TEOREMA

IL NULLA IMMAGINARIO NON PUO' CONFONDERSI COL REALE.

DEL MEDESIMO.

I. IL celebratissimo Signor *Leonardo Eulero* con un ingegnoso metodo determina (chiamata p la semicirconferenza circolare del raggio $= 1$.) log. $1 = \pm o \cdot p\sqrt{-1}$, $\pm 2p\sqrt{-1}$, $\pm 4p\sqrt{-1}$, &c.; log. $-1 = \pm p\sqrt{-1}$, $\pm 3p\sqrt{-1}$, $\pm 5p\sqrt{-1}$, &c., e confondendo il nulla immaginario col reale, cava la conseguenza, che log. 1 ha un valor reale $= o$, ed infiniti immaginarj; laddove a log. -1. non competono salvochè infiniti valori immaginarj, e questa illazione la estende a qualunque numero positivo, e negativo.

II. Affermo frattanto essere immaginario log. $1 = o . p\sqrt{-1}$, e che col metodo del lodato Autore non si scoprono per log. ± 1 senonse valori immaginarj, a cagione che il nulla immaginario non può confondersi col reale. Per trovare i logaritmi reali dei numeri positivi, e negativi, egli è d'uopo ricorrere o alla quadratura dell' iperbola conica fra gli assintoti, o alla formola $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{h}} = x$, nella quale f significa il protonumero, y il logaritmo, x il numero, ed h, g un logaritmo, ed un numero corrispondenti, il qual logaritmo sia dotato della condizione di eguagliarsi ad un numero pari.

III. Provo evidentemente, che il nulla immaginario non può considerarsi come un nulla reale, deducendo questa verità dall' equazione del ramo inferiore della concoide. Sia *BDI* (*Fig.* 1.) la metà del ramo inferiore della concoide, la quale è fornita della proprietà, che tirate a squadra le due rette *AF*, *AC*, e menata dal punto fisso *C* la linea *CF*, e tagliata *FD* uguale alla data *AB*, il punto *D* appartenga alla curva. Pongasi $AB = FD = a$, $AC = b$, $AE = GD = x$,

$ED = AG = y$, ed essendo $EF = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, $GC = b - y$, dall' analogia

$$\begin{array}{ccccccc} GD & : & GC & :: & EF & : & ED \\ x & : & b-y & :: & \sqrt{(a^2-y^2)} & : & y \end{array}$$

si raccoglierà la nota equazione $x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2-y^2)}$, ovvero $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2-y^2)}$, espressione spettante all' intero ramo inferiore $IDBdi$ della nostra curva. Suppongasi, qualmente la Figura (1.) dimostra, $AC = b > AB = a$, e posta $AG = y = AC = b$, scopriremo $\pm x = o . \sqrt{(a^2-b^2)}$, ossia $\pm x = o . \sqrt{(b^2 - a^2)}\sqrt{-1}$, cioè a dire $\pm x$ uguale al nulla immaginario. Resteremo convinti, che questo non possa far figura d'un nulla reale, riflettendo che il punto C non appartiene alla curva $IDBdi$; imperciocchè per esso non passa il punto D descrivente la curva.

IV. Facciasi ora $AG = y = AB = a$, e l'equazione prenderà il seguente aspetto $\pm x = \frac{(b-a) . \sqrt{(a^2-a^2)}}{a} = (b-a) . o$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Nel punto B adunque $\pm x$ si eguaglia al nulla reale, ed in fatti il punto B spetta alla curva $IDBdi$, passando per lo stesso il punto descrivente D.

Se fosse $AC = b = AB = a$, il punto C coinciderebbe col punto B, ed uguagliandosi $\pm x$ al nulla reale, la curva si approprierebbe il punto C.

Fingasi $AG = y > AB = a < AC = b$, ed una tal quantità pongasi $= c$. In questa ipotesi ci si presenterà l' equazione $\pm x = \frac{(b-c)}{c} \cdot \sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{(b-c)}{c} \cdot \sqrt{(c^2 - a^2)}\sqrt{-1}$ quantità immaginaria.

Che se si supponga $AG = y > b$, onde s'abbia $y = e > b$, ne proverrà la formola $\pm x = \left(\frac{b-e}{e}\right) \cdot \sqrt{(e^2-a^2)}\sqrt{-1}$ grandezza parimente immaginaria.

V. E qui egli è d' uopo fare la riflessione, che trovandosi procedendo da B verso A i valori reali di x, e procedendo da B verso C i valori immaginarj, abbiamo è vero in B un nulla di quantità immaginaria, ma abbiamo altresì un nulla di quantità reale, e perciò il punto B compete alla curva $IDBdi$.

Ma in riguardo al punto C s' incontra l' immaginario tanto da C verso B, quanto da C verso H, e conseguentemente in C v'è un doppio nulla di quantità immaginaria, e per questa ragione il detto punto non appartiene alla curva.

VI. Resta da considerarsi l' ipotesi, che sia $AC = b < AB = a$, nella quale la curva si adatta alla Figura (2.). Stabilita $y = b$, si trova $\pm x = o . \sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Trovandosi i valori reali di $\pm x$ e da C verso A, e da C verso B, il punto C per doppio titolo ha luogo nella curva $IDCKBkCdi$.

Il punto B conviene alla curva, perchè in esso congiuntamente, come nella Figura (1.), $\pm x = \left\{ \begin{matrix} o \\ o \end{matrix} \right. \sqrt{-1}$, rinvenendosi il primo nulla, quando si arriva da A in B, ed il secondo, quando si giunge da H in B.

VII. I medesimi discorsi si possono applicare alla curva dell' equazione $\pm x = \frac{(b-y)}{b} . \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Descritte a squadra le due rette (*Fig.3.*) CB', Ii, che s' interfechino nel punto A, taglio $AB = AB' = a$, $AC = b > a$, $AG = y = AG' = -y$, e fatte $GF = G'F = a$, pei punti C, F conduco la linea CD', la quale s' incontrerà nei punti D, D' colle linee GD, $G'D'$ normali a CB', i quali due punti apparterranno ai due rami inferiore $IDBdi$, e superiore $ID'B'd'i$ della curva, che vogliamo delineare, onde s' abbia $GD = x$, $G'D' = x$. Ed infatti per la similitudine de' triangoli CAF, $CGD = CGd$, $CG'D' = CG'd'$ abbiamo le analogie

$$CA : AF :: CG : GD = Gd$$
$$b : \sqrt{(a^2 - y^2)} :: b - y : \pm x$$
$$CA : AF :: CG' : G'D' = G'd'$$
$$b : \sqrt{(a^2 - y^2)} :: b - y : \pm x$$

che ci danno $\pm x = \frac{(b-y)}{b} \sqrt{(a^2 - y^2)}$, ch' è l' equazione proposta.

VIII. Supponendosi $AC = b > AB = a$, se si faccia $AG = y = AC = b$, si troverà $\pm x = o . \sqrt{(a^2 - b^2)} = o . \sqrt{(b^2 - a^2)} \sqrt{-1}$

uguale al nulla immaginario. Si renderà manifesto, ch' esso non possa considerarsi come un nulla reale, osservando che il punto C non conviene alla curva $IDBdi$, la quale, se BB' sia verticale, non discende più abbasso del punto B, a cui perviene, quando, essendo $AF = \sqrt{(a^2 - y^2)} = o$, i due punti G, D si congiungono in B.

Stabilita $AG = y = AB = a$, ne risulta $\pm x = (b-a).o$, ossia $\pm x$ uguale al nulla reale, e perciò il punto B spetta alla curva $IDBdi$.

Lo stesso accaderebbe, se fosse $AC = b = AB = a$; imperciocchè il punto C coinciderebbe col punto B.

Sia $AG = y > AB = a < AC = b$, e tale grandezza pongasi $= c$, onde ci si offerisca l'equazione $\pm x =$ $\frac{(b-c)}{b}.\sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{(b-c)}{b}.\sqrt{(c^2 - a^2)}\sqrt{-1}$, che determina $\pm x$ uguale ad una quantità immaginaria.

Se poi si faccia $AG = y > b$, dimodochè s' abbia $y = e > b$, ne deriverà la formola $\pm x = \frac{(b-e)}{b}.\sqrt{(e^2 - a^2)}\sqrt{-1}$, grandezza altresì immaginaria.

Ai punti B, C si accomodano le riflessioni, che si leggono al numero V., e che io stimo superfluo il ripetere.

IX. Passo ad esaminare la supposizione di $AC = b < AB = a$, in cui la curva vien espressa dalla Figura (4). Determinata $y = b$, si scopre $\pm x = o.\sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè x ugual al nulla reale. Incontrandosi i valori reali di x e da C verso A, e da C verso B; il punto C per doppia ragione appartiene alla curva $IDCKBkCdi$.

X. Da quanto ho scritto si deducono i seguenti Corollarj.

1. Se ad y reale si riferisce x uguale al nulla reale, il punto estremo d' y compete alla curva, quantunque allo stesso punto corrisponda x uguale al nulla immaginario.

2. Se ad y reale s' adatta soltanto x uguale al nulla immaginario, l'ultimo punto d' y non conviene alla curva.

3. Quindi il nulla immaginario non può confondersi col reale, e conseguentemente i logaritmi dell' unità positiva, e negativa scoperti dall' *Eulero* col suo metodo sono tutti immaginarj.

XI. Se al punto estremo B (*Fig.* 5.) del protonumero $AB = 1$ corrispondesse unicamente il logaritmo uguale al nulla immaginario, il detto punto non competerebbe alla curva, ed intanto le compete, in quanto che ad esso punto si riferisce il logaritmo ugual al nulla reale. Dipende ciò dalla natura della logaritmica, in cui ad una serie geometrica di numeri reali dee riferirsi una serie aritmetica di logaritmi reali. Nella logistica delle tavole si hanno le due progressioni relative di numeri, e di logaritmi.

$$\&c.\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 1,\ 10,\ 100,\ \&c.$$
$$\&c.\ -2,\ -1,\ o,\ 1,\ 2,\ \&c.$$

Egli è patente, che dai logaritmi reali positivi si dee passare mediante il nulla reale agli eguali logaritmi negativi, essendo il nulla medio aritmetico fra 1 e -1, fra 2 e -2 &c.

XII. Per una pari ragione, essendo pel metodo del dottissimo *Eulero* log. $1 = \&c. -4p\sqrt{-1},\ -2p\sqrt{-1},\ o.p\sqrt{-1},\ +2p\sqrt{-1},\ +4p\sqrt{-1}$ &c., il $o.\ p\sqrt{-1}$, ch'è medio aritmetico fra $-2p\sqrt{-1}$ e $+2p\sqrt{-1}$, fra $-4p\sqrt{-1}$ e $+4p\sqrt{-1}$, &c. tutte quantità immaginarie, ha da essere necessariamente immaginario. Il tanto celebre argomento adunque contro i logaritmi reali dei numeri negativi perde tutta la forza deducendosi evidentemente dai miei raziocinj, che il metodo del lodato Autore determina tutti immaginarj i logaritmi e dei numeri positivi, e dei numeri negativi. E siccome ciò non esclude, che ai numeri positivi competano dei logaritmi reali, altrettanto deve altresì affermarsi dei numeri negativi, ai quali non meno i logaritmi reali si adattano, che la quadratura dell' iperbola fra gli assintoti, e la formola esponenziale della logistica $f\left(\frac{g}{f}\right)^{\frac{y}{b}} = x$ dimostrano uguali a quelli dei numeri positivi.

XIII. Conchiudo con una importante avvertenza. Alla serie geometrica delle unità negative sottopongo la serie aritmetica dei logaritmi, che ha loro assegnati l'*Eulero*.

&c.

&c. -1 , $-(1)$, -1 , $-(1)$, -1 ,
$-(1)$, -1 , $-(1)$, -1 , &c.
&c. $-5p\sqrt{-1}$, $-(4p\sqrt{-1})$, $-3p\sqrt{-1}$, $-(2p\sqrt{-1})$, $-p\sqrt{-1}$,
$(0.p\sqrt{-1})$, $+p\sqrt{-1}$, $+(2p\sqrt{-1})$, $+3p\sqrt{-1}$, &c.

Tra due unità negative vicine ci colloco una media geometrica anch' essa $=-1$, ed acciocchè si distinguano queste medie, le chiudo fra due parentesi. Per la natura della logistica il medio aritmetico fra due logaritmi s' eguaglia al logaritmo del medio geometrico fra i due numeri corrispondenti ; dunque log. $-1 = -4p\sqrt{-1}$, $-2p\sqrt{-1}$, $0.p\sqrt{-1}$, $+2p\sqrt{-1}$, $+4p\sqrt{-1}$, &c. , che sono quegli stessi logaritmi, che il profondissimo Autore ha scoperto competere all' unità positiva.

XIV. Similmente sotto la progressione geometrica delle unità positive ci scrivo i logaritmi, che l' *Eulero* ha giudicato a loro appartenere

&c. 1 , (1) , 1 , (1) , 1 ,
(1) , 1 , (1) , 1 , &c.
&c. $-4p\sqrt{-1}$, $-(3p\sqrt{-1})$, $-2p\sqrt{-1}$, $-(p\sqrt{-1})$, $0.p\sqrt{-1}$,
$+(p\sqrt{-1})$, $+2p\sqrt{-1}$, $+(3p\sqrt{-1})$, $+4p\sqrt{-1}$, &c.

e tra due unità vicine metto la media geometrica $=1$, e fra i corrispondenti logaritmi la media aritmetica. Ed affinchè tali medie si possano agevolmente discernere, le serro fra due parentesi. Si osservi, che in questo incontro altresì la proprietà essenziale della logaritmica ricerca, che convengano a $+1$ quei logaritmi $-3p\sqrt{-1}$, $-p\sqrt{-1}$, $+p\sqrt{-1}$, $+3p\sqrt{-1}$, &c., che l' *Eulero* ha stimato soltanto proprj di -1.

XV. S' inferisca pertanto, che ai numeri positivi, e negativi gli stessi logaritmi e immaginarj, e reali si adattano, la qual seconda proposizione si dimostra, come ho detto di sopra, col mezzo della quadratura dell' iperbola fra gli assintoti, e della formula esponenziale della logistica.

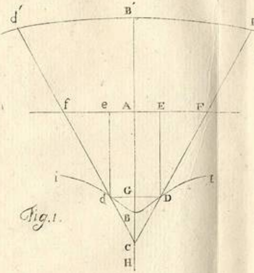

Fig. 1.

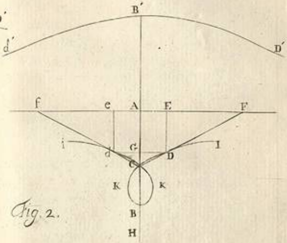

Fig. 2.

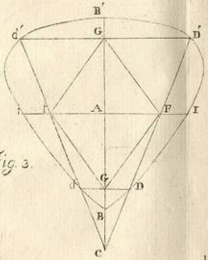

Fig. 3.

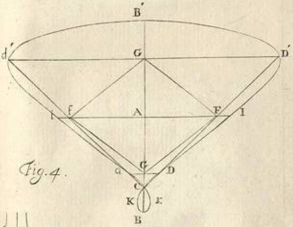

Fig. 4.

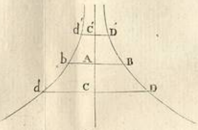

Fig. 5.