SAGGIO

DI UN NUOVO CORSO DI ELEMENTI DI STATICA

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI

PREFAZIONE.

E' mia intenzione di presentare in questa Memoria a' matematici una serie di proposizioni costituenti il primo Elemento di un nuovo corso di statica, in cui ora mi occupo, affine di rilevarne il loro giudizio, e valermene a mio lume nel proseguimento dell' opera medesima. Se la maggior parte di queste proposizioni, per non dire tutte, contengono verità già note, egli è però affatto nuovo l'ordine loro e la dimostrazione che ho cercato di ridurre a tal segno di evidenza, che non ne resti poi ad alcuno la voglia di una migliore; nella qual cosa non sono forse gli altri autori di elementi di questa scienza così ben riusciti come conveniva. Imperciocchè per parlare di una sola; chi è che non sappia che un *Newton*, un *Daniel Bernoulli*, un *d' Alembert*, un *Bossut*, un *P. Gregorio Fontana*, ed altri ancora, hanno cercato un dopo l'altro o di dare una nuova dimostrazione del celebre teorema della composizion delle forze, o di perfezionare le date dagli altri? Questa sollecita brama di rintracciare nuove pruove di una verità, non è ella un indizio manifesto che le già note e comuni non appagano abbastanza? Di questo teorema io do appunto una dimostrazione, che mi lusingo possa restare al coperto di ogni attacco e soddisfare ai più difficili ingegni. Nè è questa opera di lieve momento, perchè, come dice il citato *Bernoulli* nel Tomo primo degli Atti dell' Accademia di Pietroburgo coll' autorità di *Varignon*, da sì fatto teorema

possono di leggieri ricavarsi tutte le altre proprietà dell'equilibrio: *illam mechanicæ partem quæ versatur circa æquilibrium potentiarum totam ex sola compositione & resolutione virium deduci posse abunde monstravit Petrus Varignon*. Ma oltre la dimostrazione delle forze composte se ne troveranno in questo saggio alcune altre non dispregevoli, e sopra tutto un legame ed ordine fra loro che sembreranno anella della stessa catena. Cercando fra me stesso le ragioni per cui le prime verità della statica non persuadono così bene, come per esempio quelle della geometria, non ho potuto altra trovarne che una sola, ed è che si sono insieme confusi, se non la statica con la dinamica (giacchè molti hanno avuta l'antivedenza di far questa separazione) almeno li principj di quella co' principj di questa scienza; laddove sembra che la prima possa sopra fondamenta sue proprie innalzarsi, come io studierò di mostrare col fatto. In questo tentativo sono stato però preceduto e da *Bernoulli*, e d'*Alembert* quando cercarono la dimostrazione del teorema di sopra enunciato; onde non sia meraviglia se colla scorta di tanti uomini, e più ancora dalla ragione che dall' autorità convinto, io mi sia posto a trattare la statica da se sola e interamente separandola da ogni idea tratta dal moto; nella qual cosa quasi spererei di non esservi male riuscito.

Siccome questo è un saggio di un corso di elementi, così era ben convenevole che il mio stile fosse elementare e adattato alla intelligenza della gioventù. Anzi ho a bello studio imitato quello degli antichi nostri maestri, i quali, che che altri in contrario ne senta, debbono essere presi per modelli di questo genere di scrivere. Simile attenzione ho praticata per seguire il loro metodo; quindi si conoscerà fino dalla mostra presente essere tutto l' edifizio che io cerco d'erigere fondato sopra le definizioni, i comuni concetti, e le domande, e che non mi servo mai di alcuni sforzati ragionamenti per provare i miei assunti, come per avventura sogliono fare coloro che di questo metodo non sono seguaci. Ho creduto però opportuno di spargere alcune poche note nell'opera, non per modo di commenti, ma per rendere ragione di alcune novità da me per la prima volta nella statica intromesse, o per avvertire di alcun' altra cosa

importante. Se è prezzo dell'opera unire insieme in questa maniera le verità della statica, se la strada ch'io batto può meglio delle comuni condurre alla meta, se debbo in alcuna cosa correggermi o tutto abbandonare, decideranno i matematici, al cui giudizio, come ho detto di sopra, ben volentieri sottometto questa mia quantunque laboriosa intrapresa.

DEFINIZIONI.

1 Forza o potenza è quello ch' eccita un mobile a cangiar di posizione.

2 Direzione di una forza è la linea retta, secondo la quale la forza eccita un mobile.

3 La forza si dice tendere nella sua direzione da quella parte, verso cui è volto l' eccitamento.

4 Le forze applicate ad un mobile diconsi contrarie, quando le loro direzioni sieno parallele, e le tendenze volte a parti contrarie.

5 Diconsi poi direttamente contrarie, quando abbiano comune la direzione, e le tendenze volte a parti contrarie.

6 Le forze applicate ad un mobile diconsi parziali, quando le loro direzioni sieno parallele, e le tendenze volte alla stessa parte.

7 Diconsi poi direttamente parziali quando abbiano comune la direzione, e le tendenze volte alla stessa parte.

8 Angolo alla tendenza si dice quello, che dalle direzioni di due forze segantisi in un punto è compreso, dalla parte ove tendono le forze.

9 Le forze applicate ad un mobile si dicono fra loro in equilibrio, quando nessun eccitamento prevalga.

10 Le forze che colla medesima o colle medesime forze possono equilibrarsi, diconsi equivalenti (*a*).

(*a*) Di queste dieci definizioni le prime due, siccome ancora la nona, si trovano in tutti i libri elementari di statica. La terza è nuova, ed io la ho introdotta, perocchè non basta dire la direzione secondo cui viene un mobile eccitato; ma bisogna ancora mostrare da qual parte nella direzione è volto l'eccitamento. Ed a proposito della voce *eccitare* notisi aver-

DIMANDE.

1 Dimandisi di applicare secondo qualsivoglia direzione una qualsivoglia forza, che tenda verso l'una o l'altra parte nella direzione stessa (*a*).

2 E se due forze a due direzioni che si segano in un punto sieno applicate, certa forza applicata secondo certa direzione, che passi pel punto stesso, equilibrarsi coll' altre due forze (*b*).

3 E se sieno fra loro in equilibrio tre forze applicate secondo tre direzioni segantisi in un punto, essere ancora fra

---

la io adoperata in luogo dell'altre *premere* e *tirare* usate da' statici; e ciò per poter con una sola voce esprimere ad un tratto qual si è l'una o l'altra di queste per loro natura contrarie azioni, la distinzione delle quali alla statica concreta non all'astratta appartiene La quarta e quinta definizione sono state da molti autori, se non proposte, almeno messe in opera ne' loro elementi, ed io le credo tanto utili che a somiglianza di esse altre due nuove ne ho formato, che sono marcate sesta e settima. L'ottava è pure nuova: due direzioni che si segano fra loro fanno quattro angoli; e di questi quattro chiamo angolo alla tendenza quello, ch'è collocato dalla parte ove tendono le forze; e sembrami di avere molto con questa definizione facilitato il modo di scrivere con chiarezza e sicurezza. La decima ed ultima definizione è pure mia, e la ho surrogata all'altra solita delle forze *composte* o forze *risultanti*. La differenza non consiste nel solo cangiamento di nome, cioè per aver chiamate equivalenti le forze dette fino ad ora composte o risultanti; ma piuttosto per aver tratta la nozione di queste forze dall' equilibrio, non dal moto, come hanno fatto tutti gli altri statici. Se poi il nome di forze composte o di forze risultanti era adattato all' idea, ch'essi se ne formavano; l'altro di forze equivalenti conviene meglio a quella ch'io cerco d' introdurre. L'opera però dimostrerà più d'ogni mio discorso se tale considerabile cangiamento apporti reale utilità nella trattazione della statica.

(*a*) *Euclide* vero maestro del metodo matematico dimandò di potere da qualsivoglia punto a qualsivoglia punto tirare una linea retta, e prolungare una data retta finita continuamente per diritto, ed altre simili cose. Io a sua imitazione ho fatta questa prima dimanda, che a mio giudicio non doveva esser da alcun autore di elementi ommessa, come quella di cui fa d' uopo servirsene quasi in ogni proposizione.

(*b*) Questa domanda vale per me altrettanto, quanto pel Cel. *Boffut* il suo assioma che *un punto non può andare ad un tratto per molte strade*; ma io non esco dei confini della statica; egli si serve di un principio di dinamica. Chi vorrà attentamente esaminare le Memorie di *Daniel Bernoulli* e di *Alembert* per la dimostrazione del famoso teorema della composizione delle forze (che così da tutti vien chiamato), s'accorgerà che quantunque essi non abbiano, come me, espressa tale dimanda, l'hanno però tacitamente introdotta.

loro in equilibrio tre forze uguali a quelle, una all' altra, applicate ſimilmente ſecondo tre direzioni ſegantiſi in un punto, e comprendenti fra loro angoli alla tendenza uguali a' compreſi dalle prime direzioni; ciaſcun angolo alla tendenza a ciaſcun angolo alla tendenza delle forze uguali (*a*).

COMUNI CONCETTI.

1 Due forze uguali e direttamente contrarie ſono fra loro in equilibrio.

2 E ſe due forze ſieno fra loro in equilibrio, ſaranno eſſe uguali e direttamente contrarie.

3 Se a forze fra loro in equilibrio aggiunganſi forze fra loro in equilibrio, tutte le forze ſaranno pure fra loro in equilibrio.

4 E ſe da forze fra loro in equilibrio tolganſi forze fra loro in equilibrio, le forze rimanenti ſaranno pure fra loro in equilibrio.

5 Non poſſono eſſere fra loro in equilibrio le forze, le cui direzioni ſi ſeghino nello ſteſſo punto, ſe le tendenze di tutte ſieno volte verſo la medeſima parte (*b*).

PROPOSIZIONE 1.

Le forze uguali e direttamente parziali ſono fra loro equivalenti, in qualunque ſito della comune direzione ſia ciaſcuna forza applicata.

(*a*) Anche di queſta dimanda ſenza preveniente avviſo ſi ſono ſerviti i citati autori. Ho ſtimato poi opportuno di traſcurare l'altre ſolite dimande, come quella *di poter concepire i corpi non peſanti*, perchè io ho parlato e parlerò ſempre aſtrattamente di mobili, mai di corpi. E' parimenti inutile l' altra *di poter eſprimere le forze con linee rette*. Euclide trattò tutto il quinto libro, che verſa ſulle grandezze in generale (e grandezze ſono ancora le forze), ed eſpreſſe nelle figure tutte le grandezze col mezzo di linee, ſenza crederſi obbligato di farne prima alcuna inchieſta.

(*b*) Ho comune i due primi aſſiomi con tutti gli altri autori di elementi di ſtatica; gli altri tre ſono nuovi. Si conoſcerà ben toſto l'utile uſo che ſe ne può fare.

Le due forze P Q sieno uguali e direttamente parziali, cioè sieno applicate secondo la stessa direzione ED e tendenti verso la stessa parte, dall'E verso il D; ma la forza P sia applicata in C, e la forza Q in qualsivoglia altro sito D della direzione ED; dico ch'equivalente è la forza P alla forza Q. Fig. 1

Imperocchè prendasi la forza R uguale ad una di esse forze P Q, e si applichi la forza R ovunque secondo la direzione ED sì che tenda dal D verso l'E. Dimand. 1

E poichè l'una e l'altra delle forze P R è applicata secondo la stessa direzione ED, ma la forza P tende da una parte, dall'E verso il D, e la forza R tende dalla parte opposta, dal D verso l'E; quindi la forza P alla forza R è direttamente contraria, ed è ancora ad essa uguale; e due forze uguali e direttamente contrarie sono fra loro in equilibrio. In equilibrio ella è dunque la forza P colla forza R. Allo stesso modo si proverà che la forza Q è in equilibrio colla foza R. L'una e l'altra dunque delle forze P Q può equilibrarsi colla medesima forza R. Ma quelle forze che colla medesima forza possono equilibrarsi sono equivalenti. Equivalente ella è dunque la forza P alla forza Q; il che convenia dimostrare (*a*). Defin. 5 Comun. Conc. 1 Defin. 10

(*a*) Questa mia prima proposizione comprende una dimanda comune a tutti i libri elementari di statica, che alcuni hanno enunciato così, *ch egli sia permesso di riguardare una forza come applicata a qual punto si vorrà della sua direzione*, ed altri in questo modo, *che una potenza applicandosi ad operare in qualunque punto della sua direzione faccia il medesimo effetto*. Ma prima: perchè richiedere quello che possiamo dimostrare ed esigere? Ed in secondo luogo cosa vuolsi mai indicare con queste parole: che si possa riguardare una forza come applicata a qualsivoglia punto della sua direzione? ovvero con queste altre: che l'effetto ne sia lo stesso? Dicasi dunque piuttosto con me, che una stessa forza, ovvero forze uguali e direttamente parziali applicate in qualunque sito della comune direzione sono fra loro equivalenti, ch'è lo stesso di dire, che esse possono colla medesima o colle medesime forze equilibrarsi. E notisi che alle forze uguali io aggiungo la condizione che debbano ancora essere direttamente parziali, nel che obbligo ad intendere le forze uguali applicate non solo ad una comune direzione, ma tendenti in oltre verso la stessa parte; nel qual caso e non più è vera l'altrui dimanda e mia propozione. E pure essi hanno ommessa questa sì essenziale circostanza, come in quasi tutti i luoghi ne' quali conviene tener conto delle rispettive tendenze delle forze.

COROLLARIO

Quindi se quante forze si vogliano sieno fra loro in equilibrio, e canginsi nelle proprie direzioni comunque i siti dell'applicazione delle forze non però le tendenze loro, sussisterà l'equilibrio.

PROPOSIZIONE 2.

A quante forze si vogliano direttamente parziali è equivalente una forza ad esse uguale e direttamente parziale.

Fig. 2. Sieno le forze P Q R direttamente parziali, cioè sieno applicate secondo la comune direzione ED e tendano tutte e tre dalla stessa parte, dall'E verso il D. Prendasi poi la forza S uguale alle forze P Q R, e si applichi secondo la direzione ED, sì che tenda dall'E verso il D, e sia alle forze P Q R direttamente parziale. Dico, ch'equivalente è la forza S alle forze P Q R.

Dimand. 1 Imperocchè applichisi di nuovo secondo la direzione ED, uguale alle forze P Q R, la forza MT, la quale tenda dal D verso l'E, e sia alle forze medesime P Q R direttamente contraria. E si divida la forza MT nelle forze MN NO OT uguali alle forze P Q R, l'una all'altra; e uguale sia la forza MN alla forza P, la forza NO alla forza Q, e la forza OT alla forza R.

E poichè uguali sono l'una e l'altra delle forze S MT alle forze P Q R, quindi sarà la forza S uguale alla forza MT. E sono ancora direttamente contrarie. Adunque la forza S è in equilibrio colla forza MT. E perchè sono direttamente contrarie le forze P Q R alla forza MT, e si è divisa la forza MT nelle forze MN NO OT; quindi ciascuna delle forze P Q R a ciascuna delle forze MN NO OT è direttamente contraria. Di nuovo perchè la forza P è uguale e direttamente contraria alla forza MN, sarà la forza P in equilibrio colla forza MN. Per la stessa ragione la forza Q è in equilibrio colla forza NO, e la forza R colla forza OT. Ma se a forze fra loro in equilibrio aggiunganli forze fra loro in equilibrio, tutte le forze sono pure fra loro in equilibrio. Le

Comun. Conc. 2

Comun. Conc. 1.

Comun. Conc. 3

forze

forze adunque P ℚ R si equilibrano colle forze MN NO OT, ovvero colla forza intera MT. Ma si è dimostrato che ancora la forza S si equilibra colla forza MT. Sonovi dunque alcune forze P ℚ R ed altra forza S, che possono colla medesima forza MT equilibrarsi. Equivalente ella è dunque la forza S alle forze P ℚ R; il che convenia dimostrare. Defin. 10

PROPOSIZIONE 3.

Se vi sieno alcune forze fra loro direttamente parziali, ed altre forze pure fra loro direttamente parziali ma direttamente contrarie alle prime, e le prime forze sieno uguali alle seconde; saranno tutte le forze fra loro in equilibrio.

Le forze H I sieno fra loro direttamente parziali, e sieno pure fra loro direttamente parziali l'altre forze K L M ma direttamente contrarie alle forze H I. Sia poi l'AB la comune direzione di tutte; e le forze H I tendano dall'A verso il B, e le forze K L M dal B verso l'A. Sieno in oltre le forze H I uguali alle forze K L M. Dico che sono fra loro in equilibrio tutte le forze H I K L M. Fig. 3

Imperocchè prendasi la forza ℚ uguale alle forze H I, e si applichi secondo la direzione AB sì che tenda dall'A verso il B, e alle stesse forze H I sia direttamente parziale. Similmente si prenda la forza R uguale alle forze K L M, e si applichi secondo la direzione AB, sì che tenda dal B verso l'A, e alle stesse forze K L M sia direttamente parziale. Dimand. 1

E poichè uguale è la forza ℚ e direttamente parziale alle forze H I, quindi sarà la forza ℚ equivalente alle forze H I. Per la stessa ragione la forza R è equivalente alle forze K L M. Di nuovo poichè si pongono le forze H I uguali alle forze K L M, e le forze H I sono uguali alla forza ℚ, e le forze K L M alla forza R, quindi sarà ancora la forza ℚ uguale alla forza R. Elleno sono poi ancora le forze ℚ R direttamente contrarie, perocchè sono applicate secondo la comune direzione AB e tendono da parti contrarie. Adunque la forza ℚ è in equilibrio colla forza R. Ma alla forza R sono equivalenti le forze K L M. La forza dunque ℚ è in equilibrio colle forze K L M. Alla forza Prop. 2 Comun. Conc. 1 per l'inversa Defin. 10

per l'inversa Defin. 10 poi ℚ sono equivalenti le forze *H I*. Elleno sono dunqu fra loro in equilibrio le forze *H I* colle forze *K L M*; i che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE 4.

Se alcune forze fra loro direttamente parziali sieno in equilibrio con altre forze fra loro direttamente parziali, saranno le prime forze uguali alle seconde, e ad esse direttamente contrarie.

Fig. 3 Sieno fra loro in equilibrio le forze *H I K L M*; delle quali alcune forze *H I* sieno fra loro direttamente parziali, e sieno applicate secondo la comune direzione *DB* e tendenti amendue dal *D* verso il *B*; e l'altre forze *K L M* sieno pure fra loro direttamente parziali, e sieno applicate secondo la comune direzione *AC* e tendenti tutte e tre dal *C* verso l'*A*. Dico che le forze *H I* sono uguali alle forze *K L M*, e ad esse direttamente contrarie.

Imperocchè prendasi la forza ℚ uguale alle forze *H I*, e si applichi secondo la direzione *DB* sì che tenda dal *D* verso il *B*, e sia alle forze *H I* direttamente parziale. Poi si prenda un'altra forza *R* uguale alle forze *K L M*, e si applichi secondo la direzione *AC*, sì che tenda dal *C* verso l'*A*, e sia alle forze *K L M* direttamente parziale.

Dimand. 1

Prop. 2 Equivalenti elleno sono adunque, la forza ℚ alle forze *H I*, e la forza *R* alle forze *K L M*. E poichè si pongono le forze *H I* in equilibrio colle forze *K L M*, e le forze *H I* sono equivalenti alla forza ℚ; quindi sarà ancora la forza ℚ in equilibrio colle forze *K L M*. Ma le forze *K L M* sono equivalenti alla forza *R*. Adunque ancora le forze ℚ *R* sono fra loro in equilibrio. Uguale ella è adunque la forza ℚ alla forza *R* e direttamente contraria; e però *ACDB* è una linea retta. Ma la forza ℚ è uguale alle forze *H I*, e la forza *R* alle forze *K L M*. Uguali sono adunque le forze *H I* alle forze *K L M* e direttamente contrarie; le une tenderanno dall'*A* verso il *B*, le altre dal *B* verso l'*A*; il che convenia dimostrare.

per l'inversa Defin. 10

Comun. Conc. 2

PROPOSIZIONE 5.

A due forze disuguali e direttamente contrarie è equivalente una forza uguale all eccesso in cui la maggiore supera la minore, direttamente parziale poi alla maggiore.

Sia la forza P disuguale alla forza Q e direttamente contraria, e sia maggiore la forza P. Sieno poi le forze P Q applicate secondo la comune direzione AB, e tendano, la forza P dall'A verso il B, e la forza Q dal B verso l'A. Fig. 4
Si applichi ora secondo la stessa direzione AB la forza S uguale all'eccesso in cui la forza P supera la Q; e tenda la forza S dall'A verso il B, cioè sia alla forza maggiore P direttamente parziale. Dico che equivalente è la forza S alle forze P Q. Dimand. 1

Imperocchè si applichi secondo la direzione AB un' altra forza R uguale alla forza S, ma tendente dal B verso l'A, sicchè sia la forza R alla forza Q direttamente parziale, e alle forze S P direttamente contraria. Dimand. 1

E poichè la forza S è uguale all'eccesso in cui la forza P supera la forza Q, quindi uguale sarà la forza P alle forze Q S; ma la forza S è uguale alla forza R. Adunque la forza P sarà uguale alle forze Q R. Ella è poi ancora la forza P direttamente contraria alle forze Q R. Sonovi dunque alcune forze direttamente parziali Q R ed un' altra forza P ad esse direttamente contraria, e le forze Q R sono uguali alla forza P. In equilibrio è adunque la forza P colle forze Q R; e però le forze P Q sono in equilibrio colla forza R. Ma ancora la forza S è in equilibrio colla forza R, perocchè sono uguali e direttamente contrarie; laonde sì le forze P Q che la forza S possono equilibrarsi colla medesima forza R. Equivalente ella è adunque la forza S alle forze P Q; il che convenia dimostrare. Prop. 3 Defin. 10

PROPOSIZIONE 6.

Se vi sieno alcune forze fra loro direttamente parziali ed altre forze pure fra loro direttamente parziali, ma direttamente contrarie alle prime; e le prime forze sieno maggio-

ri delle seconde; una forza uguale all' eccesso in cui le maggiori superano le minori, direttamente parziale poi alle maggiori, sarà equivalente a tutte le forze.

Fig. 5 Le forze *H I* sieno fra loro direttamente parziali, e sieno pure fra loro direttamente parziali le altre forze *K L M*, ma direttamente contrarie alle forze *H I*. Sia poi la retta *AB* la comune direzione di tutte, e tendano le forze *H I* dall' *A* verso il *B*, e le forze *K L M* dal *B* verso l' *A*. Sieno in oltre le forze *H I* disuguali alle forze *K L M*, e maggiori le *H I*. Si applichi poi secondo la direzione *AB* la forza *T* uguale all' eccesso in cui le forze *H I* superano le forze *K L M*, e tenda la forza *T* dall' *A* verso il *B* sì che alle forze maggiori *H I* sia direttamente parziale. Dico ch' equivalente è la forza *T* a tutte le forze *H I K L M*.

Dimand. 1 Imperocchè prendasi una forza ℚ uguale alla forza *T*, e sia essa applicata secondo la direzione *AB* e tendente dal *B* verso l' *A* sì che alle forze *K L M* sia direttamente parziale, e direttamente contraria alle forze *T H I*.

E poichè la forza *T* è uguale all' eccesso in cui le forze *H I* superano le forze *K L M*; quindi saranno le forze *H I* uguali alle forze *K L M T*. La forza *T* poi è uguale alla forza ℚ. Uguali sono adunque le forze *H I* alle forze *K L M* ℚ. E poichè sonovi alcune forze *H I* fra loro direttamente parziali, ed altre forze *K L M* ℚ pure fra loro direttamente parziali, ma direttamente contrarie alle prime *H I*, e le forze *H I* sono uguali alle forze *K L M* ℚ; quin-

Prop. 3 di equilibreranno le forze *H I* colle forze *K L M* ℚ, cioè le forze *H I K L M* si equilibreranno colla forza ℚ. Ma ancora la forza *T* si equilibra colla forza ℚ, perocchè sono esse uguali e direttamente contrarie. Equivalente ella è

Defin. 10 dunque la forza *T* alle forze *H I K L M*; il che conveniva dimostrare.

PROPOSIZIONE 7.

Se quante forze si vogliano sieno fra loro in equilibrio, le uguali e direttamente contrarie ad alcune di esse, una all' altra, saranno equivalenti alle forze rimanenti.

Fig. 6 Sieno fra loro in equilibrio le forze *P* ℚ *R M*, e sieno

applicate, la forza *P* secondo la direzione *AB* e tenda dall' *A* verso il *B*, la forza ℚ secondo la direzione *CD* e tenda dal *C* verso il *D*, la forza *R* secondo la direzione *EG* e tenda dal *G* verso l' *E*, e la forza *M* secondo la direzione *LI* e tenda dall' *L* verso l' *I*. Applichinsi poi le forze *T S* uguali e direttamente contrarie alle forze *R M*, una all'altra; cioè la forza *T* uguale alla forza *R* e tenda secondo la direzione *EG* dall' *E* verso il *G*, e la forza *S* uguale alla forza *M* e tenda secondo la direzione *JL* dall' *I* verso l' *L*. Dico ch' equivalenti sono le forze *T S* alle forze *P* ℚ.

Imperocchè poichè uguale e direttamente contraria è la forza *T* alla forza *R*; quindi sarà la forza *T* in equilibrio colla forza *R*. Per la stessa ragione la forza *S* è in equilibrio colla forza *R*. Ma se a forze fra loro in equilibrio aggiunganſi forze fra loro in equilibrio, tutte le forze sono pure fra loro in equilibrio. Adunque le forze *T S* sono in equilibrio colle forze *E M*. Si pongono poi ancora le forze *P* ℚ in equilibrio colle forze *E M*. Sonovi dunque alcune forze *T S* ed altre forze *P* ℚ che possono colle medesime forze equilibrarsi. Equivalenti elleno sono dunque le forze *T S* alle forze *P* ℚ; il che convenia dimostrare. Comun. Conc. 1 Comun. Conc. 3 Defin. 10

PROPOSIZIONE 8.

Non possono essere in equilibrio le forze medesime con una ed altra forza applicate secondo differenti direzioni.

Imperocchè, se fia possibile, le forze *P* ℚ applicate secondo le direzioni *AB CD* sieno in equilibrio coll' una e coll' altra forza *M R* applicate secondo differenti direzioni, la forza *M* secondo la direzione *KF* e tendente dal *K* verso l'*F*, e la forza *R* secondo la direzione *GH* e tendente dal *G* verso l' *H*. E prendasi la forza *N* uguale alla forza *M*, e si applichi la forza *N* sì che sia alla forza *M* direttamente contraria, cioè sia applicata secondo la direzione *FK* e tenda dall' *F* verso il *K*. Fig. 7 Dimand. 1

E poichè le forze *P* ℚ *M* sono fra loro in equilibrio, ed evvi una forza *N* uguale e direttamente contraria ad una di esse *M*; quindi equivalente sarà la forza *N* alle forze *P* ℚ. Di nuovo poichè le forze *P* ℚ *R* sono fra loro in equili- Prop. 7

per l'inverſa Defin. 10 brio, e le forze P Q ſi ſono dimoſtrate equivalenti alla forza N; quindi ſarà ancora la forza N in equilibrio colla forza R. Adunque la forza N alla forza R è uguale e direttamente contraria. Una comune direzione elleno hanno adunque le forze N R, e perciò la retta GH cade ſopra la retta FK; il che non ſi pone. Non poſſono dunque eſſere le medeſime forze P Q in equilibrio con una ed altra forza M R applicate ſecondo differenti direzioni; il che convenia dimoſtrare.

Comun. Conc. 2

COROLLARIO.

Quindi non poſſono una ed altra forza applicate ſecondo differenti direzioni alle medeſime forze eſſere equivalenti; imperocchè altrimenti nelle direzioni dell'una e dell'altra forza applicate forze ad eſſe uguali e direttamente contrarie, queſte ſarebbero in equilibrio colle forze medeſime; il che per la propoſizione non può eſſere.

PROPOSIZIONE 9.

Se tre forze ſieno fra loro in equilibrio, e le direzioni di due di eſſe ſi ſeghino in un punto, ancora la direzione della terza forza paſſerà pel punto medeſimo, e tutte e tre le direzioni ſaranno nello ſteſſo piano.

Fig. 8 Sieno fra loro in equilibrio le tre forze P Q R; e ſieno applicate, la forza P ſecondo la direzione AB e tenda dall'A verſo B, la forza Q ſecondo la direzione AC e tenda dall'A verſo il C, e la forza R ſecondo la direzione DE e tenda dal D verſo l'E. Le direzioni poi AB AC delle forze P Q ſeghinſi nel punto A. Dico che ancora la direzione DE della forza R paſſerà pel punto A, e che le tre direzioni AB AC DE ſono nello ſteſſo piano.

Imperocchè, ſe fia poſſibile, non paſſi la DE pel punto A.

Dimand. 2 E poichè le forze P Q ſono applicate ſecondo le direzioni AB AC ſegantili nel punto A; quindi ſaravvi certamente certa forza applicata ſecondo certa direzione paſſante pel punto A, la quale colle forze ſuddette P Q ſi equilibrerà. Sia queſta la forza M applicata ſecondo la direzione Al che

passi pel punto *A*, e tenda la forza *M* dall' *A* verso l' *I*. Le due forze adunque medesime *P Q* sono in equilibrio e coll' una e coll' altra delle forze *M R*, che secondo differenti direzioni *AI DE* sono applicate, perocchè passa l' *AI* e la *DE* no pel punto *A*. Ma ciò non può essere. Non può dunque la direzione *DE* non passare pel punto *A*. Egli è però necessario che passi per esso; ciò che convenia in primo luogo dimostrare. Prop. 8

Dico ora in secondo luogo che le tre direzioni *AB AC AE* sono tutte e tre costituite nello stesso piano.

Imperocchè se non è così, sieno, se fia possibile, le due *AB AC* in un piano e l'*AE* in un altro, e tirinsi le rette *BC CE EB*; sarà dunque *BECA* una piramide avente per base il triangolo *EBC*, vertice il punto *A*. Costruiscasi ora il prisma *BH*, la cui base sia il triangolo *BCE*, ed opposto ad esso il triangolo *GFH*; ed abbia in oltre il prisma la stessa altezza della piramide *BECA*: cioè la perpendicolare tirata dal punto *A* al piano per *EBC*. Egli è dunque manifesto che il punto *A* è nel piano per *GFH*. E poichè parallelo è il piano per *BCE* al piano per *GFH*, e nel piano per *BCE* sonovi i punti *B C E*; quindi i punti *B C E* cadono tutti e tre dalla stessa parte del piano per *GFH*; il punto *A* è poi nel piano stesso per *GFH*. Adunque le tendenze delle forze *P Q R*, cioè quella della forza *P* dall'*A* verso il *B*, quella della forza *Q* dall'*A* verso il *C*, e quella della forza *R* dall'*A* verso l'*E*, sono tutte volte dalla stessa parte del piano per *GFH*. Sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R*, le cui direzioni si segano nel punto *A*, e le cui tendenze sono tutte volte dalla stessa parte del piano per *GFH*; il che non può essere; non sono dunque le rette *AB AC* in un piano, e l'*AE* in un altro. Elleno sono adunque nello stesso piano le tre direzioni *AB AC AE*; il che convenia in secondo luogo dimostrare. Comun. Conc. 5

COROLLARIO.

Da ciò si rende manifesto, che se una forza sia equivalente a due forze le cui direzioni si seghino in un punto, ancora la direzione della forza equivalente passerà pel pun-

to medesimo, e tutte e tre le direzioni consisteranno nello stesso piano; imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 10.

Se due forze con una forza s' equilibrino, e le direzioni delle due forze si seghino in un punto; la terza forza non avrà una comune direzione nè coll' una, nè coll' altra delle prime forze; e la direzione di ciascuna delle tre forze segherà l' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti (a).

Fig. 9 Le due forze P Q colla forza R s' equilibrino. E sia applicata la forza P secondo la direzione EB, e la forza Q secondo la direzione DC; e seghinsi le direzioni EB DC nel punto A. Dico in prima che la forza R non può avere una comune direzione nè con una, nè coll' altra delle forze P Q.

Imperocchè abbiala, se sia possibile, colla forza P, cioè sia la retta EB comune direzione delle forze P R; e presi dall'una parte e dall'altra del punto A nella direzione EB i punti E B, e nella direzione DC i punti D C; tenda la forza P nella direzione EB dall' A verso il B, e la forza Q nella direzione DC dall' A verso il C. Pertanto la forza R applicata secondo la direzione EB tenderà o dall' A verso l' E, o dall' A verso il B, cioè sarà alla forza P contraria ovvero parziale direttamente; ed essendo direttamente contraria, o sarà uguale ad essa o disuguale. Sia uguale e direttamente contraria. La forza dunque R è in equilibrio e colla sola forza P e colle due forze P Q; il che è un assurdo. Non è dunque la forza R uguale e direttamente contraria alla forza P. Sia poi disuguale e direttamente contraria, e la forza P sia maggiore. E prendasi la forza S uguale all' eccesso in cui la forza P supera la forza R, e applichisi secondo la direzione EB sì che tenda dall' A verso il B e sia alla

(a) Tutti gli statici hanno ommesso questo Teorema, perchè nessuno si è avvisato di tener conto della tendenza delle forze.

alla forza maggiore *P* direttamente parziale. Equivalente ella è dunque la forza *S* alle forze *P R*. E poichè le forze *P R* si pongono in equilibrio colla forza ℚ, e alle forze *P R* è equivalente la forza *S*; quindi sarà la forza *S* in equilibrio colla forza ℚ. Elleno dunque sono uguali e direttamente contrarie le forze *S* ℚ, e però applicate secondo una comune direzione; il che è contro la posizione. Non è dunque la forza *R* diseguale e direttamente contraria alla forza *P*. Sia per fine la forza *R* alla forza *P* direttamente parziale. E presa la forza *S* uguale alle forze *R P* e ad esse direttamente parziale, si dimostrerà come sopra l'assurdo. La forza dunque *R* non può essere nè direttamente contraria, nè direttamente parziale alla forza *P*, cioè non può avere colla forza *P* una comune direzione. Allo stesso modo si proverà che la forza *R* non può avere una comune direzione colla forza ℚ. La forza dunque *R* non può avere una comune direzione nè con una, nè coll'altra delle forze *P* ℚ; il che convenia in primo luogo dimostrare. Prop. 5. Comun. Conc. 2.

Sia dunque la retta *GF* la direzione della forza *R*. Passerà certamente la direzione *GF* pel punto *A* ove si segano le direzioni *EB DC* delle forze *P* ℚ; e presi dall'una parte e dall'altra del punto *A* nella direzione *GF* i punti *G F*, tenda la forza *R* secondo la direzione *GF* dall'*A* verso l'*F*; e le forze *P* ℚ tendano come di sopra si è detto. Sarà dunque il *BAC* l'angolo alla tendenza delle due forze *P* ℚ, il *CAF* l'angolo alla tendenza delle due forze ℚ *R*, e l'*FAB* l'angolo alla tendenza delle due forze *R P*. Ora dico in secondo luogo che la direzione di ciascuna delle tre forze *P* ℚ *R* sega l'angolo alla tendenza delle due forze rimanenti. Prop. 9. Defin. 8.

Imperocchè, se fia possibile, non seghi la direzione *GF* della forza *R* l'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P* ℚ; e però nemmeno l'angolo *DAE* opposto al vertice all'angolo *BAC*. La *GF* poi non può cadere nè sopra l'una, nè sopra l'altra delle rette *EB DC*, perchè allora la forza *R* avrebbe una comune direzione o con una o coll'altra delle forze *P* ℚ, che non l'ha. La retta dunque *GF* segherà gli angoli *BAD CAE*, che sono accanto all'angolo *BAC*, e fra loro opposti al vertice, come nella figura. E dividansi co-

munque gli altri angoli *GAB EAF* opposti al vertice per mezzo dalla retta *IAH*. Egli è dunque evidente che tutti e tre i punti *B*, *C*, *F* cadono dalla stessa parte della retta *IAH*; ma il punto *A* è nella retta *IAH*. Adunque le tendenze delle forze *P* ℚ *R*, cioè quella della forza *P* dall' *A* verso il *B*, quella della forza ℚ dall' *A* verso il *C*, e quella della forza *R* dall' *A* verso l' *F*, sono tutte volte dalla stessa parte della retta *IAH*. Sono dunque fra loro in equilibrio le tre forze *P* ℚ *R*, le cui direzioni si segano nello stesso punto *A*, e le cui tendenze sono tutte volte dalla stessa parte della retta *IAH*; il che è un assurdo. Non sega dunque la direzione *GF* gli angoli *BAD CAE*. Ella non può poi cadere nè sopra l'una, nè sopra l'altra delle rette *FB DC*. Segherà dunque la *GF* l'angolo *BAC*, e ancora l'angolo *DAE* ad esso opposto al vertice, come nell'altra figura. Nella stessa guisa si proverà che la direzione *BE* della forza *P* sega l'angolo *CAF* alla tendenza delle forze ℚ *R*, e che la direzione *CD* della forza ℚ sega l'angolo *FAB* alla tendenza delle forze *R P*; il che convenia in secondo luogo dimostrare.

Comun. Conc. 5.

Fig. 10

COROLLARIO 1.

Quindi se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, ciascuna forza nella propria direzione tenderà dalla parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti.

COROLLARIO 2.

E' manifesto ancora che se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, i tre angoli alla tendenza al detto punto costituiti saranno insieme uguali a due retti.

COROLLARIO 3.

E' pure manifesto che se una forza sia equivalente a due forze, le cui direzioni seghinsi in un punto, non avrà la forza equivalente una comune direzione nè con una nè coll'

altra delle due forze; l'angolo alla loro tendenza sarà segato dalla direzione della forza equivalente; ma questa tenderà nella propria direzione dalla parte stessa colle due altre forze. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa sarà colle prime due forze in equilibrio.

PROPOSIZIONE 11.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto; e sieno uguali due di esse forze; la direzione della terza forza segherà per mezzo l' angolo alla tendenza delle forze uguali.

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze P Q R, e sieno Fig. 11
applicate, la forza P secondo la direzione GB, la forza Q secondo la direzione FC, e la forza R secondo la direzione DE; e seghinsi le direzioni GB FC DE nel punto A; e sia in oltre uguale la forza P alla forza Q. Presi poi dall' una e dall' altra parte del punto A nella direzione GB i punti G B, nella direzione FC i punti F C, e nella direzione DE i punti D E, pongasi tendere la forza P nella propria direzione GB dall' A verso il B, la forza Q nella propria direzione FC dall' A verso il C, e la forza R nella propria direzione DE dall' A verso il D. Sarà dunque il BAC l' angolo alla tendenza delle forze P Q, il CAD l' angolo alla tendenza delle forze Q R, e il DAB l' angolo alla tendenza delle forze R P; e la direzione ED della forza R segherà l' angolo BAC alla tendenza delle forze P Q. Dico Prop. 10.
che essa lo segherà per mezzo

Imperocchè poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze P Q R applicate secondo le direzioni GB FC DE seguntisi nell' A; quindi tenderà la forza R da parte contraria a Coroll. 1. Prop. 10.
quella cui tendono le forze P Q. Adunque condotta qualsivoglia retta MAN che seghi gli angoli FAB CAG, che sono accanto all' angolo BAC e fra loro opposti al vertice, cadranno i punti B C dalla stessa parte BC della retta MAN, e il punto D dalla parte contraria FG; e però sono dalla stessa parte i tre punti B E C, e dalla parte contraria gli altri tre F D G. Pertanto se non è uguale l' angolo BAE

all'angolo *EAC*, seghisi l'angolo *BAC* colla retta *AK*, sicchè uguale all'angolo *EAC* sia l'angolo *BAK*. Cadrà ancora il punto *K* dalla parte *BEC* della retta *MAN*. Applichinsi ora nella direzione *FC* uguale alla forza *P* la forza *H*, che tenda dall'*A* verso l'*F*, e nella direzione *GB* uguale alla forza ℚ la forza *I*, che tenda dall'*A* verso il *G*, e nella direzione *AK* uguale alla forza *R* la forza *S* che tenda dall'*A* verso il *K*. Sarà dunque l'*FAG* l'angolo alla tendenza delle forze *H I*, il *GAK* l'angolo alla tendenza delle forze *I S*, ed il *KAF* l'angolo alla tendenza delle forze *S H*. E poichè uguale è la forza *P* all'una e all'altra delle forze ℚ *H*, sarà la forza ℚ uguale alla forza *H*; e sono ancora direttamente contrarie; perocchè essendo applicate secondo la comune direzione *FC*, la forza ℚ tende dall'*A* verso il *C*, mentre l'altra forza *H* tende dall'*A* verso l'*F*. Elleno sono dunque fra loro in equilibrio le forze ℚ *H*. Allo stesso modo si proverà che sono fra loro in equilibrio le forze *P I*. Di nuovo perchè uguale è l'angolo *BAK* all'angolo *EAC*, e l'angolo *EAC* all'angolo opposto al vertice *FAD*; quindi uguale sarà l'angolo *FAD* all'angolo *BAK*. Pongasi comune l'angolo *FAB*. Uguale egli è dunque tutto l'angolo *DAB* a tutto l'angolo *KAF*. In oltre essendo uguale l'angolo *EAC* all'angolo *BAK*, tolto l'angolo comune *EAK*; sarà l'angolo rimanente *KAC* uguale all'angolo rimanente *BAE*. Ma uguale è l'angolo *BAE* all'angolo *DAG* opposto al vertice. Adunque ancora l'angolo *DAG* è uguale all'angolo *KAC*. Pongasi comune l'angolo *GAC*. Tutto dunque l'angolo *CAD* è uguale a tutto l'angolo *GAK*. L'angolo poi *BAC* è uguale all'angolo opposto al vertice *FAG*. Sonovi dunque fra loro in equilibrio tre forze *P* ℚ *R* applicate secondo le direzioni *GB FC DE* segantisi nel punto *A*; e le *H I S* sono tre altre forze uguali alle forze *P* ℚ *R*, una all'altra, cioè la forza *H* alla forza *P*, la forza *I* alla forza ℚ, e la forza *S* alla forza *R*, le quali tre forze sono applicate secondo tre direzioni *FC GB AK* pure segantisi nel punto *A*; e si è dimostrato l'angolo *FAG* alla tendenza delle forze *H I* uguale all'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P* ℚ ad esse uguali, l'angolo *GAK* alla tendenza delle forze *I S* uguale all'angolo *CAD* alla tendenza delle forze ℚ *R* ad esse ugua-

li, e l'angolo *KAF* alla tendenza delle forze *S H* uguale all'angolo *DAB* alla tendenza delle forze *R P* ad esse uguali. Elleno dunque sono ancora fra loro in equilibrio le forze *H I S*; per conseguenza tutte le sei forze *P Q R H I S* sono fra loro in equilibrio: delle quali si è dimostrata la forza *P* in equilibrio colla forza *I*, e la forza *Q* colla forza *H*. La forza dunque rimanente *R* è in equilibrio colla forza rimanente *S*; e perciò le forze *R P* sono direttamente contrarie, ed avranno una comune direzione. Retta è dunque la linea *DAK*. Ma è retta ancora la *DAE*. Quindi le rette *DAK DAE* avranno il comun segamento *DA*; il che è un assurdo. Non è dunque l'angolo *BAE* disuguale all'angolo *EAC*. e però sarà ad esso uguale. Laonde l'angolo *BAC* è diviso per mezzo dalla retta *ED*; il che convenia dimostrare.

Dimand. 3. Comun. Conc. 3. Comun. Conc. 4.

COROLLARIO.

Quindi se una forza sia equivalente a due forze fra loro uguali, e le direzioni di tutte e tre si seghino in un punto; la direzione della forza equivalente segherà per mezzo l'angolo alla tendenza delle forze uguali; imperciocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle due prime forze si equilibrerà (*a*).

PROPOSIZIONE 12.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e sieno disuguali due qualunque di esse

---

(*a*) Questo Corollario contiene una domanda di *Daniel Bernoulli*, che ei esprime così. *Potentia simplex, quæ æquivalet duabus potentiis æqualibus, æqualiter versus utramque inclinat, id est, ipsius directio secat bifariam angulum comprehensum inter directiones duarum potentiarum.* Ma io dirò qui di nuovo, che è superfluo richiedere quello che si può dimostrare. Poi di passaggio osserverò che *Bernuolli* non si spiega abbastanza quando asserisce che la direzione della forza equivalente debbe segar per mezzo l'angolo compreso fra le direzioni delle due potenze, poichè queste due direzioni segandoli fanno quattro angoli. Quale di questi quattro è quello che si ha da intendere segato per mezzo dalla direzione della forza equivalente? La mia settima definizione facilita molto il modo di enunciare questa vogliamola domanda o propositione.

forze, la direzione della terza forza segherà l' angolo alla tendenza delle due prime forze, in modo che alla direzione della forza maggiore corrisponderà il minore segamento.

Fig. 12 Sieno fra loro in equilibrio le tre forze *PT* ℚ *R* applicate secondo le direzioni *AB AC AD* segantisi nel punto *A*; e tendano, la forza *PT* nella propria direzione *AB* dall' *A* verso il *B*, la forza ℚ nella propria direzione *AC* dall' *A* verso il *C*, e la forza *R* nella propria direzione *AD* dall' *A* verso il *D*. E sia disuguale la forza *PT* alla forza ℚ, e di essa maggiore. Adunque la direzione *DA* (prolungata se occorre) della forza *R* segherà l' angolo *BAC* alla tendenza
Prop. 10. delle forze *PT* ℚ. Dico che lo segherà in modo che il segamento *BAE*, che corrisponde alla direzione *AB* della forza maggiore *PT*, sarà minore del segamento *EAC*.

Imperocchè poichè la forza *PT* è maggiore della forza ℚ,
Dimand. 1. quindi intendasi divisa la forza *PT* nelle forze *PS ST*, delle quali la forza *PS* sia uguale alla forza ℚ. E perchè le forze *PT* ℚ sono in equilibrio colla forza *R*, non saranno le forze *PS* ℚ in equilibrio colla forza *R*. Di nuovo poichè le forze *PS* ℚ sono applicate secondo le direzioni
Dimand. 2. *AB AC* segantisi nel punto *A*; quindi vi sarà certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto *A*, che con esse forze *PS* ℚ si equilibrerà. Sia la *H* questa forza; la retta *FG* che passa pel punto *A* sia la sua direzione; e presi dall' una e dall' altra parte del punto *A* nella *FG* i due punti *F G*, tenda la forza *H* nella propria direzione *FG* dall' *A* verso l' *F*. Si applichi finalmente secondo la stessa direzione *FG* la forza *I* uguale alla forza *H* e direttamente contraria, sì che tenda dall' *A* verso il *G*. Egli è manifesto che il punto *G* cadrà dalla stessa parte de' punti *B C*, e il punto *F* da parte contraria. E poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze *PS* ℚ *H*,
Prop. 11. delle quali la forza *PS* è uguale alla forza ℚ; quindi la direzione *FAG* segherà per mezzo l' angolo *BAC* alla tendenza delle forze *PS* ℚ; e però sarà l' angolo *BAG* la metà dell' angolo *BAC*. Oltre a ciò sarà la forza *I*, che è uguale e direttamente contraria alla forza *H*, equivalente alle forze *PS* ℚ. Di nuovo poichè sono fra loro in equilibrio le forze *R PT* ℚ; ed equivalente è la forza *PT* alle forze

PS ST; quindi saranno ancora fra loro in equilibrio le forze *R PS ST* ℚ. Ma si è dimostrata la forza *I* equivalente alle forze *PS* ℚ. In equilibrio sono adunque ancora le forze *R ST I* applicate secondo le direzioni *AD AB FG* segantisi nel punto *A*, e tendenti, la forza *R* dall' *A* verso il *D*, la forza *ST* dall' *A* verso il *B*, e la forza *I* dall' *A* verso il *G*. Adunque la direzione *DAE* della forza *R* seghera l' angolo *BAG* alla tendenza delle due forze *ST* ℚ. Minore egli è dunque l' angolo *BAE* dell' angolo *BAG*, ossia della metà dell' angolo *BAC*; laonde l' angolo rimanente *EAC* sarà di essa metà maggiore. L' angolo dunque *BAE* è minore dell' angolo *EAC*; il che convenia dimostrare. Comun. Conc. 4. Prop. 10.

COROLLARIO.

E però se una forza sia equivalente a due forze fra loro disuguali, e le direzioni di tutte e tre si seghino in un punto; la direzione della forza equivalente segherà l' angolo alla tendenza delle forze disuguali, in modo che alla direzione della forza maggiore corrisponderà il minore segamento; imperocchè applicata nella direzione della forza equivalente altra forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 13.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e da un punto preso nella direzione di una si conducano linee rette parallele alle direzioni dell' altre due forze, onde costituire un parallelogrammo, ed una delle due forze sia uguale all' altra; ancora il lato del parallelogrammo, che giace sulla direzione di una, sarà uguale al lato che giace sulla direzione dell' altra; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Le direzioni *AF AG AD* delle forze *P* ℚ *R* fra loro in equilibrio si seghino nel punto *A*; e tenda la forza *P* dall' *A* verso l' *F*, la forza ℚ dall' *A* verso il *G*, e la forza *R* dall' *A* verso il *D*. Saranno gli *FAG GAD DAF* gli angoli alla tendenza di due a due delle forze *P* ℚ *R*; e la direzione Fig. 13 e 14

AD della forza *R* segherà l'angolo *FAG* alla tendenza delle due forze *P* ℚ. Prendasi nella *AD* un punto *E*, da cui si tirino parallele alle direzioni *AF AG* le rette *EC EB* onde costituire il parallelogrammo *EBAC*. Dico che se uguale è la forza *P* alla forza ℚ, uguale sarà ancora il lato *AB* al lato *AC*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Imperocchè sia uguale la forza *P* alla forza ℚ. Dico che il lato *AB* è uguale al lato *AC*. Poichè essendovi tre forze *P* ℚ *R* applicate secondo le direzioni *AF AG AD* segantisi nel punto *A*, delle quali uguale è la forza *P* alla forza ℚ;
Prop. 11. quindi la direzione della terza forza ℚ segherà per mezzo l'angolo *FAG* alla tendenza delle forze *P* ℚ. L'angolo dunque *BAE* è uguale all'angolo *EAC*. Ma uguale è l'angolo *EAC* all'angolo alterno *AEB*. E però sarà l'angolo *BAE* uguale all'angolo *AEB*; laonde uguale al lato *AB* è il lato *BE*. Ma il lato *BE* è uguale al lato *AC*. Adunque ancora il lato *AB* sarà uguale al lato *AC*. Quindi se uguale è la forza *P* alla forza ℚ, uguale sarà pure il lato *AB* al lato *AC*.

Sia ora la forza *P* maggiore della forza ℚ. Dico di nuovo che maggiore è ancora il lato *AB* del lato *AC*. Poichè essendovi tre forze *P* ℚ *R* applicate secondo le direzioni *AF AG AD* segantisi nel punto *A*, delle quali maggiore è la forza *P* della forza ℚ; quindi la direzione della terza forza *R* segherà per modo l'angolo *FAG* alla tendenza delle forze *P* ℚ, che il segamento corrispondente alla direzione *AF* della forza maggiore *P* sarà minore del segamento rimanente. L'angolo adunque *BAE* è minore dell angolo *EAC*. Ma l'angolo *EAC* è uguale all'angolo alterno *AEB*. Adunque ancora l'angolo *BAE* è minore dell'angolo *AEB*; e perciò minore il lato *BE*, cioè il lato *AC*, del lato *AB*; laonde il lato *AB* sarà maggiore del lato *AC*. Quindi se la forza *P* sia maggiore della forza ℚ, maggiore sarà ancora il lato *AB* del lato *AC*. Allo stesso modo proverassi che se minore sia la forza *P* della forza ℚ, minore sarà ancora il lato *AB* del lato *AC*. Si è poi dimostrato che se uguale è la forza *P* alla forza ℚ, uguale è ancora il lato *AB* al lato *AC*. Se adunque la forza *P* sia uguale alla forza ℚ, uguale è ancora il lato *AB* al lato *AC*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore; il che convenia dimostrare.

PROPOSIZIONE

PROPOSIZIONE 14.

Se due forze le cui direzioni si segano in un punto sieno in equilibrio con due forze le cui direzioni si segano in altro punto; e le prime forze sieno contrarie alle seconde, una all' altra; e tutte e quattro le direzioni cadano nel piano medesimo per costituire un parallelogrammo; la linea retta, che giunge i punti dei detti segamenti, segherà gli angoli alla tendenza delle prime e delle seconde forze; e se in oltre una delle prime o delle seconde forze è uguale all' altra, ancora il lato del parallelogrammo giacente sulla direzione di una sarà uguale al lato giacente sulla direzione dell' altra; se maggiore, maggiore; e se minore, minore.

Le due forze P Q applicate secondo le direzioni AB AD che si segano nel punto A sieno in equilibrio colle due forze R S applicate secondo le direzioni CF CE, che si segano nel punto C. Sieno poi le forze P Q contrarie alle forze R S, una all' altra, cioè la forza P alla forza R, e la forza Q alla forza S; onde avvenga che sia parallela la direzione AB alla direzione CF, e la direzione AD alla direzione CE; ma la forza P tenda dall' A verso il B, la forza Q dall' A verso il D, la forza R dal C verso l' F, e la forza S dal C verso l' E. Cadano in oltre le quattro direzioni AB AD CF CE nel medesimo piano, e costituiscano il parallelogrammo $AICH$. Dico che la retta che unisce i punti A C sega l' angolo BAD alla tendenza delle forze P Q, e ancora l' angolo ECF alla tendenza delle forze R S; e che se uguale è la forza P alla forza Q, uguale sarà ancora il lato AI al lato AH; se maggiore, maggiore; e se minore, minore. Fig. 15 16

Imperocchè poichè le forze P Q sono applicate secondo le direzioni AB AD segantisi nel punto A; quindi vi sarà certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto A, la quale colle forze P Q si equilibrerà. Parimenti poichè le due forze R S sono applicate secondo le direzioni CF CE segantisi nel punto C; quindi vi sarà certa forza applicata secondo certa direzione passante pel punto C, che colle forze R S si equilibrerà. Sia la T la forza, che ap- Dimand. 4 Dimand. 2

plicata secondo la direzione *AG* passante pel punto *A* colle forze *P* ℚ si equilibri; e la *V* sia la forza che applicata secondo la direzione *CK* passante pel punto *C* colle forze *R S* si equilibri. E poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze *P* ℚ *T*, le cui direzioni *AB AD AG* si segano nel punto *A*; segherà la direzione *AG* della forza *T* l' angolo *BAC* alla tendenza delle due forze *P* ℚ. Allo stesso modo si proverà che la direzione *CK* della forza *V* segherà l' angolo *ECF* alla tendenza delle due forze *R S*. Ora perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze *P* ℚ *T*, e sono ancora fra loro in equilibrio le altre tre forze *R S V*; quindi saranno fra loro in equilibrio le sei forze *P* ℚ *T R S V*; delle quali si pongono fra loro in equilibrio le quattro forze *P* ℚ *R S*. Elleno sono adunque fra loro in equilibrio ancora le forze rimanenti *T V*; e però le forza *T* è uguale e direttamente contraria alla forza *V*; laonde avranno esse una comune direzione; i punti adunque *A G C K* sono nella stessa linea retta, cioè in quella che giunge i punti *A C*; e però la retta che giunge i punti *A C* segherà l' uno e l' altro degli angoli *BAD ECF*. Di nuovo perchè le direzioni *AB AD AG* delle tre forze *P* ℚ *T* si segano nel punto *A*, e dal punto *C* preso nella direzione *AG* della forza *T* si sono condotte le linee rette *CF CE* parallele alle direzioni *AB AD* dell' altre due forze *P* ℚ, e si è costituito il parallelogrammo *AICH*; quindi se uguale è la forza *P* alla forza ℚ, uguale ancora sarà il lato *AI* al lato *AH*; se maggiore, maggiore; e se minore, minore; il che convenia dimostrare.

Prop. 10

Comun. Conc. 3

Comun. Conc. 4

Comun. Conc. 2

Prop. 13

PROPOSIZIONE 15.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio seghinsi in un punto, e da un punto preso in una si conducano rette parallele all' altre due direzioni, onde costituire un parallelogrammo; le tre forze saranno fra loro in proporzionalità ordinata coi lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sara omologa alla retta che giace sulla propria direzione.

Fig. 17 18 Le direzioni *Ae Aa Ab* delle tre forze *X P Z* fra loro in

equilibrio seghinsi nel punto *A*; e la forza *X* tenda dall' *A* verso l' *e*, la forza *P* dall' *A* verso l' *a*, e la forza *Z* dall' *A* verso il *b*, sicchè gli *eAa aAb bAe* tieno gli angoli alla tendenza di due a due delle dette forze. Nella direzione poi *Ae*, che segherà l'angolo *aAb* alla tendenza delle forze *P Z*, prendasi il punto *D*, da cui parallele all' altre due direzioni *Aa Ab* tirinsi le rette *DC DB*, onde costituire il parallelogrammo *ABDC*. Dico, che le forze *X P Z* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*, e che ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione; cioè la forza *X* omologa alla retta *AD*, la forza *P* omologa alla retta *AB*, e la forza *Z* omologa alla retta *AC*. Prop. 10

Poichè prendansi della forza *P* e della retta *AB* le ugualmente moltiplici, cioè la forza *QR* e la retta *AE*, e della forza *Z* e della retta *AC* prendansi altre in qualsivoglia modo ugualmente moltiplici, cioè la forza *STV*, e la retta *AG*; e si pongano le rette *AE AG* sopra i lati *AB AC* del parallelogrammo *ABDC*. E perchè quantuplice è la forza *QR* della forza *P*, tantuplice è la retta *AE* della retta *AB*; quindi dividasi la forza *QR* nelle forze *Q R* uguali alla forza *P*, e la retta *AE* nelle rette *AB BE* uguali alla retta *AB*. Uguale ella è dunque la moltitudine delle forze *Q R* alla moltitudine delle rette *AB BE*. Similmente perchè quantuplice è la forza *STV* della forza *Z*, tantuplice è la retta *AG* della retta *AC*; quindi dividasi la forza *STV* nelle forze *S T V* uguali alla forza *Z*, e la retta *AG* nelle rette *AC CF FG* uguali alla retta *AC*. Uguale sarà dunque la moltitudine delle forze *S T V* alla moltitudine delle rette *AC CF FG*. Ora si compiano i parallelogrammi *AK AH CI FK AO BK*. E perchè sono uguali fra loro le rette *AC CF FG*, saranno pure uguali fra loro le rette *EH HI IK*. La retta adunque *EI* è doppia della *EH*, ossia della *BD*. Ma ancora la *AE* è doppia della *AB*; laonde egli è come la *EI* alla *BD*, così la *EA* alla *AB*. La retta dunque *AD* passa pel punto *I*. Tirinsi le rette *BH CK FO*, e protragganſi, se così piaccia, da una parte e dall' altra. E poichè egli è come la *EB* alla *BA* così la *EH* alla *HI*; quindi parallela alla retta *AI* è la retta *BH*. Allo stesso modo si proverà che parallela alla *CK* è la *FO*. La retta poi *AI* è pa-

rallela alla *CK*, perchè esse unisconо le linee rette *AC IK* fra loro uguali e parallele. Elleno sono adunque tutte fra
Dim and. 1 loro parallele la rette *BH AI CK FO*. Pertanto applichinsi secondo le direzioni *Aa Ab* le forze *QR STV*, cioè secondo la direzione *Aa* la forza *QR* direttamente parziale alla forza *P*, e secondo la direzione *Ab* la forza *STV* direttamente parziale alla forza *Z*. Similmente si applichino altre forze secondo le direzioni *KG KE*, cioè secondo la direzione *KG* la forza *qr* uguale e contraria alla forza *RQ*, e secondo la direzione *KE* la forza *stu* uguale e contraria alla forza *STV*, e intendansi divise, la forza *qr* nelle forze *q r* uguali di moltitudine e di grandezza alle forze *Q R*, e la forza *stu* nelle forze *s t u* uguali di moltitudine e di grandezza alle forze *S T V*. Indi secondo la direzione *BO* si applichino le forze *d* Δ una parziale, l'altra contraria, ma amendue uguali alla forza *Z*, vale a dire la forza *d* uguale e parziale alla forza *Z*, e ad essa uguale e contraria la forza Δ. Si applichino ancora secondo la direzione *CH* le forze *l L*, e secondo la direzione *FI* le forze *y Y* tutte uguali alla forza *P*, ma ad essa sieno parziali le forze *l y* e contrarie le forze *L Y*. Per fine si applichi secondo la direzione *BH* le forze *M m*, secondo la direzione *CK* le forze *N n*, secondo la direzione *FO* le forze Γ *g*, tutte uguali alla forza *X*; ma ad essa sieno parziali le forze *M N* Γ e contrarie le forze *m n g*; la forza poi *x* sia uguale e direttamente contraria alla forza medesima *X*.

E poichè sono applicate la forza *M* secondo la direzione *BH*, e la forza *Q* secondo la direzione *Ba*, e la forza *d* secondo la direzione *BO*; quindi sono le *M Q d* tre forze applicate secondo tre direzioni *BH Ba BO* segantisi nel *B*. Tre altre forze sono ancora le *X P Z* applicate secondo le tre direzioni *Ae Aa Ab* segantisi nel punto *A*, le quali sono uguali alle prime forze *M Q d* l'una all'altra, cioè la forza *X* alla forza *M*, la forza *P* alla forza *Q*, e la forza *Z* alla forza *d*. Oltre a ciò parziale essendo la forza *X* alla forza *M*, e la forza *Z* alla forza *d*, tenderanno le forze *X M* nelle direzioni parallele *Ae BH*, e le forze *Z d* nelle direzioni parallele *Ab BO* dalla stessa parte della retta *AB*, che unisce i punti *A B* delle sezioni già dette. Tendendo adunque nella direzione *Ae* la forza *X*

dall' *A* verso l' *e*, tenderà nella direzione *BH* la forza *M* dal *B* verso l' *b*; così tendendo nella direzione *Ab* la forza *Z* dall' *A* verso il *b*, tenderà nella direzione *BO* la forza *d* dal *B* verso il *p*. Le forze poi direttamente parziali *P* ℚ tendono dalla stessa parte nella comune direzione *Aa*, dall'*A* verso l' *a*. Uguale egli è dunque l' angolo *eAa* alla tendenza delle forze *X P* all' angolo *bBa* alla tendenza delle forze *M* ℚ, e così l' angolo *aAb* alla tendenza delle forze *P Z* all' angolo *aBp* alla tendenza delle forze ℚ *d*; perocchè cadendo una retta sopra rette parallele, l' angolo esteriore è uguale all' angolo interiore ed opposto. L' angolo poi ancora *bAe* alla tendenza delle forze *Z X* è uguale all' angolo *pBb* alla tendenza delle forze *d M*, perocchè se due linee che si toccano sieno parallele a due altre linee che si toccano, comprendono angoli uguali. Quindi essendo fra loro in equilibrio le tre forze *X P Z*, saranno ancora fra Dimand. 3
loro in equilibrio le tre forze *M* ℚ *d*. Per la stessa ragione sono fra loro in equilibrio le tre forze *N l T* applicate secondo le direzioni *CK CH Cb* segantisi nel *C*; e così ancora le tre forze Γ *y V* applicate secondo le direzioni *FO FI Fb* segantisi nell' *F*. E perchè sono in equilibrio le forze *X P Z*, e alle *P Z* sono uguali e direttamente parziali le forze *R S*: quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le forze *X R S*. Per il che essendo in equilibrio la forza *M* colle forze ℚ *d*, la forza *X* colle forze *R S*, la forza *N* colle forze *l T*, e la forza Γ colle forze *y V*; quindi saran- Comun.
no ancora in equilibrio le forze *M X N* Γ colle forze ℚ *d*, Conc. 3
R S, *l T*, *y V*. Ma le forze ℚ *R* fanno la forza ℚ*R*, e le forze *S T V* la forza *STV*. Adunque le forze *M X N* Γ sono in equilibrio colle forze ℚ*R STV d l y*; le forze poi *m x n g* sono uguali e direttamente contrarie alle forze *M X N* Γ. Equivalenti sono adunque le forze *m x n g* al- Prep. 7
le forze ℚ*R STV d l y*. Di nuovo *m L s* sono tre forze applicate secondo le tre direzioni *BH HC HE* segantisi nel punto *H*, e le *X P Z* sono tre altre forze applicate secondo le tre direzioni *Ae Aa Ab* segantisi nel punto *A*, le quali sono uguali alle prime tre forze *m L s*, una all'altra, cioè la forza *X* alla forza *m*, la forza *P* alla forza *L*, e la forza *Z* alla forza *s*, oltre a ciò (uniti i punti *A H* del-

le sezioni già dette colla retta *AH*) contraria essendo la forza *X* alla forza *m*, la forza *P* alla forza *L*, e la forza *Z* alla forza *s*, tenderanno le forze *X m* nelle direzioni parallele *Ae BH*, le forze *P L* nelle direzioni parallele *Aa HC*, e le forze *Z s* nelle direzioni parallele *Ab HE* da parti contrarie della retta stessa *AH*. Tendendo adunque la forza *x* dall' *A* verso l' *e*, tenderà la forza *m* dall' *H* verso il Ψ; così tendendo la forza *P* dall' *A* verso l' *a*, tenderà la forza *L* dall' *H* verso il Π; e tendendo la forza *Z* dall' *A* verso il *b*, tenderà la forza *s* dall' *H* verso il Σ. Ma se due rette che si toccano sieno parallele a due rette che si toccano, comprendono angoli uguali. Gli angoli adunque *eAa aAb bAe* alla tendenza di due a due delle forze *X P Z* sono uguali agli angoli ΨΗΠ ΠΗΣ ΣΗΨ alla tendenza di due a due delle forze *m L s*. Quindi essendo fra loro in equilibrio le forze *X P Z*; saranno pure fra loro in equilibrio le forze *m L s*. Allo stesso modo proverassi essere fra loro in equilibrio le forze *x ϒ t* applicate secondo le direzioni *AI IF IE* segantisi nell' *I*; e così le forze *n q u* applicate secondo le direzioni *CK KG KE* segantisi nel *K*; e le tre forze *g r* Δ applicate secondo le direzioni *OF OG OB* segantisi nell' *O*. Per il che essendo in equilibrio la forza *m* colle forze *L s*, la forza *x* colle forze *ϒ t*, la forza *n* colle forze *q u*, e la forza *g* colle forze *r* Δ; quindi saranno in equilibrio le forze *m x n g* colle forze *L s*, *ϒ t*, *q u*, *r* Δ. Ma le forze *s t u* fanno la forza *stu*, e le forze *q r* la forza *qr*. In equilibrio sono dunque le forze *m x n g* colle forze *qr stu* Δ *L ϒ*. Si è poi di sopra dimostrato che le forze *m x n g* sono equivalenti alle forze *QR STV d l y*. Elleno sono dunque in equilibrio le forze *QR STV d l y* colle forze *qr stu* Δ *L ϒ*; delle quali sono fra loro in equilibrio la forza *d* colla forza Δ, la forza *l* colla forza *L*, e la forza *y* colla forza *ϒ*; perocchè sono uguali e contrarie. Laonde le forze rimanenti *QR STV* sono in equilibrio colle forze rimanenti *qr stu*. Sonovi dunque due forze *QR STV* applicate secondo le direzioni *Aa Ab* che si segano nel punto *A* in equilibrio colle forze *qr stu* applicate secondo le direzioni *KG KE* che si segano nel punto *K*; e le prime forze sono contrarie alle

Dimand. 3

Comun. Conc. 3

Defin. 10

Comun. Conc. 4.

seconde, una all'altra, cioè la forza $\mathcal{Q}R$ alla forza qr, e la forza STV alla forza stu; e tutte e quattro le direzioni Aa Ab KG KE cadono nello stesso piano e costituiscono il parallelogrammo $AEKG$. Quindi se uguale è la forza $\mathcal{Q}R$ alla forza STV, uguale ancora sarà il lato AE al lato AG; se maggiore, maggiore; e se minore, minore. Sonovi pertanto quattro grandezze, cioè le due forze P Z e le due rette AB AC; e della forza P e della retta AB si sono prese le ugualmente moltiplici, la forza $\mathcal{Q}R$ e la retta AE; e della forza Z e della retta AC si sono prese altre in qualsivoglia modo ugualmente moltiplici, la forza STV e la retta AG; e si è dimostrato che se la forza $\mathcal{Q}R$ è maggiore della forza STV, maggiore ancora è la retta AE della retta AG; se uguale, uguale; e se minore, minore. Egli è dunque come la forza $\mathcal{Q}R$ alla forza STV, così la retta AB alla retta AC (a). Prop. 14. Euclide Defin. 5 Lib. 5.

Protragganſi ora, se occorre, le rette Aa CK finchè s'incontrino nel punto Φ, e dal punto Φ parallela alla AC tirisi la $\Phi\Theta$ onde compiere il parallelogrammo $AC\Phi\Theta$. Uguale sarà la $A\Theta$ alla AD, perocchè uguale e simile è il triangolo $A\Phi\Theta$ al triangolo ABD. Nello stesso modo poi di prima dimostreraſſi, che egli è come la forza Z alla forza X, così la retta AC alla retta $A\Theta$, ovvero alla retta AD. Per il che essendosi dimostrato che come la forza P alla forza Z, così è la retta AB alla retta AC, e come la forza Z alla forza X, così la retta AC alla retta AD; quindi per uguaglianza di proporzione ordinata egli sarà ancora come la forza P alla forza X, così la retta AB alla retta AD. Le forze adunque X P Z sono in proporzionalità ordinata colle rette AD AB AC; e ciascuna forza è omologa alla retta, che giace sulla propria direzione; il che convenia dimostrare.

(a) Molti si sono scagliati contro questa definizione d'Euclide da me citata, sostenendo ch'essa è piuttosto proposizione che definizione. Senza entrare in tale esame osserverò solamente, che siccome presa essa o sotto uno o sotto l'altro aspetto non contiene meno una verità indubitabile, così sarà esatta la dimostrazione del mio teorema a tale verità appoggiandosi.

COROLLARIO 1.

E perchè le forze *X P Z* ſono in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*, e uguale alla *AC* è la *BD*; quindi ſaranno in proporzionalità ordinata le forze *X P Z* co' lati *AD AB BD* del triangolo *ABD*. Ma due lati di un triangolo, comunque preſi, ſono maggiori del rimanente. Adunque ancora due delle forze *X P Z*, comunque preſe, ſono maggiori della forza rimanente: laonde ſe tre forze le cui direzioni ſi ſegano in un punto ſieno fra loro in equilibrio, due delle forze, comunque preſe, ſaranno maggiori della rimanente.

COROLLARIO 2.

Da ciò ſi ſa manifeſto ancora che ſe una forza ſia equivalente a due forze; e le direzioni di tutte e tre ſi ſeghino in un punto; e da un punto preſo in una direzione ſi conducano linee rette parallele all' altre due direzioni onde coſtituire un parallelogrammo; la forza equivalente e le due altre forze ſaranno in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo medeſimo, e ciaſcuna forza ſarà omologa alla retta che giace ſulla propria direzione; ed in oltre due forze comunque preſe ſaranno maggiori della forza rimanente. Imperocchè applicata ſecondo la direzione della forza equivalente una forza ad eſſa uguale e direttamente contraria; queſta colle prime due forze ſi equilibrerà.

PROPOSIZIONE 16.

Se le direzioni di tre forze ſi ſeghino in un punto, e ſieno coſtituite nello ſteſſo piano; e ciaſcuna forza tenda nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti; e da un punto preſo in una direzione condotte linee rette parallele all' altre due direzioni onde coſtituire un parallelogrammo, ſieno le tre forze in proporzionalità ordinata coi lati e la diagonale del parallelogrammo medeſimo,

mo, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione, saranno le tre forze fra loro in equilibrio (a).

Le direzioni *AE AK AL* delle forze *R P Q* seghinsi nel punto *A*, e sieno nello stesso piano costituite. Tenda poi ciascuna delle forze *R P Q* nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti; la forza *R* tenda dall' *A* verso l'*E*, la forza *P* dall'*A* verso il *K*, e la forza *Q* dall' *A* verso l'*L*; e da un punto *D* preso nella direzione *EA* condotte le rette *DC DB* parallele alle rette *AK AL* onde costituire il parallelogrammo *ABCD*, sieno le forze *R P Q* in proporzionalità ordinata colle rette *AD AB AC*, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Dico che sono fra loro in equilibrio le tre forze *R P Q*. Fig. 19 20

Imperocchè poichè le due forze *P Q* sono applicate secondo le direzioni *AK AL* segantisi nell' *A*; quindi saravvi certamente certa forza applicata secondo certa direzione passante pell' *A*, che colle forze medesime *P Q* si equilibrerà. Sia questa la forza *T*; e se è possibile non sia la forza *T* applicata secondo la direzione *AE*, ma secondo un' altra direzione *AH*, che passi però pell' *A*. Segherà adunque la direzione *AH* l'angolo *BAC* alla tendenza delle forze *P Q*, e il suo opposto al vertice. E perchè sono uguali a due retti gli angoli *BAC ACD*, saranno minori di due retti gli angoli *GAC ACD*; laonde le rette *AH CD* (prolungate se occorre) rincontreranno si insieme; si rincontrino nel punto *G*, e dal *G* parallela alla *AL* tirisi la *GF*. Pertanto poichè sono fra loro in equilibrio le tre forze *T P Q* applicate secondo le direzioni *AH AK AL* segantisi nell' *A*; e dal punto *G* preso nella direzione *AH* si sono condotte linee Dimand. 2

(a) Alcuni fra i moderni matematici sogliono omettere, forse come superflue, le proposizioni inverse. Ciò andrebbe bene se una qualunque proposizione fosse sempre invertibile. Non sono però tanto da condannarsi per questa mancanza gli autori di memorie, quanto quelli di elementi; e perciò io mi sono liberato da questa taccia dimostrando tutte quelle proposizioni inverse, che so avere grande uso nella statica, com'è la presente, nella quale credo di avere impiegato un non ispregevole artifizio nella dimostrazione, che è in parte diretta, e in parte per assurdo.

rette parallele all' altre due direzioni onde costituire il parallelogrammo *AFGC*; quindi le tre forze *T P* ℚ saranno
Prop. 15 in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo *AFGC*, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Egli è dunque come la forza *P* alla forza ℚ, così la retta *AF* alla retta *AC*. Ma come la forza *P* alla forza ℚ, così si pone la retta *AB* alla retta *AC*; laonde egli è come l' *AB* alla *AC*, così l' *AF* alla *AC*. Uguale è dunque la *AB* alla *AF*; la minore alla maggiore, il che è un assurdo. Non è dunque la forza *T* applicata secondo la direzione *AH* in equilibrio colle forze *P* ℚ. Similmente dimostreremo che secondo qualsivoglia altra direzione, passante pel *A*, applicata la forza *T*, fuorchè secondo la direzione *AE*, ella non può essere in equilibrio colle forze *P* ℚ. Ella è dunque la retta *AE* la direzione della forza *T*, e però hanno una comune direzione le due forze *T R*. E poichè sono fra loro in equilibrio le forze *T P* ℚ applicate secondo le direzioni *AE AK AL* segantisi nell' *A*; quindi tenderà la forza *T* nella pro-
Coroll. 1 Prop. 12 pria direzione *AE* da parte contraria a quella, cui tendono le forze *P* ℚ. Ma si pone ancora che la forza *R* tenda nella direzione *AE* da parte contraria a quella cui tendono le
Defin. 7 forze *P* ℚ. Parziali sono dunque direttamente le forze *T R*. Di nuovo essendo fra loro in equilibrio le forze *T P* ℚ; egli sarà proporzionalmente come la forza *T* alla forza *P*, così la retta *AD* alla retta *AB*. Ma egli è ancora come la forza *R* alla forza *P*, così la retta *AD* alla retta *AB*. Adunque le due forze *T R* hanno alla forza *P* la stessa proporzione. Uguale ella è dunque la forza *T* alla forza *R*; sono
Prop. 1 poi ancora direttamente parziali; laonde equivalente è la forza *T* alla forza *R*. Ma la forza *T* è in equilibrio colle forze *P* ℚ; adunque sarà ancora la forza *R* colle forze *P* ℚ in equilibrio; il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi è manifesto che se le direzioni di una e di altre due forze si seghino in un punto, e sieno costituite nello stesso piano; e tendano tutte e tre le forze dalla parte stes-

sa; e la direzione della prima seghi l' angolo della tendenza dell' altre due forze; e da un punto preso in una qualsivoglia direzione condotte linee rette parallele all' altre due direzioni onde costituire un parallelogrammo, sieno le tre forze in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo medesimo, e ciascuna forza sia omologa alla retta che giace sulla propria direzione; sarà la prima forza equivalente all' altre due. Imperocchè applicata secondo la direzione della prima forza una forza ad essa uguale e contraria direttamente, tenderà questa da parte contraria a quella cui tendono le altre due, anzi ciascuna delle tre forze da parte contraria a quella cui tendono le due rimanenti; laonde per le cose nella proposizione dimostrate, sarà la nuova forza applicata in equilibrio coll' altre due; e però la forza ad essa uguale e contraria direttamente, cioè la prima forza, sarà all' altre due equivalente.

PROPOSIZIONE 17.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, le tre forze saranno in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli alla tendenza di due a due delle tre forze medesime, e ciascuna forza sarà omologa al seno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti.

Le direzioni *FC ED BK* delle tre forze *P Q R* fra loro in equilibrio seghinsi pel punto *A*; e tendano la forza *P* dall' *A* verso il *C*, la forza *Q* dall' *A* verso il *D*, e la forza *R* dall' *A* verso il *B*, sicchè il *CAD* sia l' angolo alla tendenza delle forze *P Q*, il *DAB* l' angolo alla tendenza delle forze *Q R*, e il *BAC* l' angolo alla tendenza delle forze *R P*. Dico che le forze *P Q R* sono in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli *DAB BAC CAD*, e che ciascuna forza è omologa al seno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti, cioè la forza *P* omologa al seno dell' angolo *DAB*, la forza *Q* al seno dell' angolo *BAC*, e la forza *R* al seno dell' angolo *CAD*. Fig. 21 e 22

Imperocchè in una direzione *BK* della forza *R* (che segherà l' angolo *CAD* alla tendenza dell' altre due forze *P Q*

e però ancora il suo opposto al vertice) prendasi qualsivoglia punto *G*, da cui parallele all' altre due direzioni *FC ED* tirinsi le rette *GI GH*, onde compiere il parallelogrammo *GIAH*. Saranno dunque le forze *P* ℚ *R* in proporzionalità ordinata colle rette *AH AI AG*, e ciascuna forza sarà omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Di nuovo perchè uguale è l' angolo *HGA* all' angolo alterno *GAI*; quindi uguale sarà il seno dell' angolo *HGA* al seno dell' angolo *GAI*, ovvero al seno dell' angolo *DAB* ad esso *GAI* posto accanto. E poichè nel triangolo *AHG* egli è proporzionalmente come la *AH* alla *HG*, o alla *AI*, così il seno dell' angolo *HGA* al seno dell' angolo *HAG*; ma uguale al seno dell' angolo *HGA* è il seno dell' angolo *DAB*, ed al seno dell' angolo *HAG* il seno dell' angolo posto accanto *BAC*; quindi egli è come la *HA* alla *AI*, così il seno dell' angolo *DAB* al seno dell' angolo *BAC*. Ma egli è ancora come la *AH* alla *AI*, così la forza *P* alla forza ℚ. Adunque egli è come la forza *P* alla forza ℚ, così il seno dell' angolo *DAB* al seno dell' angolo *BAC*. Oltre a ciò essendo come la retta *HG* alla retta *AG*, così il seno dell' angolo *HAG* al seno dell' angolo *AHG*; ed uguali sono, la *HG* alla *AI*, il seno dell' angolo *HAG* al seno dell' angolo *BAC*, e il seno dell' angolo *AHG* al seno dell' angolo *CAD*; quindi egli sarà come la *AI* alla *AG*, così il seno dell' angolo *BAC* al seno dell' angolo *CAD*; ma come la retta *AI* alla retta *AG*, così è la forza ℚ alla forza *R*. Adunque egli è come la forza ℚ alla forza *R*, così il seno dell' angolo *BAC* al seno dell' angolo *CAD*. Ma si è dimostrato che egli è ancora come la forza *P* alla forza ℚ, così il seno dell' angolo *DAB* al seno dell' angolo *BAC*. Sono dunque le forze *P* ℚ *R* in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli *DAB BAC CAD* alla tendenza di due a due delle forze medesime, e ciascuna forza è omologa al seno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti; il che convenia dimostrare.

Prop. 15

COROLLARIO.

Quindi se una forza a due forze sia equivalente, e le dire-

zioni delle tre forze si seghino in un punto; saranno la forza equivalente e le due forze in proporzionalità ordinata co' seni degli angoli alla tendenza di due a due delle forze medesime, e ciascuna forza sarà omologa al seno dell' angolo alla tendenza delle due forze rimanenti. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e contraria direttamente, questa si equilibrerà colle altre due forze; onde per la proposizione saranno la forza applicata e le due forze come i seni degli angoli alla tendenza di due a due delle forze medesime; e la forza applicata è uguale alla prima forza; e i seni de' due angoli alla tendenza della forza applicata con una e l' altra delle due forze sono uguali a' seni de' due angoli alla tendenza della forza equivalente con l'una e l' altra delle due forze; perocchè sono fra loro uguali i seni degli angoli accanto.

PROPOSIZIONE 18.

Se le direzioni di tre forze fra loro in equilibrio si seghino in un punto, e da rette perpendicolari alle tre direzioni si costituisca un triangolo; le tre forze saranno in proporzionalità ordinata co' lati del triangolo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa al lato che alla propria direzione è perpendicolare.

Le direzioni *AB AC AH* delle tre forze *P Q T* seghinsi nel punto *A*; e la forza *P* tenda nella propria direzione *AB* dall' *A* verso il *B*, la forza *Q* nella propria direzione *AC* dall' *A* verso il *C*, e la forza *T* nella propria direzione *AH* dall' *A* verso l' *H*. Saranno li *BAC CAH HAB* gli angoli alla tendenza di due a due delle forze *P Q T*, e ciascuna forza tenderà nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze rimanenti. Prendansi poi nelle direzioni *AB AC AH* quali si vogliano punti *N I K*, da' quali tirinsi linee rette ad angoli retti alle direzioni medesime *AB AC AH*; la *LN* alla *AB*, la *IO* alla *AC*, e la *MK* alla *AH*; e giungasi la *KN*. E poichè uguali a due retti sono gli angoli *ANL AKM*; quindi saranno minori di due retti gli angoli *KNL NKM*. Le rette adunque *LN MK*, prolungate se occorre, rincontreranno si insieme. Rin- Fig. 23

contrinsi nell' *E*. Allo stesso modo, giunte le *NI IK*, si proverà che le *LN IO*, e così ancora le *IO MK* si rincontrano insieme. Rincontrinsi le *LN IO* nel *G*, e le *IO MK* nell' *F*. Il triangolo dunque *EGF* ha i suoi lati perpendicolari alle direzioni *AB AC AH*, uno all' altra. Dico ora che le tre forze *P Q T* sono in proporzionalità ordinata co' lati *EG GF FE* del triangolo *EGF*, e che ciascuna forza è omologa al lato, che è alla propria direzione perpendicolare, cioè omologa la forza *P* al lato *EG*, la forza *Q* al lato *GF*, e la forza *T* al lato *FE*.

Imperocchè in una direzione *AH* preso qualsivoglia punto *D*, da esso parallele all' altre due direzioni *AB AC* tirinsi
Prop. 15 le rette *DC DB*, onde costituire il parallelogrammo *ABDC*. Le forze dunque *P Q T* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AB AC AD*. E poichè retti sono gli angoli *AKM ANL*, quindi saranno uguali a due retti ancora gli angoli rimanenti *NAK NEK* del quadrilatero *AKEN*. Ma uguali a due retti sono ancora gli angoli *NAK BAD*. Gli angoli dunque *NAK NEK* sono uguali agli angoli *NAK BAD*. Tolgasi l'angolo comune *NAK*; sarà l'angolo rimanente *NEK*, o dicasi *GEF*, uguale all'angolo rimanente *BAD*. Similmente si dimostrerà che uguale all'angolo *EFG* è l'angolo *CAD*, ovvero l'alterno *ADB*, e all'angolo *EGF* l'angolo *ABD*. Simile egli è dunque il triangolo *EGF* al triangolo *ABD*. Proporzionali adunque sono i lati del triangolo *EGF* ai lati del triangolo *ABD*, ed omologhi i sottesi agli uguali angoli; laonde i lati *EG GF FE* sono in proporzionalità ordinata co' lati *AB BD AD*. Ma uguale alla *BD* è la *AC*. E però sono in proporzionalità ordinata i lati *EG GF FE* colle rette *AB AC AD*. Si è poi dimostrato che sono in proporzionalità ordinata ancora le forze *P Q T* colle rette *AB AC AD*. Elleno sono dunque in proporzionalità ordinata le forze *P Q T* co' lati *EG GF FE* del triangolo *EGF*; e ciascuna forza è omologa al lato che alla propria direzione è perpendicolare; il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se equivalente sia una forza a due forze; e le di-

rezioni di tutte e tre si seghino in un punto; e da rette perpendicolari alle loro direzioni si costituisca un triangolo; le tre forze saranno in proporzionalità co' lati del triangolo medesimo, e ciascuna forza sarà omologa al lato, che alla propria direzione è perpendicolare. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e direttamente contraria, questa colle prime due forze si equilibrerà, e però saranno in proporzionalità ordinata la forza applicata e le due forze co' lati del triangolo suddetto; dunque ancora la forza equivalente e le due forze.

PROPOSIZIONE 19.

Date di posizione tre direzioni costituite nello stesso piano e segantisi in un punto, e data una forza applicata secondo una di esse direzioni e la tendenza della forza; ritrovare le forze che deggionsi applicare secondo l'altre due direzioni, e le loro tendenze per equilibrare la data forza; e ritrovare ancora le forze che debbonsi applicare alle due direzioni e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la stessa data forza.

Sieno date di posizione le tre direzioni *BK FC ED* costi- Fig. 24
tuite in un piano e segantisi nell'*A*; e sia data la forza *R* applicata secondo la direzione *BK*, e la sua tendenza, che sia dall'*A* verso il *B*. Bisogna ritrovare le forze che debbonsi applicare secondo l'altre due direzioni *FC ED*, e le loro tendenze per equilibrare la forza *R*; e ritrovare ancora le forze che debbonsi applicare secondo le direzioni *FC ED* e le loro tendenze, perchè ad esse sia equivalente la forza *R*.

Prendansi da una parte e dall'altra del punto *A* nella direzione *FC* i punti *F C*, e nella direzione *ED* i punti *E D*. E poichè le due direzioni *FC ED* si segano nell'*A*; quindi saranno le *FC ED* quattro angoli al segamento, cioè i due angoli *CAD EAF* opposti al vertice, e gli altri due *EAC FAD* pure opposti al vertice. Ma la direzione *BK* passa pel punto *A* ed è nello stesso piano costituita colle due direzioni *FC ED*. Segherà adunque la retta *BK* o i due primi angoli al vertice, o gli altri due. Seghi gli angoli *CAD EAF*. E poichè la retta *BK* sega gli angoli *CAD EAF*, cadrà il

punto *B* (a cui dal punto *A* tende nella propria direzione *BK* la forza *R*) o dalla parte in cui sono i punti *E F*, o da quella in cui sono i punti *C D*. Cada dalla stessa parte in cui sono i punti *E F*, e da parte contraria a quella in cui sono i punti *C D*. Ora in una delle direzioni *BK FC ED*, per esempio nella direzione *ED*, prendasi qualsivoglia punto *I*, e dall' *I* parallele all'altre due direzioni *BK FC* tirinsi le rette *IH IG* per compiere il parallelogrammo *AGIH*. La diagonale *AI* dello stesso parallelogrammo *AGIH* giacerà sulla direzione *ED*, il lato *AH* sulla direzione *FC*, e il lato *AG* sulla direzione *BK*. Indi prendansi le forze *P* ℚ, tali che come la retta *AH* alla retta *AG*, così egli sia la forza *P* alla forza *R*; e come la retta *AI* alla retta *AG*, così egli sia la forza ℚ alla forza *R*; e applichinsi la forza *P* secondo la direzione *FC* e tendente dall' *A* verso il *C*, e la forza ℚ secondo la direzione *ED* e tendente dall' *A* verso il *D*. Tenderà adunque la forza *R* da parte contraria a quella cui tendono le forze *P* ℚ. Dico pertanto che le forze *P* ℚ si equilibrano colla forza *R*.

Imperocchè poichè la direzione *BK* della forza *R* sega l'angolo *CAD* alla tendenza delle forze *P* ℚ, e la forza *R* tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le due forze *P* ℚ; quindi tenderà ancora la forza *P* nella propria direzione *FC* da parte contraria a quella cui tendono le forze ℚ *R*, e ancora la forza ℚ tenderà nella propria direzione *ED* da parte contraria a quella cui tendono le forze *R P*. Di nuovo perchè egli è come la forza *P* alla forza *R*, così la retta *AH* alla retta *AG*; ed ancora come la forza ℚ alla forza *R*, così la retta *AI* alla retta *AG*; quindi sono le tre forze *P* ℚ *R* in proporzionalità ordinata colle rette *AH AI AG*. Sonovi adunque tre forze *P* ℚ *R* applicate secondo le direzioni *FC ED BG* segantisi nell' *A* e costituite nel piano medesimo; e ciascuna forza tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le forze rimanenti; e da un punto *I* preso nella direzione *ED* tirate parallele all' altre due direzioni *FC BK* le linee rette *IH IG* per compiere il parallelogrammo *AHGI*, sonosi dimostrate le forze *P* ℚ *R* in proporzionalità ordinata colle rette *AH AI AG*, e ciascuna forza omologa

omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Elleno sono dunque le forze *P* ℚ in equilibrio colla forza *R*.

Se poi applichinsi secondo le direzioni *FC ED* altre due forze *N M*, la forza *N* uguale e contraria direttamente alla forza *P*, e la forza *M* uguale e contraria direttamente alla forza ℚ, sicchè esse forze *N M* tendano dal punto *A* verso i punti *F E* situati dalla stessa parte in cui è il punto *B*, dimostrerassi similmente che alle forze applicate *N M* sarà equivalente la forza *R*.

Date dunque di posizione le tre direzioni *FC BK ED* segantisi nell' *A* e costituite nel medesimo piano, e data la forza *R* applicata secondo la direzione *BK* e la sua tendenza dall' *A* verso il *B*; sonosi ritrovate le due forze *P* ℚ che applicate secondo l'altre due direzioni *FC ED* si equilibrano colla forza *R*, e le loro tendenze, quella della forza *P* dall' *A* verso il *C* e quella della forza ℚ dall' *A* verso il *D*; e si sono trovate ancora le forze *N M* che applicate secondo le direzioni *FC ED* alla forza medesima *N* equivalgono, e le loro tendenze, quella della forza *N* dall' *A* verso l' *F*, e quella della forza *M* dall' *A* verso l' *E*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 20.

Date di posizione due direzioni segantisi in un punto, e date due forze applicate secondo esse direzioni e le loro tendenze; ritrovare una forza che colle prime due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza che sia equivalente alle due prime forze, la sua direzione, e la sua tendenza.

Sieno date di posizione le direzioni *FC ED*, segantisi nell' *A*, e sieno date le forze *P* ℚ applicate secondo le direzioni *FC ED*, e le loro tendenze, cioè presi nelle direzioni *FC ED* da una parte e dall'altra del punto *A* i punti *F C E D*, tendano, la forza *P* dall' *A* verso il *C*, e la forza ℚ dall' *A* verso il *D*. Bisogna ritrovare una forza che colle forze *P* ℚ si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza che alle forze *P* ℚ sia equivalente, la sua direzione, e la sua tendenza. Fig. 25

Dal punto *A* sopra le direzioni *FC ED* prendansi comunque le rette *AH AI* alle forze *P* ℚ proporzionali, e sia come la forza *P* alla forza ℚ, così la retta *AH* giacente sulla direzione *FC* alla retta *AI* giacente sulla direzione *ED*. Pertanto o l'una e l'altra delle rette *AH AI* cadono dal punto *A* verso le parti *CD*, ovvero *EF*, o una cade dalla parte *CD* e l'altra dalla parte *EF*. Nel primo caso si conducano, dal punto *H* parallela alla *ED* la *HG*, e dal punto *I* parallela alla *FC* la *IG*; e dal punto *A* al punto *G*, ove s'incontrano le rette *HG IG*, si tiri la *AG*. Ma nel secondo caso giunta la retta *IH*, si conduca dal punto *A* parallela alla *IH* la *BK*; poi da uno qualtivoglia de' punti *I H* si conduca altra retta, cioè o dall'*I* la *IG* parallela alla direzione *FC*, ovvero dall'*H* la *HG* parallela alla direzione *ED*. In amendue i casi però si sarà costruito un parallelogrammo *AHGI*, e la retta *AG* segherà l'angolo *CAD* alla tendenza delle forze *P* ℚ. Prolunghisi ora la *AG*, se occorre; e si prendano in essa da una parte e dall'altra dell'*A* i punti *B K*, de' quali cada il *K* dalla parte *CD*, e il *B* dalla parte opposta *EF*. Indi si esponga una forza *R* tale, che alla forza ℚ abbia la stessa proporzione che ha la retta *AG* alla retta *AI*, e applichisi la forza *R* secondo la direzione *BK*, sì che tenda dall'*A* verso il *B*. Dimostrerassi come nell'antecedente proposizione essere la forza *R* in equilibrio colle forze *P* ℚ.

E applicando di nuovo secondo la direzione *BK* una forza *T* uguale e direttamente contraria alla forza *R*, cioè tendente dall'*A* verso il *K*; sarà la forza *T* equivalente alle forze *P* ℚ.

Date dunque di posizione le direzioni *FC ED* segantisi nell'*A*, e date le forze *P* ℚ applicate secondo esse direzioni e le loro tendenze, cioè quella della forza *P* dall'*A* verso il *C*, e quella della forza ℚ dall'*A* verso il *D*; si è ritrovata la forza *R* che colle forze *P* ℚ si equilibra, la sua direzione *BK* e la sua tendenza dall'*A* verso il *B*; e si è ritrovata ancora la forza *T* equivalente alle forze *P* ℚ, la sua direzione *BK*, e la sua tendenza dall'*A* verso il *G*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 21.

Date tre forze due delle quali comunque preſe ſieno maggiori della forza rimanente; ritrovare le direzioni, a cui debbono le ſteſſe applicarſi, e le loro tendenze affinchè ſieno fra loro in equilibrio; e ritrovare ancora le direzioni a cui debbono applicarſi e le loro tendenze affinchè una qualſivoglia di eſſe ſia equivalente alle due forze rimanenti.

Sieno date le forze P Q R, due delle quali comunque preſe ſieno maggiori della forza rimanente. Biſogna ritrovare le direzioni a cui debbono applicarſi le forze P Q R, e le loro tendenze, affinchè ſieno fra loro in equilibrio; e ritrovare ancora le direzioni a cui debbono applicarſi le forze P Q R e le loro tendenze affinchè una qualſivoglia di eſſe, per eſempio la forza R, ſia equivalente alle due forze rimanenti P Q. Fig. 21

Si eſpongano tre rette AH HG AG in proporzionalità ordinata colle forze P Q R, e ſia omologa la retta AH alla forza P, la retta HG alla forza Q, e la retta AG alla forza R. Saranno adunque due delle rette AH HG AG, comunque preſe, maggiori della rimanente. Dalle rette AH HG AG coſtruiſcaſi il triangolo AHG, e ſi compia il parallelogrammo $AHGI$, di cui una qualſivoglia delle rette ſuddette, per eſempio la AG, ne ſia la diagonale. Avranno certamente i due lati AH AI del parallelogrammo $AHGI$ lo ſteſſo termine A colla diagonale AG, e i lati oppoſti HG GI avranno parimenti lo ſteſſo termine G colla diagonale AG. Ora prolunghinſi due lati aventi lo ſteſſo termine colla diagonale, e la diagonale ſteſſa da una parte e dall'altra del termine comune, come i lati AH AI e la diagonale AG aventi lo ſteſſo termine A, ne' punti F C E D B K. E poichè uguale al lato HG è il lato oppoſto AI, quindi ancora i lati AH AI e la diagonale AG ſaranno in proporzionalità ordinata colle forze P Q R. Di nuovo applichiſi ſecondo la direzione FC, ſu cui giace il lato AH, la forza P omologa al lato AH; poi ſecondo la direzione ED, ſu cui giace il lato AI, applichiſi la forza Q

omologa al lato *AI*; ma volganſi in modo le tendenze delle forze *P* ℚ, che l' angolo *HAI* compreſo dai lati *AH AI* che ſi ſono prolungati, o il ſuo oppoſto al vertice, ſia l'angolo alla tendenza delle forze *P* ℚ. Siaſi pertanto fatta tendere la forza *P* nella direzione *FC* dall' *A* verſo il *C*, e la forza ℚ nella direzione *ED* dall' *A* verſo il *D*, ſicchè l' *HAI* ſia l' angolo alla tendenza delle forze *P* ℚ. Oltre a ciò applichiſi ſecondo la direzione *BK*, ſulla quale giace la diagonale *AG*, la forza *R* omologa alla diagonale *AG*, e facciaſi tendere la forza *R* dalla parte *EF* oppoſta alla parte *CD*, verſo cui tendono le forze *P* ℚ, cioè dall' *A* verſo il *B*. Dimoſtreraſſi, come nella propoſizione che abbiamo detto diciannoveſima, eſſere fra loro in equilibrio le tre forze *P* ℚ *R*. Date dunque le forze *P* ℚ *R*, ſonoſi ritrovate le direzioni *FC ED BK* alle quali debbonſi applicare le ſteſſe forze, perchè ſieno fra loro in equilibrio, non meno che le tendenze delle forze, quella della forza *P* dall' *A* verſo il *C*, quella della forza ℚ dall' *A* verſo il *D*, e quella della forza *R* dall' *A* verſo il *B*; il che convenia fare in primo luogo.

E ſe, dopo tutta la ſuperior coſtruzione, ſi adatti la forza *R* nella direzione *BK* sì che la ſua tendenza ſia volta da parte contraria di prima, dall' *A* verſo il *K*; ſi ſaranno ritrovate le direzioni *FC ED BK* alle quali debbonſi applicare le forze ſteſſe, perchè la forza *R* ſia equivalente alle forze *P* ℚ, non meno che le loro tendenze, quella della forza *P* dall' *A* verſo il *C*, quella della forza ℚ dall' *A* verſo il *D*, e quella della forza *R* dall' *A* verſo il *K*; il che dovevaſi fare in ſecondo luogo.

PROPOSIZIONE 22.

Se una forza ſia contraria a due forze e uguale alle medeſime; e la direzione di eſſa cada nel piano per le direzioni delle due forze, e fra loro, e condotta comunque una retta alle direzioni delle due forze, ſia queſta ſegata dalla direzione della forza contraria in modo che i ſegamenti ſi recipro-

chino colle due ſteſſe forze ; ſaranno le tre forze fra loro in equilibrio (*a*).

La forza *R* ſia contraria alle forze *P* ℚ e uguale alle me- Fig. 26
deſime; e ſieno applicate, la forza *R* ſecondo la direzione *SN* e tendente dall' *S* verſo l' *N*, la forza *P* ſecondo la direzione *BE* e tendente dal *B* verſo l' *E*, e la forza ℚ ſecondo la direzione *CD* e tendente dal *C* verſo il Π. La direzione poi *SN* cada nel piano per le direzioni *BE* CΠ, e fra loro; e condotta la retta *BC* alle direzioni *BE CD*, ſia ſegata la *BC* nel punto *S* dalla direzione *SN* in modo che i ſegamenti *CS SB* ſi reciprochino colle forze *P* ℚ, cioè ſia come il ſegamento *CS* al ſegamento *SB*, così la forza *P* alla forza ℚ. Dico che ſaranno fra loro in equilibrio le tre forze *P* ℚ *R*.

Imperocchè eſſendo contraria la forza *R* alle due forze Defin. 4
P ℚ, ſarà la direzione *SN* parallela all' una e all' altra delle direzioni *BE* CΠ, e tenderà la forza *R* dalla parte *TV* della retta *BC*, mentre le forze *P* ℚ tenderanno dalla parte oposta *E*Π. Prolunghinſi per diritto alla *BC* da una e dall' altra parte le rette *B*Σ *C*Λ; e s'intendano applicate ſecondo la comune direzione ΣΛ le forze *L M* uguali e direttamente contrarie, e la forza *L* tenda dal *B* verſo il Σ e la forza *M* dal *C* verſo il Λ. Di nuovo date la due forze *L P*, e date di poſizione le loro direzioni *B*Σ *BE* ſegantiſi nel *B*, Prop. 20
e date le loro tendenze, troviſi la forza *Y* equivalente alle forze *L P*, la ſua direzione *TO* e la ſua tendenza. Paſſerà dunque la direzione *TO* pel punto *B*, ſegherà l'angolo Σ*BE* alla tendenza delle forze *L P*, e tutte e tre le forze *L Y P* Coroll.
tenderanno dalla parte medeſima; e però la forza *Y* tenderà Prop. 9
nella propria direzione dalla parte *E*Π della retta *BC*. Si- Coroll. 3
Prop. 10

(*a*) Gli ſtatici ſolevano dedurre la teoria delle forze applicate a direzioni parallele da quella delle forze le cui direzioni ſi rincontrano in un punto, mediante l'ipoteſi di rimovere ad infinita diſtanza il punto del loro concorſo. Il Cel. P. *Gregorio Fontana* fu il primo ad accorgerſi, che ſi poteva preſcindere da queſta, ch' ei giuſtamente chiama dura ipoteſi (Memorie della Società Italiana Tom. IV. pag. 519) riducendo le prime forze alle ſeconde coll'aggiugnere ſolo due forze uguali e contrarie direttamente. Io ho adottato queſta quanto elegante, altrettanto ſemplice riduzione, e non ho fatto altro che veſtirla alla mia foggia.

milmente date le due forze M ♀, e date di posizione le loro direzioni $C\Pi$ $C\Lambda$ segantisi nel C, e date le loro tendenze, trovisi la forza Z equivalente alle forze M ♀, la sua direzione VG, e la sua tendenza dall' V verso il G. Passerà adunque la direzione VG pel punto C, segherà l'angolo $\Lambda C\Pi$ alla tendenza delle forze M ♀; e tutte tre le forze M Z ♀ tenderanno dalla parte medesima; e però la forza Z tenderà nella propria direzione VG dalla parte $E\Pi$ della retta BC. Ora nella direzione $B\Sigma$ preso qualunvoglia punto K, dal K parallele alle due direzioni BE BO tirinsi le rette KO KI per compiere il parallelogrammo $KIBO$; e nella direzione $C\Lambda$ presa dal C la CH uguale alla BK, dall' H parallele alle due direzioni $C\Pi$ CG tirinsi le rette HG $H\Delta$ per compiere il parallelogrammo $H\Delta CG$. Sono adunque in proporzionalità ordinata le tre forze P Υ L colle tre rette BI BO BK; e le tre forze M Z ♀ colle tre rette CH CG $C\Delta$. Ma egli è come la forza L alla forza M, così la retta BK alla retta CH, perocchè sono uguali fra loro sì le forze che le rette. Dunque sono in proporzionalità ordinata le sei forze P Υ L M Z ♀ colle sei rette BI BO BK CH CG $C\Delta$; e ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Prolunghisi la TO finchè rincontri la retta SN nel punto A. E poichè si pone come la retta CS alla retta SB, così la forza P alla forza ♀; e come la forza P alla forza ♀, così è la retta BI alla retta $C\Delta$; quindi egli è come le BI alla $C\Delta$, così la CS alla SB. Il contenuto dunque sotto le IB BS è uguale al contenuto sotto le ΔC CS. Oltre a ciò simile essendo il triangolo KBI al triangolo BSA, sarà come la KB alla BI, così la BS alla SA. Dunque il contenuto sotto le KB SA è uguale al contenuto sotto le IB BS. Ma il contenuto sotto le KB SA è uguale al contenuto sotto le HC SA, perocchè uguale è la HC alla KB; ed il contenuto sotto le IB BS si è dimostrato uguale al contenuto sotto le ΔC CS. Uguale egli è dunque il contenuto sotto le HC SA al contenuto sotto le ΔC CS; laonde egli è come l' HC alla $C\Delta$, così la CS alla SA. Per il che giunta la CA, saranno li $HC\Delta$ CSA due triangoli, che hanno l'angolo $HC\Delta$ uguale all' angolo CSA, e d' intorno agli angoli uguali i lati proporzionali. Simile egli è dunque il trian-

Prop. 25

golo *HC*△ al triangolo *CSA*; e però l' angolo △*HC*, ovvero il suo alterno *HCG*, è uguale all' angolo *ACS*. Per diritto ella è dunque la retta *CA* alla retta *CG*. E poichè *Υ R Z* sono tre forze applicate secondo le direzioni *AO AN AG* segantisi nell' *A*; e si è dimostrato che la forza *R* tende nella propria direzione *SN* dalla parte *TV* contraria alla parte *EΠ*, cui tendono le altre due forze *Υ Z*; quindi ancora la forza *Υ* tenderà nella propria direzione *AO* da parte contraria a quella cui tendono le forze *R Z*; e così ancora la forza *Z* tenderà nella propria direzione *AG* da parte contraria a quella, cui tendono le forze *Υ R*. Compiansi i parallelogrammi *GHCF GATD ATXV*. E poichè paralleli sono i lati del triangolo *GDF* a' lati del triangolo *KIB* ed uguale è il lato *FG* al lato *KB*, perocchè amendue sono uguali alla retta medesima *CH*; quindi uguale sarà ancora la *FD* alla *BI*, e la *GD* alla *KI*. Ma uguale è la *GD* alla *AT*, e la *KI* alla *BO*; dunque ancora l' *AT* è uguale alla *BO*. Di nuovo essendo uguali le due *CD DG* alle due *AX XV*, e l' angolo *CDG* uguale all' angolo *AXV*, sarà ancora la base *CG* uguale alla base *AV*. Pertanto poichè sono in proporzionalità ordinata le forze *Υ P Q Z* colle rette *BO BI C*△ *CG*; ed uguale è la *BO* alla *AT*, la *BI* alla *FD*, la *C*△ alla *GH*, ovvero alla *CF*, e la *CG* alla *AV*; quindi le forze *Υ P Q Z* sono in proporzionalità ordinata colle rette *AT FD CF AV*. Ma si pone la forza *R* uguale alle forze *P Q*, e le rette *FD CF* sono uguali alla retta *CD*, ovvero alla *AX*. Sono adunque in proporzionalità ordinata le forze *Υ R Z* colle rette *AT AX AV*, ed ogni forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. Sonovi dunque tre forze *P R Q* applicate secondo le direzioni *AO AN AG* segantisi nel punto *A*, e costituite nello stesso piano; e ciascuna forza tende nella propria direzione da parte contraria a quella cui tendono le forze rimanenti; ed in oltre dal punto *X* preso nella direzione *SN* della forza *R* tirate le rette *XV XT* parallele alle direzioni *AO AG* dell' altre due forze *Υ Z* e costituito il parallelogrammo *ATXV*, si è dimostrato essere le forze suddette *Υ R Z* in proporzionalità ordinata co' lati e la diagonale del parallelogrammo *ATXV*, e ciascuna forza omologa alla retta che

Prop. 16 giace sulla propria direzione. Elleno sono dunque fra loro in equilibrio le tre forze Y R Z. Ma equivalenti sono, la forza Y alle forze P L, e la forza Z alle forze M Q. Adunque sono fra loro in equilibrio le cinque forze P L R M Q. Ma la forza L è in equilibrio colla forza M, essendo esse uguali e direttamente contrarie. Elleno dunque sono fra loro in equilibrio le forze rimanenti P R Q. Il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se una forza sia parziale a due forze ed uguale alle medesime; e la direzione di quella cada nel piano di queste, e fra loro; e, condotta una retta comunque alle direzioni delle due forze, sia essa segata dalla direzione dell'altra forza in modo che i segamenti si reciprochino colle due forze; equivalente sarà la prima forza alle altre due. Imperocchè applicata nella direzione della prima forza una forza ad essa uguale e contraria direttamente, sarà questa contraria all'altre due; e si dimostrerà come nella proposizione che la forza applicata s'equilibra colle altre due forze; e però la forza a quella uguale e direttamente contraria, cioè la prima forza, sarà all'altre due equivalente.

PROPOSIZIONE 23.

Se due forze parziali sieno in equilibrio con un'altra forza; la direzione di questa cadrà nel piano per le direzioni delle forze parziali, e fra esse; la forza sarà contraria alle forze parziali ed uguale alle medesime; e condotta qualunque retta alle direzioni delle forze parziali, sarà questa segata dalla direzione della forza contraria in modo che i segamenti si reciprocheranno colle forze parziali medesime.

Fig. 26 Le due forze parziali P Q sieno in equilibrio colla forza R; e sieno applicate la forza P secondo la direzione BE e tendente dal B verso l'E, e la forza Q secondo la direzione $C\Pi$ e tendente dal C verso il Π; e la forza R sia applicata secondo la direzione XN. Conducasi poi comunque alle direzioni BE CD la retta BC. Dico, che la direzione

XN

XN cade nel piano per le direzioni *BE* *CΠ*, e fra esse; che la forza *R* è contraria alle forze *P* *Q* ed alle medesime uguale, e che la direzione *XN* sega la retta *BC* in modo che i segamenti della *BC* si reciprocheranno colle forze parziali *P* *Q*.

Imperocchè poichè parziale è la forza *P* alla forza *Q*, sarà la direzione *BE* parallela alla direzione *CΠ*, e tenderanno le forze *P* *Q* dalla stessa parte *EΠ* della retta *BC*. Adunque i punti *E* *Π* cadono dalla stessa parte *EΠ* della retta *BC*. Protragganſi le rette *BΣ* *CΛ* per diritto alla retta *BC*, e secondo la direzione *ΣΛ* applichinſi le due forze uguali e contrarie *L* *M*, la *L* che tenda dal *B* verso il *Σ*, e la *M* dal *C* verso il *Λ*. Poi date le due forze *L* *P* applicate secondo le direzioni *BΣ* *BE* date di posizione e segantisi nel *B*, e date le tendenze delle due forze; si trovi la forza *Υ* equivalente alle forze *L* *P*, la sua direzione *TO*, e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione *TO* pel punto *B*, segherà l'angolo alla tendenza *ΣBE* delle forze *L* *P*, e tenderanno tutte e tre le forze *L* *Υ* *P* dalla parte medesima; e e però la forza *Υ* tenderà nella propria direzione dalla parte *EΠ* della retta *BC*. Similmente date le due forze *M* *Q* applicate secondo le direzioni *CΛ* *CΠ* date di posizione e segantisi nel *C*, e date le tendenze delle due forze, ritrovisi la forza *Z* equivalente alle forze *M* *Q*, la sua direzione *VG*, e la sua tendenza. Passerà dunque la direzione *VG* pel punto *C*, segherà l'angolo *ACΠ* alla tendenza delle forze *M* *Q*; e tutte e tre le forze tenderanno dalla parte medesima; laondè la forza *Z* tenderà ancora essa dalla parte *EΠ* della retta *BC*. Si prendano in oltre nella direzione *ΣΛ* le uguali rette linee *BK* *CH* e compianſi i parallelogrammi *KIBO* *HΔCG*. Si dimostrerà come nell'antecedente propolizione, che le sei forze *L* *Υ* *P* *Q* *Z* *M* sono fra loro in proporzionalità ordinata colle sei rette *BK* *BO* *BI* *CΔ* *CG* *CH*; e che ciascuna forza è omologa alla retta che giace sulla propria direzione. E poichè si pongono fra loro in equilibrio le tre forze *P* *Q* *R*, e sono ancora fra loro in equilibrio le forze *L* *M*; perocchè sono uguali e direttamente contrarie; quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le cinque forze *L* *P* *Q* *M* *R*. Ma equivalente è la forza *Υ* al-

Defin. 6

Prop. 20.

Coroll. delle Prop. 9 10

Comun. Conc. 1

le forze *L P*, e la forza *Z* alle forze ♎ *M*. Adunque sono ancora fra loro in equilibrio le tre forze ♈ *Z R*. Oltre a ciò poichè uguali a due retti sono gli angoli *EBC BC*Π, saranno maggiori di due retti gli angoli *OBC BCG*. Ma sono uguali a quattro retti tutti e quattro gli angoli *OBC CBT BCG BCV*. Eglino sono dunque minori di due retti gli angoli rimanenti *CBT BCV*; laonde le rette *OT VG* rincontreranno in qualche punto. Si rincontrino nell' *A*. Sarà dunque il *BAC* l'angolo alla tendenza delle forze ♈ *Z*, essendosi dimostrato tendere amendue dalla parte medesima *E*Π della retta *BC*. E perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze ♈ *Z R* applicate secondo le direzioni *AO AG XN*, due delle quali, le *AO AG*, si segano nell' *A*; quindi ancora la direzione *XN* passerà pel punto *A* e cadrà nel piano per le *AO*
Prop. 9 10 *AG*, che è il piano stesso per le direzioni *BE CD*; segherà essa *XN* l'angolo *BAC* alla tendenza delle forze ♈ *Z*, e la forza *R* tenderà nella propria direzione *XN* da parte contraria a quella cui tendono le forze ♈ *Z*. Compianti i parallelogrammi *CHGF AGDT ATXV*. E perchè uguale è la *CH* all'una e all'altra delle *BK FG*, sarà ancora la *BK* uguale alla *FG*; ed è simile il triangolo *KBI* al triangolo *GFD*, perocchè hanno i lati paralleli a' lati l'uno all'altro. Adunque uguale sarà ancora il lato *BI* al lato *FD*, ed il lato *KI* al lato *GD*. Ma uguale è la *KI* alla *BO*, e la *GD* alla *AT*; laonde uguale è ancora la *BO* alla *AT*. Di nuovo poichè egli è come la forza ♈ alla forza *Z*, così il lato *AT* del parallelogrammo *ATXV* al lato *AV*; ma egli è ancora come la forza ♈ alla forza *Z*, così la retta *BO* alla retta *CG*; quindi sarà proporzionalmente come la *AT* alla *AV*, così la *BO* alla *CG*. Si è poi dimostrata la *AT* uguale alla *BO*; laonde uguale sarà ancora la *AV* alla *CG*. E perchè uguale è la *AV* alla *CG*, e la *VX* alla *GD*; perciò le due *AV VX* sono uguali alle due *CG GD*; e contengono angoli uguali. Adunque la base *AX* è uguale alla base *CD*; e l'angolo *VAX* è uguale all' angolo *GCD*. Parallela ella è adunque la direzione *AX* della forza *R* alla direzione C Π della forza ♎, e però ancora alla direzione *BE* della forza *P*. Egli è poi manifesto che la direzione *XN* cade fra le direzioni C Π *BE*; perocchè il punto *A* per cui passa la retta *XN* cade fra le dire-

zioni medesime. Adunque la retta *XN* segherà la retta che giugne i punti *B C* in qualche punto. La seghi nell' *S*. E perchè sono fra loro in equilibrio le tre forze *Y Z R* applicate secondo le direzioni *AB AC SN* che si seghino nell' *A*; quindi tenderà la forza *R* da parte contraria a quella cui tendono le forze *Y Z*. Ma le forze *Y Z* tendono dalla parte *EΠ* della retta *BC*. Adunque la forza *R* tende dalla parte contraria *TV* della retta medesima *BC*. Contraria ella è dunque la forza *R* all'una e all' altra delle forze *P* ℚ. E poichè egli è come la forza *R* alla forza *Y*, così la *AX* alla *AT*, ovvero alla *BO*; e come la forza *Y* alla forza *P*, così la *BO* alla *BI*; quindi egli sarà come la forza *R* alla forza *P*, così la retta *AX* alla retta *BI*. In simil guisa si dimostrerà che come la forza *R* alla forza ℚ, così è la retta *AX* alla retta *CF*. Sono adunque in proporzionalità ordinata le forze *R P* ℚ colle rette *AX BI CF*. Ma uguale è la *AX* alle *BI CF*, perocchè la *AX* è uguale alla *CD*, ovvero alle *CF FD*, delle quali uguale è la *FD* alla *BI*; laonde ancora la forza *R* è uguale alle forze *P* ℚ. Di nuovo essendo simile il triangolo *KIB* al triangolo *BAS*; egli sarà come la *KB* alla *BI*, così la *BS* alla *SA*. Adunque il contenuto sotto le *KB SA* è uguale al contenuto sotto le *IB BS*. Per la stessa ragione uguale è il contenuto sotto le *CH SA* al contenuto sotto le *C*△ *CS*. Ma uguale è il contenuto sotto le *KB SA* al contenuto sotto le *CH SA*, perocchè uguale è la *KB* alla *CH*. Adunque ancora il contenuto sotto le *IB BS* è uguale al contenuto sotto le *C*△ *CS*; e però egli è come la *BI* alla *C*△, così la *CS* alla *SB*. Ma come la retta *BI* alla retta *C*△, così è la forza *P* alla forza ℚ. Egli è adunque proporzionalmente come la retta *CS* alla retta *SB*, così la forza *P* alla forza ℚ; e però si reciprocano i segamenti *CS SB* della retta *BC* colle forze *P* ℚ.

Si è dunque provato che la direzione *XN* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BE CΠ* delle forze parziali *P* ℚ, e fra esse; che la forza *R* è contraria alle forze *P* ℚ, e alle medesime uguale; e che la retta *BC* è segata nell *S* dalla direzione *XN*, in modo che si reciprocano i segamenti *CS SB* di essa colle forze parziali *P* ℚ.

COROLLARIO.

Ed è manifeſto che ſe a due forze parziali ſia equivalente una forza; la direzione di queſta cadrà nel piano per le direzioni delle forze parziali, e fra eſſe; tutte e tre le forze ſaranno parziali, e la forza equivalente uguale all'altre due; e, condotta comunque una retta alle direzioni delle due prime forze parziali, ſarà queſta ſegata dalla direzione della forza contraria, in modo che i ſegamenti ſi reciprocheranno colle due forze parziali medeſime. Imperocchè applicata nella direzione della forza equivalente altra forza ad eſſa uguale e direttamente contraria, queſta ſi equilibrerà colle due forze parziali.

PROPOSIZIONE 24.

Se due forze contrarie e diſuguali ſieno in equilibrio con un' altra forza; la direzione dell altra forza cadrà nel piano per le direzioni delle forze contrarie diſuguali, oltre la direzione della forza maggiore; l'altra forza ſarà parziale alla forza minore ed uguale all eccesſo in cui la maggiore ſupera la minore; e condotta comunque alle direzioni delle forze contrarie una retta, e prolungata fino alla direzione dell altra forza, ſarà proporzionalmente come l eccesſo ſuddetto alla forza minore, così la retta al prolungamento (a).

Fig. 27 Le forze P $\mathfrak{Q}$ contrarie e diſuguali ſieno in equilibrio colla forza R. Sia poi maggiore la forza $\mathfrak{Q}$ della forza P; e ſieno applicate, la forza P ſecondo la direzione BE, tendente dal B verſo l'E, la forza $\mathfrak{Q}$ ſecondo la direzione $C\Pi$, tendente dal C verſo il Π, e la forza R ſecondo la direzione XN. Dico che la direzione XN cade nel piano per le direzioni BE $C\Pi$, ed oltre la direzione $C\Pi$; che la forza R è parziale alla forza minore P, ed uguale all'eccesſo in cui la forza $\mathfrak{Q}$ ſupera la forza P; e che, condotta co-

(a) L'uſo mi ha fatto vedere la neceſſità d'introdurre nel primo Elemento di ſtatica ancora queſta propoſizione, ch'è bensì affatto ſimile all'antecedente, non però la ſteſſa.

munque la retta *BC* alle direzioni *BE* *CΠ* e prolungata fino alla direzione *XN*, egli è come l'eccesso suddetto alla forza *P*, così la retta *BC* al prolungamento.

Imperocchè poichè contraria è la forza *P* alla forza ℚ, sarà la direzione *BE* parallela alla direzione *CΠ*, e la forza *P* tenderà dalla parte *EO* della retta *BC*, mentre la forza ℚ tenderà dalla parte opposta *ΠV*. Prolunghinsi per dirittο alla *BC*, come nella propositione, che abbiamo detto ventiduesima, dall' una parte e dall'altra le rette *BΣ* *CΛ*, e applichinsi secondo la comune direzione *ΣΛ* le forze *L* *M* uguali e direttamente contrarie, la forza *L* che tenda dal *B* verso il *Σ*, e la forza *M* che tenda dal *C* verso il *Λ*. Di nuovo date le due forze *L* *P*, e date di positione le loro direzioni *BΣ* *BE* segantisi nel *B*, e le loro tendenze, si trovi la forza *Υ* equivalente alle forze *L* *P*, la sua direzione *TO*, e la sua tendenza. Passerà certamente la direzione *TO* pel punto *B*, segherà l' angolo *ΣBE* alla tenden- Prop. 20
za delle forze *LP*, e tutte e tre le forze tenderanno dalla parte medesima, e però tenderà la forza *Υ* dalla parte *EO* della retta *BC*, dal *B* verso l' *O*. Similmente date le due forze *M* ℚ, e date di positione le loro direzioni *CΛ* *CΠ* segantisi nel *C*, e le loro tendenze, si trovi la forza *Z* alle forze *M* ℚ equivalente, la sua direzione *CV*, e la sua tendenza. Passerà certamente la direzione *CV* pel punto *C*, segherà l'angolo *ΛCΠ* alla tendenza delle forze *M* ℚ, e tutte e tre le forze *M* *Z* ℚ tenderanno dalla parte medesima; e però la forza *Z* tenderà dalla parte *ΠV* della retta *BC* dal *C* verso l'*V*. Ora prendansi nella direzione *ΣΛ* le uguali linee rette *BK* *CH* e compiansi i parallelogrammi *KOBI* *HGCΔ*, e dimostrerassi come nella sopraddetta propositione, che le sei forze *L* *Υ* *P* *M* *Z* ℚ sono in proporzionalità ordinata colle sei rette *BK* *BO* *BI* *CH* *CG* *CΔ*. E poichè egli è come la forza ℚ alla forza *P*, così la retta *CΔ*, ovvero la *GH*, alla *BI*; e maggiore si pone la forza ℚ della forza *P*; quindi maggiore sarà ancora la *GH* della *BI*. Tolgasi dalla retta maggiore *GH* dall' *H* verso il *G* la retta *HΦ* uguale alla retta minore *BI*, e giungasi la *CΦ*. E perchè l' una e l' altra delle *HΦ* *BI* è parallela alla medesima retta *CΠ*, parallela sarà ancora l' *HΦ* alla *BI*; e però uguale sarà l'angolo

CHΦ all' angolo *KBI*. Per il che uguali eſſendo le due *CH HΦ* alle due *KB BI*, e comprendendo angoli uguali, ſarà ancora l'angolo *ΦCH* uguale all'angolo *IKB*. Maggiore egli è dunque l'angolo *GCH* dell' angolo *IKB*, e ancora dell' angolo *TBC*. Pongaſi comune l' angolo *GCB*. I due angoli adunque *GCH GCB* ſono maggiori dei due angoli *TBC GCB*; laonde ſono minori di due retti gli angoli *TBC GCB*; quindi le rette *TB GC* (prolungate ſe occorre) ſi rincontreranno inſieme. Rincontrinſi nell' *A*. Sarà pertanto l'angolo *BAV*, ch' è accanto all'angolo *BAC*, l'angolo alla tendenza delle forze *Y Z*; perocchè ſi è dimoſtrato tendere la forza *Y* dalla parte *EO* della retta *BC*, e la forza *Z* dalla parte oppoſta *ΠV*. E poichè ſono fra loro in equilibrio le forze *P Q R*, e ſono ancora fra loro in equilibrio le forze *L M*; quindi ſaranno ancora fra loro in equilibrio le cinque forze *P L Q M R*. Ma equivalente è la forza *Y* alle forze *P L*, e la forza *Z* alle forze *Q M*. Sono adunque fra loro in equilibrio le tre forze *Y Z R*, applicate ſecondo le direzioni *TO CV XN*, delle quali le due *TO CV*
Prop. 9 10 ſi ſegano nell' *A*. E però ancora la direzione *XN* paſſerà pel punto *A*, e ſarà nello ſteſſo piano coll' altre due direzioni *TO CV*, cioè nel piano per le direzioni parallele *BE CΠ*; e ſegherà in oltre la direzione *XN* l' angolo *BAV* alla tendenza delle forze *Y Z*. Compianſi i parallelogrammi *CHGF AGDT ATXV*. E perchè uguale è l'una e l'altra delle *BK GF* alla *CH*, ſarà la *BK* uguale alla *GF*; ed è ſimile il triangolo *KBI* al triangolo *GFD*, perocchè hanno i lati paralleli a' lati, l' uno all' altro. Adunque uguale ſarà il ancora il lato *BI* al lato *FD*, ed il lato *KI* al lato *GD*. Ma uguale è la *KI* alla *BO*, e la *GD* alla *AT*; laonde uguale è ancora la *BO* alla *AT*. Si dimoſtrerà poi come nell' antecedente propoſizione che ancora la *CG* è uguale alla *AV*, e la *AX* alla *CD*; e che in oltre la direzione *XN* della forza *R* è parallela alla direzione *CΠ* della forza *Q* e alla direzione *BE* della forza *P*. Egli è poi manifeſto che la direzione *XN* cade oltre la direzione *CΠ* della forza maggiore *Q*; perocchè il punto *A* per cui paſſa la retta *XN* cade oltre la direzione medeſima *CΠ*. Adunque la retta *BC* prolungata ſegherà la retta *XN*. La ſeghi nell' *S*. E perchè dal vertice *A* del triangolo *BAS* al punto *C* nella baſe *BS* ſi

condotta la retta *AC*, o dicasi *CV*; quindi segherà la retta *CV* l'angolo *BAS*, e però anche il suo opposto al vertice *XAΓ*. Ora essendo fra loro in equilibrio le tre forze *Y Z R* applicate secondo le direzioni *AB AS CV* segantisi nell' *A*, la direzione di ciascuna forza segherà l' angolo alla tendenza dell' altre due, e però anche l' angolo ad esso opposto al vertice. Ma la direzione *CV* della forza *Z* sega l'angolo *BAS* compreso dalle direzioni *AB AS* dell' altre due forze *Y R*, e ancora il suo opposto al vertice *XAΓ*; laonde delli *BAS XAΓ* uno è l'angolo alla tendenza delle forze stesse *Y R*, l'altro l'angolo ad esso opposto al vertice. Tendono adunque le forze *Y R* dalla stessa parte della base *BS*. Ma da quella parte verso cui tende la forza *Y*, dalla medesima si è dimostrato tendere ancora la forza *P*. Adunque le forze *P R* tendono dalla stessa parte della retta *BC*. Ed è ancora parallela la direzione *CΠ* alla direzione *XN*. Parziale ella è dunque la forza *R* alla forza *P*. Di nuovo in modo simile alla proposizione antecedente si proverà essere le tre forze *R P* ♎ in proporzionalità ordinata colle rette *AX BI CF*. Ma uguale è la *AX* all'eccesso in cui la *CF* supera la *BI*; perocchè uguale è la *AX* alla *CD* e la *BI* all'*FD*. Adunque ancora la forza *R* è uguale all'eccesso, in cui la forza ♎ supera la forza *P*. Finalmente come nella citata proposizione dimostreraffi avere la forza ♎ alla forza *P* la stessa proporzione che ha la retta *SB* alla retta *CS*; e però dividendo sarà come l'eccesso in cui la forza ♎ supera la forza *P* alla forza *P*, così la retta *BC* alla retta *CS*.

Prop. 10

Defin. 6

Si è dunque dimostrato che la direzione *XN* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BE CΠ* delle forze contrarie *P* ♎, ed oltre la direzione *CΠ*; che la forza *R* è parziale alla forza minore *P*, ed uguale all'eccesso in cui la forza ♎ supera la forza *P*; e che prolungata la retta *BC* fino alla direzione *XN* nell' *S*, egli è come l'eccesso suddetto alla forza *P*, così la retta *BC* al prolungamento *CS*; il che convenia dimostrare.

COROLLARIO.

Quindi se due forze contrarie e disuguali sieno equivalenti

ad un' altra forza; la direzione dell' altra forza cadrà nel piano per le direzioni delle forze contrarie oltre la direzione della forza maggiore; questa forza sarà parziale alla forza maggiore ed uguale all' eccesso in cui la maggiore supera la minore; e condotta qualunque retta alle direzioni delle forze contrarie, e prolungata fino alla direzione della forza equivalente, egli sarà proporzionalmente come l' eccesso suddetto alla forza minore, così la retta al prolungamento. Imperocchè applicata secondo la direzione della forza equivalente una forza ad essa uguale e contraria direttamente, questa colle prime due forze si equilibrerà.

PROPOSIZIONE 25.

Date due forze parziali, le loro direzioni e le loro tendenze; ritrovare una forza, che con esse due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente ad esse due forze, la sua direzione e la sua tendenza.

Fig. 28 Sieno date le forze parziali P ℚ, e sieno date di posizione le loro direzioni BA CD, e date le loro tendenze, quella della forza P dal B verso l' A, e quella della forza ℚ dal C verso il D. Bisogna ritrovare una forza che s' equilibri colle forze P ℚ, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente alle forze P ℚ, la sua direzione a la sua tendenza.

Defin. 6 Tirisi la retta BC. E poichè sono parziali le forze P ℚ, sarà la direzione BA parallela alla direzione CD, e le forze P ℚ tenderanno amendue dalla stessa parte AD della retta BC. Seghisi la BC nell' E in modo che le forze P ℚ si reciprochino co' segamenti CE EB, e sia come la forza P alla forza ℚ, così la CE alla EB; e pel punto E parallela ad una delle BA CD tirisi la FG; e secondo la direzione FG applichisi la forza R uguale alle forze P ℚ, la quale tenda nella propria direzione dalla parte MN contraria alla parte AD, cioè dall' E verso l' F.

E poichè la forza R e le forze P ℚ sono applicate secondo le direzioni parallele FG BA CD, e la tendenza della forza R si volge dalla parte MN della retta BC mentre le

tendenze

tendenze delle forze *P Q* si volgono dalla parte contraria *AD*; quindi contraria è la forza *R* all'una e all'altra delle forze *P Q*. Vi è dunque una forza *R* contraria alle forze *P Q* ed uguale alle medesime; e la direzione *FG* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BA CD* delle forze *P Q*, e fra esse; e condotta la retta *BC* alle direzioni *BA CD* è la *BC* segata dalla direzione *FG* in modo, che i segamenti *CE EB* si reciprocano colle due forze medesime *P Q*. In equilibrio ella è dunque la forza *R* colle forze *P Q*. E se secondo la direzione *FG* applichisi la forza *S* uguale e direttamente contraria alla forza *R*, coficchè tenda la forza *S* dalla parte *AD*, dall'*E* verso il *G*; si dimostrerà che equivalente è la forza *S* alle forze *P Q*. Defin. 4

Date dunque due forze parziali *P Q*, e date di posizione le loro direzioni *BA CD*, e date le loro tendenze dal *B* verso l'*A*, e dal *C* verso il *D*; si è ritrovata la forza *R* che colle due forze *P Q* si equilibra, la sua direzione *FG*, e la sua tendenza dall' *E* verso l'*F*, e si è ritrovata ancora la forza *S* equivalente alle due forze medesime *P Q*, la sua direzione *FG*, e la sua tendenza dall'*E* verso il *G*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 26.

Date due forze contrarie e disuguali, le loro direzioni, e le loro tendenze; ritrovare una forza che con esse due forze si equilibri, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente ad esse due forze, la sua direzione, e la sua tendenza.

Sieno date le due forze contrarie e disuguali *R P*, delle quali sia maggiore la *R*, e sieno date di posizione le loro direzioni *EF BA*, e date le loro tendenze, quella della forza *R* dall'*E* verso l'*F*, e quella della forza *P* dal *B* verso l'*A*. Bisogna ritrovare una forza, che si equilibri colle forze *R P*, la sua direzione e la sua tendenza; e ritrovare ancora una forza equivalente alle forze *R P*, la sua direzione e la sua tendenza. Fig. 29

Tirisi la retta *BE*. E poichè sono contrarie le forze *R P*, sarà la direzione *EF* parallela alla direzione *BA*, e le forze

R P tenderanno da parti contrarie della retta *BE*, la forza *R* dalla parte *FM*, e la forza *P* dalla parte *AN*. Prolunghisi ora oltre la direzione *EF* la *EC* per diritto alla *BE* in modo che egli sia proporzionalmente come l'eccesso in cui la forza *R* supera la forza *P* alla forza *P*, così la retta *BE* al prolungamento *EC*. Indi dal *C* parallela all'una e all'altra delle *EF BA* tirisi la retta *HD*; e secondo la direzione *HD* applichisi la forza ℚ uguale all'eccesso suddetto, e tenda la forza ℚ dalla stessa parte *AN* della *BC*, verso cui tende la forza minore *P*, cioè dal *C* verso il *D*.

E poichè le forze *R* ℚ sono applicate secondo le direzioni parallele *EF HD*, e le loro tendenze si volgono da parti contrarie della retta *BC*; quindi contraria sarà la forza *R* alla forza ℚ. Ella è poi contraria ancora alla forza *P*. Adunque la forza *R* è contraria alle due forze *P* ℚ. Di nuovo perchè la forza ℚ è uguale all'eccesso in cui la forza *R* supera la forza *P*, sarà la forza *R* uguale alle due forze *P* ℚ. Oltre a ciò essendo come l'eccesso in cui la forza *R* supera la forza *P* alla forza *P*, così la retta *BE* alla retta *EC*; ed uguale è la forza *R* all'eccesso suddetto; quindi sarà come la forza ℚ alla forza *P*, così la *BE* alla *EC*. Vi è dunque una forza *R* contraria alle due forze *P* ℚ ed uguale alle medesime; e la direzione *EF* della forza *R* cade nel piano per le direzioni *BA HD* delle forze *P* ℚ, e fra esse; e condotta la retta *BC* alle direzioni delle forze *P* ℚ, è la retta *BC* segata dalla direzione *EF* in modo che i segamenti *BE EC* si reciprocano colle due forze medesime *P* ℚ; e però la forza ℚ è in equilibrio colle forze *R P*. E se secondo la direzione *HD* applichisi la forza *T* uguale e direttamente contraria alla forza ℚ, coficchè essa tenda dalla parte *FM*, dal *C* verso l'*H*, e sia parziale alla forza maggiore *R*, si dimostrerà che equivalente è la forza *T* alle forze *R P*.

Date dunque le forze contrarie e disuguali *R P*, e date di posizione le loro direzioni *EF BA*, e date le loro tendenze dall'*E* verso l'*F*, e dal *B* verso l'*A*; si è ritrovata la forza ℚ che colle due forze *R P* s'equilibra, la sua direzione *HD*, e la sua tendenza dal *C* verso il *D*; e si è ritrovata ancora la forza *T* equivalente alle forze medesime *R P*, la sua direzione *HD*, e la sua tendenza dal *C* verso l'*H*; il che convenia fare.

PROPOSIZIONE 27.

Non possono essere fra loro in equilibrio tre forze, due delle quali sieno uguali e contrarie (a).

Imperocchè se sia possibile sieno fra loro in equilibrio le tre forze *R P* ℚ applicate secondo le direzioni *SN BE CD*, delle quali le forze *R P* sieno uguali e contrarie. Tendano poi la forza *R* dall'*S* verso l'*N*, la forza *P* dal *B* verso l'*E*, e la forza ℚ dal *C* verso il *D*. Fig. 30

E poichè contraria è la forza *R* alla forza *P*, parallela sarà la direzione *SN* alla direzione *BE*. Pertanto la direzione *CD* della forza ℚ o è parallela all'una e all'altra delle direzioni *SN BE*, o no. Sia in prima parallela. E perchè la forza ℚ è applicata secondo la direzione *CD* parallela alle direzioni *SN BE*, a cui sono applicate le due forze contrarie *R P*; quindi sarà la forza ℚ parziale all'una o all'altra delle forze stesse *R P*. Sia parziale alla forza *P*. E poichè le forze parziali *P* ℚ sono in equilibrio colla forza *R*, quindi uguale sarà la forza *R* alle forze *P* ℚ. Ma uguale si pone ancora la forza *R* alla forza *P*. Uguale ella è dunque la forza *P* alle forze *P* ℚ; il che è un assurdo. Non sono adunque in equilibrio le tre forze *R P* ℚ delle quali le *R P* sono uguali e contrarie, se la direzione della terza forza ℚ sia parallela alle direzioni dell'altre due. Prop. 23

Ma non sia la direzione *CD* parallela alle direzioni *SN BE*; e dal *C* parallela ad una delle *SN BE* tirisi la retta *CA*, e la *CG* comunque si voglia, nel piano però per le *CA CD*. Indi date di posizione le tre direzioni *CA CD CG* segantisi nel *C*, e situate nello stesso piano, e data la forza ℚ applicata secondo la direzione *CD*; si ritrovino le forze che deb- Fig. 31 Prop. 16

(a) Questa è una proposizione che se non è nuova per la cosa che dimostra, è però tale pel modo di esporla e di dimostrarla. *D'Alembert* fece vedere, che se due forze contrarie sieno uguali, conviene mettere ad un'infinita distanza una forza infinitamente piccola parziale ad una di esse per ottenere l'equilibrio. E perchè non dire che non vi può essere equilibrio fra tre forze, se due di esse sieno uguali e contrarie? Pare che così la proposizione sarebbe stata meglio enunciata.

bonſi applicare ſecondo l'altre due direzioni *CA CG*, e le loro tendenze, perchè ad eſſe ſia equivalente la forza ℚ. Sia la *V* la forza d'applicarſi ſecondo la direzione *CA*, e la ſua tendenza ſia dal *C* verſo l'*A*; e ſia la *X* la forza d'applicarſi ſecondo la direzione *CG* e la ſua tendenza ſia dal *C* verſo il *G*. E poichè la forza *V* è applicata ſecondo la direzione *CA* parallela alle direzioni *SN BE*, a cui ſono applicate le forze contrarie *R P*; quindi parziale ſarà la forza *V* all'una o all'altra delle forze ſteſſe *R P*. Sia parziale alla
Prop. 25 forza *P*; e date le forze parziali *P V*, le loro direzioni e le loro tendenze, ritroviſi una forza ad eſſe equivalente, la ſua direzione e la ſua tendenza. Sia queſta la forza *T* applicata ſecondo la direzione *HI* e tendente dall' *H* verſo l' *I*. Parziale ella è dunque la forza *T* alle forze *P V*, e ad eſſe uguale. Ma la forza *P* è uguale e contraria alla forza *R*; laonde la forza *T* è diſuguale e contraria alla forza *R*. Di nuovo eſſendo fra loro in equilibrio le forze *P* ℚ *R*, e la ℚ equivalente alle forze *V X*; quindi ſaranno fra loro in equilibrio ancora le forze *P V X R*. Ma equivalente è la forza *T* alle forze *P V*. Elleno ſono adunque fra loro in equilibrio ancora le tre forze *T X R*. Per il che eſſendo fra loro in equilibrio le tre forze *T X R*, delle quali diſuguale
Prop. 24 e contraria è la forza *T* alla forza *R*; quindi la terza forza *X* ſarà parziale alla forza minore *R*. Parallela ella è adunque la direzione *CG* alla direzione *SN*. Ma ancora la *CA* è parallela alla *SN*. Parallele elleno ſono adunque le rette *CA CG*, che ſi rincontrano nel *C*, il che è un aſſurdo. Non ſono adunque fra loro in equilibrio le tre forze *R P* ℚ, delle quali le *R P* ſono uguali e contrarie, ſe la direzione della terza forza ℚ non ſia parallela alle direzioni dell'altre due. Si è poi dimoſtrato che non poſſono eſſere in equilibrio neppure quando la direzione della forza ℚ ſia parallela alle direzioni dell'altre due. Non poſſono dunque eſſere fra loro in equilibrio tre forze, due delle quali ſieno uguali e contrarie; il che convenia dimoſtrare.

PROPOSIZIONE 28.

Se tre forze applicate a tre direzioni sieno fra loro in equilibrio, le direzioni saranno tutte e tre in un piano (a).

Sieno fra loro in equilibrio le tre forze *P Q R* applicate secondo le tre direzioni *BE CD SN*, e tendenti, la forza *P* dal *B* verso l' *E*, la forza *Q* dal *C* verso il *D*, e la forza *R* dall' *S* verso l' *N*. Dico che le direzioni *BE CD SN* sono in un piano. Fig. 31

Imperocchè se due delle direzioni *BE CD SN*, come per esempio le due *BE SN*, sono in un piano, è manifesto che ancora la terza direzione *CD* sarà nel piano che passa per quelle. Poichè le *BE SN* o si segheranno insieme, ovvero saranno fra loro parallele. Se seghinsi; ancora la direzione *CD* dee passare pel punto del segamento, ed essere nel piano per le *BE SN*. Se poi sono parallele le *BE SN*, allora le *P R* divengono o forze parziali, o forze contrarie e disuguali (disuguali, perchè altrimenti non sarebbero in equilibrio le tre forze *P Q R*, il che è contro la posizione). Sieno poi le *P R* o forze parziali, o forze contrarie e disuguali, la direzione *CD* della forza *Q* dee sempre cadere nel piano per le *BE SN*. Quindi se due delle direzioni *BE CD SN* sono in un piano, ancora la terza sarà nel piano medesimo. Prop. 9 — Prop. antec. — Prop. 23 24

Ora, se fia possibile, due delle direzioni *BE CD SN* comunque prese, non sieno in un piano. E prendasi nella direzione *SN* il punto *A*, da cui parallele all' altre due direzioni *BE CD* tirinsi le rette *AG AF*. Saranno adunque le *AG BE* in un piano, e le *AF CD* in un altro. E perchè si pone che la *SN* non è nello stesso piano colla *BE*;

(a) Non è stata mai da alcuno dimostrata in tutte le sue parti questa interessantissima proposizione; e pure ella è di un uso quasi continuo negli elementi di statica. Dico che niuno l'ha interamente dimostrata, perchè si è bensì cercato di provare che se due direzioni sieno in un piano, anche la terza sarà nel piano per quelle; ma questo non è tutto, e restava da provarsi che due direzioni debbano essere necessariamente in un piano.

quindi non sarà la *SN* nel piano per le *AG BE*. Allo stesso modo si proverà che la *SN* non è nel piano per le *AF CD*. Non è adunque la *SN* la comune sezione de' piani *AGBE AFCD*. Sia questa la retta *AB*, che passerà pel punto *A* comune all'uno e all'altro piano. Prolunghinsi, se occorre, le direzioni *BE CD* sinchè seghino l'*AB*. E' manifesto che esse la segheranno ad uno e ad altro punto *B C*, perocchè se la segassero nello stesso punto, le rette *BE CD* sarebbero nello stesso piano, il che non si pone. Prendasi nella direzione *SN* qualsivoglia altro punto *S*, e tirinsi le *SC SB*, e protragganti da una e dall' altra parte. Saranno dunque le tre rette *SN SC SB* nel piano del triangolo *ABS*. E perchè il punto *S* non è nel piano *AGBE*, e in esso piano sonovi i punti *B C*, quindi le rette *SC SB* non cadranno nel piano *AGBE*. Di nuovo date di posizione le tre direzioni *SN SC SB* situate in un piano e segantisi nell *S*, e
Prop. 19. data la forza *R* applicata secondo la direzione *SN*, e la sua tendenza dall'*S* verso l'*N*, ritrovinsi le forze che debbonsi applicare all' altre due direzioni *SC SB*, e le loro tendenze perchè ad esse sia equivalente la forza *R*. Sieno queste, la forza *X* applicata secondo la direzione *SC*, e tendente dal *C* verso l'*I*, e la forza *V* applicata secondo la direzione *SB*, e tendente dal *B* verso l'*L*. Di nuovo date le due forze *X* ℚ applicate secondo le direzioni *SC CD* segantisi nel
Prop. 20 *C*, e date le loro tendenze, si trovi la forza *M* equivalente alle forze *X* ℚ, la sua direzione *CZ*, e la sua tendenza dal *C* verso il *Z*. E in simil guisa date le due forze *P V* applicate secondo le direzioni *BE SB* segantisi nel *B*, e date le loro tendenze, si trovi la forza *N* equivalente alle forze *P V*, la sua direzione *BO*, e la sua tendenza dal *B* verso l'*O*. E poichè sono fra loro in equilibrio le forze *R P* ℚ ed equivalente è la forza *R* alle forze *X V*, quindi saranno fra loro in equilibrio ancora le forze *X* ℚ *V P*. Ma equivalenti sono la forza *M* alle forze *X* ℚ, e la forza *N* alle forze *V P*. Elleno sono adunque fra loro in equilibrio le due forze *M N*; laonde saranno esse uguali e direttamente
Com. contrarie, e però applicate ad una comune direzione. Retta
Conc. 2 è dunque la linea *ZCBO*. Adunque la *BO* è nel piano *AGBE*; ma la *BE* è nello stesso piano *AGBE*; e la *SB*

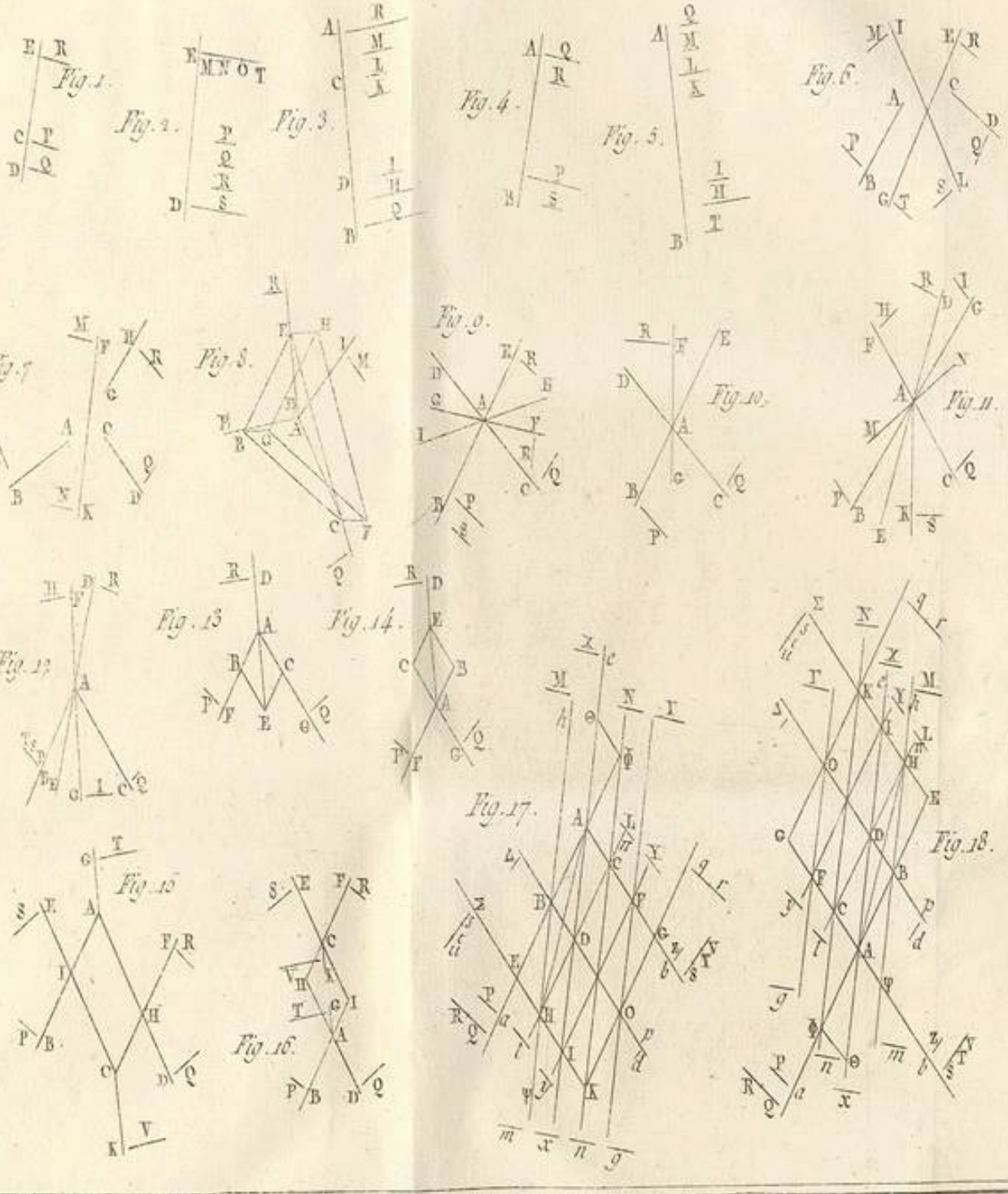


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

Fig. 19.

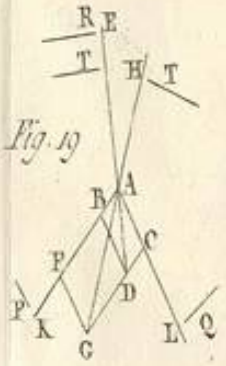


Fig. 20.

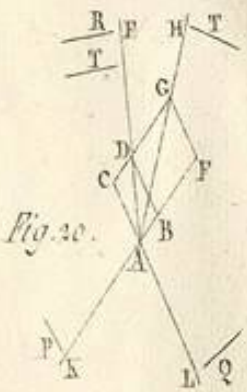


Fig. 21.

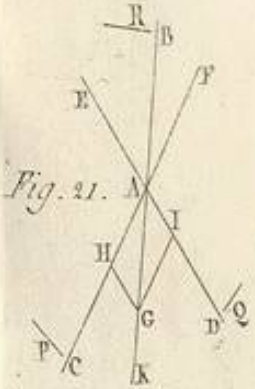


Fig. 22.

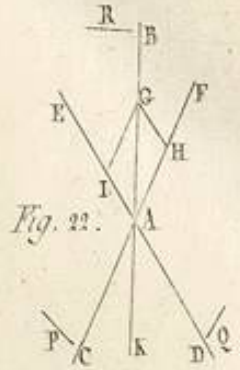


Fig. 23.

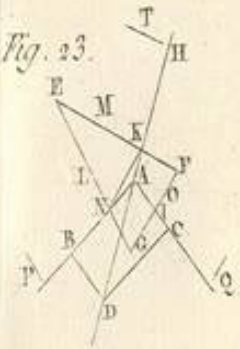


Fig. 24.

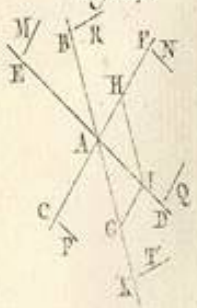


Fig. 25.

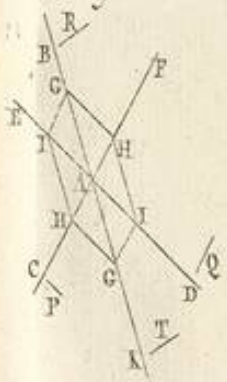


Fig. 26.

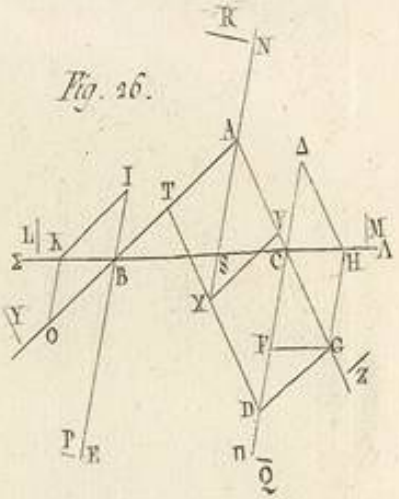


Fig. 27.

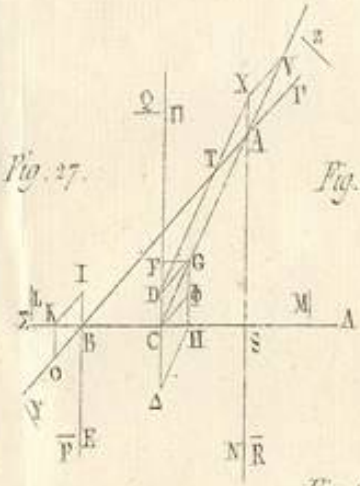


Fig. 28.

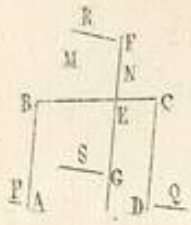


Fig. 29.

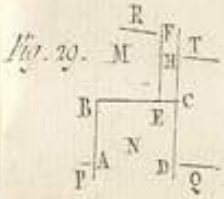


Fig. 30.

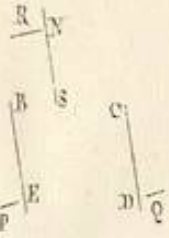


Fig. 31.

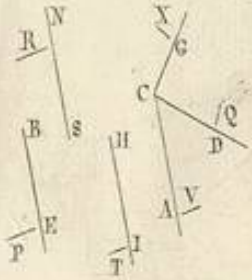
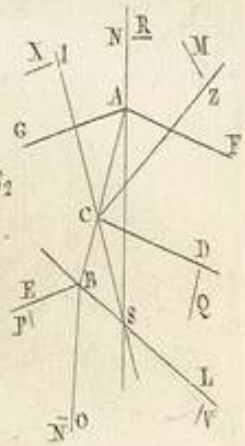


Fig. 32.



non lo è. Ella è adunque la forza *N* applicata secondo la direzione *BO* equivalente alle forze *P V* applicate secondo le direzioni *BE SB*; e le tre direzioni si segano in un punto e non sono nello stesso piano costituite; il che è un assurdo. Adunque due delle direzioni *BE CD SN*, comunque prese, non possono non essere in un piano. Si è poi di sopra dimostrato, che se due sono in un piano ancora la terza è nel piano medesimo; laonde se tre forze applicate a tre direzioni sieno fra loro in equilibrio, le direzioni saranno tutte e tre in un piano; il che convenia dimostrare.

Fine del Primo Elemento di Statica.