MISURA

DELL' IMPULSIONE PERMANENTE DE' LIQUIDI CONTRO LE SUPERFICIE PIANE.

Del Sig. Cavaliere Lorgna.

MAturamente esaminando ciò che dagl' Idrodinamici è stato scritto fino a' dì nostri intorno all' impulsione de' liquidi in moto, è forza confessare, che non traluce tuttora raggio di verità decisa e incontrastabile in sì fatto argomento. E mettendo anche da parte il caso degli ostacoli totalmente immersi nel fluido impellente, oscuro quant' altri mai, sono divise tuttavia le sentenze de' Dotti anche intorno all' impulsione solamente di una vena fluida contro una superficie piana non immersa, l' estimazione che se ne fa per alcuni differendo niente men che del doppio dall' estimazione d' altri non pochi. Quindi incertezza ragionevole per entrambe. Il Sig. de la *Grange*, i cui talenti nelle Scienze Matematiche sono abbastanza noti, e superiori a' miei elogi, è l' ultimo, che siasi accinto di proposito a troncare, se poteva farsi, la quistione nella 1. Parte delle Mem. della R. A. delle Scienze di Torino, per gli anni 1784 - 1785.

Ma a qualche supposizione è dato luogo nel lavoro di quest' eccellente Geometra, da cui sembra esser tolto moltissimo al rigore delle sue dimostrazioni. E tanto più che dalla sua medesima teoria potrebbe conchiudersi a buon diritto, per misura dell' impulsione, un po più che non è il peso dedotto, mettendo a conto la pressione, che non può trascurarsi, del Conoide liquido assunto come nocciolo stagnante della vena, il quale mentre trasmette alla superficie sottoposta la pressione del canale circonfuso, non lascia di premerla anch' esso col proprio peso naturale. Questo è l' argomento della presente Memoria, in cui tento di farmi strada nel suggetto co' soli inconcussi principj della Dinamica,

ſottomettendo al giudicio degl' Idrodinamici, e di lui medeſimo il mio tentativo.

PRINCIPJ

(I)

Una vena di liquore in moto per un mezzo non reſiſtente, le cui ſtille ſieno tutte animate da una ſteſſa velocità, e tutte moſſe ſecondo la ſteſſa direzione, è come un fluido imperfetto di parti diſgiunte e ſolitarie con lo ſteſſo movimento, e come ſe l' adenione tra le ſue ſtille non aveſſe luogo, durante queſto ſtato, ſiccome la coerenza è, come ſe non foſſe, tra le parti di un corpo concreto abbandonato all' azione libera della gravità nel vacuo.

(II)

Neceſſariamente dunque tutte le ſezioni parallele di queſta vena debbono eſſere tra di sè uguali.

(III)

Prendendo pertanto le ſezioni ſecondo l' andamento naturale del liquore, cioè perpendicolari alla direzione del moto, ſi concepiſca, che a qualunque di queſte ſezioni liquide venga ſoſtituita una ſuperficie piana inflеſſibile. E' coſa indubitata, che, perchè il fluſſo della vena ſia permanente come prima nelle ſezioni anteriori, ſarà neceſſario, che le ſezioni liquide ſucceſſivamente incorrenti in queſta ſuperficie ſi ſottraggano iſtantaneamente dopo l' impreſſione fatta, e diano luogo alle immediatamente ſuſſeguenti.

(IV)

Per conſeguenza le ſtille ſucceſſivamente ſottraentiſi non debbono più entrare nel ſiſtema della vena attualmente fluente, e l' impreſſione, che le ſezioni della vena ſucceſſivamente incorrenti nella ſuperficie ſottopoſta eſercitano contro di

essa, continua ad essere dovuta al momento costante del sistema.

(V)

Affinchè dunque la quantità dell'impulsione sostenuta dalla superficie impulsa sia una, determinata, e costante nello stato di flusso permanente, è d'uopo, che le stille sottratte, straniere da quell'istante al sistema delle stille impellenti, cessino di agire su la superficie soggetta dopo l'impressione primitiva.

(VI)

E perchè ciò sia è forza, che la superficie impulsa sia limitata ad accogliere la sola sezione liquida impellente nè più, nè meno, ch'è quanto dire, che le sia esattamente simile ed eguale, affinchè le stille della sezione anteriore dopo l'impressione fatta scappino per ogni verso fuor dell'ambito della nuova sezione impellente immediatamente successiva.

(VII)

Due condizioni pertanto debbono verificarsi per una giusta estimazione della quantità dell'impulsione perpendicolare di una vena liquida fluente uniformemente contro una superficie piana, cioè primamente, che le stille si sottraggano dalla vena dopo l'impressione fatta, e in secondo luogo, che le stille sottratte dalla vena non rimangano a carico della superficie soggetta.

La prima si verifica puntualmente, come può accertarsi chiunque ne faccia da sè l'esperimento, non essendo nel caso nostro la superficie percossa immersa nel fluido. Imperciocchè facendo cadere un liquore da un pertugio orizzontale nel fondo di un vase, ove sia mantenuto il liquore a costante altezza, sopra una superficie piana di metallo o di pietra, osserverà sempre, ridotta che sia permanente l'impressione, che il prisma liquido insiste costantemente su quella superficie come se fosse solido; e intanto sprizza dal contorno dell'infime sezioni il liquore per ogni verso sottra-

endoſi dalla vena, e diſtendendoſi pel ſoggetto piano; ch' è coſa belliſſima a vederſi; facendoſi tanto contiguamente alla ſuperficie percoſſa, e sì rapidamente la ſottrazione, che non appariſce indizio di sfiguramento nella vena, la quale vi ſta fitta coſtantemente, come ſe foſſe di criſtallo.

La ſeconda condizione poi potrà ſempre aver luogo, mentre la ſoggetta ſuperficie ſia ſimile ed eguale alla ſezione della vena, e non ne reſti per ſervir di fondo al liquore che ſcappa, e aſſolutamente non fa più ſiſtema con la vena impellente, come s'è detto.

(VIII)

Dal non eſſere ſtato convenevolmente avvertito, che il liquore che ſi ſottrae ſucceſſivamente dalla vena non dee più appartenere alla vena impellente, derivano principalmente le incertezze in cui è tuttora involta queſta delicatiſſima parte dell' Idrodinamica. Senza una limitazione della ſuperficie impulſa, che adegui eſattamente la ſezione impellente, non può mai fiſſarſi una miſura unica dell' impulſione, dovendo eſſere diſtinto e valutato a parte il di più che proviene dal ſiſtema delle ſtille ſottratte dalla vena, allorchè la ſuperficie percoſſa eccede la ſezione vera impellente, e diſtinto pure e valutato a parte il di meno, allorchè la ſuperficie è minore della ſezione liquida impellente. Ciò premeſſo dimoſtreremo i ſeguenti Teoremi.

TEOREMA I.

L' impulſione permanente perpendicolare di una vena di liquore uniformemente fluente nel vacuo contro una ſuperficie piana immobile ſimile ed eguale alla ſezione proſſima imminente della vena, il cui piano ſia perpendicolare alla direzione del moto, ha per miſura il peſo di un priſma del medeſimo liquore avente per baſe la medeſima ſezione della vena, o la ſuperficie percoſſa, e per altezza il doppio dell' altezza da cui dovrebbe ſcendere nel vacuo liberamente dalla quiete un grave per acquiſtare la velocità uniforme della vena.

Sia *ABCD* (*Fig. IX*) la vena fluente del propoſto liquore, di cui la denſità ſia d, e le cui ſtille ſieno animate dalla velocità uniforme c, e moſſe con la direzione AC per un mezzo non reſiſtente; e ſia v l'altezza dovuta alla velocità della vena c. Si concepiſca, che una delle ſtille ſolitarie (I) di queſta vena la cui maſſa ſia m, ſeparatamente dal ſiſtema cada nel vacuo liberamente dalla quiete per la verticale NM (*Fig. X*). E poichè la maſſa m rappreſenta il peſo della ſtilla, rappreſenterà ella a un tempo la forza della gravità g, e però la forza acceleratrice $\frac{g}{m}$ di queſta ſtilla ſarà uguale all' unità. Scorſo il tempo t, ſia queſta ſtilla pervenuta in M, ove abbia acquiſtato la velocità c, e ſia $NM = x$. Progredendo il ſuo movimento accelerato percorra la ſtilla nel tempo infinitamente piccolo dt lo ſpazietto $Mm = dx$. E poichè abbiamo ſuppoſto eſſere v l' altezza dovuta alla celerità c, ſarà per i principj della Dinamica $dv = \frac{g}{m} dx$, e però nel caſo noſtro in cui la forza acceleratrice è uguale all' unità, ſarà $dv = dx$, cioè l' incremento dell' altezza v ſarà uguale all' elemento dello ſpazio percorſo. Dunque $\frac{dx}{c} = \frac{dv}{c}$. Come poi l' elemento dx dee ſupporſi percorſo con moto uniforme, ſarà $\frac{dx}{c} = dt$, e in conſeguenza anche $\frac{dv}{c} = dt$. Ma pe' medeſimi principj della Dinamica l' incremento della velocità dc è proporzionale al prodotto della forza acceleratrice nel tempuſcolo dt. Per conſeguenza nel caſo noſtro ſarà l' incremento dc proporzionale a dt. Si ſoſtituiſca pertanto dc in luogo di dt nell' equazione $\frac{dv}{c} = dt$, e ſarà $dv = cdc$, di cui l' integrale completo ſomminiſtrerà la relazione $c^2 = 2v$ tra la velocità c di qualunque ſtilla della vena, e l' altezza v da cui dee ſcendere nel vacuo una ſtilla ſolitaria per acquiſtare queſta medeſima velocità in fine della ſua diſceſa. In conſeguenza ſe venga ſegata, ovunque ciò ſia, la vena fluente con un piano EF perpendicolare alla direzione del

moto, è certo, che questa relazione dee verificarsi per tutta l' estensione della sezione liquida *EF* puntualmente. Posto ciò s' intenda sottoposta immediatamente a questa sezione una superficie piana immobile, cui diremo f^2, simile ed eguale alla sezione *EF*, che interrompa il flusso della vena, e riceva l' impressione dovuta al momento della sezione liquida impellente. Essendo in libertà (VII) le stille di questa sezione di sottrarsi per ogni verso, dopo l' impressione fatta, dando luogo alla nuova sezione immediatamente susseguente, e così successivamente, si concepisca costituito il flusso e l' impulsione in istato permanente. E poichè misura della forza impulsiva de' liquori fluenti uniformemente è il prodotto della quantità di materia in moto per la velocità del flusso, e la quantità di materia è misurata dal prodotto della sezione liquida fluente per la velocità del flusso, sarà misura della forza impulsiva il prodotto della sezione liquida fluente pel quadrato della velocità del flusso. Per conseguenza, essendo d la densità del liquore, sarà misura dell' impulsione perpendicolare sostenuta dalla superficie *EF* il solido $d.f^2.c^2$. Ma essendosi dimostrato verificarsi per tutta l' estensione della sezione *EF* l' equazione $c^2 = 2v$, sussisterà pure per tutta la medesima estensione l' equazione $d.f^2.c^2 = d.f^2.2v$. Se dunque il solido $d.f^2.c^2$ esprime l' impulsione perpendicolare contro la superficie f^2, sarà pure espressa questa medesima impulsione dal solido $d.f^2.2v$. Ma $d.f^2.2v$ è il peso assoluto di un prisma di questo medesimo liquore avente per base la superficie impulsa, o la sezione della vena impellente, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena. Dunque l' impulsione permanente perpendicolare di una vena ecc. Il che ecc.

TEOREMA II.

L' impulsione permanente obbliqua della medesima vena contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima imminente della vena, il cui piano faccia lo stesso angolo obbliquo con la direzione del moto, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la sezione della vena perpendicolare alla direzione del moto dimi-

nuita in ragione del ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena.

Sia *FG* la ſuperficie impulſa obbliquamente dalla medeſima vena *ABCD*, e s' intenda meſſa in corſo permanente altra vena del medeſimo liquore *QOPR* (*Fig. XI.*) animata dalla ſteſſa velocità della vena *ABCD*, la cui ſezione *OP* perpendicolare alla direzione del corſo ſia quarta proporzionale al ſeno tutto, al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione contro la ſuperficie *FG*, e alla ſezione *FE*. Eſſendo effettivamente come ſolitarie (I) le ſtille del liquore *ABCD*, l' impulſione permanente ch' elle eſercitano contro la ſuperficie *FG*, ridotto a permanenza in un col fluſſo il ſottraerſi ſucceſſivo delle ſtille dopo l' impreſſione fatta, non è che l' azione aſſoluta permanente eſercitata da un ſiſtema di corpicciuoli ſolitarj ſoſtenuto ſopra il piano inclinato *FG*, contro il medeſimo piano. E ſiccome queſt' azione è all' azione perpendicolare eſercitata dal ſiſtema contro il piano, come il ſeno tutto al coſeno dell' inclinazione *GFE* del piano; così l' impulſione aſſoluta della vena *ABCD* ſecondo la direzione del corſo contro la ſuperficie *FG* è all' impulſione perpendicolare contro il medeſimo piano, come il ſeno tutto al coſeno dell' angolo *GFE*, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione. Ma come il ſeno tutto al ſeno dell' obbliquità dell' impulſione, così ſta la ſezione *FE* alla ſezione *OP*; e come la ſezione *FE* alla ſezione *OP*, così ſta l' impulſione perpendicolare della vena *ACDB* contro la ſuperficie *FE* all' impulſione perpendicolare della vena *QOPR* contro la ſuperficie *OP*. Sarà dunque l' impulſione aſſoluta della vena *ACDB* ſecondo la direzione del corſo all' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie *FG*, come l' impulſione perpendicolare della vena *ACDB* contro la ſuperficie *FE* all' impulſione perpendicolare della vena *QOPR* contro la ſuperficie *OP*. Ed è l' impulſione aſſoluta della vena *ACDB* ſecondo la direzione del moto lo ſteſſo che l' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie *FE*. Per conſeguenza l' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie *FG* ſarà lo ſteſſo che l' impulſione perpendicolare contro la ſuperficie

ficie *OP*. Ma dell' impulsione perpendicolare contro *OP* (*Teor. preced.*) è misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la superficie *OP*, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità comune delle vene; e non altro è la superficie *OP* che la superficie *FE*, o la sezione della vena *ACDB* perpendicolare alla direzione del corso, diminuita in ragione del seno tutto al seno dell' obbliquità dell' impulsione. Dunque l' impulsione permanente della vena *ACDB* contro la superficie *FG*, obbliqua alla direzione del corso, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la sezione *FE* della vena perpendicolare alla direzione del moto diminuita in ragione del seno tutto al seno dell' obbliquità dell' impulsione, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena. Il che ecc.

(IX)

Queste dimostrazioni sono unicamente appoggiate a' principj più semplici della Dinamica, e non altro dimandano se non se, che si considerino i liquori fluenti delle vene, allorchè è uniforme il loro moto, e una medesima per tutte le stille la velocità, onde sono animati, come fluidi imperfetti di parti solitarie, o come se l' aderenza non fosse tra di esse. Il che certamente non ripugna, ove non ha luogo alcuna accelerazione, e la legge delle sezioni reciproche alle velocità nelle diverse parti del flusso non importa nè contrazione di vena, nè azione mutua tra le stille. L' esperienza intanto non è discorde dalla conclusione a cui elle conducono, come può vedersi singolarmente in quelle che con somma accuratezza ha istituite il Sig. Ab. *Bossut* ed esposte nel T. II. della sua Idrodinamica, e nell' altre con pari esattezza fatte, e riferite dal Sig. *Michelotti* nella II. Parte delle Mem. citate di Torino, il quale si propone di esporre in progresso, che sarà cosa fruttuosissima, le sue sperienze sugli urti obbliqui.

(X.)

Il Sig. *de la Grange* conchiude così " on peut prendre

„ deſormais pour regle generale et conſtante dans le choc
„ direct, et lorſque ſon effet eſt le plus grand, ce qui a
„ lieu quand le plan eſt aſſez large pourque toutes les par-
„ ticules du fluide ſoient contraintes d'en ſuivre la direction
„ en le quittant, l'action contre le plan eſt egale au poids
„ d'une colonne du fluide de la meme groſſeur que la vei-
„ ne, et d'une longueur double de celle d'ou un corps pe-
„ ſant devroit tomber pour acquerir la viteſſe du fluide „.
Ma dietro a quanto abbiamo dimoſtrato, perchè nel caſo delle impulſioni perpendicolari l'azione delle vene ſia miſurata da un priſma dello ſteſſo liquore avente per baſe la ſezione della vena, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità della vena, è neceſſario, che la ſuperficie piana ſia ſimile ed eguale alla ſezione della vena perpendicolare alla direzione del moto. Il liquore che ſcappa, fatta l'impreſſione, fa ſiſtema a parte, eſſendo da quell'iſtante ſtraniero alla vena impellente, e dee valutarſi a parte, ſe la ſuperficie ſia, come vuole queſt'illuſtre Geometra, tanto eſteſa quanto baſta perchè le particole del fluido ſieno coſtrette a ſeguirne la direzione.

(XI.)

Non è però queſta ſola determinazione della ſuperficie impulſa, corriſpondente alla ſezione liquida impellente, l'eſſenziale oggetto nell'eſtimazione delle impulſioni de' liquori, avendovene un altro niente men eſſenziale ed importante, cioè quello della velocità della vena, o per dir meglio dell'altezza da cui dee ſcendere un grave dalla quiete per acquiſtarla, così nel caſo degli orifizj nelle conſerve armati di cannello, come in quello de' non armati o ſcolpiti ſemplicemente in ſottili lamine. Un piccolo errore aumenta o ſcema il valore dell'impulſione più ch'altri non eſtima. In fatti avendo preſo ad eſaminare con tutta l'attenzione onde avvenga principalmente, che le ſperienze del Sig. *Boſſut* e più ancora quelle del Sig. *Kraffi* citato dal Sig. *de la Grange*, diano per valore effettivo dell'impulſione un peſo minore del teorico, cioè del peſo di un priſma avente l'orificio della vena per baſe, e per altezza il doppio dell'altez-

za dovuta alla velocità della vena, e avendo perciò confrontato insieme molte sperienze fatte anche da altri, come diremo, intorno agli esborsi dell'acqua per orifizj armati di cannello, mi sono accertato, ch' essendo l' altezza teorica, assunta come dovuta alla velocità delle vene, alcun poco più forte del dovere, il peso vero ed effettivo necessariamente doveva riuscire un po minore del teorico. Assume per esempio il Sig. *Bossut* (pag. 325 del T. citato) quest' altezza in ragione di 2 a 3 coll' altezza costante del liquore sopra il centro de' fori armati di cannello, come ragione da sè trovata prossimamente nelle sue sperienze. Ma facendo il dovuto caso anche delle sperienze del *Guglielmini*, e del Marchese *Poleni*, ho riconosciuto doversi assumere per altezza dovuta alla velocità effettiva un po meno di $\frac{2}{3}$ dell' altezza costante del liquore nelle conserve, cioè quella a questa come 163 a 256. Ancorchè sia piccolo il divario, ciò non ostante intorno a questo piccolo divario si aggira la discordanza tra le sperienze sull'urto de' liquori e la teorica. Molto più pertanto le ragioni per queste altezze dal Sig. *Krafft* ricavate dalle ampiezze de' getti supposti parabolici, di che nel IV. Cap. della nostra Mem. precedente, dovevano necessariamente produrre eccesso più sensibile del peso teorico sopra il peso effettivo equivalente all' impulsione, eccesso che quasi svanisce non assumendo dette altezze che in ragione di 163 a 256, come proviene dal ragguagliamento delle antiche con le più recenti sperienze. Tal che avuto riguardo alla determinazione nostra nella Memoria precedente per gli esborsi fatti dagli orifizj non armati, in cui abbiamo trovato essere l'altezza dovuta alla velocità della vena al foro $\frac{54}{125}$ prossimamente dell' altezza permanente del liquore sopra il centro de' fori, può essere canone e regola conforme ai fatti nell' estimare queste altezze, che l' altezza permanente del liquore sopra il centro de' fori, l' altezza dovuta alla velocità attuale ed effettiva agli orifizj armati di cannello sotto quell' altezza permanente, e l' altezza dovuta alla velocità pur effettiva della vena uscente da' medesi-

mi orifizj ſcolpiti in ſottili lamine ſotto la ſteſſa altezza permanente, ſono aſſai da vicino come i numeri 256, 163, 111.

(XII)

Ma è d'uopo avvertire pe' fori armati, che i cannelli delle ſperienze, ond'è derivata detta proporzione, erano cortiſſimi, e ſempre cilindrici nelle interne cavità, mentre la proporzione non potrebbe aver luogo ne' tubi o cannelli di qualche lunghezza, e di figura non cilindrica internamente. E per riſpetto poi a' fori ſcolpiti in ſottili lamine, la proporzione ſuppone, che non ſi tenga conto della vena contratta, ma sì bene dell'effettivo orificio della vena, abbandonando la correzione, che facevaſi, e la ſoſtituzione di queſta vena contratta al foro reale, come arbitraria, e non neceſſaria ſubito che ſi aſſuma l'altezza vera dovuta alla velocità effettiva del foro attuale voluta dalla ragione, e dalle ſperienze uniformi di tutti i tempi, cioè $\frac{54}{125}$, oppure $\frac{111}{256}$ dell'altezza permanente de' liquori ſopra il centro degli orifizj, purchè la groſſezza del fondo, o della parete, ov'è ſcolpito il foro, non ſia tanta da equivalere ad un cannello applicato all'orificio interno, con che ſi potrebbe ricadere nella neceſſità di dar luogo alla proporzione pe' fori armati, o a proporzione più a queſta vicina, che a quella. E certamente di molte ineguaglianze che appariſcono nelle ſteſſe ſperienze fatte da diverſi Idraulici per orifizj ſimili ed eguali, e ſotto le medeſime altezze permanenti di liquore, potrebbe non eſſere ultima cagione la condizione ineguale degli orifizj.

Fig. I

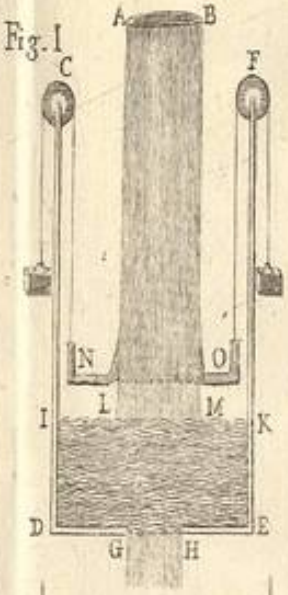

Fig II

Fig. III

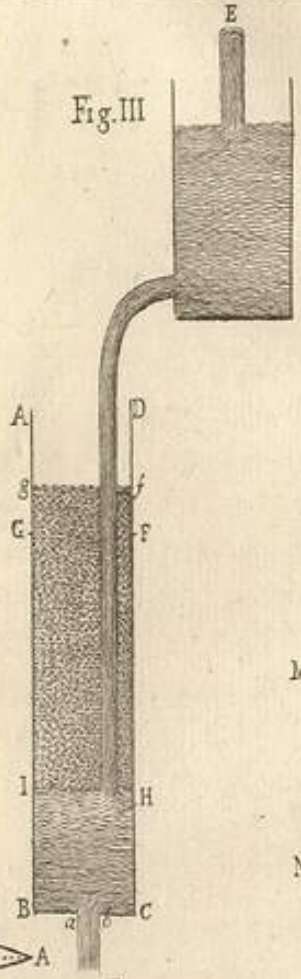

Fig. IV

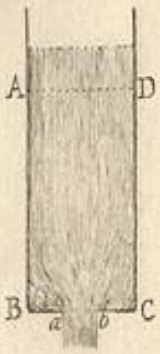

Fig. V

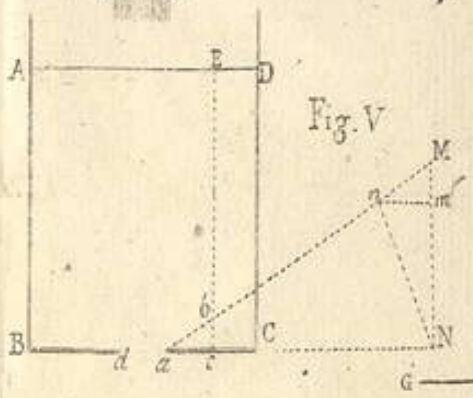

Fig. VI

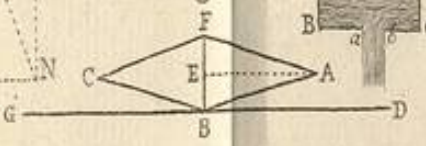

Fig. VII

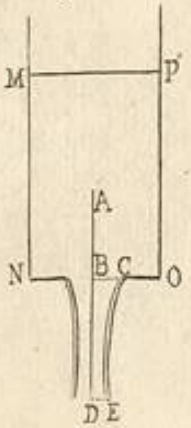

Fig. VIII

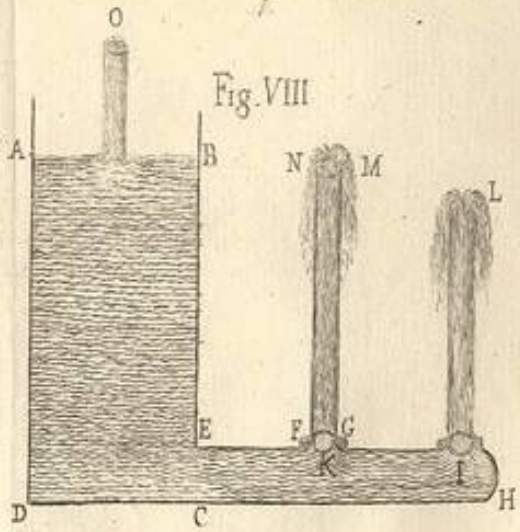

Fig. IX

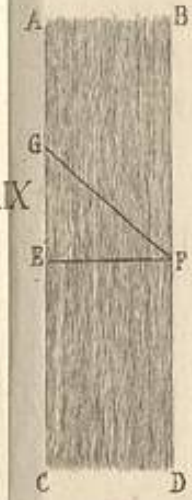

Fig. X

Fig. XI