DELLA FORZA VIVA DI ALCUNI CORPI

Che ruzzolano sopra un Piano orizzontale, o pure girano intorno ad un Asse verticale, movendosi ancora, se così piace, per una direzione orizzontale.

Del medesimo.

I. SE ad una sfera, che posa sopra un piano orizzontale, si dia un impulso, tutte le sue particole non si muovono colla stessa velocità per una direzione parallela ad esso piano, ma la resistenza, che patisce il punto del contatto, fa sì, che la sfera ruzzoli lungo il piano medesimo. Se il punto del contatto non acquista velocità orizzontale, la sfera si rotola semplicemente; e quando un dato punto, che toccava il piano, ritorna al contatto, il centro della sfera ha corso uno spazio eguale alla circonferenza della sfera medesima. Ma se il punto del contatto per opera dell' urto concepisce qualche velocità orizzontale, nel tempo, in cui esso punto dopo un'intera rivoluzione tocca nuovamente il piano, il centro della sfera ha passato uno spazio maggiore della circonferenza del circolo massimo della sfera stessa, ed in questo caso il moto della sfera è più che di rotazione, eguagliandosi ad un moto di rotazione accresciuto di una velocità orizzontale comune alla sfera intera. Il movimento della sfera sarebbe meno che di rotazione, se mentre ruzzola sopra il piano, retrocedesse con una data velocità orizzontale. Sembrami molto importante il determinare la forza viva di questi corpi che ruzzolano, per sapere qual impulso ad essi si debba imprimere, acciocchè di una conosciuta forza viva facciano acquisto, ed il centro per esempio d' una sfera si muova con una nota velocità. Vogliasi che la sfera *A* (*Fig.* 1.) elastica rotoli sopra il piano orizzontale *AG*, e se saprò la misura della sua forza viva, potrò agevolmente determinare l'altezza *DB*, da cui per guadagnare la detta forza viva dee discendere la sfera uguale,

le, ed elastica *B*, la quale dopo l' urto restando immobile, comunichi tutta la sua forza alla palla *A*.

II. I problemi più semplici mi fanno strada ai più composti. Comincio adunque dal determinare la forza viva d' una circonferenza circolare, e per conseguenza anche d' una superficie cilindrica, che rotola sopra un piano orizzontale. Stabilisco poscia la forza viva d' una circonferenza circolare, che ruzzola sopra un piano orizzontale, ed ha di più una velocità orizzontale o cospirante, o contraria alla direzione del ruotamento. M' inoltro a trovare la forza viva d' un circolo, e conseguentemente ancora d' un cilindro, che rotola sopra un piano orizzontale, considerando i due casi, che sia privo, o sia fornito di velocità orizzontale positiva, o negativa. Dopo ciò considero una linea composta in riguardo all' asse verticale di due rami simili, ed uguali, uno a destra, l' altro a sinistra, che girandosi intorno ad un asse orizzontale, generi una superficie, e supposto che questa si rotoli sopra un piano orizzontale, coll' aggiunta altresì, se così piace, d' una velocità orizzontale, la cui direzione sia normale all' asse predetto, vado in traccia della sua forza viva. Finalmente se la superficie serrata dalla nominata linea, e dall' asse orizzontale giri intorno il detto asse, e generi un corpo, il quale si rotoli sopra un piano orizzontale, e sia, o non sia fornito d' una velocità orizzontale normale all' asse mentovato, io cerco anche di questo corpo la forza viva.

III. Ella è non poco profittevole la riflessione, che il moto di rotazione d' una circonferenza, d' una superficie, d' un corpo è lo stesso che quello di un determinato giramento intorno all' asse orizzontale, il quale cammini orizzontalmente con quella stessa velocità, ond' era dotato nel moto di rotazione. Quindi in ambo gl' incontri la forza viva avrà il medesimo valore, e perciò come per corollario si deduce la forza viva d' una trottola, che giri intorno all' asse verticale, e viaggi lungo una linea segnata nel piano orizzontale con una data velocità.

So benissimo, che si potrebbe far transito a problemi molto più complicati; ma io mi contento di dare presentemente a chi legge questi, che chiamerò elementi del moto di rotazione.

La circonferenza circolare ADBH (Fig. 2.) *ruzzoli sopra il piano orizzontale* AG, *e sia nota la velocità del centro* C: *si dimanda la forza viva della detta circonferenza, e per conseguenza ancora d'una superficie cilindrica, la cui base* ADBHA.

IV. Sia $AC = a$, $AI = x$, $ID = y$, $AD = z$, $AMD = s$, $DE = ds$, e si chiami u la velocità del punto C, ed f la forza viva dell' arco AMD. Quando il punto del contatto si è trasferito da A fino in K per lo spazio $AK = DE = ds$, ed il centro C si è mosso orizzontalmente per lo spazio eguale Cc, è seguito un moto equivalente a quello di giramento intorno al punto A. In fatti egli è noto, che il punto D descrive la cicloide NDd, e che la linea AN s'eguaglia all'arco $AMD = s$, e perciò ritenute le denominazioni di $AI = OD = x$, di $ID = AO = y$, avremo $NO = s - y$, e conseguentemente $DL = ds - dy$. Ora $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; dunque $DL = ds - dy = \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$. Essendo $Ld = dx$, scopriremo essere $DL : Ld :: x : \sqrt{2ax-x^2} = y$: ma anche quando si descrive l'arco Dd col raggio AD, la similitudine dei triangoli DLd, AID mi somministra la stessa analogia $DL : Ld :: AI = x : ID = y$; dunque l'archetto circolare Dd si confonde col cicloidale Dd, e rettamente si può supporre, che il punto D descrivendo l'archetto Dd si giri intorno il punto A; il che &c. Avremo dunque $AC : AD :: Cc : Dd$: ma gli spazj Cc, Dd stanno come le velocità dei punti C, D; dunque $AC = a : AD = z :: u : \frac{uz}{a}$, che sarà la velocità del punto D.

La forza viva dell' elemento $DE = ds$ si eguaglia alla massa ds del detto elemento moltiplicata nel semiquadrato della velocità del punto D; dunque siamo pervenuti all' e-

quazione $\frac{u^2z^2ds}{2a^2} = df$: ma $z^2 = 2ax$, $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; dunque adempiute le sostituzioni, e le operazioni convenienti, $u^2 . \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}} = df$, o sia $u^2 . \frac{adx-adx+xdx}{\sqrt{2ax-x^2}} = df$, e passando all' integrazione, $u^2 . s - \sqrt{2ax-x^2} = f$. Non aggiungo costante; perchè all' arco $AMD = s = o$ ci corrisponde $AI = x = o$, e com' è di dovere $f = o$. Ora quando $s = ADBHA$, $x = o$; dunque in tale incontro la forza viva di tutta la circonferenza, cioè $f = u^2s$.

V. Se l' intera circonferenza circolare si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2s}{2}$ la metà di quella della stessa circonferenza, che ruzzola colla legge, che il centro C si muova colla velocità u.

Che se tutta la circonferenza si movesse colla velocità $u\sqrt{2}$, si scoprirebbe fornita della forza viva u^2s eguale a quella della circonferenza, che ruzzola colla legge predetta.

La circonferenza $ADBHA$ molle, e non elastica venga spinta contro il piano AG per la direzione DA. La sua velocità si risolverà nelle due IA, che si consuma nell' urto, ed ID parallela al piano AG. Sia tale la frizione della circonferenza col piano, che il punto A perda tutto il suo moto; ed accaderà, che se la velocità della circonferenza parallela al piano era prima dell' urto $= u\sqrt{2}$; dovendosi fare il giro intorno al punto A, la velocità di qualsivoglia punto D diverrà proporzionale alla distanza AD, serbata la legge, che si conservi nella totale circonferenza la forza viva u^2s, e perciò qualsisia punto si moverà colla velocità $\frac{uz}{a} = \frac{u\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$, il centro C colla velocità u, ed il punto B colla velocità $2u$.

Quindi urtando la circonferenza nel piano, ed estinguendosi tutta la velocità del punto A, la velocità orizzontale

del punto B si accrescerà in ragione di $u\sqrt{2} : 2u$, o sia di $1 : \sqrt{2}$.

Il circolo AFBHA (Fig. 3.) *ruzzoli sopra il piano orizzontale* AG, *e sia nota la velocità del centro* C : *si dimanda la forza viva della circonferenza concentrica* KDLNK.

VI. Sia $AC = a$, $KC = b$, $AK = BL = c$, $KI = x$, $ID = y$, $AD = z$, $KMD = s$, $DE = ds$, e si nomini u la velocità del centro C, ed f la forza viva dell'arco KMD. Facendosi per le cose dette al num. IV. il movimento intorno al punto A, sarà la velocità del punto $D = \frac{uz}{a}$, e la forza viva dell' elemento $DE = ds$ si troverà $= df = \frac{u^2 z^2 ds}{2a^2}$. Si rifletta essere $z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2$, e giacchè $y^2 = 2bx - x^2$, $z^2 = c^2 + \overline{2c+2b} \cdot x$: ma $2c + 2b = 2a$; dunque $z^2 = c^2 + 2ax$. Abbiamo inoltre ds $\frac{bdx}{\sqrt{2bx - x^2}}$, e perciò $df = \frac{u^2 . (c^2 bdx + 2abxdx)}{2a^2 \sqrt{2bx - x^2}}$

$$= \frac{u^2}{2a^2} \frac{(c^2 bdx + 2ab^2 dx)}{\sqrt{2bx - x^2}} - \frac{u^2}{2a^2} \frac{(2ab^2 dx - 2abxdx)}{\sqrt{2bx - x^2}}$$

$$= \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot \frac{bdx}{\sqrt{2bx - x^2}} - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \cdot \frac{(bdx - xdx)}{\sqrt{2bx - x^2}}.$$

Effettuata l' integrazione, troveremo $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot s - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \sqrt{2bx - x^2}$. Non si aggiunge costante, perchè ad $s = o$ si riferisce $f = o$.

Suppongasi $s = KDLNK$, ed essendo in tal caso $x = o$, ne risulterà $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot s$, ch' è il valore della forza viva cercata.

VII. Se l' intera circonferenza $KDLNK$ si movesse colla

velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2 s}{2}$ e corrisponderebbe a quella della nostra circonferenza, che si gira al ruzzolare del circolo $AFBHA$, come $\frac{u^2 s}{2} : \frac{u^2 s}{2} \cdot \frac{(c^2+2ab)}{a^2}$, cioè a dire come $a^2 : c^2+2ab = a^2+b^2$.

VIII. Si può anche concepire, che la nostra circonferenza $KDLNK$ si giri intorno al punto K, onde il punto D si mova con una velocità di giramento proporzionale a KD, e di più tutta la circonferenza cammini con una velocità orizzontale proporzionale ad AK. In fatti se le due velocità avessero le direzioni KD, AK, comporrebbero la velocità per la direzione AD ad essa linea proporzionale: e nella stessa guisa sendo le loro direzioni normali nei punti D, K alle linee KD, AK producono la velocità relativa ad AD, e normale nel punto D alla linea medesima. La prima velocità si eguaglierà ad $\frac{u.KD}{a} = \frac{u\sqrt{2bx}}{a}$, e la seconda ad $\frac{uc}{a}$, e di queste due velocità si compone la velocità $\frac{u\sqrt{c^2+2ax}}{a}$ di giramento intorno al punto A.

Quindi la circonferenza $KDLNK$ rispettivamente al piano orizzontale KO ruzzola, ed inoltre cammina colla comune celerità $\frac{uc}{a}$.

IX. Fingasi, che la molle circonferenza $KDLNK$ urti nel piano KO colla direzione DK. La velocità DK si risolverà nelle due IK, DI, e consumandosi quella nell'urto, resterà ad essa circonferenza la forva viva $\frac{su^2 . (c^2+2ab)}{2a^2}$, postochè la velocità orizzontale DI prima dell'urto fosse $= \frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a} = \frac{u\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.

Rimanga al punto K dopo l'urto la velocità orizzontale

$\frac{uc}{a}$ ed interverrà che il punto qualunque D della nostra circonferenza si moverà intorno il punto K colla velocità $\frac{u\sqrt{2bx}}{a}$ ed intorno il punto A colla velocità $\frac{u\sqrt{2ax+c^2}}{a}$, conservandosi la forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2} . (c^2+2ab) . s$ nella circonferenza $KDLNK$.

Si osservi che prima dell' urto il punto L veniva animato dalla velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a}$, e dopo l' urto è fornito della velocità $\frac{u\sqrt{c^2+4ab}}{a} = u . \frac{(a+b)}{a}$, e perciò le dette velocità stanno come $\sqrt{c^2+2ab} : \sqrt{c^2+4ab}$, e la seconda è maggiore della prima.

Al contrario la velocità orizzontale del punto K avanti l' urto era $\frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a}$ e dopo l' urto si è ridotta ad $\frac{uc}{a}$, di modo che le dette velocità si riferiscono nella proporzione di $\sqrt{c^2+2ab} : c$, o sia di $\sqrt{a^2+b^2} : a-b$, e per conseguenza il punto K dopo l' urto si move più tardo di prima.

X. Se il circolo $KDLNK$ (*Fig.* 4.) fosse maggiore dell' $AFBHA$, che ruzzola sopra il piano orizzontale AG, si troverebbe nulladimeno la forza viva dell' arco KMD, cioè $f = \frac{u^2}{2a^2} . (c^2+2ab) . s - \frac{u^2}{2a^2} . 2ab\sqrt{2bx-x^2}$, e la forza viva dell' intera circonferenza $KDLNK$ $f = \frac{u^2}{2a^2} . (c^2+2ab) . s$.

XI. Possiamo altresì immaginarci, che la nostra circonferenza ruzzolando sopra il piano orizzontale KO si giri intorno al punto K, di modo che il punto D si mova con

una velocità di giramento proporzionale a KD, ed in oltre tutta la circonferenza viaggi da K verso P colla velocità orizzontale proporzionale ad AK. La prima velocità pareggerà la grandezza $\frac{u\sqrt{2bx}}{a}$, e la seconda sarà $= \frac{uc}{a}$, e di queste due velocità si compone la terza $\frac{u\sqrt{c^2+2ax}}{a}$ di vertigine intorno il punto A.

XII. Posto che $AC = a$ sia minima, ne risulta $AK = CD$: ma il punto C si move da C verso H colla velocità orizzontale proporzionale a $KA = KC$, e con una pari velocità la circonferenza $KDLNK$, e conseguentemente anche il centro C viaggia per direzione contraria da C verso E; dunque esso centro sta in quiete, e perciò la circonferenza $KDLNK$ gira intorno il centro C.

Quindi se la detta circonferenza gira intorno al centro C con velocità proporzionale a CK, e nello stesso tempo viaggia orizzontalmente con pari velocità da K verso O, segue in essa il medesimo movimento, come se ruzzolasse sopra il piano KO, ritenendo il centro la stessa velocità, e nell'uno e nell'altro incontro è fornita di egual forza viva.

XIII. Che se è finita la linea AC, concepisce la circonferenza $KDLNK$ la stessa velocità negli stessi punti, e la medesima forza viva o ruzzoli sopra il piano KO con velocità in ragione delle distanze dal punto K, retrocedendo in oltre colla velocità proporzionale ad AK, o si giri intorno al centro C con velocità relativa a CK, e proceda altresì per la direzione KO con velocità in ragione di AC. Nella prima circostanza sappiamo, che il punto D gira intorno il punto A con velocità in ragione di AD: ora egli è d'uopo provare, che lo stesso succede ancora nella circostanza seconda.

Segno DQ normale, ed uguale a CD, DS normale ed uguale ad AD, e congiunti i punti S, Q colla retta SQ, tiro ST parallela a QD, e DR normale ad SQ.

Essendo retti i due angoli CDQ, ADS, levato il comune CDS, resta SDQ uguale all'ADC, e perciò SQ

$= AC$, ed i due triangoli $SD\mathcal{Q}$, ADC sono uguali. Quindi a cagione degli angoli in R, I retti, l' angolo $\mathcal{Q}DR = CDI$, e perciò levato il primo dall'angolo retto $CD\mathcal{Q}$, ed aggiunto il secondo, ne proviene l' angolo IDR retto, e sendo altresì retto l'angolo SRD, le linee $S\mathcal{Q}$, TD sono parallele ed uguali, e conseguentemente $DT = AC$.

La velocità perpendicolare a CD del punto D intorno il punto C si esprima per $D\mathcal{Q}$ normale, ed uguale a CD, e la velocità orizzontale dello stesso punto D venga indicata dalla linea $DT = AC$, e delle due due mentovate velocità si comporrà la DS normale ed uguale ad AD, come si dovea dimostrare.

Se adunque la circonferenza $KDLNK$ girerà intorno al punto C con velocità in ragione di CK, e di più camminerà per la direzione orizzontale KO colla velocità relativa ad AC, la forza viva dell'arco KMD sarà eguale ad $\frac{u^2}{2a^2}(c^2+2ab).s - \frac{u^2}{2a^2}.2ab\sqrt{2bx-x^2}$ e quella dell' intera circonferenza $= \frac{u^2}{2a^2}.(c^2+2ab).s$.

Il circolo AFBHA (Fig. 5.) *ruzzoli sopra il piano orizzontale* AG, *e sia conosciuta la velocità del centro* C: *si dimanda la forza viva di esso circolo, e per conseguenza d'un cilindro di data lunghezza, cui serva di base il circolo mentovato.*

XIV. Sia $AC = a$, $CK = x$, $Kk = dx$, $AK = BL = a - x$, e si chiami u la velocità del centro C, ed f la forza viva del circolo $KDLNK$. C' insegna il num. VI., che la forza viva della circonferenza $KDLNK = nx$ si esprime per $\frac{u^2}{2a^2}nx\left(\overline{AK}^2 + 2ACK\right) = \frac{u^2}{2a^2}.(na^2x+nx^3)$; dunque la forza viva della zona circolare $KDLNKkdlnk$, cioè $df = \frac{u^2}{2a^2}.(na^2xdx+nx^3dx)$. M' inoltro all' integrazione, e trovo $f = \frac{u^2}{2a^2}.\left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4}\right)$, valore della forza viva

viva del circolo *KDLNK*. Non si dee aggiungere la costante; perchè a $CK = x = o$ ci corrisponde $f = o$.

Pongo $CK = x = CA = a$, e scopro $f = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$, grandezza della forza viva del circolo *AFBHA*.

La forza viva d' un cilindro, la cui base $AFBHA = \frac{na^2}{2}$, e la lunghezza l, sarebbe $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2 l}{4}$.

XV. Se tutto il circolo *AFBHA* si movesse colla velocità u, sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{na^2}{2}$, che si riferirebbe a quella dello stesso circolo che ruzzola in ragione di $2 : 3$. Ma se il detto circolo camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, verrebbe animato dalla stessa forza viva scoperta nella supposizione, ch' esso ruzzoli sopra il piano orizzontale *AG*.

Il nostro circolo privo d' elasticità venga spinto obbliquamente contro il piano *AG*, e la sua velocità orizzontale sia $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Sia tale il fregamento del circolo col piano, che il punto *A* nell' atto dell' urto perda tutto il suo moto, ed interverrà ch' esso circolo ruzzolerà sopra il detto piano conservando la forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$.

La velocità orizzontale del punto *B*, che prima dell' urto era $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, diverrà $= 2u$, e fra le dette due velocità passerà la ragione $\sqrt{3} : \sqrt{8}$.

XVI. Abbiamo trovato la forza viva del circolo *KDLNK* $= f = \cdot \frac{u^2}{2a^2}\left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4}\right)$; dunque ponendo $CK = x = b$,

avremo $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4} \right)$. Se tutto il detto circolo $= \frac{nb^2}{2}$ si movesse colla velocità $\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$, sarebbe fornito della medesima forza viva. Si noti che il punto K viaggia colla velocità $\frac{(a-b) \cdot u}{a}$.

Essendo dotato il circolo molle $KDLNK$ della velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$, urti obbliquamente nel piano orizzontale KO, ed il punto K abbia patita tale resistenza, che gli rimanga la velocità orizzontale $\frac{(a-b) \cdot u}{a}$ ed è facile da scoprire, ch' esso si moverà non altrimenti che il circolo $KDLNK$ contenuto nell' $AFBHA$, che ruzzola sopra il piano AG.

XVII. Pel num. XIII. egli è lo stesso, che la circonferenza $KDLNK$ ruzzoli sopra il piano KO con velocità relative alle distanze dal punto K, movendosi in oltre per la direzione KO colla velocità relativa ad AK, o pure che si giri intorno il punto C con velocità in ragione di CK, e di più cammini per la direzione AG colla celerità proporzionale ad AC.

In ambo le circostanze adunque sarà fornita della stessa forza viva, e perciò il sovrapposto calcolo m' insegnerà, che il circolo $KDLNK$ girante intorno il punto C con velocità proporzionali alle distanze da esso punto, e che viaggia orizzontalmente da C verso H colla velocità proporzionale ad AC, viene animato dalla forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4} \right)$.

La linea NLD (*Fig.* 6.) *composta di due rami simili ed uguali* LD, LN *si giri intorno l' asse orizzontale* ND, *e generi una superficie. Rotoli questa in riguardo alla circonferenza* KL *sopra un piano orizzontale lungo una linea normale al piano di questa carta, e di più si mova per la*

stessa direzione colla velocità proporzionale ad AK : *si dimanda la forza viva della detta superficie, posto che sia nota la velocità proporzionale ad* AC *del centro* C, *o sia dell' asse* ND.

XVIII. Sia $AC = a$, $KC = CL = b$, $AK = c$, $BE = BH = x$, nx la circonferenza del raggio x, $IH = a-x$, $CB = y$, $BP = dy$, $EF = HM = ds$, $CD = CN = g$. Si nomini u la velocità del punto C, ed f la forza viva della superficie $LEHKL$. Pel num. VI. la forza viva della circonferenza circolare del raggio $BE = x$ si eguaglia alla grandezza $\frac{u^2}{2a^2}.(\overline{IH}^2 + 2IBH).nBE$ $= \frac{u^2}{2a^2}.(a^2+x^2).nx = \frac{u^2}{2a^2}.(a^2nx+nx^3)$. Si moltiplichi questa quantità per $EF = ds$, e ne risulterà la forza viva df $= \frac{u^2}{2a^2}.(a^2nx+nx^3).ds$ della superficie elementare $EFMHE$. Integrando poscia avremo la forza viva f $= \frac{u^2}{2a^2}\int(a^2nx+nx^3).ds$ della superficie $LEHKL$.

XIX. Sia retta la linea $LD = \sqrt{b^2+g^2}$, e giacchè $CL : LD :: QE : EF$, o pure analiticamente $b : \sqrt{b^2+g^2} :: -dx : ds = -\frac{dx\sqrt{b^2+g^2}}{b}$ ne risulta il valore di ds dato per dx. Adempiuta la sostituzione, avremo $df = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2b}.(-a^2nxdx - nx^3dx)$, ed integrando, $f = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2b}.\left(A - \frac{na^2x^2}{2} - \frac{nx^4}{4}\right)$. Si determina il valore della costante A riflettendo, che nel sito KL ad $f = o$ corrisponde $x = b$, onde s' abbia A $= \frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4}$. E quindi ci si presenta l' integrazione

compiuta $f = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2b} \cdot \left(\frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4} - \frac{na^2x^2}{2} - \frac{nx^4}{4}\right)$.

Nel punto D è $x=o$, e perciò la forza viva della superficie $LDKL$, cioè $f = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2b}{2} + \frac{nb^3}{4}\right)$, e quella dell' intera superficie $LDKL + LNKL$, $2f$ $= \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2} \cdot \left(na^2b + \frac{nb^3}{2}\right)$.

XX. Conciossiachè la nostra doppia superficie conica si eguaglia ad $nb\sqrt{b^2+g^2}$ s'essa si movesse colla velocità $\frac{u}{a}\sqrt{a^2+\frac{1}{2}b^2}$ sarebbe fornita della medesima forza viva, onde viene animata, allorchè ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che il punto C cammini colla velocità u. Le velocità dunque del detto punto si corrisponderebbero nella ragione di $a : \sqrt{a^2+\frac{1}{2}b^2}$.

Posta $b=a$, il moto della superficie sarebbe di semplice rotazione rispettivamente alla circonferenza KL, e si avrebbe $2f = \frac{3nau^2\sqrt{a^2+g^2}}{4}$.

XXI. La stessa forza viva $2f = \frac{u^2\sqrt{b^2+g^2}}{2a^2} \cdot \left(na^2b + \frac{nb^3}{2}\right)$ competerebbe alla nostra superficie, che si rivolgesse intorno all' asse ND colla legge, che il punto K fosse dotato della velocità $\frac{bu}{a} = v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità u. Questa forza viva si può anche esprimer così

$2f = v^2\sqrt{b^2+g^2} \cdot \left(\frac{na^2}{2b} + \frac{nb}{4}\right)$, sostituendo in vece di u il suo valore $\frac{av}{b}$.

Fingasi $AC = a = o$, e si scoprirà $2f = \frac{nbv^2\sqrt{b^2+g^2}}{4}$, ed in questo caso la superficie, stando immobile l' asse ND, intorno ad esso si gira, ed è fornita d' una forza viva, ch' è la metà di quella, che le competerebbe, se si movesse tutta colla velocità v, colla quale si gira il punto K, o sia la circonferenza KL.

XXII. Sia NLD un semicircolo, e poichè $EF = ds = \frac{-bdx}{\sqrt{b^2-x^2}}$, avremo $df = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \frac{(-a^2bnxdx - bnx^3dx)}{\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{u^2bn}{2} \cdot \frac{-xdx}{\sqrt{b^2-x^2}} + \frac{u^2bn}{2a^2} \cdot \frac{-x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$. L' integrale di $\frac{-xdx}{\sqrt{b^2-x^2}}$ è $\sqrt{b^2-x^2}$. Per integrare la quantità $\frac{-x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}}$, si osservi essere $x^2 = b^2 - y^2$, $xdx = -ydy$, $\sqrt{b^2-x^2} = y$, e perciò $-\frac{x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{(b^2-y^2).ydy}{y} = b^2dy - y^2dy$, e $\int \frac{-x^3dx}{\sqrt{b^2-x^2}} = b^2y - \frac{y^3}{3} = b^2\sqrt{b^2-x^2} - \frac{\overline{b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2} = \frac{\overline{2b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$. Sarà pertanto $f = A + \sqrt{b^2-x^2} \cdot \frac{u^2bn}{2} + \frac{u^2bn}{2a^2} \cdot \frac{\overline{2b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$. Ad $f = o$ ci corrisponde $x = b$, e quindi $A = o$, e perciò $f = \frac{u^2nb}{2}\sqrt{b^2-x^2} + \frac{u^2nb}{2a^2} \cdot \frac{\overline{2b^2+x^2}}{3}\sqrt{b^2-x^2}$ sarà la forza viva della superficie $LEHKL$, che si move colle descritte condizioni. Essendo nel punto D, $x = o$, ne risulta la

forza viva della superficie emisferica $f = \frac{u^2nb^2}{2} + \frac{u^2nb^4}{3a^2}$, e quella di tutta la sferica superficie $2f$

$= 2nb^2u^2 \cdot \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{3a^2} \right)$.

XXIII. Poichè la nostra sferica superficie s' eguaglia a $2nb^2$, s' essa camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{a^2+\frac{2}{3}b^2}}{a}$, avrebbe quella stessa forza viva, di cui è fornita, quando rotolando sopra un piano orizzontale, l' asse ND si muove colla velocità $= u$.

Dato che fosse $b = a$, il moto sarebbe di semplice rotazione rispettivamente alla circonferenza KL, e si scoprirebbe $2f = 2nb^2 \cdot \frac{5u^2}{6}$.

XXIV. La medesima forza viva $2f$

$= 2nb^2 . u^2 . \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{3a^2} \right)$ converrebbe alla sferica superficie, se si rivolgesse intorno l' asse ND colla legge, che il punto L girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed in oltre viaggiasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Surrogando in cambio di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la mentovata forza viva può prendere il seguente aspetto $2f = 2nb^2 \cdot \left(\frac{a^2v^2}{2b^2} + \frac{v^2}{3} \right)$.

Suppongasi $AC = a = o$, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2v^2}{3}$.

In tal circostanza essendo $u = \frac{av}{b} = o$, l' asse ND sta in riposo, e la superficie sferica intorno ad esso si gira. Si osservi che sendo la detta superficie $= 2nb^2$, la sua forza vi-

va sta a quella $\frac{2nb^2v^2}{2}$, che le converrebbe, se si movesse tutta colla velocità v, colla quale gira la circonferenza KL, come $\frac{1}{1} : \frac{1}{2}$, cioè come $2 : 3$.

La superficie NLD (Fig. 6.) *chiusa dall' asse* ND, *e dai due rami di curva simili, ed uguali* LD, LN *giri intorno il detto asse orizzontale* ND, *e generi il corpo* LDKNL. *Rotoli questo in riguardo al circolo* KL *sopra un piano orizzontale, lungo una linea normale al piano di questa carta, ed in oltre si muova per la stessa direzione colla velocità, che a quella di rotazione del punto* L *stia come* AK : KL; *si dimanda la forza viva di esso corpo, posto che sia nota la velocità dell' asse* ND *proporzionale ad* AC.

XXV. Sia $AC = a$, $KC = CL = b$, $AK = c$, $CD = CN = g$, $BE = BH = x$, nx la circonferenza del raggio x, $IH = a - x$, $CB = y$, $BP = dy$. Si chiami u la velocità dell' asse ND, ed f la forza viva del pezzo di corpo $LEHK$. C' insegna il numero XIV., che la forza viva del circolo HE, il cui raggio x, pareggia la quantità $\frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4)$. Si moltiplichi essa per dy, e ne proverrà la forza viva $df = \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ dell' elemento di corpo $EFMH$, ed integrando avremo $f = \int \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ forza viva del corpo $LEHK$.

XXVI. Suppongasi retta la linea $LD = \sqrt{b^2 + g^2}$, e poichè

$$\begin{array}{ccccccc} LC & : & CD & :: & EQ & : & QF \\ b & : & g & :: & -dx & : & dy \end{array}$$

scopriremo $dy = -\frac{gdx}{b}$, e per conseguenza $df = \frac{ngu^2}{8a^2b} \cdot (-2a^2x^2dx - x^4dx)$. Passo all' integrazione, ed ho $f = A - \frac{ngu^2}{8a^2b} \cdot \left(\frac{2a^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right)$. Nel posto KL

ad $f=o$ ci corrisponde $x=b$, e perciò A $=\frac{ngu^2}{8a^2}\cdot\left(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5}\right)$. Quindi l' integrazione compiuta $f=\frac{ngu^2}{8a^2}\cdot\left(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5}-\frac{2a^2x^2}{3b}-\frac{x^4}{5b}\right)$: ma rispettivamente al punto D, $x=o$; dunque l' intero cono LDK sarà fornito dalla forza viva $f=\frac{ngu^2}{8a^2}\cdot\left(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5}\right)$, ed il doppio cono $LDKNL$ della forza viva $2f$ $=\frac{ngu^2}{4a^2}\cdot\left(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5}\right)$.

XXVII. Eguagliandosi la massa del nostro corpo ad $\frac{nb^2}{3}g$, se esso si movesse colla velocità $\frac{u}{a}\sqrt{a^2+\frac{3b^2}{10}}$, avrebbe quella stessa forza viva, da cui viene animato, quando ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che l' asse ND viaggi colla celerità u. Le velocità dunque del detto asse si riferirebbero nella proporzione di $a:\sqrt{a^2+\frac{3}{10}b^2}$.

Posta $b=a$, il moto del corpo sarebbe di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza KL, e si troverebbe $2f$ $=\frac{ngu^2}{4}\cdot\left(\frac{13}{15}b^2\right)=\frac{nb^2}{3}g\cdot\frac{13u^2}{20}$.

XXVIII. La stessa forza viva $2f=\frac{ngu^2}{4a^2}\cdot\left(\frac{2a^2b^2}{3}+\frac{b^4}{5}\right)$ apparterrebbe al nostro corpo, che si rivolgesse intorno l' asse ND colla condizione, che la circonferenza KL girasse colla velocità $\frac{bu}{a}=v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla celerità u $=\frac{av}{b}$. Sostituendo in luogo di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la

mentovata

mentovata forza viva si può anch' esprimere come segue $2f = \frac{ngv^2}{4} \cdot \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{5}\right)$.

Se $AC = a = o$, la velocità $u = \frac{av}{b}$ dell' asse ND sarà uguale a nulla, ed il corpo, che girerà intorno al detto asse immobile, sarà fornito della forza viva $2f = \frac{ngb^2v^2}{20} = \frac{nb^2g}{3} \cdot \frac{3v^2}{20}$. Se tutto esso corpo si movesse colla velocità v, colla quale girasi la circonferenza KL, verrebbe animato dalla forza viva $\frac{nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2}$, a cui quella del corpo, che si rivolge intorno all' asse ND, sta come $\frac{3}{20} : \frac{1}{2}$, o sia come $3 : 10$.

XXIX. Dalle cose dimostrate si deduce come per corollario la misura della forza viva d' una trottola di figura conica, in cui la circonferenza del circolo massimo si giri intorno all' asse colla velocità v.

Se l' asse è immobile, abbiamo $f = \frac{nb^2gv^2}{40}$, e se l' asse si muove in un piano orizzontale per una data direzione colla velocità $u = \frac{av}{b}$, alla trottola compete la forza viva $f = \frac{ngv^2}{8} \cdot \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{5}\right)$.

XXX. Sia NLD una mezza ellisse, la cui equazione $\frac{b^2}{g^2} \cdot (g^2 - y^2) = x^2$. Nella formola $df = \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ si sostituisca in cambio di x^2 il suo valore, e ne risulterà $df = \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left(2a^2dy - \frac{2a^2y^2dy}{g^2} + b^2dy - \frac{2b^2y^2dy}{g^2} + \frac{b^2y^4dy}{g^4}\right)$. L' integrazione ci dà f

$= \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left((2a^2+b^2) \cdot y - \frac{(2a^2-2b^2) \cdot y^3}{3g^2} + \frac{b^2y^5}{5g^4} \right)$. Non aggiungo costante, perchè com' è di dovere ad $y=o$ ci corrisponde $f=o$. La forza viva trovata conviene al pezzo d'ellissoide $LEHK$.

Poichè nel punto D, $y=g$, sarà $f = \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} \right) \cdot g = \frac{u^2nb^2}{2a^2} \cdot \frac{(5a^2+2b^2)}{15} \cdot g$ la forza viva della mezza sferoide LDK, e quella di tutta la sferoide intera $LDKNL$ $2f = \frac{u^2nb^2}{a^2} \cdot \frac{(5a^2+2b^2)}{15} \cdot g$. S'inferisca, che le forze vive d'una sferoide, e d'una sfera, che differissero soltanto nel semiasse CD, si riferirebbero nella proporzione di $g : b$.

XXXI. Conciossiachè la massa della sferoide pareggi la grandezza $\frac{2nb^2g}{3}$, se la stessa camminasse colla velocità $\frac{u \cdot \sqrt{a^2 + \frac{2}{5}b^2}}{a}$ avrebbe la medesima forza viva, di cui è dotata, quando, rotolando sopra un piano orizzontale, l'asse ND si muove colla velocità u.

Se il punto A coincidesse col punto K, il moto sarebbe di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza KL, e ne risulterebbe $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \frac{7}{5}$.

XXXII. La stessa forza viva $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{u^2}{2a^2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}b^2)$ competerebbe alla nostra sferoide, se circolasse attorno l'asse ND colla condizione, che la massima circonferenza KL girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed altresì la sferoide tutta camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Po-

nendo in vece di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la nominata forza viva si può esprimere come segue $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2b^2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}b^2)$ $= \frac{ngv^2}{3} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}b^2)$.

Fingasi $AC = a = o$, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2gv^2}{15}$. Sendo in tale congiuntura $u = \frac{av}{b} = o$, l'asse ND non fa moto, e la sferoide girasi intorno ad esso. Egli è da notarsi che la forza viva si riferisce a quella $\frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2}$, che le converrebbe, se tutta si muovesse colla velocità v, colla quale gira la circonferenza KL, nella ragione di $\frac{2}{5} : \frac{1}{2}$, o sia di $2 : 5$.

Acciocchè le due forze vive fossero uguali, bisognerebbe, che l'intera sferoide camminasse colla velocità $v\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Fig. 1.

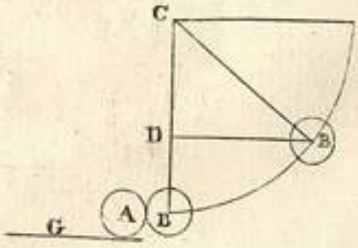

Fig. 2.

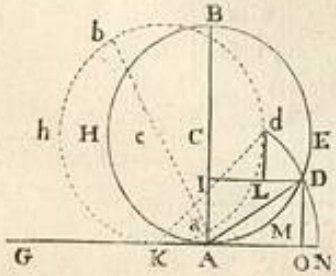

Fig. 3.

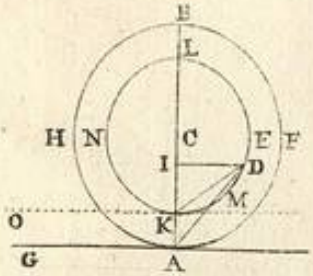

Fig. 4.

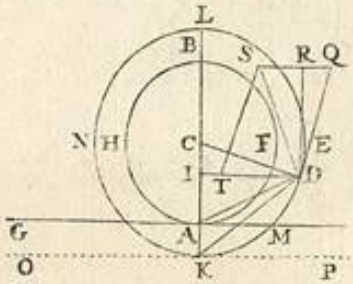

Fig. 5.

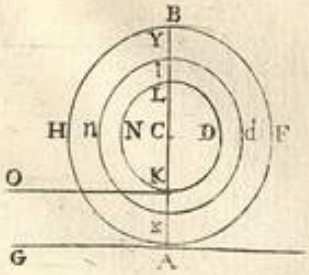
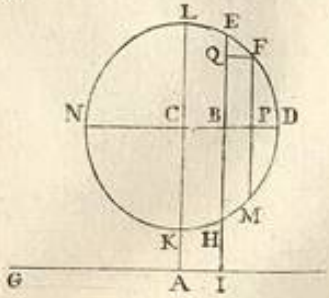
Fig. 6.