non già conchiudendole per analogia, come fanno *Eulero* (*Tom. I.* 133), *Riccati* (*Instit. analyt. lib. II*, *cap.* 12), *Mauduit* (*Astronomie sphérique*, *pag.* 40), ecc. Sulle traccie del prelodato Socio m' ingegnerò anch' io d' apportar qualche facilità a questo ramo non infecondo della moderna analisi.

E' noto, parlando de' logaritmi iperbolici, che (*Trigonom.* 179), detto n un numero qualunque,

$$n = 1 + \log.^1 n + \tfrac{1}{2}\log.^2 n + \frac{1}{2.3}\log.^3 n + \text{ecc.}$$

Sarà dunque $n^x = 1 + \log.^1 n^x + \frac{1}{2}\log.^2 n^x + \text{ecc.} = 1 + \frac{x}{1}\log.^1 n$ $+ \frac{x^2}{1.2}\log.^2 n + \frac{x^3}{1.2.3}\log.^3 n + \text{ecc.}$ Or sia $n = e$, cioè alla base de' logaritmi iperbolici, per il che $\log. n = 1$, e si avrà

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ecc.}$$

Che se x sia negativo, sarà

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{ecc.}$$

Ma si ponga $x = A\sqrt{-1}$; sorgerà

$$e^{A\sqrt{-1}} = 1 + \frac{A\sqrt{-1}}{1} - \frac{A^2}{1.2} - \frac{A^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} + \frac{A^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{ecc.}$$

$$e^{-A\sqrt{-1}} = 1 - \frac{A\sqrt{-1}}{1} - \frac{A^2}{1.2} + \frac{A^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{A^4}{1.2.3.4} - \frac{A^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \text{ecc.}$$

Quindi sommando, e dividendo per 2; poi sottraendo, e dividendo per 2; si raccoglie dalla prima operazione

$$\frac{e^{A\sqrt{-1}} + e^{-A\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2.3.4.5.6} + \text{ec.} = \text{cos.}\, A \ (154);$$

e dalla seconda operazione

$$\frac{e^{A\sqrt{-1}} - e^{-A\sqrt{-1}}}{2} = \sqrt{-1}\left(A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ecc.}\right) = \text{sen.}\, A\sqrt{-1}, \ (149);$$

delle quali equazioni li primi ed ultimi membri sommati, e sottratti, danno

$$e^{A\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, A + \text{sen.}\, A\sqrt{-1}$$

$$e^{-A\sqrt{-1}} = \text{cos.}\, A - \text{sen.}\, A\sqrt{-1}$$

Da sì fatte espressioni s'intende come posson ridursi le

quantità esponenziali immaginarie a seni e coseni d'archi reali. Ma procedendo dai numeri ai logaritmi, $A\sqrt{-1}$ log. e, o vero $A\sqrt{-1} = \log.(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})$; così $-A\sqrt{-1} = \log.(\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1})$. Sottraendo questa dall'altra, si ha $2A\sqrt{-1} = \log.(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1}) - \log.(\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1}) = \log.\frac{\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1}}{\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1}}$. Laonde

$$A = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1}}{\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1 + \text{tang. } A\sqrt{-1}}{1 - \text{tang. } A\sqrt{-1}};$$

che sono le note formule, utilissime nel calcolo integrale, per ridurre ad archi circolari i logaritmi immaginarj.

§. II.

Poichè $A\sqrt{-1} = \log.(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})$, sarà $nA\sqrt{-1} = n\log.(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1}) = \log.(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})^n$. Ma ponendo, nella prima equazione, nA in luogo di A, si ha pure $nA\sqrt{-1} = \log.(\text{cos. } nA + \text{sen. } nA\sqrt{-1})$. Dunque $\log.(\text{cos. } nA + \text{sen. } nA\sqrt{-1}) = \log.(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})^n$. E passando a' numeri, $\text{cos. } nA + \text{sen. } nA\sqrt{-1} = (\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})^n$.

Nello stesso modo, dall' equazione $-A\sqrt{-1} = \log.(\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1})$ si ricava $\text{cos. } nA - \text{sen. } nA\sqrt{-1} = (\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1})^n$.

Sommando insieme le due equazioni finali trovate or ora, si conseguisce

$$\text{cos. } nA = \frac{(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})^n + (\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1})^n}{2}$$

Prendendo la differenza delle medesime equazioni,

$$\text{sen. } nA = \frac{(\text{cos. } A + \text{sen. } A\sqrt{-1})^n - (\text{cos. } A - \text{sen. } A\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

Il P. *Riccati* (*lib. III*, *cap.* 3, *n.*° 25...36) applica queste equazioni a risolvere, parte co' seni iperbolici e parte co' circolari, quelle della forma, dove i coseni degli archi multiplici sono espressi da potenze del coseno dell'arco semplice (*Trig.* 125).

CAPITOLO TERZO.

D'alcune Serie trigonometriche.

§. I.

Trovar la formola generale del ſeno dell'arco multiplice, eſpreſſo da potenze del ſeno dell'arco ſemplice.

Per la Serie notiſſima (*Trig.* 149), ch'eſprime il ſeno con le potenze dell'arco, ſi ha

$$\text{ſen.}\, nA = nA - \frac{n^3A^3}{2.3} + \frac{n^5A^5}{2.3.4.5} - \frac{n^7A^7}{2.3.4.5.6.7} + \text{ecc.}$$

Ma l'altra Serie (144), ch'eſprime l'arco con le potenze del ſeno, dà

$$A = \text{ſen.}\, A + \frac{\text{ſen.}^3 A}{2.3} + \frac{3\,\text{ſen.}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5\,\text{ſen.}^7 A}{2.4.6.7.} + \text{ecc.}$$

$$A^3 = \text{ſen.}^3 A + \frac{\text{ſen.}^5 A}{2} + \left(\frac{9}{2.4.5} + \frac{3}{2^2.3^2}\right)\text{ſen.}^7 A + \text{ecc.}$$

$$A^5 = \text{ſen.}^5 A + \frac{5\,\text{ſen.}^7 A}{2.3} + \text{ecc.}$$

$$A^7 = \text{ſen.}^7 A + \text{ecc.}$$

Soſtituendo queſti valori nella ſerie antecedente, rieſce

$$nA = n\,\text{ſen.}\, A + \frac{n\,\text{ſen.}^3 A}{2.3} + \frac{3n\,\text{ſen.}^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5\,n\,\text{ſen.}^7 A}{2.4.6.7} + \text{ecc.}$$

$$-\frac{n^3A^3}{2.3} = -\frac{n^3\,\text{ſen.}^3 A}{2.3} - \frac{n^3\,\text{ſen.}^5 A}{3.4} - \frac{37\,n^3\,\text{ſen.}^7 A}{2.3.4.5.6} - \text{ecc.}$$

$$+\frac{n^5A^5}{2.3.4.5} = +\frac{n^5\,\text{ſen.}^5 A}{2.3.4.5} + \frac{5\,n^5\,\text{ſen.}^7 A}{2.3.4.5.6.} + \text{ecc.}$$

$$-\frac{n^7A^7}{2.3.4.5.6.7} = -\frac{n^7\,\text{ſen.}^7 A}{2.3.4.5.6.7} - \text{ecc.}$$

Ma li coefficienti delle potenze medeſime di ſen. A ſi riducono alle ſeguenti eſpreſſioni uniformi, cioè $\frac{n-n^3}{2.3} = -\frac{n(n^2-1)}{2.3}$;

$$\frac{3n}{2.4.5} - \frac{n^3}{3.4} + \frac{n^5}{2.3.4.5} = \frac{9n - 10n^3 + n^5}{2.3.4.5} = \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5};$$

$$\frac{3.5\,n}{2.4.6.7} - \frac{37\,n^3}{2.3.4.5.6} + \frac{5\,n^5}{2.3.4.5.6.} - \frac{n^7}{2.3.4.5.6.7} = \frac{225\,n - 259\,n^3 + 35\,n^5 - n^7}{2.3.4.5.6.7}$$

$= -\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}$. Dunque la formola generale cercata sarà

$$(\alpha)\ \text{sen.}\, nA = n\,\text{sen.}\, A - \frac{n(n^2-1)}{2.3}\,\text{sen.}^3 A + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}\,\text{sen.}^5 A - \frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\,\text{sen.}^7 A + \text{ecc.}$$

della quale è manifesta la legge. Questa serie è visibilmente finita e ristretta a termini $\frac{n+1}{2}$ quando n sia numero *dispari*, infinita quando n sia pari. In questo caso però si riduce la somma ad una espressione composta di termini $\frac{n}{2}$ moltiplicati per cos. A, o vero per $\sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)}$, il che si rinviene e dimostra così.

Sia S il secondo membro dell'equazione (α); sarà sen. $nA = \frac{S\,\text{cos.}\, A}{\text{cos.}\, A} = \frac{S\sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)}}{\sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)}}$. Ma il binomio di *Neuton* produce $\sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)} = 1 - \frac{1}{2}\,\text{sen.}^2 A - \frac{1}{2.4}\,\text{sen.}^4 A - \frac{3}{2.4.6}\,\text{sen.}^6 A$ — ecc. Si divida per questa Serie la S, e si troverà

$$(\beta)\ \text{sen.}\, nA = \sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)}\left(n\,\text{sen.}\, A - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\,\text{sen.}^3 A + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\,\text{sen.}^5 A - \frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7}\,\text{sen.}^7 A + \text{ecc.}\right)$$

la qual serie si tronca evidentemente dopo termini $\frac{n}{2}$, quando n è *pari*. Questa e la precedente si trovano anche nell' Analisi degl'Infiniti di *Eulero* (236, 238), ma conchiuse *a posteriori* dalle tavole peculiari (*Trigon.* 125).

§. II.

Trovar la formola generale del Coseno dell'arco multiplice, espresso da potenze del seno dell'arco semplice.

Per la serie notissima (154), ch'esprime il coseno con le potenze dell'arco,

$$\text{cos.}\, nA = 1 - \frac{n^2}{2} A^2 + \frac{n^4}{2.3.4} A^4 - \frac{n^6}{2.3.4.5.6} A^6 + \frac{n^8}{2.3.4.5.6.7.8} A^8 - \text{ecc.}$$

Sostituendo i valori di A^2, A^4, ecc. presi (§. I.) dall'equazione $A = \text{sen.}\, A + \frac{\text{sen.}^3 A}{2.3} + \text{ecc.}$ e riducendo, si ottiene

$$(\gamma)\ \text{cos.}\, nA = 1 - \frac{n^2}{2} \text{sen.}^2 A + \frac{n^2 (n^2-4)}{2.3.4} \text{sen.}^4 A - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}$$
$$\text{sen.}^6 A + \frac{n^2 (n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7.8} \text{sen.}^8 A - \text{ecc.}$$

Questa sorta formole generali possono dunque trovarsi *a priori* con le sole forze della Trigonometria, senza ricorrere agl'immaginarj, ed a metodi complicati e dipendenti dal calcolo integrale, come fece *Eulero* (*Calc. integr.* 181).

E' manifesto, che la serie (γ) è infinita quando n sia *dispari*, finita in termini $\frac{n+2}{2}$ quando n sia *pari*. Ma nel primo caso si rende finita in termini $\frac{n+1}{2}$ moltiplicati per cos. A, o sia per $\sqrt{(1 - \text{sen.}^2 A)}$, dividendola per questo binomio sviluppato, come s'è fatto (§. I.), il che dà

$$(\delta)\ \text{cos.}\, nA = \sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)} \left(1 - \frac{n^2-1}{2} \text{sen.}^2 A + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}\right.$$
$$\left.\text{sen.}^4 A - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6} \text{sen.}^6 A + \text{ecc.}\right)$$

§. III.

Trovar la formola generale del Seno dell'arco multiplice, espresso da potenze del coseno dell'arco semplice.

Pongasi $90° - A$ in cambio di A nell'equazione (δ), e sarà, per n *dispari*, $\text{cos.}\, n(90° - A) = \pm \text{sen.}\, nA$; quindi

$$(\epsilon)\ \text{sen.}\, nA = \pm \sqrt{(1-\text{cos.}^2 A)} \left(1 - \frac{n^2-1}{2} \text{cos.}^2 A + \frac{(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4}\right.$$
$$\left.\text{cos.}^4 A - \frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6} \text{cos.}^6 A + \text{ecc.}\right)$$

Il ſegno poſitivo vale quando $n = 4m + 1$, il negativo quando $n = 4m - 1$, m eſſendo un numero intiero qualunque, cominciando da zero.

Soſtituendo parimente $90° - A$ in vece di A nell'equazione (β), ſi ha, per n *pari*,

$$(\zeta)\ \text{ſen.}\, nA = \pm \sqrt{(1 - \text{coſ.}^2 A)}\left(n\,\text{coſ.}\, A - \frac{n(n^2-4)}{2.3}\,\text{coſ.}^3 A + \frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\,\text{coſ.}^5 A - \text{ecc.}\right)$$

Il ſegno poſitivo quando $n = 4m + 2$, il negativo quando $n = 4m$.

§. IV.

Trovare la formola generale del Coſeno dell' arco multiplice, eſpreſſo da potenze del coſeno dell' arco ſemplice.

Pongaſi $90° - A$ in luogo di A nell'equazione (α), e ſi otterrà, per n *diſpari*,

$$(\eta)\ \text{coſ.}\, nA = \pm\left(n\,\text{coſ.}\, A - \frac{n(n^2-1)}{2.3}\,\text{coſ.}^3 A + \frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}\,\text{coſ.}^5 A - \text{ecc.}\right)$$

Il ſegno poſitivo vale quando $n = 4m + 1$, il negativo quando $n = 4m - 1$.

Soſtituendo ſimilmente $90° - A$ in vece di A nell'equazione (γ), ſi ritrae, per n *pari*,

$$(\theta)\ \text{coſ.}\, nA = \pm\left(1 - \frac{n^2}{2}\,\text{coſ.}^2 A + \frac{n^2(n^2-4)}{2.3.4}\,\text{coſ.}^4 A - \frac{n^2(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5.6}\,\text{coſ.}^6 A + \text{ecc.}\right)$$

Il ſegno poſitivo quando $n = 4m$, il negativo quando $n = 4m - 2$.

Anche le equazioni (η) (θ) ſono ſtate date dal Sig. *Mauduit* (*Aſtronomie ſphérique*, *pag.* 23), ma trovate empiricamente, ſenza darne dimoſtrazione.

Finalmente le otto formole (α) (β) ecc. ſono l'eſpreſſion generale delle quattro tavole, da me collocate (125).

§. V.

Trovar le radici delle otto equazioni (α) (β) *ecc. nel caso in cui sono finite.*

Nella prima equazione (α), finita quando n è dispari, una delle radici è manifestamente sen. A. Che se in vece di nA si ponga ($c+nA$) nel primo membro, e conseguentemente $\frac{c+nA}{n}$ in luogo di A nel secondo, fatto $c=360°$, non sarà punto alterato il valore, nè il segno di sen. nA, ma sen. A diventerà sen. $\left(\frac{c}{n}+A\right)$, e questa sarà una seconda radice. Similmente se in cambio di nA s'introduca $(2c+nA)$, riuscirà per terza radice sen. $\left(\frac{2c}{n}+A\right)$. Così proseguendo, troverannosi le altre, sen. $\left(\frac{3c}{n}+A\right)$, sen. $\left(\frac{4c}{n}+A\right)$, ecc. fino all'ultima, la qual sarà sempre sen. $\left(\frac{(n-1)c}{n}+A\right)$; imperocchè se si procedesse a sen. $\left(\frac{nc}{n}+A\right)$ = sen. $(c+A)$ = sen. A, e così discorrendo, si cascherebbe da capo nelle radici ottenute prima, il cui numero debbe ogni volta esser n giusta la dottrina delle equazioni.

Che se alcuno volesse chiamar a prova sì fatte radici, e veder se da quelle emerga l'equazione, metta in quella x in luogo di sen. A, poi multiplichi insieme tutte le radici, cioè li binomj $(x-\text{sen. }A)$, $\left(x-\text{sen. }\frac{c}{n}+A\right)$, ecc. e fatte le riduzioni convenevoli, troverà l'equazione per qualsivoglia numero dispari n.

Se poi n sia numero pari, diventa finita l'equazione (β): ma perchè il secondo membro è implicato della quantità irrazionale $\sqrt{(1-\text{sen.}^2 A)}$, fa mestieri toglier l'asimmetria elevando al quadrato; con che il numero delle radici si fa doppio, cioè $2n$, pigliando ognuna due forme, la positi-

va e la negativa. E di fatti sen. nA convertendosi in sen^2. nA, che vale $\frac{1-\text{cos. } 2nA}{2}$, ne viene che l'arco multiplice non è già nA, ma sì veramente $2nA$. Pertanto, procedendo come di sopra, le radici saranno: $\pm$ sen. A, $\pm$ sen. $\left(\frac{c}{2n}+A\right)$, $\pm$ sen. $\left(\frac{2c}{2n}+A\right)$, e così progredendo fino alle ultime $\pm$ sen. $\left(\frac{(n-1)c}{2n}+A\right)$.

Dal medesimo metodo appare: che le radici dell'equazione (γ), quando n è pari, sono n di numero, e quelle stesse dell'equazione (α) per n dispari: che le radici dell'equazione (δ), quando n è dispari, sono $2n$ di numero, e quelle stesse dell'equazione (β) per n pari: che ognuna delle equazioni (ε) (ζ) ha $2n$ radici, che son le medesime nell'una e nell'altra, cioè $\pm$ cos. A, $\pm$ cos. $\left(\frac{c}{2n}+A\right)$, $\pm$ cos. $\left(\frac{2c}{2n}+A\right)$, ... $\pm$ cos. $\left(\frac{(n-1)c}{2n}+A\right)$: e finalmente che le equazioni (η) (θ) hanno ciascuna n radici, e le stesse in entrambe, cioè cos. A, cos. $\left(\frac{c}{n}+A\right)$, cos. $\left(\frac{2c}{n}+A\right)$, ... cos. $\left(\frac{(n-1)c}{n}+A\right)$.

§. VI.

Esprimere i seni e coseni dell'arco multiplice con il prodotto delle radici dell'equazioni (α) (β), ecc.

Ogni coefficiente delle potenze di sen. A nella serie (α) ha questa proprietà, che il suo valor si riduce a 2^{n-1} qualunque volta l'esponente della potenza sia n. Per esempio, se $n=5$, si troverà il coefficiente di sen.$^5 A$ esser 2^4, o sia 16: di fatti $\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}=\frac{5(25-1)(25-9)}{2.3.4.5}=16$.

Così se $n=7$, risulterà $\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}=2^{7-1}$ $=2^6=64$. E parimente d'ogn'altro. Dunque l'ultimo termine della serie (α), per qualsisia valor dispari di n, è sempre 2^{n-1} sen.$^n A$. E però dividendo l'equazione per il coefficiente 2^{n-1} della massima potestà di sen. A, e ordinandola conforme al solito, l'omogeneo di comparazione sarà in ogni caso $\frac{\text{sen.}\,nA}{2^{n-1}}$, col segno negativo quando $n=4m+1$. Ma per li canoni delle equazioni il medesimo termine, col segno mutato, uguaglia il prodotto di tutte le radici. Dunque pigliandole nel §. V., sarà, per *n dispari*,

$$\text{sen.}\,nA=\pm 2^{n-1}\,\text{sen.}A\,\text{sen.}\left(\frac{c}{n}+A\right)\text{sen.}\left(\frac{2c}{n}+A\right)\ldots\ldots\text{sen.}\left(\frac{(n-1)\,c}{n}+A\right),$$

il segno negativo valendo qualvolta $n=4m-1$.

Quando poi n è pari, diventa finita la serie (β); nella quale il coefficiente, che si riduce a 2^{n-1} come sopra, è quello della potestà $(n-1)$ di sen. A, dopo cui si tronca la serie. Dunque dividendo l'equazione per 2^{n-1}, elevandola al quadrato, e notando che la massima dignità sen.^{2n-2}A diventa sen.^{2n}A, a cagion del moltiplico per sen.^2A ch'esce fuori del radicale, laonde le radici sono $2n$, l'omogeneo di comparazione riesce $\frac{\text{sen.}^2 nA}{2^{2n-2}}$. E però togliendo nel §. V. le radici di questa equazione, si ha sen^2.$nA=2^{2n-2}$ sen.^2A sen.$^2\left(\frac{c}{2n}+A\right)$sen.$^2\left(\frac{2c}{2n}+A\right)\ldots\ldots$sen.$^2\left(\frac{(n-1)\,c}{2n}+A\right)$. Della quale equazione estraendo la radice, si ottiene, con le sole forze dell'analisi trigonometrica elementare, e per via, se non erro, più facile di quella d'*Eulero* (*Analys. infinit.* 237),

$$\text{sen.}\,nA=2^{n-1}\,\text{sen.}A\,\text{sen.}\left(\frac{c}{2n}+A\right)\text{sen.}\left(\frac{2c}{2n}+A\right)\ldots\ldots\text{sen.}\left(\frac{(n-1)\,c}{2n}+A\right);$$

equazione che vale per *qualsivoglia* valore di n, imperocchè qual ce l'ha somministrata pel valor pari l'equazione (β), tal ce la porge pel valor dispari l'equazione (δ). E che sia il vero, innalzando questa al quadrato, sorge cos^2.nA $=(1-\text{sen.}^2A)(1-(n^2-1)\,\text{sen.}^2A+\text{ecc.})=1-n^2\,\text{sen.}^2A+\text{ecc.}$

Laonde $\text{sen.}^2 nA = n^2 \text{sen.}^2 A -$ ecc. E però l'omogeneo di comparazione $\frac{\text{sen.}^2 nA}{2^{2n-2}}$, e le radici (ved. §. V.), tutto è lo stesso, come nella (β). Dunque ecc.

Trattando l'equazione (ζ) come s'è fatto della (β), emerge, per *n pari*,

$$\text{sen.}\, nA = \pm 2^{n-1} \cos.A \cos.\left(\frac{c}{2n} + A\right) \cos.\left(\frac{2c}{2n} + A\right) \ldots\ldots \cos.\left(\frac{(n-1)c}{2n} + A\right);$$

il segno negativo spettando al caso, in cui $n = 4m + 2$.

Con lo stesso metodo, che ho tenuto per la (α), ricavo dalla (η), per *n dispari*,

$$\cos.\, nA = 2^{n-1} \cos.A \cos.\left(\frac{c}{n} + A\right) \cos.\left(\frac{2c}{n} + A\right) \ldots\ldots \cos.\left(\frac{(n-1)c}{n} + A\right).$$

Ma la (ε), maneggiata come la (β), produce ancora per *n dispari*

$$\cos.nA = \pm 2^{n-1} \cos.A \cos.\left(\frac{c}{2n} + A\right) \cos.\left(\frac{3c}{2n} + A\right) \ldots\ldots \cos.\left(\frac{(n-1)c}{2n} + A\right);$$

il segno negativo dovendo usarsi quando $n = 4m - 1$, escluso il valore zero di m.

Ognun vede l'utilità delle formole raccapezzate in questo §. per la composizione de' logaritmi de' seni e coseni: le due seguenti servirebbero a quelli de' seni versi, se occorresse farne uso.

L'omogeneo di comparazione nella (γ) è $\pm \frac{\cos.nA - 1}{2^{n-1}}$.

Sarà dunque, per *n pari*,

$$\cos.nA = 1 \mp 2^{n-1} \text{sen.}A\, \text{sen.}\left(\frac{c}{n} + A\right) \text{sen.}\left(\frac{2c}{n} + A\right) \ldots\ldots \text{sen.}\left(\frac{(n-1)c}{n} + A\right);$$

dove il segno positivo vale quando $n = 4m - 2$.

Similmente, per il medesimo valore di *n pari*, dall' equazione (θ) si ricava

$$\cos.\, nA = \pm 1 - 2^{n-1} \cos.A \cos.\left(\frac{c}{n} + A\right) \cos.\left(\frac{2c}{n} + A\right) \ldots \cos.\left(\frac{(n-1)c}{n} + A\right);$$

dove il segno negativo spetta al caso, in cui $n = 4m - 2$, escluso il valore zero di m.

§. VII.

Espressioni della stessa forma per la tangente dell'arco multiplice si deducono facilmente dalle precedenti: imperocchè dividendo la prima per la quarta del §. VI., e la seconda per la quinta, emergono le seguenti, per n *dispari*,

$$\text{tang.}nA = \pm\,\text{tang.}A\,\text{tang.}\left(\frac{c}{n}+A\right)\text{tang.}\left(\frac{2c}{n}+A\right)\ldots\text{tang.}\left(\frac{(n-1)c}{n}+A\right).$$

$$\text{tang.}nA = \pm\,\text{tang.}A\,\text{tang.}\left(\frac{c}{2n}+A\right)\text{tang.}\left(\frac{2c}{2n}+A\right)\ldots\text{tang.}\left(\frac{(n-1)c}{2n}+A\right).$$

Il caso di n pari non ammette espressioni egualmente comode, dovendo impiegarsi la sesta e la settima del §. VI., per dividere la seconda e la terza.

§. VIII.

Trovar la formola generale delle potenze del Seno dell' arco semplice, espresse da seni dell' arco multiplice.

L'irrazionalità della serie (β) non lascia luogo a risolver questo problema pel caso del multiplice pari. Per quello del *dispari* farò che mi vaglia la formula (α), dopo che l'avrò posta sotto altra forma ancor più generale.

Nominando x l'esponente di sen. A in qualsivoglia termine $\mathfrak{Q}$ della serie (α), il termine prossimo antecedente è sempre $\frac{\mathfrak{Q}}{\text{sen.}^2 A}\times\frac{x(x-1)}{n^2-(x-2)^2}$. Ma abbiamo veduto (§. VI.), che qualunque sia il valor dispari di n, l'ultimo termine della serie, finita in tal caso, è sempre $2^{n-1}\,\text{sen.}^n A$. Fatto dunque $x=n$, il penultimo termine sarà sempre $\frac{2^{n-1}\,\text{sen}^n A}{\text{sen.}^2 A}$ $\times\frac{n(n-1)}{n^2-(n-2)^2}=2^{n-1}\,\text{sen.}^{n-2}A\times\frac{n(n-1)}{4(n-1)}=2^{n-3}n.\text{sen.}^{n-2}A$. Ora, nel penultimo termine, $x=n-2$: sarà dunque l'antepenultimo $\frac{2^{n-3}n.\,\text{sen.}^{n-2}A}{\text{sen.}^2 A}\times\frac{(n-2)(n-3)}{n^2-(n-4)^2}=2^{n-3}n.\text{sen.}^{n-4}A\times\frac{(n-2)(n-3)}{8(n-2)}$

$=2^{n-1}$

$= 2^{n-5} \frac{n(n-3)}{2} \text{sen.}^{n-4} A$. Proseguendo così, con fare $x = n-4$ nell'antepenultimo termine, $x = n-6$ nel prossimo precedente ecc., l'equazione (α) diviene, invertendo la serie,

$$(\lambda)\ \text{sen.} nA = \pm 2^{n-1} \text{sen.}^{n} A \mp n.2^{n-3} \text{sen.}^{n-2} A \pm \frac{n(n-3)}{2} \times 2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A$$

$$\mp \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} \times 2^{n-7} \text{sen.}^{n-6} A \pm \text{ecc.}$$

li segni superiori valendo quando $n = 4m + 1$.

Sarà dunque, assumendo per ora li segni superiori a minor confusione,

$$2^{n-1} \text{sen.}^{n} A = \text{sen.} nA + n.2^{n-3} \text{sen.}^{n-2} A - \frac{n(n-3)}{2} \times 2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A$$

$$+ \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} \times 2^{n-7} \text{sen.}^{n-6} A - \text{ecc.}$$

Nella qual formola generale, se in vece di n si mette, una volta $n-2$, un'altra $n-4$, un'altra $n-6$, ecc. saranno ugualmente vere le seguenti, nelle quali il primo termine del secondo membro deve alternativamente mutar di segno per sodisfare al doppio della (λ);

$$2^{n-3} \text{sen.}^{n-2} A = -\text{sen.}(n-2) A + (n-2) 2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A - \frac{(n-2)(n-5)}{2}$$

$$\times 2^{n-7} \text{sen.}^{n-6} A + \text{ecc.}$$

$$2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A = \text{sen.}(n-4) A + (n-4) 2^{n-7} \text{sen.}^{n-6} A - \text{ecc.}$$

$$2^{n-7} \text{sen.}^{n-6} A = - \text{sen.}(n-6) A + \text{ecc.}$$

Or s'introduca questo valore di $2^{n-7} \text{sen.}^{n-6} A$ nelle tre precedenti equazioni, e si avrà

$$2^{n-1} \text{sen.}^{n} A = \text{sen.} nA + n.2^{n-3} \text{sen.}^{n-2} A - \frac{n(n-3)}{2} \times 2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} \text{sen.}(n-6) A \text{ ecc.}$$

$$2^{n-3} \text{sen.}^{n-2} A = -\text{sen.}(n-2) A + (n-2) 2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A + \frac{(n-2)(n-5)}{2} \text{sen.}(n-6) A \text{ ecc.}$$

$$2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A = \text{sen.}(n-4) A - (n-4) \text{sen.}(n-6) A \text{ ecc.}$$

Sostituiscasi adesso questo valore di $2^{n-5} \text{sen.}^{n-4} A$ nelle due antecedenti equazioni, onde sia

$$2^{n-1}\,\text{sen.}^n A = \text{sen.}nA + n.2^{n-1}\,\text{sen.}^{n-2}A - \frac{n(n-3)}{2}\,\text{sen.}(n-4)A$$
$$+\left(\frac{n(n-3)(n-4)}{2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}\right)\text{sen.}(n-6)A \text{ ecc.}$$

il qual ultimo termine si riduce a $+\frac{n(n-2)(n-4)}{3}\,\text{sen.}(n-6)A$; e

$$2^{n-1}\text{sen.}^{n-2}A = -\text{sen.}(n-2)A + (n-2)\text{sen.}(n-4)A - \left(\overline{n-2}.\overline{n-4} - \frac{(n-2)(n-5)}{2}\right)\text{sen.}(n-6)A \text{ ecc.}$$

il qual ultimo termine si riduce a $-\frac{(n-2)(n-3)}{2}\,\text{sen.}(n-6)A$.

Che se finalmente questo ultimo valore di $2^{n-1}\,\text{sen.}^{n-2}A$ s'inserisca nell'equazion precedente, fatte le riduzioni, e riposto il doppio segno, si ottiene

$$(\mu)\quad \pm 2^{n-1}\,\text{sen.}^n A = \text{sen.}nA - n.\text{sen.}(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2}\,\text{sen.}(n-4)A$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\,\text{sen.}(n-6)A + \text{ecc.}$$

il segno positivo valendo, come s'è detto, quando $n = 4m + 1$, e la serie troncandosi a termini $\frac{n+1}{2}$.

§. IX.

Trovare la formola generale delle potenze del Seno dell' arco semplice, espresse da coseni dell' arco multiplice.

L'irrazionalità della serie (δ) non lascia adito a sciogliere questo problema pel caso del multiplice dispari. Per quello del *pari*, la formula (γ), trattata come ho fatto or ora della (α), può esprimersi primamente così:

$$(\nu)\quad \text{cos.}nA = 1 \mp 2^{n-1}\,\text{sen.}^n A \pm n.2^{n-3}\,\text{sen.}^{n-2}A \mp \frac{n(n-3)}{2} \times 2^{n-5}\,\text{sen.}^{n-4}A \pm \text{ecc.}$$

regnando i segni inferiori quando $n = 4m$.

Questa serie non ha altro divario dalla (λ), se non per l'unità che v'è aggiunta. Si convertirà dunque del pari nella serie (μ), con due sole differenze, cioè che in vece dei seni qui avremo i coseni degli archi multiplici, e che l'uni-

tà, nelle veci di cui possiam mettere cos. $(n-n)A$, ed alla qual tocca allora l'ultimo luogo, sarà moltiplicata con la somma de' coefficienti di tutti gli altri coseni. Se $n=2$, questa somma sarà $1-n=-\frac{n-1}{1}$. Se $n=4$, sarà ella $-\frac{n-1}{1}$ $+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$. Se $n=6$, si avrà $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ $-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}=-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$. Donde si vede che in generale l'ultimo fattore, così nel numeratore come nel denominatore dell'anzidetta somma, è sempre $\frac{1}{2}n$, ed il numero de' fattori di sopra e di sotto è pure $\frac{1}{2}n$. Tutto si può avverar facilmente, ponendo, nell'equazione (λ), $(1-\text{cos.}nA)$ in iscambio di sen. nA, e rifacendo le operazioni che l'hanno trasformata nella (μ). Sarà dunque

$$(\xi)\ \pm 2^{n-1}\,\text{sen.}^n A=\text{cos.}nA-n\,\text{cos.}(n-2)A+\frac{n(n-1)}{2}\,\text{cos.}(n-4)A$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\,\text{cos.}(n-6)A\ldots\pm\frac{(n-1)\ldots\frac{1}{2}n}{1\ldots\frac{1}{2}n}\,\text{cos.}(n-n)A\,;$$

li segni superiori valendo quando $n=4m$.

§. X.

Trovar la formola generale delle potenze del Coseno dell' arco semplice, espresse da coseni dell' arco multiplice.

La formula (η) non differisce dalla (α), se non per aver li coseni nelle veci de' seni. Si avrà dunque, a similitudine della (λ), ma senza il doppio segno, poichè nella (η) la massima potestà di cos. A è sempre positiva,

$$(\pi)\ \text{cos.}nA=2^{n-1}\,\text{cos.}^n A-n.2^{n-3}\,\text{cos.}^{n-2}A+\frac{n(n-3)}{2}\times 2^{n-5}\text{cos.}^{n-4}A$$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}\times 2^{n-7}\,\text{cos.}^{n-6}A+\text{ecc.}$$

Facendo subire a questa equazione le trasformazioni, che hanno servito a convertire la (λ) nella (μ), si troverà

$$(\rho)\quad 2^{n-1}\,\text{cos.}^n A = \text{cos.}\,nA + n\,\text{cos.}(n-2)A + \frac{n(n-1)}{2}\,\text{cos.}(n-4)A$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\,\text{cos.}(n-6)A + \text{ecc.}$$

equazione, che risolve il problema per *n dispari*, ed è finita in termini $\frac{n+1}{2}$.

L'equazione finita, per *n pari*, si ricava dalla (θ). Si osservi che questa non differisce in altro dalla (γ), se non per aver le potenze de' coseni in cambio di quelle de' seni, e la massima dignità di cos. A sempre positiva. Si ha dunque in prima, a similitudine della (ν), la seguente espressione dell'equazione (θ).

$$(\varsigma)\quad \text{cos.}\,nA = \pm 1 + 2^{n-1}\,\text{cos.}^n A - n.2^{n-3}\,\text{cos.}^{n-2}A + \frac{n(n-3)}{2}$$
$$\times 2^{n-5}\,\text{cos.}^{n-4}A - \frac{n(n-4)(n-5)}{2.3} \times 2^{n-7}\,\text{cos.}^{n-6}A + \text{ecc.}$$

Ma questa equazione è la stessa della (π), senz'altro divario che l'unità di più nel secondo membro. Si convertirà dunque del pari nell'equazione (ρ), colla giunta soltanto dell'unità, co' segni alterni, moltiplicata per la somma de' coefficienti de' coseni degli archi multiplici, a quella guisa che s'è mostrato nel precedente §. La somma ha qui pure la stessa forma, se non che l'ultimo fattore nel numeratore è $\frac{1}{2}(n+2)$, e nel denominatore $\frac{1}{2}(n-2)$. Laonde, per il caso di *n pari*, basta l'equazione (ρ), purchè se le aggiunga il termine $+\frac{(n-1)\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1\ldots\ldots\frac{1}{2}(n-2)}\,\text{cos.}(n-n)A$, il qual sarà l'ultimo in tutti i casi.

Le sette formule (λ, μ....ς) non essendo state trovate *a priori* da altri ch'io sappia, m'è parso bene, che tal dimostrazione non manchi alla Trigonometria, tanto più ch'è sì agevole e piana. Le tre (μ, ξ, ρ) rappresentano le due tavole (*Trig.* 127), dalle quali sono state finora dedotte empiricamente, quand'era dicevole troppo più cercar prima le generali, e da quelle ritrar le particolari.

§. XI.

Sommare ogni ſerie di Seni d'archi in progreſſione aritmetica.

Sia la ſerie generaliſſima $\text{ſen.}A + \text{ſen.}(A+B) + \text{ſen.}(A+2B) \ldots\ldots + \text{ſen.}(A+pB)$, di cui ſi dimanda la ſomma. E poichè è notiſſimo che (*Trig. Tav. II, form.* 23)

$$\text{coſ.}(A-\tfrac{1}{2}B) - \text{coſ.}(A+\tfrac{1}{2}B) = 2\,\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſen.}A$$
$$\text{coſ.}(A+\tfrac{1}{2}B) - \text{coſ.}(A+\tfrac{3}{2}B) = 2\,\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſen.}(A+B)$$
$$\text{coſ.}(A+\tfrac{3}{2}B) - \text{coſ.}(A+\tfrac{5}{2}B) = 2\,\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B\,\text{ſen.}(A+2B)$$

ſe ſi piglia la ſomma di queſte tre equazioni, ſi ha

$$\text{coſ.}(A-\tfrac{1}{2}B) - \text{coſ.}(A+\tfrac{5}{2}B) = 2\,\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B\big(\text{ſen.}A + \text{ſen.}(A+B) + \text{ſen.}(A+2B)\big).$$

Or ſi noti, che qui eſſendo $p=2$, rieſce $\tfrac{5}{2}B = \frac{2p+1}{2}B$. E poichè per qualunque valore di p, è manifeſto che ſempre il ſecondo termine del primo membro ammette $\frac{2p+1}{2}$ per coefficiente di B, riſulta

$$\text{ſen.}A + \text{ſen.}(A+B) + \text{ſen.}(A+2B) \ldots + \text{ſen.}(A+pB) = \frac{\text{coſ.}(A-\tfrac{1}{2}B) - \text{coſ.}(A+\frac{2p+1}{2}B)}{2\,\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B}$$

$$= \frac{\text{ſen.}\frac{p+1}{2}B\,\text{ſen.}(A+\tfrac{1}{2}pB)}{\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B}.$$

Se la ſerie è infinita, $\text{coſ.}\left(A+\frac{2p+1}{2}B\right)$ ſpariſce, poichè $\text{coſ.}(A+\tfrac{1}{2}B+pB) = \text{coſ.}(A+\tfrac{1}{2}B)\,\text{coſ.}pB - \text{ſen.}(A+\tfrac{1}{2}B)\,\text{ſen.}pB$; li quali due termini ſi dileguano, per non eſſere aſſegnabili il coſeno ed il ſeno dell'arco infinito pB: laonde

$$\text{ſen.}A + \text{ſen.}(A+B) + \text{ſen.}(A+2B) + \text{ecc. all'infinito} = \frac{\text{coſ.}(A-\tfrac{1}{2}B)}{2\,\text{ſen.}\tfrac{1}{2}B}.$$

Che ſe $A=B$, ſarà

$$\text{ſen.}B + \text{ſen.}2B + \text{ſen.}3B + \text{ecc. all'infinito} = \tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\tfrac{1}{2}B.$$

Si noti, il che ſembra fuggito ad altri, che quando la progreſſione foſſe decreſcente, le ſteſſe formule nulla meno varrebbero facendovi B negativo. E ciò baſti detto una volta.

§. XII.

Sommare ogni serie di Coseni d' archi in progressione aritmetica.

Sia da sommare la serie generalissima $\cos.A + \cos.(A+B) + \cos.(A+2B) \ldots + \cos.(A+pB)$. Essendo notissimo che (*Trig. Tav. II., form.* 22.)

$$\text{sen.}(A+\tfrac{1}{2}B) - \text{sen.}(A-\tfrac{1}{2}B) = 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}B\cos.A$$
$$\text{sen.}(A+\tfrac{3}{2}B) - \text{sen.}(A+\tfrac{1}{2}B) = 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}B\cos.(A+B)$$
$$\text{sen.}(A+\tfrac{5}{2}B) - \text{sen.}(A+\tfrac{3}{2}B) = 2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}B\cos.(A+2B)$$

se si prende la somma di queste tre equazioni, si ha

$$\text{sen.}(A+\tfrac{5}{2}B)-\text{sen.}(A-\tfrac{1}{2}B)=2\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}B\big(\cos.A+\cos.(A+B)+\cos.(A+2B)\big).$$

Dunque, senza ripetere il detto nel precedente §.,

$$\cos.A+\cos.(A+B)+\cos.(A+2B)\ldots+\cos.(A+pB)=\frac{\text{sen.}(A+\frac{2p+1}{2}B)-\text{sen.}(A-\frac{1}{2}B)}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}B}$$
$$=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(p+1)B\cos.(A+\frac{1}{2}pB)}{\text{sen.}\frac{1}{2}B}.$$

Se $p=\infty$, il termine $\text{sen.}(A+\frac{2p+1}{2}B)$ sparisce, a tenor del mostrato nell' antecedente §., e rimane

$$\cos.A+\cos.(A+B)+\cos.(A+2B)+\text{ecc. all' infinito}=-\frac{\text{sen.}(A-\frac{1}{2}B)}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}B}.$$

Che se inoltre $A=B$, risulta

$$\cos.B+\cos.2B+\cos.3B+\text{ecc. all' infinito}=-\tfrac{1}{2}.$$

E' ammirabile la semplicità, con la quale pervengono direttamente a questa formula, ed all' ultima del §. precedente, per diverse strade, il Sig. Cav. *Lorgna* (*Tom. I. di questa Società, pag.* 358), ed il P. *Fontana* (*Tom. II., pag.* 424).

§. XIII.

Sommare la serie $S=\text{sen.}^nA+\text{sen.}^n(A+B)+\text{sen.}^n(A+2B)\ldots+\text{sen.}^n(A+pB)$.

Sia primieramente n numero *dispari*: sarà, per la (μ),

$$\pm S=\frac{1}{2^{n-1}}\big(\text{sen.}nA+\text{sen.}n(A+B)+\text{sen.}n(A+2B)\ldots+\text{sen.}n(A+pB)\big)$$

$$-\frac{n}{2^{n-1}}\left(\text{sen.}(n-2)A+\text{sen.}(n-2)(A+B)+\text{sen.}(n-2)(A+2B)\ldots+\text{sen.}(n-2)(A+pB)\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{2^n}\left(\text{sen.}(n-4)A+\text{sen.}(n-4)(A+B)+\text{sen.}(n-4)(A+2B)\ldots+\text{sen.}(n-4)(A+pB)\right)$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{3.2^n}\left(\text{sen.}(n-6)A+\text{sen.}(n-6)(A+B)+\text{sen}(n-6)(A+2B)\ldots+\text{sen.}(n-6)(A+pB)\right)$$

$+$ ecc.

Dunque in virtù del §. XI., e ſtando alle regole della (μ) circa il ſegno doppio, e la quantità de' termini,

$$\pm S=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}n(p+1)B\,\text{sen.}n(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\,\text{sen.}\frac{1}{2}nB}-\frac{n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-2)(p+1)B\,\text{sen.}(n-2)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-2)B}$$

$$+\frac{n(n-1)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-4)(p+1)B\,\text{sen.}(n-4)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-4)B}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-6)(p+1)B\,\text{sen.}(n-6)(A+\frac{1}{2}pB)}{3.2^n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-6)B}+\text{ecc.}$$

Se $n=3$, per eſempio, ſi ha $S=-\frac{\text{sen.}\frac{3}{2}(p+1)B\,\text{sen.}3(A+\frac{1}{2}pB)}{4\,\text{sen.}\frac{3}{2}B}$

$$+\frac{3\,\text{sen.}\frac{1}{2}(p+1)B\,\text{sen.}(A+\frac{1}{2}pB)}{4\,\text{sen.}\frac{3}{2}B}.$$

All'altro caſo di *n pari* ſerve la (ξ). Siccome queſta, ricevendo la legge dalla (γ) da cui deriva, ſi tronca in termini $\frac{n+2}{2}$, o vero in termini $\frac{n}{2}$ ſe ſi laſcia da parte l'ultimo, il qual rimane un coefficiente iſolato qualor ſi rimetta l'unità nelle veci di cof. $(n-n)A$: così trattando la (ξ), come ho fatto or ora della (μ), ogni termine darà una ſerie, di cui ſi prenderà la ſomma nel §. XII.; le ſerie ſaranno dunque $\frac{1}{2}n$ di numero; ed il ſopraddetto coefficiente iſolato, ſempre diviſo per 2^{n-1}, ſarà ripetuto $(p+1)$ volte, cioè quanti ſono li termini della ſerie S. Ciò inteſo, e ſerbate le regole della (ξ) circa il doppio ſegno, ſi troverà

$$\pm S=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}n(p+1)B\,\text{cof}\,n(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\,\text{sen.}\frac{1}{2}nB}-\frac{n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-2)(p+1)B\,\text{cof.}(n-2)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-2)B}$$

$$+\frac{n(n-1)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-4)(p+1)B\,\text{cof.}(n-4)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-4)B}$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-6)(p+1)B\,\text{cof.}(n-6)(A+\frac{1}{2}pB)}{3.2^n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-6)B}+\ldots\ldots$$

$$\pm \frac{p+1}{2^{n-1}} \times \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots\frac{1}{2}n}{1.2\ldots\ldots\frac{1}{2}n}.$$

Se $n=4$, per esempio, si ha $S = \frac{\text{sen.}2(p+1)B\,\text{cos.}4(A+\frac{1}{2}pB)}{8\,\text{sen.}2B}$

$$-\frac{\text{sen.}(p+1)B\,\text{cos.}2(A+\frac{1}{2}pB)}{2\,\text{sen.}B} + \frac{(p+1)3}{8}.$$

§. XIV.

Sommare la serie $S = \text{cos.}^n A + \text{cos.}^n(A+B) + \text{cos.}^n(A+2B)\ldots + \text{cos.}^n(A+pB)$.

La serie S si svolgerà col mezzo della (ρ), alla maniera del precedente §., e prese nel XII le somme delle serie parziali, il cui numero, per n *dispari*, sarà $\frac{n+1}{2}$, si avrà

$$S = \frac{\text{sen.}\frac{1}{2}n(p+1)B\,\text{cos.}n(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\,\text{sen.}\frac{1}{2}nB} + \frac{n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-2)(p+1)B\,\text{cos.}(n-2)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^{n-1}\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-2)B}$$

$$+ \frac{n(n-1)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-4)(p+1)B\,\text{cos.}(n-4)(A+\frac{1}{2}pB)}{2^n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-4)B}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-6)(p+1)B\,\text{cos.}(n-6)(A+\frac{1}{2}pB)}{3.2^n\,\text{sen.}\frac{1}{2}(n-6)B} + \text{ecc.}$$

Per il caso di n *pari* serve questa medesima formula, della quale però si dee prendere solamente $\frac{n}{2}$ termini, ed aggiungere a quelli il coefficiente isolato, che si trovò nel §. X, moltiplicato per $(p+1)$ e diviso da 2^{n-1}, siccome s'è visto nel passato problema. Questo ultimo termine sarà dunque $\frac{p+1}{2^{n-1}} \times \frac{(n-1)(n-2)\ldots\ldots\frac{1}{2}(n+2)}{1.2\ldots\ldots\frac{1}{2}(n-2)}$.

Per trovare le somme de' §§. XI., e XII., *Eulero* è ricorso alla teoria delle serie ricorrenti. Per quelle non meno, che per le susseguenti, il P. *Fontana* s'è servito degl' immaginarj (*loc. cit. pag.* 429 *a* 453); e sebbene le sue espressioni finali sembrino molto diverse dalle mie, pur si riducono a queste agevolmente, e sono del tutto equivalenti. Finalmente il Sig. Cav. *Lorgna* avea già applicato a questi problemi (*loc. cit. pag.* 361) un suo metodo vasto per la

somma

ſomma generale delle ſerie, dove ſi vale del termine generale ſotto forma differenziale. Se io mi ſono attentato a mettervi ancora la mano, mi luſingo non ſia per rincreſcere il vederli ſuperati per la prima volta dalle ſole forze della Trigonometria.

Il Sig. Cav. *Lorgna* avendo inoltre ſottomeſſo a quel ſuo metodo la ſommazione delle ſerie delle tangenti e delle cotangenti, delle ſecanti e delle coſecanti d'archi in progreſſione aritmetica, è pervenuto ad eſpreſſioni ſotto forme integrabili ne' caſi particolari non però generalmente: il perchè tai problemi ſembrano ancora ineſpugnabili dalle armi trigonometriche puramente. Non è così dei ſeguenti.

§. XV.

Sommare la ſerie delle tangenti e delle cotangenti d'archi in progreſſione geometrica creſcente.

E' noto che (*Trig. Tav. I, form.* 39)

$$\text{cot. } B - \text{cot. } 2B = \tfrac{1}{2}(\text{tang. } B + \text{cot. } B)$$
$$\text{cot. } 2B - \text{cot. } 4B = \tfrac{1}{2}(\text{tang. } 2B + \text{cot. } 2B)$$
$$\text{cot. } 4B - \text{cot. } 8B = \tfrac{1}{2}(\text{tang. } 4B + \text{cot. } 4B)$$

Dunque ſommando un numero n di queſte equazioni così progredienti, ſarà

$$\text{cot.} B - \text{cot.} 2^n B = \tfrac{1}{2}(\text{tang.} B + \text{cot.} B + \text{tang.} 2^1 B + \text{cot.} 2^1 B + \text{tang} 2^2 B + \text{cot.} 2^2 B \ldots\ldots + \text{tang. } 2^{n-1} B + \text{cot. } 2^{n-1} B).$$

§. XVI.

Sommare la ſerie delle tangenti d'archi in progreſſione geometrica decreſcente.

Queſto problema ſi riſolve agevolmente, ſe le tangenti ſiano diviſe da coefficienti nella medeſima progreſſione degli archi. Di fatti (*Trig. Tav. I, form.* 39)

$$\tfrac{1}{2}\text{cot. } \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2}\text{cot. } A = \tfrac{1}{2}\text{tang. } \tfrac{1}{2} A$$
$$\tfrac{1}{4}\text{cot. } \tfrac{1}{4} A - \tfrac{1}{4}\text{cot. } \tfrac{1}{2} A = \tfrac{1}{4}\text{tang. } \tfrac{1}{4} A$$
$$\tfrac{1}{8}\text{cot. } \tfrac{1}{8} A - \tfrac{1}{8}\text{cot. } \tfrac{1}{4} A = \tfrac{1}{8}\text{tang. } \tfrac{1}{8} A$$

Dunque da un numero n di sì fatte equazioni ſommate inſieme ſi avrà

$$\frac{1}{2^n}\cot.\frac{A}{2^n}-\cot.A=\tfrac{1}{2}\text{tang.}\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{4}\text{tang.}\tfrac{1}{4}A+\tfrac{1}{8}\text{tang.}\tfrac{1}{8}A\ldots\ldots+\frac{1}{2^n}\text{tang.}\frac{A}{2^n}.$$

Se $n=\infty$, sarà $\frac{A}{2^n}$ un arco infinitamente piccolo, e $\cot.\frac{A}{2^n}=\frac{1}{\text{tang.}\frac{A}{2^n}}=\frac{1}{\frac{A}{2^n}}=\frac{2^n}{A}$. La somma della serie infinita sarà dunque $\frac{1}{A}-\cot.A$. E se fosse inoltre $A=90°$, sarebbe $\frac{1}{90°}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\text{tang.}\frac{90}{4}+\frac{1}{8}\text{tang.}\frac{90}{8}+$ ecc.

Questo problema è stato con equivalenti risultati anche sciolto per altro metodo dal Sig. Cav. *Lorgna*, nelle Memorie di Turino pegli anni 1786, 1787, pag. 215.

§. XVII.

Sommare la serie delle cosecanti d'archi crescenti in progressione geometrica.

Poichè (*Trig.* 77)

$$\cot.\tfrac{1}{2}A-\cot.A=\frac{1}{\text{sen.}A}=\text{cosec.}A$$

$$\cot.A-\cot.2A=\frac{1}{\text{sen.}2A}=\text{cosec.}2A$$

$$\cot.2A-\cot.4A=\frac{1}{\text{sen.}4A}=\text{cosec.}4A$$

sarà, per un numero n di equazioni, così procedenti, sommate insieme,

$$\cot.\tfrac{1}{2}A-\cot.2^{n-1}A=\text{cosec.}A+\text{cosec.}2A+\text{cosec.}4A\ldots+\text{cosec.}2^{n-1}A$$

§. XVIII.

Sommare la serie $\text{cosec.}A+\text{cosec.}\left(\frac{c}{n}+A\right)+\text{cosec.}\left(\frac{2c}{n}+A\right)+$ ecc. *dove* n *è numero dispari.*

Nella ſerie (α), finita per n diſpari, n eſſendo il coefficiente di ſen.A, o ſia della prima poteſtà di ſen.A, e 2^{n-1} il coefficiente della maſſima, come s'è già veduto (§. VI.), ne viene, ſecondo la teoria delle equazioni, che $\frac{n}{2^{n-1}}$ è uguale ai prodotti di $(n-1)$ radici, combinate in tutte le maniere poſſibili: laonde $n = 2^{n-1}$ (ſen.A ſen.$\left(\frac{c}{n}+A\right)$ .... + ſen.A ſen.$\left(\frac{2c}{n}+A\right)$ .... + ſen.$\left(\frac{c}{n}+A\right)$ ſen.$\left(\frac{2c}{n}+A\right)$ .... + ecc.) Dividendo queſta equazione per la prima del §. VI, emerge $\frac{n}{\text{ſen.}nA} = \pm\left(\frac{1}{\text{ſen.}\left(\frac{2c}{n}+A\right)} + \frac{1}{\text{ſen.}\left(\frac{c}{n}+A\right)} + \frac{1}{\text{ſen.}A} + \text{ecc.}\right)$

E però

$$\pm n \text{ coſec.} nA = \text{coſec.} A + \text{coſec.}\left(\frac{c}{n}+A\right) + \text{coſec.}\left(\frac{2c}{n}+A\right) + \text{ecc.}$$

fino ad n termini, ed il ſegno negativo valendo qualvolta $n = 4m - 1$.

§. XIX.

Sommare la ſerie ſec.A + ſec.$\left(\frac{c}{n}+A\right)$ + ſec.$\left(\frac{2c}{n}+A\right)$ + ecc. *dove* n *è numero diſpari*.

Nella ſerie (n), finita per n diſpari, ſi ha parimente $\frac{n}{2^{n-1}}$ = ai prodotti di $(n-1)$ radici come ſopra: laonde $n = 2^{n-1}$ (coſ.A coſ.$\left(\frac{c}{n}+A\right)$ .... + coſ.A coſ.$\left(\frac{2c}{n}+A\right)$ .... + coſ.$\left(\frac{c}{n}+A\right)$ coſ.$\left(\frac{2c}{n}+A\right)$ .... + ecc.). Dividendo queſta equazione per la quarta del §. VI., facilmente ſi giugne alla ſeguente.

$$n \text{ ſec.} nA = \text{ſec.} A + \text{ſec.}\left(\frac{c}{n}+A\right) + \text{ſec.}\left(\frac{2c}{n}+A\right) + \text{ecc. fino ad } n \text{ termini.}$$

A questa formula, ed a quella del precedente §. tornano quelle trovate da *Eulero* per altra via (247, 248).

CAPITOLO QUARTO.

Risoluzione numerica delle equazioni di quarto grado per mezzo della Trigonometria.

La tavola, che ho prodotto (*Trig. Tav.* V), per la soluzione numerica d'ogni equazione del secondo e del terzo grado per mezzo della Trigonometria, ha paruto riscuotere il gradimento di molti, siccome quella che guida la mano del Calcolatore senza veruno studio e con tutta sicurezza. Or m'accingo a prestargli lo stesso comodo per qualsivoglia equazione del quarto grado, la qual rappresento, spogliata del secondo termine come ognun sa potersi far sempre, con la formula generale

(τ) $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$

e spezzatala in due fattori del secondo grado, per esempio $(x^2 + mx + n)$, $(x^2 - mx + r)$, ottengo moltiplicandoli insieme, $x^4 + (n + r - m^2)\,x^2 + m\,(r - n)\,x + nr = 0$; onde spicca essere $A = n + r - m^2$, $B = m(r - n)$, $C = nr$. Quindi poi nasce $r + n = A + m^2$, $r - n = \frac{B}{m}$, le quali due equazioni, sommate e sottratte l'una con l'altra, danno

(υ) $2r = A + m^2 + \frac{B}{m}$; $2n = A + m^2 - \frac{B}{m}$.

Ora queste moltiplicate insieme producono $4nr = A^2 + 2Am^2 + m^4 - \frac{B^2}{m^2}$, e posto $4C$ in luogo di $4nr$, se ne ricava

(φ) $m^6 + 2Am^4 + (A^2 - 4C)\,m^2 - B^2 = 0$

equazione cubica derivata, che si risolve come quelle del terzo grado, fatto $m^2 = y$; laonde avuto da essa il valore di m, si conseguiscono tosto dalle altre (υ) quelli di r, n; quindi li quattro di x dalle equazioni $x^2 + mx + n = 0$, $x^2 - mx + r = 0$: e questi sono

$x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - n)}$, ovvero $x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}m^2 + \frac{B}{2m})}$

$x = +\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 - r)}$, ovvero $x = +\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{4}m^2 - \frac{B}{2m})}$

Tutto questo è notissimo ai Geometri, nè l'ho ripetuto alla distesa se non a comodo d'ogni lettore.

L'equazione (ϕ) contien sei valori di m, ma li tre positivi sono eguali ai tre negativi, uno all'altro, come appare dall'equazione $m^2 = y$, che dà $m = \pm\sqrt{y}$. Sostituito questo valore di m nell'equazione (ϕ), ella diviene $y^3 + 2Ay^2 + (A^2 - 4c)y - B^2 = 0$; per toglier dalla quale il secondo termine, pongasi $y = z - \frac{2}{3}A$, e sorgerà finalmente l'equazione, che si ha da risolvere, cioè:

(χ) $z^3 - (\frac{1}{3}A^2 + 4C)z + (\frac{2}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2) = 0$

Per trovare il valore, o valori, di z, col mezzo della Trigonometria, la mia Tavola V esibisce le seguenti formule.

Caso I. Se $4(\frac{1}{3}A^2 + 4C)^3 < 27(\frac{1}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)^2$, si ha

(ψ) $\text{sen.}\, D = \frac{\frac{1}{3}A^2 + 4C}{8AC - \frac{2}{9}A^3 - 3B^2} \times 2\sqrt{(\frac{1}{3}A^2 + \frac{4}{3}C)} = \frac{A^2 + 12C}{24AC - \frac{2}{3}A^3 - 9B^2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$

$\text{tang.}\, E = \sqrt[3]{\text{tang.}\, \frac{1}{2}D}$

(ω) $z = -\frac{\frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}}{\text{sen.}\, 2E}$.

Caso II. Se poi $4(\frac{1}{3}A^2 + 4C)^3 >$ ovvero $= 27(\frac{1}{3}AC - \frac{2}{27}A^3 - B^2)^2$, si ha, dopo fatto il calcolo del secondo membro della sola equazione (ψ), al qual do tuttavia, benchè impropriamente in tal caso, il nome di sen. D,

$\text{sen.}\, 3F = \frac{1}{\text{sen.}\, D}$

$z = \pm\, \text{sen.}\, F \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$

$z = \pm\, \text{sen.}(60^\circ - F) \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$

$z = \mp\, \text{sen.}(60^\circ + F) \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$

ne' quali tre valori di z si dee pigliare il segno superiore quando l'omogeneo di comparazione nella (χ) è positivo, l'inferiore se il detto omogeneo sia negativo.

Nel calcolar le equazioni precedenti, cominciando dalla (ψ), si deono mutare i segni di A, C, secondo che ciaf-

cuna di queste quantità fosse negativa nell'equazione (τ). Che se essendo C negativo, sia inoltre $4C > \frac{1}{3}A^2$, allora il secondo termine della (χ) diventa positivo, e fa d'uopo mettere nella (ψ) tang. D in cambio di sen. D, nelle (ψ, ω) $-(A^2 + 12C)$ in luogo di $(A^2 + 12C)$, e nella (ω) tang. $2E$ in vece di sen. $2E$.

Esposte le formule con li loro accidenti, daremo ora in succinto il tipo di tutto il calcolo e delle regole da eseguirsi in qualunque caso.

Equazion da risolvere: $x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0$

Nelle seguenti equazioni si muteranno i segni di A, C, se in questa fossero negativi: si farà $A = 0$, se qui mancasse il secondo termine: e si osserveranno sempre le regole de' segni per le linee trigonometriche.

$$\text{sen.}D = \frac{A^2 + 12C}{24AC - \frac{2}{3}A^3 - 9B^2} \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$$

$$\text{tang.}E = \sqrt{\text{tang.}\tfrac{1}{2}D}$$

$$z = -\frac{\frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}}{\text{sen.}\,2E}$$

Che se C sia negativo, ed inoltre $12C > A^2$, si metterà in queste formule $-(A^2 + 12C)$ in cambio di $A^2 + 12C$, tang. D in luogo di sen. D, e tang. $2E$ in vece di sen. $2E$.

Ma se risulti dal calcolo sen. $D > 1$, allora i valori reali di z saranno tre, e trascurate le due ultime formule, si avrà

$$\text{sen.}\,3F = \frac{1}{\text{sen.}\,D}$$

$$z = \text{sen.}F \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$$

$$z = \text{sen.}(60^\circ - F) \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$$

$$z = -\text{sen.}(60^\circ + F) \times \frac{2}{3}\sqrt{(A^2 + 12C)}$$

$$m = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)}$$

L'ultima equazione vale in tutti i casi; e quando i valori di z sono tre, porge altrettanti valori di m, ciascuno de' quali introdotto nelle seguenti, produce gli stessi quattro valori della quantità ignota.

$$x = -\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}z + \frac{B}{2m}\right)}$$

$$x = +\tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}z - \frac{B}{2m}\right)}$$

ESEMPIO I.

Sia da risolvere l'equazione $x^4 + 3x^3 + 30x + 32 = 0$. E' dunque $A = 3$, $B = 30$, $C = 32$. E però

$$\text{sen.}\, D = \frac{9 + 12.32}{24.96 - 18 - 9.900} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(9 + 4.96)} = \frac{131}{-1938} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{393}$$

log. 393	= 2.5943926		$D = 243^\circ\, 17'\, 51'',04$
sua metà	1.2971963		$\frac{1}{2}D = 121\ 38\ 55,52$
log. 2	= 0.3010300		$-$ log. tang. $\frac{1}{2}D = 0.2101530$
compl.log.3	= 9.5228787		$-$ log. tang. $E = 0.0700510$
log. $\frac{2}{3}\sqrt{393}$	= 1.1211050		$E = 130^\circ\, 23'\, 56'',58$
log. 131	= 2.1172713		$2E = 260\ 47\ 53,16$
$-$compl.log.1938	= 6.7126462		$-$ log. $\frac{2}{3}\sqrt{393} = 1.1211050$
$-$ log. sen. D	= 9.9510225		$-$compl.log.sen.$2E = 0.0056252$
			log. z = 1.1267302

$z = 13,388446$

$m = \sqrt{(13,388446 - 2)} = \sqrt{(11,388446)}$

log. 11,388446 = 1.0564644

sua metà 0.5282322 = log. m = log. 3,374677

$$x = -1,687339 \pm \sqrt{(-1 - 3,347111 + \frac{30}{6,749354}} = -1,687339$$

$\pm\sqrt{0,097757} = -1,687339 \pm 0,312661$. E però

$x = -2$; $x = -1,374678$;

gli altri due valori sono immaginarj.

ESEMPIO II.

Sia da risolvere l'equazione $x^4 - 3x^2 + 30x + 56 = 0$. E' dunque $A = -3$, $B = 30$, $C = 56$. E però

$$\text{sen.}\, D = \frac{9 + 12.56}{-24.3.56 + 18 - 9.900} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(9 + 672)} = \frac{227}{-4038} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{681}$$

Facendo i computi a norma del tipo, si troverà

$D = 257^\circ\, 57'\, 40'',67$	$E = 132^\circ\, 58'\, 49'',05$
$z = 17,44064$	$m = \sqrt{19,44064} = 4,409154$
$x = -2$	$x = -2,40916$

Gli altri due valori immaginarj.

ESEMPIO III.

Sia l'equazione $x^4 - 3x^3 - 30x - 88 = 0$, che dà $A = -3$, $B = -30$, $C = -88$. E' dunque C negativo, ed inoltre $12C > A^2$. E però

$$\text{tang.}D = \frac{12.88 - 9}{24.3.88 + 18 - 9.900} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{(12.88 - 9)}$$

$$= \frac{349}{-582} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{1047}$$

$D = 94^\circ\, 25'\, 13'',94$ $\qquad E = 45^\circ\, 44'\, 14'',66$

$z = -\text{cot.}2E \times \frac{2}{3}\sqrt{-(A^2 + 12C)} = -\text{cot.}2E \times \frac{2}{3}\sqrt{1047} = +0,555382$

$m = \sqrt{2,555382} = 1,598556$

$x = 0,799278 \pm \sqrt{10,244623} = 0,799278 \pm 3,200722$. Onde

$x = 4$; $\qquad x = -2,401444$.

Gli altri due valori sono immaginarj.

ESEMPIO IV.

Sia $x^4 - 12x^3 + 12x - 3 = 0$; laonde $A = -12$, $B = 12$, $C = -3$. E però

$$\text{sen.}D = \frac{144 - 36}{24.36 + 8.144 - 9.144} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{108} = \frac{108}{720} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{108} = \frac{3}{20} \times 4\sqrt{3}.$$

Ma $\frac{3}{20} \times 4\sqrt{3} > 1$. Dunque $\text{sen.}\,3F = \frac{20}{3} \times \frac{1}{4\sqrt{3}}$. Quindi

$z = 2,89898$; $\quad z = 4$; $\quad z = -6,89898$

$m = \sqrt{10,89898}$; $\quad m = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $\quad m = \sqrt{1,10102}$. Onde

$m = 3,301361 \qquad m = 3,4641016 \qquad m = 1,049295$

Prendendo il secondo valore di z e di m, si hanno li quattro seguenti di x;

$$x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{\left(4 - 1 + \frac{12}{4\sqrt{3}}\right)} = -\sqrt{3} \pm \sqrt{(3 + \sqrt{3})}$$

$x = +\sqrt{3} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{3})}$.; ovvero

$x = +0,4432768$; $x = -3,9073784$; $x = +2,8580831$; $x = +0,6060185$

Che se si prende il primo valore di z e di m, nasce

$$x = -1,650680 \pm \sqrt{\left(4 - 0,724745 + \frac{6}{3,301361}\right)}$$

$$= -1,65068 \pm \sqrt{(3,275255 + 1,817432)}$$

$x =$

$x = +1,650680 \pm \sqrt{(3,275255 - 1,817432)}$; ovvero
$x = -1,65068 \pm 2,256698$; $x = +1,65068 \pm 1,207403$; cioè
$x = +0,606018$; $x = -3,907378$; $x = +2,858083$; $x = +0,443277$
Prendasi pure il terzo valore di z e di m, e si troveranno parimente gli stessi quattro valori di x.

CAPITOLO QUINTO.

Teoremi di Trigonometria rettilinea.

TEOREMA I.

Se due corde d'un cerchio scambievolmente si seghino, il rettangolo dai segamenti dell'una è uguale al rettangolo dai segamenti dell'altra.

Alla dimostrazione geometrica d'*Euclide* (*Lib.* 3, *prop.* 35) sia lecito aggiugnere la seguente, siccome resa più breve dal soccorso della trigonometria.

Siano AC, BD (fig. 1) le due corde che si segano in E, e dalle loro estremità si descriva il quadrilatero $ABCD$. E poichè nel triangolo ABE sta $AE : BE ::$ sen.ABE : sen.BAE :: sen. $\frac{1}{2}\,Q$: sen. $\frac{1}{2}\,N$, detti Q, N, gli archi AD, BC. E similmente nel triangolo CDE sta $DE : CE ::$ sen.DCE : sen.CDE :: sen. $\frac{1}{2}\,Q$: sen. $\frac{1}{2}\,N$. Sono dunque le ragioni $AE : BE$, $DE : CE$, le medesime alla medesima sen. $\frac{1}{2}\,Q$: sen. $\frac{1}{2}\,N$. E però $\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$, onde nasce $AE \times CE = BE \times DE$, che è ciò che dovea dimostrarsi.

Lo stesso si sarebbe trovato col mezzo de' triangoli ADE, BCE.

TEOREMA II.

Del quadrilatero inscritto in un cerchio il rettangolo dalle diagonali è uguale ai rettangoli dai lati opposti. (fig. 1.)

$AC \times BD = 2$ sen. $\frac{1}{2}(M+N) + 2$ sen. $\frac{1}{2}(M+Q) = 2$ cos. $\frac{1}{2}(N-Q) - 2$ cos. $(M + \frac{1}{2}(N+Q))$, *Trig. Tav. II. form.* 16. Ma $\frac{1}{2}(N+Q) = 180° - \frac{1}{2}(M+P)$. Dunque cos. $(M + \frac{1}{2}(N+Q)) = -$ cos. $\frac{1}{2}(M-P)$. E però $AC \times BD = 2$ cos. $\frac{1}{2}(N-Q) + 2$ cos. $\frac{1}{2}(M-P) = 2$ cos. $\frac{1}{2}(N+Q) + 4$ sen. $\frac{1}{2}\,N$ sen. $\frac{1}{2}\,Q + 2$ cos. $\frac{1}{2}(M+P)$

$+ 4$ sen. $\frac{1}{2} M$ sen. $\frac{1}{2} P$, in virtù della citata formula. Or come cos. $\frac{1}{2}$ $(N + Q) = -$ cos. $\frac{1}{2}(M + P)$, rimane $AC \times BD = 4$ sen. $\frac{1}{2} N$ sen. $\frac{1}{2} Q + 4$ sen. $\frac{1}{2} M$ sen. $\frac{1}{2} P$, ovvero

$$AC \times BD = BC \times AD + AB \times CD.$$

CAPITOLO SESTO.

Problemi di Trigonometria rettilinea.

PROBLEMA I.

Dati i lati del quadrilatero inscritto in un cerchio, trovar l'espressione analitica d'una delle sue diagonali. (fig. 1.)

Poichè (*Trigon. Tav. III, form.* 16) $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC$ cos. $ABC = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$ cos. $ADC = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC \times \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \times CD}$, se ne ricava AC^2 $(AD \times CD + AB \times BC) = AD \times CD(AB^2 + BC^2) + AB \times BC$ $(AD^2 + CD^2)$; ovvero

$$AC = \sqrt{\frac{(AB \times AD + BC \times CD)(AB \times CD + AD \times BC)}{AB \times BC + AD \times CD}}$$

PROBLEMA II.

Date tre linee AB, BC, CD (fig. 2.), *trovare il raggio del circolo in cui esse sarebbero corde di tre archi, la somma de' quali sia di* 180°.

Sia $ABCD$ il semicircolo, a cui s'adattino nella condizione imposta le tre linee date; M, N, S gli archi sottesi, E il centro; e dicasi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = x$; sarà sen. $\frac{1}{2} M = \frac{a}{2x}$, sen. $\frac{1}{2} N = \frac{b}{2x}$, sen. $\frac{1}{2} S = \frac{c}{2x}$. Ma sen. $\frac{1}{2} S$ $=$ sen. $\frac{1}{2}(180° - M - N) =$ cos. $\frac{1}{2}(M + N) =$ cos. $\frac{1}{2} M$ cos. $\frac{1}{2} N$ $-$ sen. $\frac{1}{2} M$ sen. $\frac{1}{2} N = \sqrt{(1 - \frac{a^2}{4x^2})}\sqrt{(1 - \frac{b^2}{4x^2})} - \frac{ab}{4x^2} = \frac{c}{2x}$. Dunque $(1 - \frac{a^2}{4x^2})(1 - \frac{b^2}{4x^2}) = (\frac{ab}{4x^2} + \frac{c}{2x})^2$. Donde si cava

$$x^3 - \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\,x - \tfrac{1}{4}\,abc = 0$$

che è l'equazione a cui giugne anche il *Neuton* per diverse altre vie (*Arith. univ. Sect.* 4, *Cap. I*).

PROBLEMA III.

Dati due lati e l'angolo intercetto d'un triangolo rettilineo, trovare il terzo lato. (fig. 3).

La formula unica, che risolve questo caso, è (*Trig.* 227), $BC = \sqrt{(AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \text{ cos. } A)}$. Acciocchè ammettesse il computo per logaritmi, l'ho divisa (228) in due formule, ciascuna delle quali contiene la differenza $(AC \backsim AB)$. Quando questa sia piccola, può giovare all'esattezza il valersi piuttosto della somma: e questo è lo scopo del presente problema.

Pongasi, nella formula, $(2 \text{ cos.}^2 \tfrac{1}{2} A - 1)$ in vece di cos. A, e si avrà $BC = \sqrt{((AB + AC)^2 - 4\,AB \times AC \text{ cos.}^2 \tfrac{1}{2} A)}$. Quindi, col favor delle trasformazioni (208), si ottiene

$$\text{cos.}\,m = \frac{2 \text{ cos. } \frac{1}{2} A}{AB + AC} \sqrt{AB \times AC}$$

$$BC = (AB + AC) \text{ sen.}\,m.$$

PROBLEMA IV.

Conoscendo un angolo, un lato adjacente, e la somma degli altri due lati, trovar l'altro lato adjacente.

Coi medesimi dati ho composto (240) una formula, che determina l'altro angolo adjacente al lato noto. Essendomi poi venute sott'occhio le faticose soluzioni del presente problema, date dal *Wisthon* (*Prælect. Astron. Lem. VI*), e dal *Paulino* (*Instit. Analyticæ*, *Romæ* 1738 *pag.* 198), mi posi a cercarne una più semplice, e mi lusingo mi sia venuto fatto.

In un triangolo ABC (fig. 3) siano le cose note BC, B, e la somma $(AB + AC)$. Se si fa $AB + AC = s$, e per conseguente $AC = s - AB$, sarà (*Trig. Tav. III*, *form.* 16) $(s - AB)^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \times AB \text{ cos.} B = s^2 - 2s \times AB + AB^2$;

donde si cava $2AB(s - BC \cos.B) = s^2 - BC^2 = (s - BC)(s + BC)$. Si restituisca il valore di s, e si avrà

$$AB = \frac{\frac{1}{2}((AB + AC) - BC)((AB + AC) + BC)}{(AB + AC) - BC \cos.B}$$

Problema V.

Conoscendo un angolo, un lato adjacente, e la differenza degli altri due lati, trovar l'altro lato adjacente.

Procedendo come nel problema precedente, si troverà

$$AB = \frac{\frac{1}{2}(BC - (AB \backsim AC))(BC + (AB \backsim AC))}{BC \cos.B - (AB \backsim AC)}$$

Problema VI.

Determinare le parti ignote d'un triangolo, nel qual si conoscono un angolo, il lato opposto, ed il rettangolo dagli altri due lati. (fig. 3)

Siano le cose note C, AB, e $(AC \times BC)$. Poichè AB : sen. C :: BC : sen. A, e AB : sen. C :: AC : sen. B; moltiplicando insieme le due proporzioni, nasce AB^2 : sen.^2C :: $AC \times BC$: sen. A sen. B. Ma (*Trig. Tav. II, form.* 16) sen. A sen. $B = \frac{1}{2}$ cos. $(A \backsim B) - \frac{1}{2}$ cos. $(A + B) = \frac{1}{2}$ cos. $(A \backsim B) + \frac{1}{2}$ cos. C. Dunque introducendo questo valore nell'analogia, si raccoglie

$$\cos.(A \backsim B) = \frac{2(AC \times BC) \text{ sen.}^2C - AB^2 \cos.C}{AB^2}$$

equazione, che porta alla cognizione degli angoli ignoti.

Per aver quella dei lati, s'è già veduto più volte che $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos.C$. E' dunque $AB^2 + 2AC \times BC \cos.C = AC^2 + BC^2 = (AC \underset{\backsim}{+} BC)^2 \mp 2AC \times BC$. Se s'introduce, in cambio di cos. C, una volta $(2 \cos.^2 \frac{1}{2} C - 1)$, facendo uso insieme de' segni superiori; un'altra $(1 - 2 \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} C)$, e s'adoprino gl'inferiori; si ottiene

$$AC + BC = \sqrt{(AB^2 + 4(AC \times BC) \cos.^2 \tfrac{1}{2} C)}$$
$$AC \backsim BC = \sqrt{(AB^2 - 4(AC \times BC) \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} C)}$$

PROBLEMA VII.

Conoſcendo i tre angoli e la ſomma dei tre lati, determinare qualſivoglia lato. (fig. 3).

Poichè BC : ſen. A : : AC : ſen. B : : AB : ſen. C : : $BC + AC + AB$: ſen. A + ſen. B + ſen. C, per la XII del V di *Euclide*, ſarà dunque

$$BC = \frac{(AB + AC + BC)\ \text{sen.}\ A}{\text{sen.}\ A + \text{sen.}\ B + \text{sen.}\ C}.$$

PROBLEMA VIII.

Conoſcendo due angoli, e il lato compreſo, trovar la perpendicolare cadente dal terzo angolo. Newton Arith. univ. Sect. 4, cap. II, probl. I.

Siano i dati A, B, AB (figg. 4, 5), il queſito CD. Poichè (Trig. 210) $BD = CD$ cot. B, e $AD = CD$ cot. A, ſarà $BD \underset{\cup}{+} AD = CD\ (\text{cot.}\ B \underset{\cup}{+} \text{cot.}\ A) = CD \times \frac{\text{sen.}\ (A \underset{\cup}{+} B)}{\text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B}$, (*Tav.II.form.*21). Dunque

$$CD = \frac{AB\ \text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ (A \underset{\cup}{+} B)}$$

il ſegno inferiore valendo allorchè la perpendicolare cada fuori del triangolo, come nella fig. 5.

PROBLEMA IX.

Dati i tre lati, trovar la perpendicolare. (figg. 4, 5).

Moltiplicando inſieme le due formule (234, 213), ſi ha ſen. $\frac{1}{2} A$ coſ. $\frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(BC + AC - AB)(BC + AB - AC)}{4\,AB \times AC}} \times \sqrt{\frac{(BC + AC + AB)(AC + AB - BC)}{4\,AB \times AC}}$. Ma ſen. $\frac{1}{2} A$ coſ. $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2}$ ſen. $A = \frac{CD}{2\,AC}$. Dunque

$$CD = \frac{1}{2\,AB} \times \sqrt{(BC+AC+AB)(BC+AC-AB)(BC+AB-AC)(AC+AB-BC)}$$

PROBLEMA X.

Conoscendo un angolo, il lato opposto, e la perpendicolare da quello su questo, determinare gli altri due angoli. (figg. 4, 5).

Siano i dati ACB, AB, CD; e ACB si dica C. Poichè $\text{sen.}\,A = \frac{BC\ \text{sen.}\,C}{AB}$, e $BC = \frac{CD}{\text{sen.}\,B} = \frac{CD}{\text{sen.}\,(A+C)}$, è dunque $\text{sen.}\,A = \frac{CD\ \text{sen.}\,C}{AB\ \text{sen.}\,(A+C)}$, ovvero $\frac{CD\ \text{sen.}\,C}{AB} = \text{sen.}(A+C)$ $\text{sen.}\,A = \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,C - \frac{1}{2}\,\text{cos.}\,(2A+C)$, *Trig. Tav. II, form.* 16. Per conseguenza

$$\text{cos.}\,(2A+C) = \text{cos.}\,C - \frac{2\,CD\ \text{sen.}\,C}{AB}$$

equazione che fa conoscere l'angolo A, e quindi il terzo.

Che se in vece degli angoli si cercassero i lati, credo la via più breve sarebbe ancor quella di rintracciar prima gli angoli col mezzo di questa formola.

PROBLEMA XI.

Determinare gli angoli, quando la base, i lati, e la perpendicolare sono in continua proporzione geometrica. Newton loc. cit. probl. XV.

Sia (fig. 4) $\dot{\dot{-}}$ $AB : BC : AC : CD$; sarà ancora $AB : BC :: AC : CD$, il che costituisce simiglianza ne' triangoli ACB, ACD, e l'angolo ACB retto. Ora essendo $AB : BC :: BC : AC$, è pure per identità di ragioni $1 : \text{cos.}\,B :: 1 : \text{tang.}\,B$. Dunque $\text{tang.}\,B = \text{cos.}\,B$; e $\text{sen.}\,B = \text{cos.}^2 B = 1 - \text{sen.}^2 B$. Ma l'equazione $\text{sen.}^2 B + \text{sen.}\,B = 1$ dà $\text{sen.}\,B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \text{cos.}\,A$. Dunque gli angoli sono determinati, e sono, trascurando i secondi, $B = 38^\circ\,10'$, $A = 51^\circ\,50'$, $C = 90^\circ$.

PROBLEMA XII.

Essendo dati l'area, il perimetro, ed uno degli angoli, trovare il lato che gli è opposto. Newton probl. VIII.

Sia A l'angolo noto (figg. 4, 5), e si dica b^2 l'area, p il perimetro, x il lato cercato BC. Sarà $b^2 = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} AB \times AC$ sen. A. Ora $AB + AC = p - x$; quindi $AB^2 + 2AB \times AC + AC^2 = p^2 - 2px + x^2 = p^2 - 2px + AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC$ cos. A, (*Trig. Tav. III, form.* 25). Dunque $2AB \times AC\ (1 + \text{cos.}\ A) = p^2 - 2px$. Ma dal trovato prima spicca $AB \times AC = \frac{2b^2}{\text{sen.}\ A}$. Sostituito questo valore, l'equazion precedente diviene $4b^2 \times \frac{1 + \text{cos.}\ A}{\text{sen.}\ A} = p^2 - 2px = 4b^2 \text{ cot.} \frac{1}{2} A$, (*Trig. Tav. I, form.* 41). Donde

$$x = \frac{1}{2} p - \frac{2b^2 \text{ cot.} \frac{1}{2} A}{p}.$$

PROBLEMA XIII.

Sottendere ad un angolo d'un triangolo dato scaleno una retta eguale al lato sottoposto al detto angolo, e che sia segata in due parti eguali dal medesimo lato. Questo problema è tratto da *Boulliaud*, Astronomia philol. lib. I, cap. XV.

Sia ABC (fig. 6) il triangolo scaleno dato. Si dimanda di sottendere all'angolo A una retta $DE = BC$; con questo, che sia $DF = FE = \frac{1}{2} BC$. Faccio $BD = x$, e nomino F ciascuno degli angoli uguali CFE, BFD.

E poichè BC : sen. A : : DE : sen. A, sarà pure, per identità di ragioni, AB : sen. C : : AD : sen. E : : $AB - x$: sen. $(C - F)$: : $AB - x$: : sen. C cos. F − cos. C sen. F. Ma sen. $F = \frac{BD \text{ sen.}\ B}{DF} = \frac{x \text{ sen.}\ B}{\frac{1}{2} BC}$, e per conseguenza cos. $F = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2 \text{ sen.}^2 B}{\frac{1}{4} BC^2}\right)} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \text{ sen.}^2 B)}}{\frac{1}{2} BC}$. Dunque AB : sen. C : : $AB - x$: sen. $C \times \frac{\sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \text{ sen.}^2 B)}}{\frac{1}{2} BC} - \text{cos.}\ C \times \frac{x \text{ sen.}\ B}{\frac{1}{2} BC}$. E però AB : BC sen. C, ovvero 1 : sen. A : : $AB - x$: 2 sen. $C \sqrt{(\frac{1}{4} BC^2 - x^2 \text{ sen.}^2 B)} - 2x$ sen. B cos. C; donde nasce AB sen. $A - x$ sen. $A = 2$ sen. C

$\sqrt{(\frac{1}{4}BC^2 - x^2 \text{ sen.}^2 B)} - 2x \text{ sen. } B \text{ cos. } C$, o pure $2 \text{ sen. } C \sqrt{(\frac{1}{4}BC^2 - x^2 \text{ sen.}^2 B)} = AB \text{ sen. } A - x(\text{sen. } A - 2 \text{ sen. } B \text{ cos. } C)$. Ma $\text{sen. } A = \text{sen. } (B + C)$, e $\text{sen. } (B + C) - 2 \text{ sen. } B \text{ cos. } C = \text{sen. } (C - B)$, *Trig. Tav. II, form.* 15. Dunque $2 \text{ sen. } C \times \sqrt{(\frac{1}{4}BC^2 - x^2 \text{ sen}^2 B)} = AB \text{ sen. } A - x \text{ sen. } (C - B)$. Elevando al quadrato, ed osservando che $AB \text{ sen. } A = BC \text{ sen. } C$, emerge $-4x^2 \text{ sen}^2 B \text{ sen}^2 C = 2x \times AB \text{ sen. } A \text{ sen. } (C - B) + x^2 \times \text{sen.}^2 (C - B)$. Fatta la divisione per x, si raccoglie

$$x = \frac{2\ AB \text{ sen. A sen. } (C - B)}{\text{sen}^2 (C - B) + 4 \text{ sen}^2 B \text{ sen}^2 C}$$

Trovato col mezzo di questa equazione il punto D, da quello come centro, e con l'intervallo $\frac{1}{2}BC$, si descriverà un cerchio, il quale taglierà BC in un punto F, e la retta tirata per li punti D, F, sino al concorso con la AC prolungata, avrà le condizioni richieste. Si potrebbe ancora trovare il punto E facilissimamente, poichè l'equazione medesima somministra il valore della CE, mutandovi solo AB in AC, e $(C - B)$ in $(B - C)$, come ognuno può ravvisar di leggieri nella dimostrazion precedente.

CAPITOLO SETTIMO.

Teoremi di Trigonometria sferica.

TEOREMA I.

Se due archi di cerchj ineguali insistano sulla medesima base, e siano minori ciascuno della semicirconferenza, maggiore è quello descritto dal raggio minore.

Nella Trigonometria (385) ho lasciato senza prova, come verità intuitiva apparente dall'operazion del compasso, questo teorema, da cui deriva per corollario; che l'arco di cerchio massimo (minor di 180°) è il più breve che possa condursi da un punto all'altro sopra la superficie della sfera. Essendomi poi abbattuto in diverse dimostrazioni geometriche, poco in vero sodisfacenti, ho tratto dall'analisi la seguente, che gode di tutta l'evidenza ed il rigor matematico.

Sia-

Siano (fig. 7) gli archi DBE, DAE, sottesi dalla medesima corda DE, e minori ciascuno di 180°; il primo de' quali sia descritto dal raggio FE, il secondo dal raggio CE; e sia $CE > FE$. Dico essere $DBE > DAE$.

E che sia il vero; la differenza dall'arco alla corda è contenuta nell'equazione, che segue, dimostrata (*Trig.* 152): cioè detto A l'arco, R il raggio; $A - 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}A = \frac{1}{3} \times \frac{\text{sen.}^3\,\frac{1}{2}A}{R^2} + \frac{3}{4 \cdot 5} \times \frac{\text{sen.}^5\,\frac{1}{2}A}{R^4} +$ ecc. che per brevità rappresento così; $A - 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}A = \frac{m\,\text{sen.}^3\,\frac{1}{2}A}{R^2} + \frac{n\,\text{sen.}^5\,\frac{1}{2}A}{R^4} +$ ecc. Dunque fatto $DBE = B$, $DAE = A$, la corda $DE = 2K$, $CE = R$, $FE = r$, sarà $B - 2K = \frac{mK^3}{r^2} + \frac{nK^5}{r^4} +$ ecc., e $A - 2K = \frac{mK^3}{R^2} + \frac{nK^5}{R^4} +$ ecc. Ma per ipotesi essendo $R > r$, ne segue ognuno de' termini del secondo membro nell'ultima equazione esser minore d'ognuno de' termini simili nella penultima. Dunque $B - 2K > A - 2K$, e per conseguenza aggiungendo $2K$ da una parte dell'altra, risulta $B > A$, come dovea dimostrarsi.

L'equazione (152) non è applicabile agli archi maggiori di 180°; ma è cosa chiara che in quelli succede tutto il contrario, che nei minori: imperocchè le periferie essendo come i raggi, se dalla maggiore si toglie una porzione più piccola di quella che si detrae dalla minore, come s'è veduto or ora, la circonferenza rimanente nel cerchio più grande sarà maggior più che mai della rimanente nel piccolo.

TEOREMA II.

L'angolo a (*fig.* 8), *formato dalle corde degli archi* AB, AC, *è uguale a* $\frac{1}{2}$ P, *cioè alla metà dell'angolo al polo del cerchio minore che circoscrive il triangolo sferico* ABC, *dico dell'angolo al polo, opposto al terzo lato* BC.

Del cerchio, che passa per li punti A, B, C, sia descritta, a minor confusione, dal polo P la sola parte BMC.

Or questa è d'egual numero di gradi (*Trig.* 394, 386) dell'angolo P: ed è inoltre doppia dell'angolo alla circonferenza, formato dalle corde aB, aC (*per la XX del III di Euclide*). Dunque ecc.

La facilità di questa dimostrazione non iscema già, ma piuttosto accresce l'importanza del presente Teorema, se si guarda aver egli costato a *Lexell* una buona pagina di lavoro analitico-trigonometrico (*Atti di Pietroburgo per* 1782, *pag.* 64).

Teorema III.

Se due archi di cerchio massimo, terminati ad un cerchio minore o massimo, si tagliano, il rettangolo dalle tangenti dei mezzi segamenti dell'uno è uguale al rettangolo dalle tangenti dei mezzi segamenti dell'altro.

Siano (fig. 9) AB, DE li due archi, che si tagliano in F, e sono terminati alla circonferenza $ADBE$, il cui polo è C; dal quale si tirino gli archi CA, CE, CF, e li perpendicolari CH, CG.

Ne' triangoli rettangoli CGF, CGA, che hanno il lato comune CG, sta (*Trig.* 451), cos. CF : cos. CA : : cos. GF : cos. GA. E similmente ne' triangoli CHF, CHE; cos. CF : cos. CE : : cos. HF : cos. HE. Ma per esser $CA = CE$, la prima ragione nelle due proporzioni è la stessa. Dunque cos. GF : cos. GA : : cos. HF : cos. HE; ovvero (*Tav. II form.* 13) cot. $\frac{1}{2}$ $(GA + GF)$: tang. $\frac{1}{2}$ $(GA - GF)$: : cot. $\frac{1}{2}$ $(HE + HF)$: tang. $\frac{1}{2}$ $(HE - HF)$. Come poi ne' triangoli isosceli l'arco perpendicolare spartisce per mezzo la base, perciò $GA + GF = GB + GF = BF$; e similmente $HE + HF = DH + HF = DF$. E per conseguenza cot. $\frac{1}{2}$ BF : tang. $\frac{1}{2}$ AF : : cot. $\frac{1}{2}$ DF : tang. $\frac{1}{2}$ EF; laonde

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} AF \text{ tang. } \tfrac{1}{2} BF = \text{tang. } \tfrac{1}{2} DF \text{ tang. } \tfrac{1}{2} EF.$$

Teorema IV.

Le somme degli angoli opposti d'un quadrilatero sferico, inscritto in un cerchio minore, sono uguali. (fig. 10).

Sia P il polo del cerchio circoscritto al quadrilatero $ABCD$, e per conseguenza $AP = BP = CP = DP$. Ora $B + D = m + n + r + s$. Ma per essere isosceli i triangoli APB, APD, ecc. anche $A + C = m + r + n + s$. Dunque $A + C = B + D$.

TEOREMA V.

Se ad un cerchio minore sia inscritto un quadrilatero sferico con le sue diagonali, il rettangolo dai seni delle mezze diagonali uguaglia la somma de' rettangoli dai seni delle metà de' lati opposti. (fig. 11)

Omesso il cerchio nella figura, s'intenda essere $ABCD$ il quadrilatero inscritto; AC, BD li due archi diagonali di cerchio massimo; ed ognun de' sei archi si supponga sotteso dalla sua corda, la quale nominerò con lettere minuscole corrispondenti, dicendo ac quella dell'arco AC, ab quella dell'arco AB, ecc. Or s'è già provato sopra (*Cap. V, Teor. II*), che $ac \times bd = bc \times ad + ab \times cd$. Dunque $2 \text{ sen.} \frac{1}{2} AC \times 2 \text{ sen.} \frac{1}{2} BD = 2 \text{ sen.} \frac{1}{2} BC \times 2 \text{ sen.} \frac{1}{2} AD + 2 \text{ sen.} \frac{1}{2} AB \times 2 \text{ sen.} \frac{1}{2} CD$. E dividendo per 4,

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2} AC \text{ sen.} \tfrac{1}{2} BD = \text{sen.} \tfrac{1}{2} BC \text{ sen.} \tfrac{1}{2} AD + \text{sen.} \tfrac{1}{2} AB \text{ sen.} \tfrac{1}{2} CD$$

CAPITOLO OTTAVO.

Problemi di Trigonometria sferica.

PROBLEMA I.

Esprimere uno degli archi diagonali con li lati del quadrilatero sferico inscritto.

Ferme le condizioni della fig. 11, come nel precedente Teorema, ripiglieremo ciò che per le corde s'è dimostrato (*Cap. VI, Probl. I*) cioè che $ac = \sqrt{\frac{(ab.ad+bc.cd)(ab.cd+ad.bc)}{ab.bc+ad.cd}}$.

Donde nasce

$$\text{sen.} \tfrac{1}{2} AC = \sqrt{\frac{(\text{sen.} \tfrac{1}{2} AB \text{sen.} \tfrac{1}{2} AD + \text{sen.} \tfrac{1}{2} BC \text{sen.} \tfrac{1}{2} CD)(\text{sen.} \tfrac{1}{2} AB \text{sen.} \tfrac{1}{2} CD + \text{sen.} \tfrac{1}{2} AD \text{sen.} \tfrac{1}{2} BC)}{\text{sen.} \tfrac{1}{2} AB \text{ sen.} \tfrac{1}{2} BC + \text{sen.} \tfrac{1}{2} AD \text{ sen.} \tfrac{1}{2} CD}}$$

PROBLEMA II.

Dati i tre lati d'un triangolo sferico, trovar l'espressione analitica dell'uno o dell'altro de' segamenti, costituiti dall'arco perpendicolare in qualsivoglia de' lati medesimi. (figg. 12, 13)

Sia AD l'arco perpendicolare sul lato BC del triangolo ABC. Si ha (*Tav. VI, form.* 5), tang. BD = cos. B tang. AB. Ma (*Tav. VII, form.* 9) $\cos. B = \frac{\cos. AC - \cos. BC \cos. AB}{\text{sen.} BC \text{ sen.} AB}$.

Sostituito questo valore, risulta

$$\text{tang. } BD = \frac{\cos. AC - \cos. BC \cos. AB}{\text{sen.} BC \cos. AB}.$$

Nella stessa maniera si troverebbe

$$\text{tang. } CD = \frac{\cos. AB - \cos. BC \cos. AC}{\text{sen.} BC \cos. AC};$$

il che basti accennato una volta, anche per li tre problemi seguenti.

PROBLEMA III.

Dati due angoli e il lato compreso, esprimer uno de' segamenti di questo lato.

Posto nell'equazione tang. BD = cos. B tang. AB il valor di tang. AB (*Tav. VII, form.* 36), nasce

$$\text{tang. } BD = \frac{\text{sen.} BC}{\text{tang. } B \cot. C + \cos. BC}.$$

PROBLEMA IV.

Dati li tre angoli, esprimere un segamento di qualsivoglia d'essi, costituito dall'arco perpendicolare sul lato opposto.

Poichè (*Tav. VI, form.* 15) cot. BAD = cos. $AB \times$ tang. B. Ponendo il valore (*Tav. VII, form.* 29) di cos. AB, si ricava

$$\cot. BAD = \frac{\cos. C + \cos. A \cos. B}{\text{sen.} A \cos. B}.$$

PROBLEMA V.

Dati due lati e l'angolo compreso, esprimer l'uno de' segamenti di questo.

Introdotto nell'equazione $\cot. BAD = \cos. AB \tan. B$ il valore (*Tav. VII, form.* 16) di $\tan. B$, emerge

$$\cot. BAD = \frac{\text{sen.}\, A}{\tan. AB \cot. AC - \cos. A}.$$

PROBLEMA VI.

Dati due lati, e l'angolo intercetto, trovare il terzo lato.

Nel caso che il lato cercato sia piccolo, ad averlo con esattezza ho proposto (*Trig.* 478) la formola $\text{sen.}\, \frac{1}{2} AC = \sqrt{(\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(BC \backsim AB) + \text{sen.}\, BC\ \text{sen.}\, AB\ \text{sen.}^2 \frac{1}{2} B)}$, e l'ho ridotta a forma capace del calcolo logaritmico. Ma quando la differenza ($BC \backsim AB$) de' lati dati sia tenue, può giovare alla precisione il valersi piuttosto della somma: al che si perviene nel modo seguente.

Poichè $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} B = 1 - \cos.^2 \frac{1}{2} B$; e $\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(BC \backsim AB) = \text{sen.}^2 \frac{1}{2}(BC + AB) - \text{sen.}\, BC\ \text{sen.}\, AB$, (*Tav. II, form.* 26); ponendo questi valori nell'equazion precedente, ella si converte così

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} AC = \sqrt{(\text{sen.}^2 \tfrac{1}{2}(BC + AB) - \text{sen.}\, BC\ \text{sen.}\, AB \cos.^2 \tfrac{1}{2} B)}$$

ovvero per maggior comodo nel computo

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} AC = \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(BC + AB) \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sen.}\, BC\ \text{sen.}\, AB \cos.^2 \frac{1}{2} B}{\text{sen.}^2 \frac{1}{2}(BC + AB)}\right)}$$

Questa formola poi si può calcolare col mezzo delle sole tavole trigonometriche in logaritmi, dividendola in due (*Trig.* 207), come segue.

$$\cos. m = \frac{\cos. \frac{1}{2} B}{\text{sen.}\, \frac{1}{2}(BC + AB)} \times \sqrt{\text{sen.}\, BC\ \text{sen.}\, AB}$$

$$\text{sen.}\, \tfrac{1}{2} AC = \text{sen.}\, m\ \text{sen.}\, \tfrac{1}{2}(BC + AB).$$

PROBLEMA VII.

Trovar l'espressione analitica della superficie d'un tronco di fuso, come AEG (fig. 14), terminato da un arco EG di cerchio minore, il cui polo è A.

Poichè la superficie d'un segmento di sfera, generato per esempio dalla rivoluzione del piano AEF intorno alla porzione AF dell'asse, EF essendo perpendicolare ad AF, ha per espressione, come si dimostra in Geometria, $AF \times 360°$, ovvero $(1 - \text{cos.}\, AE)\, 360° = 2\, \text{sen.}^2 \frac{1}{2} AE \times 360°$; s'instituisca l'analogia: l'angolo EAG alla porzione AEG della superficie del segmento, come $360°$ alla superficie intiera del segmento medesimo; ovvero $A : AEG :: 360° : 2\, \text{sen.}^2 \frac{1}{2} AE \times 360° :: 1 : 2\, \text{sen.}^2 \frac{1}{2} AE$. Quindi *la superficie d'un tronco di fuso*, come AEG, $= A \times 2\, \text{sen.}^2 \frac{1}{2} AE =$ *angolo del fuso moltiplicato pel seno verso della lunghezza del tronco*.

PROBLEMA VIII.

Determinare meccanicamente una superficie piana eguale a quella d'un triangolo sferico dato.

Abbiam dimostrato (*Trig.* 499), che *tratti* 180° *dalla somma dei tre angoli d'un triangolo sferico, il residuo moltiplicato pel raggio della sfera uguaglia la superficie del triangolo*. Ciò posto, col detto raggio descrivi un cerchio, e taglia della sua circonferenza quanto rilevano insieme li tre angoli del triangolo dato. Dalle estremità della circonferenza tagliata conduci due diametri. Dei quattro settori che nascono, l'area di due opposti ed eguali equivale alla sferica che si cerca. A questa costruzione, ch'è dell'Ab. *Gua* (*Mém. Paris* 1783), e che per la sua maravigliosa semplicità, e per li servigi che può rendere alla descrizione de' planisferj, degna mi sembra d'essere ripetuta e divolgata, non so che aggiunger due regolette. La superficie richiesta consiste nei due settori minori, mentre la somma dei tre angoli non ecceda 270°; ne' due maggiori quand'ella stia tra li 270, e li 360. Che se oltrepassi quest'ultimo limite, allora fa d'uopo descriver due cerchi, in ciascun

de' quali si toglierà una circonferenza uguale alla semisomma degli angoli, e procedendo come s'è detto per la somma intiera, si otterrà l'area sferica scompartita in quattro settori eguali.

PROBLEMA IX.

Dati i tre lati d'un triangolo sferico, trovare la somma degli angoli.

Poichè ad aver l'area d'un triangolo sferico è necessario conoscer la somma degli angoli, il presente problema riceve importanza, se vogliasi l'area, ed in cambio degli angoli si conoscano i lati.

Sia s la semisomma de' lati a, b, c, (fig. 15), opposti agli angoli A, B, C. E poichè cos. $\frac{1}{2}(A+B+C) =$ cos. $\frac{1}{2}(A+B)$ cos. $\frac{1}{2}C -$ sen. $\frac{1}{2}(A+B)$ sen. $\frac{1}{2}C =$ (cos. $\frac{1}{2}A$ cos. $\frac{1}{2}B -$ sen. $\frac{1}{2}A$ sen. $\frac{1}{2}B$) cos. $\frac{1}{2}C -$ (sen. $\frac{1}{2}A$ cos. $\frac{1}{2}B +$ cos. $\frac{1}{2}A$ sen. $\frac{1}{2}B$) sen. $\frac{1}{2}C$; se si pongono nell'ultimo membro i valori notissimi (*Tav. VIII, form.* 11), di sen. $\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}(s-b)\,\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}}$, di cos. $\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-a)}{\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}}$, e così quelli analoghi di sen. $\frac{1}{2}B$, cos. $\frac{1}{2}B$, sen. $\frac{1}{2}C$, cos. $\frac{1}{2}C$, si conseguisce cos. $\frac{1}{2}(A+B+C)$

$$= \left(\sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-a)}{\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-b)}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,c}} - \sqrt{\frac{\text{sen.}(s-b)\,\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a)\,\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,c}}\right)\sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b}} - \left(\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-b)\,\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-b)}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,c}} + \sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-a)}{\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}}\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a)\,\text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,c}}\right)\sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a)\,\text{sen.}(s-b)}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b}} = \frac{\sqrt{\text{sen.}\,s\,\text{sen.}(s-a)\,\text{sen.}(s-b)\,\text{sen.}(s-c)}}{\text{sen.}\,a\,\text{sen.}\,b\,\text{sen.}\,c}$$

$\big(\text{sen.}\,s - \text{sen.}(s-c) - \text{sen.}(s-b) - \text{sen.}(s-a)\big)$. Ma sen. $s -$ sen. $(s-c) = 2$ sen. $\frac{1}{2}c$ cos. $(s - \frac{1}{2}c) = 2$ sen. $\frac{1}{2}c$ cos. $\frac{1}{2}(a+b)$; e sen. $(s-b) +$ sen. $(s-a) = 2$ sen. $\big(s - \frac{1}{2}(a+b)\big)$ cos. $\frac{1}{2}(a \backsim b) = 2$ sen. $\frac{1}{2}c$ cos. $\frac{1}{2}(a \backsim b)$, (*Tav. II, form.* 22, 18). Dunque sen. $s -$ sen. $(s-c) -$ sen. $(s-b) -$ sen. $(s-a) = -2$ sen. $\frac{1}{2}c\big($cos. $\frac{1}{2}(a \backsim b) -$ cos. $\frac{1}{2}(a+b)\big) = -2$ sen. $\frac{1}{2}c \times 2$ sen. $\frac{1}{2}b$ sen. $\frac{1}{2}a$, (*Tav. II,*

form. 16). E però $\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{4\,\text{sen.}\frac{1}{2}a\,\text{sen.}\frac{1}{2}b\,\text{sen.}\frac{1}{2}c}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b\ \text{sen.}\,c} \times$ $\sqrt{\text{sen.}\,s\ \text{sen.}(s-a)\ \text{sen.}(s-b)\ \text{sen.}(s-c)}$. Ora $\text{sen.}\,a = 2\,\text{sen.}\frac{1}{2}a\ \text{cos.}\frac{1}{2}a$, e la stessa trasformazione ricevono sen. b, sen. c; quindi definitivamente

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\frac{\sqrt{\text{sen.}\,s\ \text{sen.}(s-a)\ \text{sen.}(s-b)\ \text{sen.}(s-c)}}{2\,\text{cos.}\frac{1}{2}a\ \text{cos.}\frac{1}{2}b\ \text{cos.}\frac{1}{2}c}$$

L'Ab. *Gua* (*loc. cit.*) s'abbatte, in vece di questa, in una formula, che contiene il valore della tangente della semisomma degli angoli: la qual formula è assai men comoda al calcolo, avendo per numeratore $1 + \text{cos.}\,a + \text{cos.}\,b + \text{cos.}\,c$, e per denominatore il doppio del mio numeratore.

Problema X.

Dati i tre angoli, trovare il perimetro.

Detta S la mezza somma degli angoli, la formula, che ho trovata or ora, si riduce, col mezzo del triangolo supplementario, alla seguente: con che si risolve il problema senza difficoltà

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\sqrt{-\text{cos.}\,S\ \text{cos.}(S-A)\ \text{cos.}(S-B)\ \text{cos.}(S-C)}}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}A\ \text{sen.}\frac{1}{2}B\ \text{sen.}\frac{1}{2}C}$$

Problema XI.

Dati i tre lati, trovar la perpendicolare su l'un qualsivoglia d'essi. (figg. 12, 13).

Stando alle espressioni del Problema IX, $\text{sen.}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}(s-a)\ \text{sen.}(s-c)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}}$, e $\text{cos.}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\text{sen.}\,s\ \text{sen.}(s-b)}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}}$.

Laonde $2\,\text{sen.}\frac{1}{2}B\ \text{cos.}\frac{1}{2}B = \frac{2\sqrt{\text{sen.}\,s\ \text{sen.}(s-a)\text{sen.}(s-b)\text{sen.}(s-c)}}{\text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,c}$ $= \text{sen.}\,B$, (*Tav. I, form.* 6). Ma (*Tav. VI, form.* 6), $\text{sen.}\,B = \frac{\text{sen.}\,AD}{\text{sen.}\,AB} = \frac{\text{sen.}\,AD}{\text{sen.}\,c}$. Dunque

$$\text{sen.}\,AD = \frac{2\sqrt{\text{sen.}\,s\ \text{sen.}(s-a)\ \text{sen.}(s-b)\ \text{sen.}(s-c)}}{\text{sen.}\,a}$$

Pro-

PROBLEMA XII.

Dati i tre angoli, trovar la medesima perpendicolare.

Col mezzo del triangolo supplementario, la formola ora composta si converte nella seguente, la qual si troverebbe direttamente col metodo stesso tenuto per quella.

$$\text{sen. } AD = \frac{2\sqrt{-\text{cos. } S \text{ cos.}(S-A) \text{ cos.}(S-B) \text{ cos.}(S-C)}}{\text{sen. } A}$$

Si noti, che la perpendicolare in un triangolo sferico ha per suo supplemento nel triangolo supplementario la perpendicolare cadente dalla medesima parte, cioè sopra il lato supplementale dell'angolo, da cui parte la perpendicolare nel primo triangolo: il che si dimostra facilmente con l'equazione sen. AD = sen. AB sen. B.

PROBLEMA XIII.

Dati i tre angoli, trovar la distanza loro dal polo del cerchio minore, che circoscrive il triangolo. (fig. 16)

Sia AP la distanza cercata, e PF perpendicolare sopra AC, il che dà $AF = FC$, per essere $AP = PC$: sarà (*Tav. VI, form.* 10), tang. $AP = \frac{\text{tang. } AF}{\text{cos. } PAF}$. Ma $2S = A+B+C = 2PBA + 2PBC + 2PAC = 2B + 2PAC$: laonde $PAF = S - B$. E però tang. $AP = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} AC}{\text{cos. } (S-B)}$. Di più tang. $\frac{1}{2} AC = \frac{\text{sen. } \frac{1}{2} AC}{\text{cos. } \frac{1}{2} AC} = \sqrt{-\frac{\text{cos. } S \text{ cos. } (S-B)}{\text{cos. } (S-A) \text{ cos. } (S-C)}}$, (*Tav. VIII, form.* 12). Dunque

$$\text{tang. } AP = \sqrt{\frac{-\text{cos. } S}{\text{cos.}(S-A) \text{ cos.}(S-B) \text{ cos.}(S-C)}}$$

PROBLEMA XIV.

Trovar la distanza medesima, essendo dati i tre lati. (fig. 16)

Sia PE perpendicolare sopra AB, e AD sopra BC. Sarà sen. EPF = sen. EPA cos. APF + cos. EPA sen. APF = $\frac{\text{sen. } AE}{\text{sen. } AP} \times$ cos. AF sen. PAF + cos. AE sen. $PAE \times \frac{\text{sen. } AF}{\text{sen. } AP}$, (*Tav. VI, form.* 6, 12). Ma perchè (*Tav. VI, form.* 2), tang. AE = tang. AP cos. EAP, tang. AF = tang. AP cos. PAF, il che dà $\frac{\text{sen. } AE}{\text{sen. } AP} = \frac{\text{cos. } AE \text{ cos. } EAP}{\text{cos. } AP}$, e $\frac{\text{sen. } AF}{\text{sen. } AP} = \frac{\text{cos } AF \text{ cos. } PAF}{\text{cos. } AP}$; perciò sostituendo questi valori, si ha sen. $EPF = \frac{\text{cos. } AE \text{ cos. } AF}{\text{cos. } AP} \times$ (sen. PAF cos. PAE + cos. PAF sen. PAE) $= \frac{\text{cos. } AE \text{ cos. } AF \text{ sen. } BAC}{\text{cos. } AP}$. Ora $AE = \frac{1}{2} AB$, $AF = \frac{1}{2} AC$, $EPF = \frac{1}{2} BPA + \frac{1}{2} APC = 180° - \frac{1}{2} BPC$. Dunque sen. $\frac{1}{2} BPC$ cos. AP = cos. $\frac{1}{2} AB$ cos. $\frac{1}{2} AC$ sen. A. Similmente si prova essere sen. $\frac{1}{2} APC$ cos. AP = cos. $\frac{1}{2} AB$ cos. $\frac{1}{2} BC$ sen. B. Ma sen. $\frac{1}{2} APC = \frac{\text{sen. } AF}{\text{sen. } AP}$, e sen. $B = \frac{\text{sen. } AD}{\text{sen. } AB}$. Dunque sen. AF cot. AP sen. AB = cos. $\frac{1}{2} AB$ cos. $\frac{1}{2} BC$ sen. AD, ovvero sen. $\frac{1}{2} AC \times 2$ sen. $\frac{1}{2} AB$ = tang. AP cos. $\frac{1}{2} BC$ sen. AD. Quindi preso il valore di sen. AD nel probl. XI, nasce 2 sen. $\frac{1}{2} AB$ sen. $\frac{1}{2} AC$ sen. BC = tang. AP cos. $\frac{1}{2} BC \times 2 \sqrt{\text{sen. } s \text{ sen. } (s-a) \text{ sen. } (s-b) \text{ sen. } (s-c)}$; donde

$$\text{tang. } AP = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2} AB \text{ sen. } \frac{1}{2} AC \text{ sen. } \frac{1}{2} BC}{\sqrt{\text{sen. } s \text{ sen. } (s-a) \text{ sen. } (s-b) \text{ sen. } (s-c)}}$$

CAPITOLO NONO.

Applicazioni all' Astronomia.

PROBLEMA I.

Ridurre al solstizio ogni altezza meridiana del Sole, osservata ne' giorni circonvicini. (fig. 17)

Sia BD un quarto dell' eclittica, BE un quarto dell' equatore, AC la declinazione osservata del Sole: si cerca la differenza da AC a DE.

Il triangolo BAC, rettangolo in A, convertendosi in BED, rettangolo in E, conserva costanti due angoli, cioè l' angolo retto, e l' angolo B. Si ha quindi (*Trig.* 647), tang. $\frac{1}{2} dAC$: tang. $\frac{1}{2} dBC$: : tang. $(AC + \frac{1}{2} dAC)$: tang. $(BC + \frac{1}{2} dBC)$. Ma $BC + \frac{1}{2} dBC = BC + \frac{1}{2} CD = BD - \frac{1}{2} CD = 90° - \frac{1}{2} CD = 90° - \frac{1}{2} dBC$. Dunque tang. $(BC + \frac{1}{2} dBC) =$ cot. $\frac{1}{2} dBC$. E però tang. $\frac{1}{2} dAC =$ tang.^{2} $\frac{1}{2} dBC$ tang. $(AC + \frac{1}{2} dAC)$. Ma dAC essendo di pochi secondi, od anche minuti, si può far senza errore tang. $\frac{1}{2} dAC = \frac{dAC}{2R''}$, R'' essendo il raggio in minuti secondi. Per conseguenza $dAC = 2 R''$ tang.^{2} $\frac{1}{2} dBC$ tang. $(AC + \frac{1}{2} dAC)$. Or se chiamisi D la declinazione osservata del Sole, dD la sua differenza dalla declinazione solstiziale, e dL la distanza del Sole dal solstizio in longitudine, si ha finalmente

$$dD = 2 R'' \text{ tang.}^2 \tfrac{1}{2} dL \text{ tang.} (D + \tfrac{1}{2} dD)$$

Questa formola, in cui si farà $\frac{1}{2} dD$ negativo nelle osservazioni posteriori al solstizio, può servire esattissimamente per dieci e per dodici giorni avanti e dopo, e merita quindi esser anteposta alla proporzione tra i cangiamenti nella declinazione e i quadrati de' tempi, la quale non può valere che per poche ore.

PROBLEMA II.

Data l'altezza del polo, ed osservate in un medesimo verticale due stelle, di cui si conoscono le declinazioni e le ascensioni rette, e per conseguenza i momenti de' loro passaggi al meridiano, trovar che ora fosse quando fu fatta l'osservazione. (fig. 18.)

Sia P il polo dell'equatore, Z il zenit, S, T le due stelle. Le cose note sono: PZ = *distanza dal polo al zenit*, PT = *distanza dal polo alla stella più alta*, PS = *distanza dal polo alla stella più bassa*, TPS = *differenza tra le ascensioni rette delle due stelle*, presa dalla parte dove è minore di 180°. Si cerca TPZ = *angolo orario della stella più elevata*.

Se dal polo P si cala PE perpendicolare sul verticale, i due triangoli rettangoli TEP, SEP, che hanno il lato comune PE, danno (*Trig.* 453), cos. TPE : cos. SPE :: tang. PS : tang. PT. Laonde (*Tav. II*, *form.* 13, 10), cot. $\frac{1}{2}(SPE + TPE)$: tang. $\frac{1}{2}(SPE - TPE)$ :: sen. $(PS + PT)$: sen. $(PS - PT)$. E per conseguenza

$$\cot.(TPE + \tfrac{1}{2}TPS) = \tan.\tfrac{1}{2}TPS \times \frac{\text{sen.}(PS + PT)}{\text{sen.}(PS - PT)}$$

equazione che fa conoscere l'angolo TPE. Ma ne' triangoli rettangoli PET, PEZ, si ha parimente cos. ZPE : cos. TPE :: tang. PT : tang. PZ. Dunque

$$\cos. ZPE = \cos. TPE \tan. PT \cot. PZ.$$

Aggiunto ZPE a TPE, si ottien l'angolo TPZ che si dimandava. Questa soluzione è più comoda di quella che ho dato (*Trig.* 756).

In generale quella delle due stelle, ch'è più vicina al polo, deve aver l'angolo orario minore. Ma la via più spedita per saper se due stelle possano osservarsi in un medesimo verticale, è quella di farne la prova sopra un globo munito di circolo verticale.

PROBLEMA III.

Trovar l'angolo orario apparente *di un aſtro nell'orizzonte*, cioè compreſo l'effetto della refrazione.

L'angolo orario vero nell'orizzonte ſi trova per mezzo della formula cof. *ang. or.* = — tang. *lat.* tang. *declin.* (*Trig.* 758). Detto *m* l'aumento dell'angolo orario per cauſa della refrazione, abbiamo trovato (757), cof. (*ang. or.* + *m*) $= \text{cof. } ang.\ or. \left(1 - \frac{\text{ſen. } refr.\ oriz.}{\text{cof. } lat.\ \text{cof. } decl.\ \text{cof. } ang.\ or.}\right)$. Meſſo nel denominatore il valor precedente di cof. *ang. or.*, ſi acquiſta con più ſemplicità

$$\text{cof. } (ang.\ or. + m) = \text{cof. } ang.\ or. \left(1 + \frac{\text{ſen. } refr.\ oriz.}{\text{ſen. } lat.\ \text{ſen. } decl.}\right).$$

PROBLEMA IV.

Trovar una formola eſatta e comoda per la parallaſſe di latitudine. (fig. 19).

In un triangolo sferico *ABC*, che ſi converte in *ABD*, conſervando coſtanti *AB*, *A*; fatto $CD = dAC$, $BD - BC = dBC$, $ABC = B$, $CBD = dB$, ha luogo (*Trig.* 696) l'equazione rigoroſa che ſegue: $\frac{\text{ſen. } dBC\ \text{ſen. } AB}{\text{ſen. } BC\ \text{ſen. } (BC + dBC)} = 2\ \text{ſen. } \frac{1}{2} dB$ $\left(\text{cof. } AB\ \text{ſen. } (B + \frac{1}{2} dB) - \text{cof. } (B + \frac{1}{2} dB)\ \text{cot. } A\right)$. Ma il triangolo *ABD* dà (*Trig. Tav. VII*, *form.* 13), cot. $A = \frac{\text{ſen. } AB\ \text{cot. } (BC + dBC) - \text{cof. } AB\ \text{cof. } (B + dB)}{\text{ſen. } (B + dB)}$. Soſtituendo queſto valore nell'equazion precedente, e moltiplicandola per ſen. $(B + dB)$, ne naſce $\frac{\text{ſen. } dBC\ \text{ſen. } AB\ \text{ſen. } (B + dB)}{\text{ſen. } BC\ \text{ſen. } (BC + dBC)}$ $= 2\ \text{ſen. } \frac{1}{2} dB\ \left(\text{cof. } AB\ \text{ſen. } (B + dB)\ \text{ſen. } (B + \frac{1}{2} dB) + \text{cof. } AB\ \text{cof. } (B + dB)\ \text{cof. } (B + \frac{1}{2} dB) - \text{ſen. } AB\ \text{cof. } (B + \frac{1}{2} dB)\ \text{cot. } (BC + dBC)\right) = 2\ \text{ſen. } \frac{1}{2} dB\ \left(\text{cof. } AB\ \text{cof. } \frac{1}{2} dB - \text{ſen. } AB\ \text{cof. } (B + \frac{1}{2} dB)\ \text{cot. } (BC + dBC)\right)$. Si moltiplichi l'equazio-

ne per sen. $(BC + dBC)$, e si ponga $\frac{\text{sen. } dB}{\text{cos. } \frac{1}{2} dB}$ in cambio di 2 sen. $\frac{1}{2} dB$, si otterrà $\frac{\text{sen. } dBC \text{ sen. } AB \text{ sen. } (B + dB)}{\text{sen. } BC} = \text{sen. } dB$ $\left(\text{cos. } AB \text{ sen. } (BC + dBC) - \frac{\text{sen. } AB \text{ cos. } (B + \frac{1}{2} dB) \text{ cos. } (BC + dBC)}{\text{cos. } \frac{1}{2} dB}\right)$. Ma perchè nel triangolo ABD, sen. $(BC + dBC)$: sen. A :: sen. $(AC + dAC)$: sen. $(B + dB)$; posta la seconda ragione invece della prima nell'analogia (*Trig.* 542), sen. dAC : sen. dB :: sen. BC sen. $(BC + dBC)$: sen. AB sen. A, si raccoglie sen. $dB = \text{sen. } dAC \times \frac{\text{sen. } AB \text{ sen. } (B + dB)}{\text{sen. } BC \text{ sen. } (AC + dAC)}$, il qual valore introdotto nell'equazion precedente, e fatta la riduzione, si conseguisce sen. $dBC = (\text{sen. } dAC : \text{sen. } (AC + dAC))$ $\left(\text{cos. } AB \text{ sen. } (BC + dBC) - \frac{\text{sen. } AB \text{ cos. } (BC + dBC) \text{ cos. } (B + \frac{1}{2} dB)}{\text{cos. } \frac{1}{2} dB}\right)$.

Or sia A il zenit, B il polo dell'eclittica, C il luogo vero dell'astro, D l'apparente; e si noti che $\frac{\text{sen. } dAC}{\text{sen. } (AC + dAC)}$ $= \frac{\text{sen. } \textit{parall. altezza}}{\text{cos. } \textit{alt. apparente}} = \text{sen. } \textit{par. oriz.}$ E' inoltre cos. $\frac{1}{2} dB =$ cos. $\frac{1}{2}$ *parall. longit.*, il qual si può far senza scrupolo eguale all'unità in tutti i casi: e similmente si possono mettere gli archi in luogo di sen. dBC, e di sen. *parall. oriz.* Con queste condizioni si ottiene

parall. latit. = *par. oriz.* (cos. *alt. nonag.* cos. *lat. appar.* — sen. *alt. non.* sen. *lat. app.* cos. (*dist. vera non.* + $\frac{1}{2}$ *par. longit.*))

Questa formula, la qual merita senza dubbio la preferenza su quella che ho dato (*Trig.* 804), m'è stata suggerita dal Sig. de *Lambre*, ma la dimostrazione di lui è diversa.

PROBLEMA V.

Trovare una formola esatta e comoda per la paralasse di declinazione.

Sia B il polo del mondo, e tutto il rimanente come sopra; allora la stessa formula finale del precedente problema si esprimerà così:

parall. declin. = *par. oriz.* (sen. *alt. del polo* cos. *decl. appar.* — cos. *alt. del polo* sen. *decl. appar.* cos. (*ang. or.* + $\frac{1}{2}$ *par. asc. r.*))

Anche questa dev'esser anteposta a quella che ho dato (805).

Si avverta, che a tener conto dell'ellitticità della Terra fa d'uopo, sì in questa che nella antecedente, adoperare la parallasse orizzontale spettante al luogo per cui si fa il calcolo, e l'altezza di polo diminuita dell'angolo della verticale (802).

PROBLEMA VI.

Determinare da tre osservazioni la posizione del corso di una cometa, supposto uniforme e per linea retta. Newton Arith. univ. Sect. 4, cap. II, probl. XXX.

Sia in A l'osservatore; la cometa, al momento della prima osservazione, in B; della seconda in C; della terza in D. E' nota la ragione $BC:CD$, ovvero $BC:BD$, supponendosi il moto proporzionale agl' intervalli di tempo tra le respettive osservazioni; e si conoscono inoltre per osservazione gli angoli BAC, CAD. Quel che si chiede è l'angolo B.

Ora (*Trig. Tav. III, form.* 22), $BC = \frac{AB}{\text{cos.}B + \text{sen.}B \text{ cot.}BAC}$, e $BD = \frac{AB}{\text{cos.}B + \text{sen.}B \text{ cot.}BAD}$. E' dunque $BC:BD::$ cos. B + sen. B cot. BAD : cos. B + sen. B cot. BAC. E dividendo la seconda ragione per cos. B, $BC:BD::1+$

tang. B cot. BAD : 1 + tang. B cot. BAC. Donde si cava

$$\text{tang. } B = \frac{BD - BC}{BC \cot.BAC - BD \cot.BAD} = \frac{1 - \frac{BC}{BD}}{\frac{BC}{BD} \cot.BAC - \cot.BAD}.$$

MEMORIE

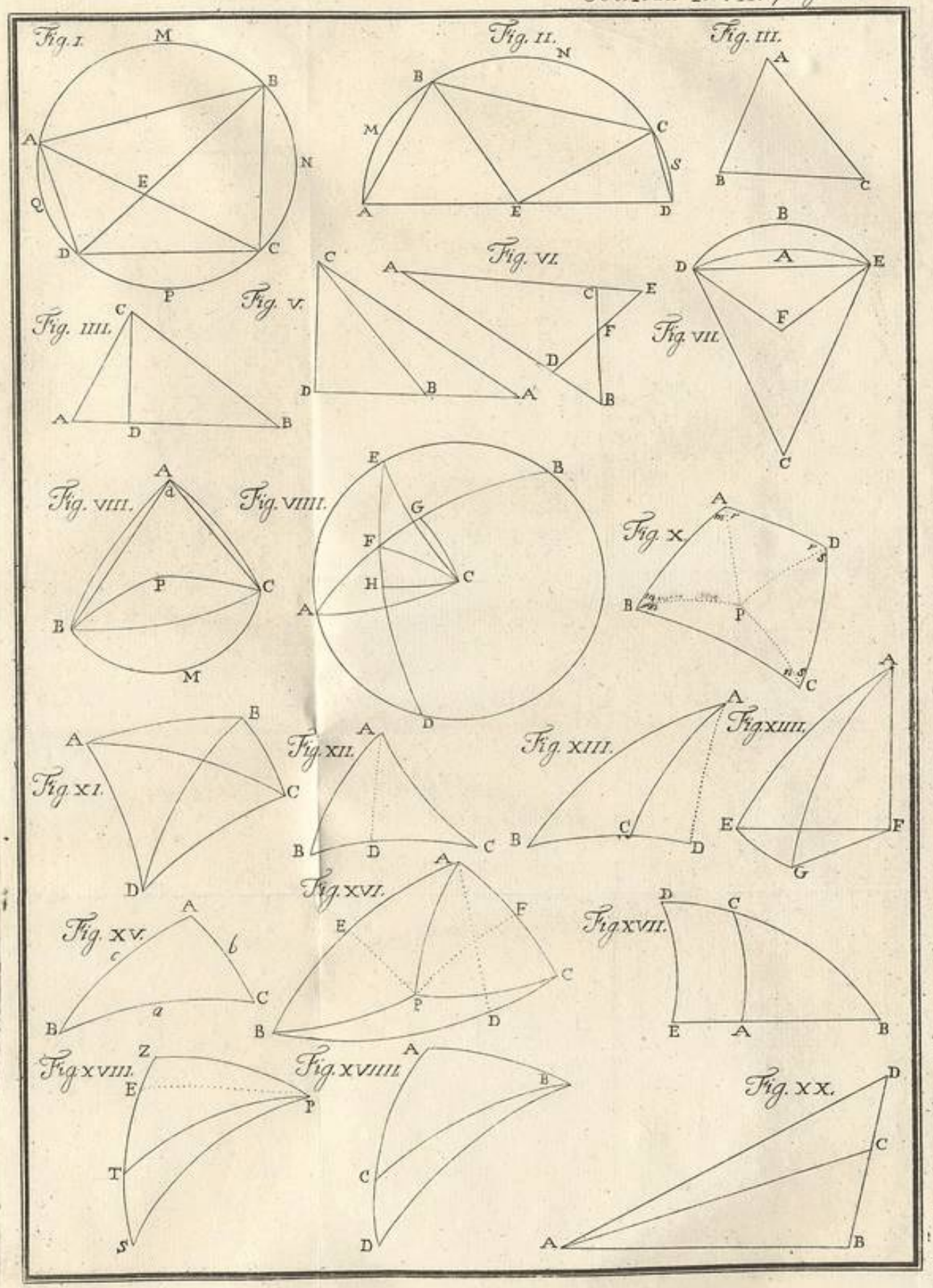
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IIII.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. VIIII.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIIII.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XVIIII.
Fig. XX.