RICERCHE ANALITICHE

SOPRA DIVERSI SOGGETTI.

Del P. Gregorio Fontana delle S. P. Pubblico Professore delle Matematiche Superiori nella Regia Imperiale Università di Pavia.

ARTICOLO I.

Sopra la Rifrazione della Luce relativamente ad alcune formole del Sig. D' Alembert *ne' suoi* Opuscoli Matematici.

PROBLEMA.

1. *Un mezzo refrangente terminato da una superficie curva esercita sopra un raggio di luce, che vi batte dentro e si rompe, una forza attrattiva, la quale obbliga il raggio a muoversi per una curva brevissima nell' atto di refrangersi. Si domanda la natura di questa curva.*

Soluzione.

Sia (*Fig.* 1.) SQG la superficie refrangente, AQB la trajettoria descritta dalla particella di luce, che incontra in Q la superficie refrangente, la qual trajettoria cominciando in A fuori della superficie a quella distanza, a cui si estende la forza attrattiva del mezzo refrangente, termina in B al di dentro dello stesso mezzo ad una certa distanza dalla sua superficie. Preso il punto indefinito N sulla trajettoria, e guidate le tangenti AO, NI, BT; suppongasi essere C il centro della curvatura del piccolo arco eQk della superficie rifrangente, dove il raggio di luce la penetra. Sieno condotti i raggi vettori CA, CN, CB, e pigliati gli archi infinitesimi

Aa, Nn, si giungano Ca, Cn, e sopra CN menisi la perpendicolare nr. Sia pertanto

Velocità del raggio di luce in A . . . . . g
Seno dell' angolo d' incidenza OAC . . . . . h
Forza attrattiva del mezzo sopra il corpuscolo di luce arrivato in N X
Tempo speso dal corpuscolo a venire da A in N t
Velocità del medesimo in N v
Arco AN . . . . . s
CA . . . . . a
CB . . . . . b
CN x
Angolo ACN . . . . . z

Il corpuscolo di luce giunto in N è attratto dal mezzo rifrangente verso il centro C della curvatura con una forza X rappresentata dalla retta NF, e menando la perpendicolare FI sulla tangente NI, la forza NF si risolve nelle due NI, IF, delle quali la sola NI è quella, che altera la velocità v del corpuscolo per l' archetto Nn: conseguentemente $NI.dt = dv$. Ma la similitudine de' triangoli FNI, Nrn dà $Nn : Nr :: ds : -dx :: NF : NI$, cioè $NI = -\frac{Xdx}{ds}$; ed è inoltre $dt = \frac{ds}{v}$: sostituendo dunque questi valori nell' equazione precedente, si avrà $-Xdx = vdv$, ovvero $-2Xdx = 2vdv$, il cui integrale è $v^2 = -2\int Xdx + \text{cost.}$ Siccome poi allorchè $x = a$, diventa $v = g$; nascerà $\text{cost.} = g^2$, intendendo l' integrale $\int Xdx$ preso in modo, che si annulli nel supposto di $x = a$. Laonde $v^2 = g^2 - 2\int Xdx$.

Ora, poichè nelle trajettorie descritte in virtù d' una forza centrale tendente ad un punto fisso le aje descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi per gli archi corrispondenti, sarà perciò il tempo per l' archetto Aa al tem-

po per l' archetto Nn, come ACa ad NCn, ovvero $\frac{Aa}{g} : \frac{ds}{v} :: \frac{1}{2} Aa . CA . h : \frac{1}{2} NC . nr$, cioè $\frac{1}{g} : \frac{ds}{v} :: ha : x^2 dz$, e quadrando $\frac{1}{g^2} : \frac{ds^2}{v^2} :: h^2a^2 : x^4 dz^2$; d' onde si trae

$$x^4 dz^2 = \frac{h^2g^2a^2ds^2}{g^2 - 2\int Xdx} = \frac{h^2g^2a^2(dx^2 + x^2dz^2)}{g^2 - 2\int Xdx};$$ e quindi

$$dz^2\left(g^2x^4 - 2x^4\int Xdx - h^2g^2a^2x^2\right) = h^2g^2a^2dx^2.$$ Dunque

$$dz = \frac{-hgadx}{x^2\sqrt{\left(g^2 - 2\int Xdx - \frac{h^2g^2a^2}{x^2}\right)}},$$ ed integrando

$$z = -\int \frac{hgadx}{x^2\sqrt{\left(g^2 - 2\int Xdx - \frac{h^2g^2a^2}{x^2}\right)}}.$$ Il che era ecc.

2. Cor. I. Siccome $ds^2 = dx^2 + x^2dz^2 = dx^2 + \frac{h^2g^2a^2dx^2}{g^2x^2 - 2x^2\int Xdx - h^2g^2a^2} = \frac{dx^2(g^2x^2 - 2x^2\int Xdx)}{g^2x^2 - 2x^2\int Xdx - h^2g^2a^2}$, e in conseguenza $ds = \frac{-xdx\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}{x\sqrt{\left(g^2 - 2\int Xdx - \frac{h^2g^2a^2}{x^2}\right)}}$, sarà quindi

$$\text{sen.}\, CNI = \frac{nr}{Nn} = \frac{xdz}{ds} = \frac{hga}{x\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}.$$ Dal che apparisce, che il seno dell' angolo d' incidenza, cioè h sta al seno dell' angolo CNI come $1 : \frac{ga}{x\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}$, ovvero come $\frac{1}{ga} : \frac{1}{x\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}$.

3. Cor. II. Quando l'angolo CNI si cangia in CBT, che è l' angolo della refrazione totale, allora diventa $x = CB = b$, e con ciò il seno dell' angolo d' incidenza sta al seno dell'angolo di refrazione come sta $\frac{1}{ga} : \frac{1}{b\sqrt{(g^2 - 2\int Xdx)}}$.

4. Cor. III. Suppongasi col *d' Alembert Opusc. Math.* tom. 3. §. 969, che sia $m\alpha$ il raggio della curvatura della superficie refrangente in $\mathfrak{Q}$, ed α il raggio della sfera di attività del mezzo rifrangente, per modo che la curva descritta dal globetto di luce incominci e finisca alla distanza α dalla superficie rifrangente esteriormente ed interiormente. In questo supposto diventa $a = m\alpha + \alpha$, $b = m\alpha - \alpha$. Perlochè il seno d' incidenza sta al seno di refrazione come

$$\frac{1}{g(m\alpha+\alpha)} : \frac{1}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}},$$ che è un rapporto diverso da quello di *d' Alembert* nel luog. cit.

5. Cor. IV. Se il mezzo rifrangente è terminato da una superficie piana, allora diventa $m\alpha = \infty$, e la ragione del seno d' incidenza al seno di refrazione si cangia in quella di $\frac{1}{g} : \frac{1}{\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}$; il che ha luogo ancora allorchè essendo curva la superficie rifrangente, il suo raggio $m\alpha$ di curvatura è grandissimo in confronto della picciola distanza α, a cui si estende la forza attraente di detta superficie.

6. Scol. Se per angolo d' incidenza il *d' Alembert* ha voluto intendere non già il *vero* angolo d' incidenza CAO, ma l' *apparente* ossia quello che corrisponde al punto $\mathfrak{Q}$ della superficie rifrangente, è evidente, che il seno di questo è $\frac{hga}{m\alpha\sqrt{(g^2-2\int X'dx)}}$, dove nell' integrale $\int X'dx$ si dee scrivere $m\alpha$ per x. Ma oltrechè quest' angolo *apparente* d' incidenza è troppo differente dal *vero* angolo d' incidenza per poter prendersi promiscuamente l' uno per l' altro, ciò non giustificherebbe la proporzione de' seni recata dal *d' Alembert*; imperciocchè il seno dell' angolo *apparente* d' incidenza sta al seno dell' angolo di refrazione come sta

$$\frac{hga}{m\alpha\sqrt{(g^2-2\int X'dx)}} : \frac{hga}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}},$$ ovvero come

$$\frac{1}{\sqrt{(g^2-2\int X'dx)}} : \frac{1}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\sqrt{\left(g^2-2\int Xdx\right)}},$$ laddove se-

condo *d' Alembert* dovrebbe essere l' uno all' altro come

$$\frac{1}{gm\alpha} : \frac{1}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(g^2-2\int Xdx)}}.$$

ARTICOLO II.

Esame d' un nuovo argomento in favore del Moto Perpetuo.

1. Una ruota verticale (*Fig.* 2.) *FPOQ* divisa in due metà da un piano verticale, che passa pel suo diametro *FO*, ha la metà *FPO* immersa nell' acqua sotto al livello *MN*, e l' altra metà tutta fuor d' acqua, essendo in *FO* mediante un particolar meccanismo tolta ogni comunicazione fra l' acqua della conserva e la metà *FQO* esteriore della ruota, la quale può volgersi liberamente intorno ad un asse, che passa pel centro *C*. Ora essendo la ruota specificamente più leggera dell' acqua, la parte immersa *FPO* viene di continuo spinta verticalmente all' insù con uno sforzo eguale all' eccesso del peso di un volume d' acqua pari alla parte immersa sopra il peso della parte immersa, la quale spinta passando pel centro di gravità della parte istessa, e però fuori del centro *C*, obbliga la ruota a girare intorno a *C*. In tale stato di cose dimandasi, se si avrà nella ruota un moto perpetuo, come a primo aspetto potrebbe giudicarsi.

2. Per rispondere adequatamente, conviene prima di tutto conoscere qual effetto producano nella ruota le pressioni orizzontali, che esercita l' acqua contro la semicirconferenza *FLO* della ruota. Preso adunque un elemento *Pp*, e condotte al diametro le ordinate *PR*, *pr*, e guidato il raggio *PC*, e indi la *PG* normale al raggio *CL*, il quale determina il quadrante *OL*, pongasi la distanza del punto infimo *O* dal livello dell' acqua, ovvero la $OD = b$, il semidiametro della ruota $= a$, $OR = x$, e la gravità specifica dell' acqua $= 1$: e sarà la pressione perpendicolare contro l' elemento $Pp = Pp.RD$, la quale risoluta in due, una orizzontale secondo *PR*, l' altra verticale secondo *PG*, offre l' analogia $PC : PR :: Pp.RD : \frac{Pp.PR.RD}{PC}$. Dunque la pressione orizzontale contro

Pp è $= \frac{Pp.PR.RD}{PC}$, cioè per essere $Pp.PR = Rr.PC$, la detta pressione orizzontale trovasi $= Rr.RD = (b-x)dx$, e questa moltiplicata per RD, ovvero $b-x$, diventa il momento della pressione relativamente ad $MN = (b-x)^2dx$, e la somma de' momenti delle pressioni esercitate contro l' arco indefinito $OP = \int (b-x)^2dx = -\frac{1}{3}(b-x)^3 + \text{cost.}$ E poichè svaniscono tali momenti insieme colla x, si ha però cost. $= \frac{1}{3}b^3$; e quindi la predetta somma de' momenti $= \frac{1}{3}(b^3 - (b-x)^3) = b^2x - bx^2 + \frac{1}{3}x^3$. Laonde prendendo $x = 2a$, sarà la somma di tutti i momenti delle pressioni orizzontali esercitate contro tutta la semicirconferenza OLF della ruota, sarà, dico, $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3$, e dividendo questa somma per quella di tutte le pressioni orizzontali, cioè per $\int (b-x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - (b-x)^2) = bx - \frac{1}{2}x^2 = 2ba - 2a^2$ posto $x = 2a$, si ha l' espressione $\frac{2b^2 - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3}{2ba - 2a^2}$ $= \frac{b^2 - 2ba + \frac{4}{3}a^2}{b-a} = \frac{(b-a)^2 + \frac{1}{3}a^2}{b-a} = b - a + \frac{\frac{1}{3}a^2}{b-a}$, che rappresenta la distanza del livello MN dalla *risultante* di tutte le pressioni orizzontali contro la semicirconferenza, la quale distanza supera la DC, e conseguentemente la direzione della risultante passa al di sotto del centro C della ruota ad una distanza di detto centro, che è $= \frac{\frac{1}{3}a^2}{b-a}$. Se si moltiplica ora questa distanza per la *risultante* di tutte le pressioni orizzontali, ovvero per $2a(b-a)$, si ottiene $\frac{2}{3}a^3$ pel momento della forza, che tende a far girare la ruota da L verso O.

Ciò stabilito, egli è noto, che la forza spingente verti-

calmente all' insù la mezza ruota FLO (chiamata g la gravità specifica della ruota) è $=(1-g).FCOL$, e questa forza passa pel centro di gravità di FLO. E siccome il centro di gravità di qualunque segmento circolare diviso per mezzo dal raggio è distante dal centro del cerchio per una quantità uguale al dodicesimo del cubo della corda diviso pel segmento, sarà perciò il centro di gravità del semicircolo $FCOL$ distante dal centro C per la quantità $\frac{\frac{1}{12}.8a^3}{FCOL}=\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}$. Perlochè il momento di questa forza tendente a far girare la ruota da O verso L sarà $=\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}.(1-g).FCOL=\frac{2}{3}(1-g)a^3$.

Ma oltre questo momento, havvi pure quello dell' altra metà FQO della ruota, la quale esistendo fuor d' acqua tende pel proprio peso all' ingiù con una forza $=g.FCOQ$ $=g.FCOL$, che moltiplicata per la distanza $\frac{\frac{2}{3}a^3}{FCOL}$ del centro di gravità del semicircolo FQO dal centro della ruota dà pel momento di tal forza tendente a volger la ruota da O verso L la quantità $\frac{2}{3}ga^3$. Dunque il momento totale per far girare la ruota da O in L, sarà $\frac{2}{3}(1-g)a^3+\frac{2}{3}ga^3=\frac{2}{3}a^3$, cioè a dire quello stesso, che si è trovato per far girare la ruota nella direzione opposta, ossia da L verso O.

E quindi la ruota rimarrà immobile perfettamente.

3. Cor. I. Se la ruota fosse specificamente più grave dell' acqua, non potrà neppure in questo caso concepire alcun moto da L verso O, come potrebbe sembrare in sulle prime. Imperciocchè allora il momento della forza, che spigne al basso verticalmente la mezza ruota $FCOL$, e tende a farla girare da L verso O è $=\frac{2}{3}(g-1)a^3$, al qual momento conviene aggiugnere quello delle pressioni orizzontali, cioè $\frac{2}{3}a^3$,

e così

e così ottiensi il momento totale $\frac{2}{3}ga^3$ tendente a far girare la ruota da L in O; ed appunto a questo momento è uguale quello del peso della metà $FCOQ$ tendente a dare alla ruota un rivolgimento contrario, ovvero da O in L.

3. Cor. II. Se la ruota in vece di essere un piano circolare fosse una zona compresa da due periferie concentriche (*Fig.* 3), allora dalla somma delle pressioni orizzontali dell' acqua contro la semiperiferia esteriore convien togliere la somma delle opposte pressioni orizzontali contro l' altra semiperiferia interiore della zona. Sicchè chiamando a il raggio maggiore della zona, e λ la sua larghezza, si ha la somma delle prime pressioni orizzontali $= 2a(b-a)$ e la somma delle seconde $= 2(a-\lambda)(b-\lambda-(a-\lambda)) = 2(a-\lambda)(b-a)$. Dunque sottratte queste da quelle, resta $2(b-a)\lambda$ per la somma di tutte le pressioni, che agiscono contro la zona della semiruota tuffata nel fluido in direzione tendente dal di fuori al di dentro della ruota. Inoltre la somma de' momenti di tutte le pressioni orizzontali contro la semicirconferenza esteriore relativamente all' asse MN è $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3$. E parimenti la somma de' momenti delle pressioni orizzontali opposte della semicirconferenza interiore relativamente al detto asse è $= 2(b-\lambda)^2(a-\lambda) - 4(b-\lambda)\times(a-\lambda)^2 + \frac{8}{3}(a-\lambda)^3$. Sottratta questa somma dalla precedente, resta la somma de' momenti agenti contro la zona della semiruota dal di fuori al di dentro $= 2b^2a - 4ba^2 + \frac{8}{3}a^3 - 2(b-\lambda)^2(a-\lambda) + 4(b-\lambda)(a-\lambda)^2 - \frac{8}{3}(a-\lambda)^3 = 2b^2\lambda - 4ba\lambda + 4a^2\lambda - 2a\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3 = 2\lambda\left(b(b-a) - ba + 2a^2 - a\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2\right) = 2\lambda\left((b-a)(b-a) + a^2 - a\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2\right)$. Perlochè dividendo questa somma de' momenti per la somma delle pres-

ſioni ſi avrà $2\lambda\left(\frac{(b-a)(b-a)+a^2-a\lambda+\frac{2}{3}\lambda^2}{2\lambda(b-a)}\right)=b-a$ $+\frac{a^2-a\lambda+\frac{2}{3}\lambda^2}{b-a}=$ alla diſtanza del *centro di preſſione* dal livello del fluido, ovvero alla diſtanza della *riſultante* di tutte le preſſioni da quel livello. Dal che ſi ſcorge, che il centro di preſſione cade ſotto al centro C della ruota alla diſtanza $\frac{a^2-a\lambda+\frac{2}{3}\lambda^2}{b-a}$ da eſſo. Quindi moltiplicando queſta diſtanza per la riſultante delle preſſioni, oſſia per $2\lambda(b-a)$, ſi ottiene $2\lambda(a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2)$ per eſprimere il momento delle preſſioni orizzontali dell' acqua, diretto a far girare la ruota da L in O.

Ora il momento, con cui la ſpinta verticale del fluido tende a far girare il ſemicerchio $FCOL$ da O in L (ſuppoſto che la ruota ſia formata non dalla ſola zona, ma da un piano circolare) è $=\frac{2}{3}a^3$. Parimenti il momento della ſpinta del fluido per far girare il ſemicerchio interno $VCIG$ da O in L è $=\frac{2}{3}(a-\lambda)^3$. Dunque togliendo queſto ſecondo momento dal primo ſarà il momento della zona di fluido $VGIOLF$ per dare alla ruota un rivolgimento da O in L $=\frac{2}{3}\left(a^3-(a-\lambda)^3\right)=2\lambda(a^2-a\lambda+\frac{1}{3}\lambda^2)$, che è appunto quello ſteſſo momento, con cui le preſſioni orizzontali del fluido tendono ad imprimere alla ruota un rivolgimento in verſo contrario, cioè da L in O. Dunque per la preſſione del fluido non può la ruota concepire verun movimento intorno al ſuo centro.

Il peſo poi proprio della ruota, per cui la metà della zona immerſa nel fluido tende a far girare la ruota da L in O, e l' altra metà della zona fuori del fluido tende a farla girare in direzione oppoſta, un tal peſo, dico, non può indurre alcun moto di rotazione, equilibrandoſi l' una, e l' altra metà intorno al centro C.

ARTICOLO III.

Sopra un errore, che si commette da molti nell' assegnare la misura delle Iperboloidi.

1. Quegli Scrittori di Calcolo Integrale, i quali applicano la formola generale per la misura di tutte le conoidi ad indagare la misura delle iperboloidi asintotiche, nate cioè dalla rivoluzione di tutte le iperbole in generale intorno ad un asintoto, incorrer sogliono in un errore tanto più grave e notabile, quanto è meno avvertito. Sarà pertanto pregio dell' opera l' indicar qui l' origine e l' emenda d' un abbaglio, che ha finora imposto a parecchi.

2. La curva *CMD* (*Fig.* 4.) rappresenta un' iperbola equilatera riferita agli asintoti ortogonali *BA*, *AE*, la cui equazione generale spettante alla famiglia di tutte le iperbole è $x^m y^n = a^{m+n}$, presa cioè l' ascissa $AN = x$, l' ordinata $NM = y$, ed $AF = FG = a$. Essendo $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, la formola $\int \pi y^2 dx$ dà la misura dell' iperboloide generato dalla rivoluzione dello spazio *GFED* intorno all' asintoto *AE*. Ma dall' equazione generale della famiglia delle iperbole si ricava $y^2 = \frac{a^{(2m+2n):n}}{x^{(2m):n}}$. Dunque $\int \pi y^2 dx = \pi a \int x^{(-2m):n} dx$

$$= \frac{n}{n-2m} \cdot \pi a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n} + \text{cost.} = \frac{n}{n-2m} \cdot \pi y^2 x + \text{cost.}$$

Ed annullandosi l' iperboloide allorchè diventa $x = AF = a$, ed $y = FG = a$, nasce quindi $\text{cost.} = -\frac{n}{n-2m} \cdot \pi a^2$; e conseguentemente l' iperboloide generato dalla rotazione dello spazio indeterminato *GFNM* intorno all' asintoto *AE* risulta $= \frac{n\pi}{2m-n}(a^2 - y^2 x)$.

3. Sin qui il raziocinio è giustissimo; ma prosieguono que-

ſti Autori, e dicono: prendendo infinita la x, e però la $y=0$, l' eſpreſſione $\frac{n\pi}{2m-n}(a^2-y^2x)$ ſi cangia in $\frac{n}{2m-n}.\pi a^2$, vale a dire in $\frac{n}{2m-n}$ moltiplicato pel cilindro generato dalla rivoluzione del quadrato *AG* intorno all'aſintoto. Da ciò inferiſcono il ſeguente general Teorema: *Nelle iperbole equilatere di qualunque genere o grado l' iperboloide aſintotico infinitamente lungo prodotto dal rivolgimento dello ſpazio* GFED *intorno al ſuo aſintoto ſta al cilindro nato dalla rivoluzione del quadrato* AG *come ſta* n : 2m — n, *vale a dire quell' iperboloide è ſempre finito e aſſegnabile, eccettuato l' unico caſo di* 2m = n, *in cui diventa infinito.*

4. La falſità di queſto Teorema ſi mette ad evidenza ſott' occhio con far vedere, che non nel ſolo caſo di $2m=n$, ma anche in altri infiniti l' iperboloide acquiſta un valore maggiore di qualunque dato, cioè a dire infinito. Per dimoſtrar ciò ripiglio l' equazione

$\int \pi y^2 dx = -\frac{n}{n-2m}.\pi a^{(2m+2n):n} x^{2-(2m):n} + \text{coſt.}$, ed eſſendo per ipoteſi $\int \pi y^2 dx = 0$ allorchè $x=a$, ritrovo come prima $\text{coſt.} = -\frac{n}{n-2m}.\pi a^{(3n):n} = -\frac{n}{n-2m}.\pi a^3$, e quindi l' iperboloide prodotto dal rivolgimento dello ſpazio indeterminato *GFNB* intorno all' aſintoto *AE* ha per miſura

$$\frac{n}{2m-n}(\pi a^3 - \pi a^{(2m+2n):n} x^{(n-2m):n})$$

$$= \frac{n\pi a^3}{2m-n}(1 - a^{(2m-n):n} x^{(n-2m):n}).$$

Se ora in queſt' eſpreſſione ſi fa x infinita, eſſa rappreſenta il valore dell' iperboloide infinitamente lungo prodotto dalla rivoluzione dello ſpazio aſintotico *GFED* intorno all' aſintoto *FE*. Ma in tal ſuppoſto di x infinita la detta eſpreſſione diventa viſibilmente infinita tutte le volte che l' eſponente n dell' ordinata nell' equazione di tutte le iperbole agli aſintoti ſupera il doppio dell' eſponente m dell' aſciſſa. Egli è dunque eviden-

te, che l' iperboloide asintotico infinitamente allungato ha un valore infinito in tutti quegl' infiniti casi, ne' quali n è maggiore di $2m$.

5. L' origine dell' errore dipende dal supporre, che la quantità y^2x debba annullarsi ogniqualvolta divenga $y=0$ quand' anche x si faccia infinita. Ciò apparisce falso in infiniti casi mediante la sostituzione del valore di y^2 dato per x: imperciocchè essendo $y^2 = a^{(2m+2n):n} x^{-(2m):n}$, nasce $y^2x = a^{(2m+2n):n} x^{1-(2m):n}$, dove si vede manifestamente, che posta x infinita tanto è lungi, che sempre debba annullarsi la quantità y^2x, che anzi per l' opposto questa quantità diventa infinita tutte le volte che $1 > \frac{2m}{n}$, ovvero $n > 2m$.

6. In generale si possono stabilire questi due Canoni:

I.

La quantità Bx^py^r, *nella quale facendosi* x *infinita diventa* y *infinitesima, e si sa altronde essere* $y = bx^t$, *la quantità, dico,* Bx^py^r *diviene* 1.° *zero allorchè il numero* $p+tr$ *è negativo*: 2.° *ella diviene assegnabile e finita allorchè* $p+tr=0$. 3.° *essa acquista un valore infinito qualora* $p+tr$ *sia un numero affermativo*.

II.

Nel supposto di x *infinita e di* y *infinitesima la quantità* Bx^py^r 1.° *si annulla quando il numero* $\frac{p+rt}{t}$ *è positivo*: 2.° *ha un valore finito quando quel numero è zero*: 3.° *diventa infinita, se il detto numero è negativo*.

ARTICOLO IV.

Sopra le Molle.

1. Una molla rappresentata da una linea retta, e contratta d' una certa quantità, se venga appoggiata per una

ſua eſtremità ad un oſtacolo immobile, oppure al contrario ſia interamente libera da una parte o dall' altra, ſembra a prima viſta dover paſſare nel ſuo rilaſciamento per li medeſimi gradi di moto in ambedue i caſi. Infatti eſſendo in entrambi la medeſima la forza reſtitutiva, produttrice del moto, non appar ragione della diverſità di queſto nella molla fiſſa e nella libera. Il *d' Alembert* è ſtato il primo ad avvertire, che queſt' apparenza è ingannevole, e che fatto il calcolo del moto della molla ne' due ſtati propoſti ſi troveranno due riſultati notabilmente diverſi.

2. Per entrare ſopra di ciò in qualche dettaglio, ſia (*Fig.* 5) AC una molla rettilinea nel ſuo ſtato naturale, la quale appoggiata in A contro un oſtacolo immobile venga teſa e contratta in AB, ſicchè la ſua contrazione ſia rappreſentata da CB. Suppongo ora, che ceſſi ad un tratto la forza contrattiva, e che allentandoſi la molla la ſua eſtremità libera B arrivi in D dopo un tempo t, e percorra $BD = x$; indi faccio la contrazione primitiva $CB = a$, la contrazione $CD = a - x$. Chiamata poi f la forza dilatativa o reſtitutiva della molla in B, e ſupponendola proporzionale alla quantità della contrazione, ſicchè ſia la forza reſtitutiva in $D = \frac{f}{a}(a - x)$, ſi ha pel principio delle forze acceleratrici $\frac{f}{a}(-x)dt^2 = ddx$, la quale equazione moltiplicata per dx, ed integrata nell' ipoteſi di dt coſtante ſi cangia in queſt' altra $\frac{f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right)dt^2 + Cdt^2 = \frac{1}{2}dx^2$. Per determinare la coſtante C riduco queſt' equazione alla forma $\frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + 2C$, ovvero $\frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right) + 2C\right)}$, ed oſſervo, che la velocità $\frac{dx}{dt}$ dell' eſtremità della molla in D è nulla al principio del moto, ovvero in B allorchè $x = 0$, dal che naſce nella precedente equazione $0 = \sqrt{2C}$, ovvero $C = 0$. Dunque l' in-

tegrale completo sarà $dx^2 = \frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right)dt^2$, e quindi

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)}} = \frac{dx : \sqrt{a}}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{\left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{\left(\frac{a}{f}\right)^{1:2}.dx : a}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2}\right)}}.$$

Perlochè integrando si avrà $t = \left(\frac{a}{f}\right)^{1:2}$. Arc. sen. vers. $\frac{x}{a}$ senza costante, perchè x, e t svaniscono insieme. Pertanto chiamata v la velocità $\frac{dx}{dt}$ della molla nel punto D abbiamo le due equazioni

1°. $v = \sqrt{\left(\frac{2f}{a}\left(ax - \frac{1}{2}x^2\right)\right)}$.

2°. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{f}}$. Arc. sen. vers. $\frac{x}{a}$

Da queste si ricavano facilmente le due altre seguenti

3°. $x = a \pm \sqrt{\left(a^2 - \frac{av^2}{f}\right)}$.

4°. $x = a$ sen. vers. $\frac{t\sqrt{f}}{\sqrt{a}}$

Passo ora all' altro supposto, che la molla (*Fig.* 6) AC sia interamente libera nell' uno e nell' altro estremo, e venendo contratta in AB si rilasci da ambe le estremità distendendosi per gli spazj eguali BD, AD' nel tempo t. Prendo la forza restitutiva in $B = f$, lo spazio $BD = AD' = y$, $BC = a$, e suppongo al solito le forze restitutive proporzionali alle contrazioni. Quindi se la primitiva contrazione è $CB = a$, la contrazione passato il tempo t, quando le due estremità della molla sono arrivate in D, e D', sarà $CB - DB - D'B = CB - 2DB = a - 2y$, e conseguentemente risulta l' analogia

$$a : a - 2y :: f : \frac{f}{a}(a - 2y)$$

dove il quarto termine $\frac{f}{a}(a - 2y)$ esprime la forza restituti-

va in D, ovvero in D'. Abbiamo pertanto l' equazione pel moto della molla in questo secondo caso $\frac{f}{a}(a-2y)dt^2 = ddy$, la quale moltiplicata per dy diviene $\frac{f}{a}(ady-2ydy)dt^2 = dyddy$, il cui integrale completo nell' ipotesi di dt costante è $\frac{f}{a}(ay-y^2)dt^2 = \frac{1}{2}dy^2$; dal che si ricava $dt = \frac{dy}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(2y-\frac{2y}{a})}}$, e moltiplicando il secondo membro sotto e sopra per $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$ nasce $dt = \frac{dy\sqrt{2}:\sqrt{a}}{\sqrt{f}\cdot\sqrt{(\frac{4y}{a}-\frac{4y^2}{a^2})}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}\cdot\frac{2dy:a}{\sqrt{(\frac{4y}{a}-\frac{4y^2}{a^2})}}$. L' integrale completo di quest' ultima equazione è manifestamente $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}$. Arc. sen. vers. $\frac{2y}{a}$. Chiamata poi v la velocità in D, ovvero D' trovasi $v = \frac{dy}{dt} = \sqrt{(\frac{2f}{a}(ay-y^2)}$. Abbiamo dunque le seguenti equazioni

1.° $v = \sqrt{(\frac{2f}{a}(ay-y^2))}$

2.° $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2f}}$. Arc. sen. vers. $\frac{2y}{a}$

Da queste poi derivano immediatamente le due altre

3.° $y = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - \frac{av^2}{2f})}$

4.° $y = \frac{1}{2}a$ sen. vers. $\frac{t\sqrt{2f}}{\sqrt{a}}$

ARTICOLO

ARTICOLO V.

Sopra la trasfusione della velocità nel conflitto de' corpi.

Sia una serie di globi continuamente proporzionali in numero $n+1$, ed A, B sieno i due primi, U l' ultimo, cioè

$$A, B, \frac{B^2}{A}, \frac{B^3}{A^2} \ldots \frac{B^n}{A^{n-1}} = U.$$

Si spinga direttamente il primo colla velocità c contro il secondo immobile, e questo colla velocità comunicata vada ad urtare il terzo immobile, questo il quarto, e così fino all' ultimo; è chiaro che posto $\frac{p}{1}$ il rapporto dell' elasticità de' globi alla percussione, la celerità del primo A comunicata a B sarà $= \frac{(1+p)Ac}{A+B}$; e quella da B comunicata al terzo sarà per la stessa ragione $= \left(\frac{(1+p)B}{B+\frac{B^2}{A}}\right)\left(\frac{(1+p)Ac}{(A+B)}\right)$

$= \frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2}$; quella del terzo comunicata al 4.° sarà

$= \frac{(1+p)\frac{B^2}{A}}{\frac{B^2}{A}+\frac{B^3}{A^2}} \times \frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2} = \frac{(1+p)^3A^3c}{(A+B)^3}$. Dunque le velocità de' globi formeranno la seguente progressione geometrica

$$1, \frac{(1+p)Ac}{A+B}, \frac{(1+p)^2A^2c}{(A+B)^2}, \frac{(1+p)^3A^3c}{(A+B)^3}, \ldots \frac{(1+p)^nA^nc}{(A+B)^n} =$$

velocità del globo U.

Se ora si suppone, che i due globi A ed U abbiano un rapporto finito, e che il numero de' medj proporzionali fra essi sia infinito, è manifesto, che B non differirà da A se non d' una quantità infinitesima ω, cioè sarà $B = A \pm \omega$, e la prima serie si muterà in quest' altra

$A, A \pm \omega, \frac{(A \pm \omega)^2}{A}, \frac{(A \pm \omega)^3}{A^2}, \ldots \frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}} = U,$

e l' altra serie delle velocità si cangerà in quest' altra

$1, \frac{(1+p)Ac}{2A \pm \omega}, \frac{(1+p)^2 A^2 c}{(2A \pm \omega)^2}, \frac{(1+p)^3 A^3 c}{(2A \pm \omega)^3} \ldots \frac{(1+p)^n A^n c}{(2A \pm \omega)^n} =$

velocità di U. Dunque il rapporto della velocità di U a quella di A è $= \frac{(1+p)^n . A^n c}{(2A \pm \omega)^n} : c = \frac{(1+p)^n A^n}{(2A \pm \omega)^n} : 1$; ed il rapporto della massa di U a quella di A è $= \frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}} : A$ $= \frac{(A \pm \omega)^n}{A^n} : 1$. Rifletto ora, che il primo rapporto $\frac{(1+p)^n A^n c}{(2A \pm \omega)^n} : c$, ovvero $\frac{(1+p)^n A^n}{(2A \pm \omega)^n} : 1$, ha per logaritmo $n \log. \frac{(1+p)A}{2A \pm \omega}$, ed il secondo rapporto delle masse ha per logaritmo $n \log. \frac{A \pm \omega}{A}$. Essendo poi $\frac{(1+p)A}{2A \pm \omega} = \frac{1+p}{2}$ $\mp \frac{\left(\frac{1+p}{2}\right)\omega}{2A}$; ed $\frac{A \pm \omega}{A} = 1 \pm \frac{\omega}{A}$, sarà in conseguenza

$n \log. \frac{(1+p)A}{2A \pm \omega} = n \log. \left(\frac{1+p}{2} \mp \frac{\left(\frac{1+p}{2}\right)\omega}{2A} \right) = n \log. \frac{1+p}{2}$ $\mp \frac{n\omega}{2A}$; ed $n \log. \frac{A \pm \omega}{A} = n \log. \left(1 \pm \frac{\omega}{A}\right) = \pm \frac{n\omega}{A}$. Si faccia $n \log. \frac{1+p}{2} \mp \frac{n\omega}{2A} = \log. x$; ed $\pm \frac{n\omega}{A} = \log. y$; e nascerà $\log. x = -\frac{1}{2} \log. y + n \log. \left(\frac{1+p}{2}\right) = \log. \left(\frac{1+p}{2}\right)^n \times \frac{1}{\sqrt{y}}$; e quindi $x = \left(\frac{1+p}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{y}}$. Ma x è $\frac{(1+p)^n A^n c}{(2A \pm \omega)^n} : c$, cioè esprime il rapporto della velocità del globo ultimo U alla ve-

locità del primo A; ed $y = \frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}} : A$, e però

$\frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt{A} : \sqrt{\frac{(A \pm \omega)^n}{A^{n-1}}}$. Dunque la velocità dell' ultimo globo sta alla velocità del primo come $\left(\frac{1+p}{2}\right)^n$ moltiplicato per la radice della massa del primo sta alla radice della massa dell' ultimo. Laonde supposti i globi perfettamente elastici, cioè $p = 1$, sta la velocità comunicata all' ultimo alla velocità del primo in ragione sudduplicata inversa delle masse. Sicchè ad un globo quattro volte maggiore il primo non può comunicare anche per mezzo d' un infinito numero di globi interposti più della metà della sua velocità, ad uno nove volte maggiore non può imprimerne più d' un terzo, ad uno sedici volte maggiore più d' un quarto ecc., e viceversa ad un globo quattro volte minore non può trasfondere il primo più del doppio della sua velocità, ad uno nove volte minore più del triplo, sedici volte minore più del quadruplo ecc., e quelle velocità $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ecc..... 2, 3, 4 ecc. sono *il limite* della velocità che può acquistare l' ultimo corpo. Che se i globi sono imperfettamente elastici, talmente che $p < 1$, allora pel valore infinito di n diventa infinitesima la quantità $\left(\frac{1+p}{2}\right)^n$, e conseguentemente infinitesima la velocità trasfusa all' ultimo rispetto alla velocità del primo, supposto sempre finito il rapporto delle due masse.

Di qui apparisce quanto sia erroneo il principio da molti adottato, *che si possa comunicare ai corpi mediante la collisione una velocità qualunque, per grande e smisurata ella sia*, principio, che non può avverarsi se non nell' unico astratto ed ideale supposto, che nella serie de' corpi il primo percotente sia immensamente maggiore dell' ultimo.

ARTICOLO VI.

Teoremi sopra il Moltiplicatore, che rende integrabili le equazioni differenziali di primo ordine a più variabili.

TEOREMA I.

Se l' equazione differenziale $Pdx + \mathfrak{Q}dy = 0$ si moltiplica per un fattore M, il quale sia una funzione delle variabili x, y, come lo sono P, e $\mathfrak{Q}$, le due equazioni $Pdx + \mathfrak{Q}dy = 0$, $MPdx + M\mathfrak{Q}dy = 0$ non ponno mai essere per sè integrabili congiuntamente, trattone il caso, in cui il fattore M sia una tal funzione delle variabili, che il suo valore riesca costante.

TEOREMA II.

Ogni qual volta nell' equazione differenziale $Pdx + \mathfrak{Q}dy = 0$ prendendo la differenza parziale di P per rapporto ad y, e la differenza parziale di $\mathfrak{Q}$ per rapporto ad x, e sottraendo questa seconda dalla prima, e dividendo il residuo per $\mathfrak{Q}$, risulterà per quoziente una funzione della sola variabile x; si potrà sempre determinare una funzione della stessa x, la quale moltiplicando la proposta equazione la renderà integrabile.

TEOREMA III.

Se nell' equazione $Pdx + \mathfrak{Q}dy = 0$, la quantità $\frac{1}{P}\left(\frac{d\mathfrak{Q}}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)$ sarà una funzione della sola y, si potrà sempre determinare la forma del moltiplicatore M, il quale essendo pure una funzione della stessa y rende integrabile la detta equazione.

TEOREMA IV.

Se nell' equazione differenziale di primo ordine a tre variabili $Pdx + \mathfrak{Q}dy + Rdz = 0$ si prende la somma della dif-

ſerenza parziale di P per rapporto ad y, e della differenza parziale della ſteſſa P per rapporto a z, e da queſta ſomma ſi ſottrae la ſomma della differenza parziale di Q per rapporto ad x, e della differenza parziale di R per rapporto alla ſteſſa x, e ſi divide queſto reſiduo per $Q+R$, e ſi trova che il quoziente, che ne riſulta, è una funzione della ſola variabile x; ſi potrà ſempre in queſta ipoteſi determinare la forma del fattore M, il quale rende integrabile la propoſta equazione.

TEOREMA V.

Nell' equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz=0$ pigliando le due differenze parziali di Q in ordine alla variazione di x, e z, e dalla loro ſomma ſottraendo la ſomma delle differenze parziali di P, ed R per rapporto alla variazione di y, e dividendo il reſiduo per $P+R$, ſe il quoziente, che naſce, è una funzione della variabile ſola y, la forma del moltiplicatore M, che rende integrabile la propoſta equazione, è ſempre data.

TEOREMA VI.

Nell' equazione $Pdx+Qdy+Rdz=0$ ſe prendendo la ſomma delle due differenze parziali di R per rapporto alla variazione di x, ed y, e da eſſa ſottraendo la ſomma delle differenze parziali di P, e Q per rapporto alla variazione di z, e poſcia dividendo il reſiduo per $P+Q$ ſi trova, che il quoziente, che ne riſulta, è una funzione della ſola variabile z, il fattore M ſarà ſempre dato per una funzione della ſteſſa z.

TEOREMA VII.

Se nell'equazione differenziale $Pdx+Qdy+Rdz+dv=0$ a quattro variabili la formola $\frac{1}{Q+R+1}\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dP}{dz}+\frac{dP}{dv}-\frac{dQ}{dx}-\frac{dR}{dx}\right)$ ſarà una funzione della ſola variabile x, il

moltiplicatore, che rende integrabile la predetta equazione, si potrà sempre assegnare.

TEOREMA VIII.

Il fattore, che rende integrabile l' equazione $Pdx + \mathcal{Q}dy + Rdz + dv = 0$, è sempre noto e assegnabile ogni qualvolta la formola $\frac{1}{P+R+1}\left(\frac{d\mathcal{Q}}{dx, dz, dv} - \frac{d(P+R)}{dy}\right)$ (*) è una funzione della sola y.

TEOREMA IX.

Sarà data la forma del fattore M, che rende integrabile la predetta equazione, tutte le volte che l' espressione $\frac{1}{P+\mathcal{Q}+1}\left(\frac{dR}{dx, dy, dv} - \frac{d(P+\mathcal{Q})}{dz}\right)$ sarà una funzione della sola variabile z.

TEOREMA X.

Se i coefficienti P, $\mathcal{Q}$, R de' differenziali delle variabili nella predetta equazione hanno tra loro tal relazione, che la formola a differenze parziali $\frac{1}{P+\mathcal{Q}+R}\left(\frac{d(P+\mathcal{Q}+R)}{dv}\right)$ riesca uguale ad una funzione della sola variabile v, sarà sempre assegnabile il fattore M, dal quale dipende l' integrazione di quella equazione.

(*) Io indico la somma delle differenze parziali $\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ}{dz} + \frac{dQ}{dv}$ coll' espressione compendiosa $\frac{dQ}{dx, dz, dv}$.

ARTICOLO VII.

Sopra la Teoria delle potenze parallele.

Sino ad ora i Meccanici sono stati soliti di dedurre la teoria delle potenze parallele da quella delle potenze concorrenti mediante l' ipotesi un poco dura di rimuovere ad un' infinita distanza il punto di concorso delle potenze, che allora diventano parallele.

Ecco pertanto un metodo di prescindere da quest' ipotesi nello stabilire le proprietà delle potenze parallele. Sieno applicate (*Fig.* 7.) alla verga AD le due potenze parallele AB, DE. Si prenda sulla direzione della potenza DE un punto O, e si congiunga OA, la quale incontri in C la BC menata parallela alla verga dal punto B. Indi si pigli $OF = AC$, $OG = DE$, e si guidi nel parallelogrammo FG la diagonale OH, la quale incontra, prolungandola, la verga in I, donde pigliando $IM = OH$, e menando MP parallela alla verga, ed uguale a CB, ed indi giungendo IP, questa IP è la risultante delle due potenze parallele AB, DE. Imperciocchè OH, ovvero IM è la risultante delle due AC, DE; IP è la risultante delle due IM, MP, ovvero delle tre AC, MP, DE, oppure AC, CB, DE, o finalmente delle due proposte AB, DE.

Ora bisogna dimostrare, che questa risultante IP è 1.° parallela alle due componenti AB, DE; 2.° uguale alla loro somma; 3.° applicata ad un tal punto I della verga, che sta $AB : DE :: ID : IA$.

Dimostrazione.

1.° Menata da I la IL uguale e parallela alla OF, e la IN uguale e parallela alla DE, è manifesto, che la retta IM riesce diagonale del parallelogrammo formato da IL, ed IN, e la retta, che da M si mena parallela alla verga fino al lato IN prolungato, coincide colla MP; e quindi la IP cade sul lato IN, e conseguentemente è parallela ad AB, e DE.

2.° Pe' triangoli simili ed uguali ACB, NMP risulta $AB = NP$; dunque $IP = IN + NP = DE + AB$.

3.° AB sta a DE in ragion composta di AB ad AC, e di AC a DE. Ma $AB:AC::OD:OA$, $AC:DE::OA.DI:OD.AI$ (Bossut *Mech.* §. 42.). Dunque AB sta a DE in ragion composta di $\frac{OD:OA}{OA.DI:OD.AI}$, cioè come $DI:AI$. Il che era ecc.

Si dimostra ciò in una maniera più generale supponendo (*Fig.* 8.) il punto D fuori delle direzioni delle due potenze parallele AC, Mi. Imperciocchè condotte le rette DA, DM, e le parallele CB, iG alla verga AM, indi presa $DE=AB$, $DF=MG$, e fatto il parallelogrammo EF, la sua diagonale Du sarà la forza composta di AB, MG. Dal punto t della verga, dove resta tagliata dalla detta diagonale, si tiri tN parallela ed uguale a DE, e tH parallela, ed uguale ad MG, e si compia il parallelogrammo NH, la cui diagonale tP, sarà in dirittura con Du, ed uguale a Du. Finalmente dallo stesso punto t si guidi la tr parallela alle potenze date AC, Mi, e si giunga la Pr parallela alla verga; dico 1.°, che sarà tr la forza composta delle due date parallele AC, Mi; 2.° che sarà $tr=AC+Mi$; 3.° che starà $AC:Mi::Mt:tA$.

Dimostrazione.

1.° La potenza AC è composta di AB, BC; la forza Mi di MG, Gi. Dunque la composta di AC, Mi è la stessa che la composta delle quattro DE, DF, BC, Gi, cioè delle tre Du, BC, Gi, oppure tP, BC, Gi. Ora la potenza BC agisce in A verso M, e la Gi agisce in M verso A, cioè in direzione opposta, e sì l' una che l' altra può concepirsi applicata al punto t della linea di loro direzione. Dunque la composta delle due date AC, Mi è la stessa che la composta delle due tP, $Gi-BC$. Se pertanto si guidano parallele alla verga le Nml, HOS, la similitudine, ed uguaglianza de' triangoli ABC, tNm; MiG, tHS dà $BC=Nm$, $Gi=HS$; onde $Gi-BC=HS-Nm=HO+OS-(Nl-lm)=OS+lm$.

Dunque la potenza composta delle due date parallele è la stessa che la composta di tP, ed $OS+lm$. Dal punto O guido parallelamente alle date potenze la retta Oq, ed ho il triangolo OPq simile ed uguale a tlm: dunque $lm=Pq$, e quindi

quindi $OS + lm = Pr$. Perlochè la potenza composta delle due AC, Mi non è altro che la tr.

2.° $tr = tS + Sr = Mi + Oq = Mi + tm = Mi + \frac{AC}{AC:AB}$.

3.° Sta $AC:Mi$ in ragione composta di $\frac{AB:MG}{MG:Mi}$, ovvero in ragione composta (guidata la DX parallela alle due potenze date) di $\frac{DA.tM:DM.tA}{DM:DX}$, vale a dire come $tM:tA$. Il che era ecc.

ARTICOLO VIII.

Sopra un grave errore di taluno nella risoluzione delle forze.

I. Due verghe lineari perfettamente rigide XA, AY (*Fig.* 9.) congiunte in A sotto un angolo ottuso XAY, ed attaccate a due punti immobili X, Y, vengono tirate da una forza AB, che agisce da A verso B in direzione perpendicolare alla verga AY. Qui pare a primo aspetto, che essendo la forza traente perpendicolare ad AY non debba per essa il punto fisso Y soffrire alcuna pressione o stiramento; ma se si riflette, che la detta forza tende a far rotare da sinistra a destra la verga AX intorno ad X, e che ciò non può accadere, attesa l'unione delle due verghe, senza che venga stirato o premuto in fuori il punto fisso Y, se ne inferisce, che la forza AB, sebbene perpendicolare alla verga AY, agisce contro il punto fisso Y.

II. Per ritrovare gli sforzi fatti contro X, Y dalla data forza AB, questa si risolve comunemente dai Meccanici nelle due AC, AD in direzione delle verghe, e si pianta il Teorema, che lo sforzo fatto contro Y nella direzione YA sta allo sforzo fatto contro X nella direzione XA come sta AD ad AC.

III. Contro il detto Teorema sorge una difficoltà, ed è che se la forza AB si risolve in AE in direzione della verga XA, ed AF perpendicolare ad essa verga, lo sforzo fatto

contro X pare dover essere unicamente AE (minore di AC), essendo nulla per riguardo al punto fisso X la forza AF perpendicolare alla verga. Si risponde, esser falso, che la forza AF perpendicolare alla verga XA niente agisca contro X; imperciocchè essa tende a far girare da dritta a sinistra l'altra verga AY intorno ad Y, il che per l' unione delle due verghe in A produce in X uno sforzo diretto da X in A.

IV. Perlochè risolvendo anche la forza AF nelle due AH, AG, quella in direzione della verga YA, questa perpendicolare ad essa; e risolvendo parimenti AG nelle due tra sè perpendicolari AL, AI; e poscia AL nelle due perpendicolari AN, AM; e così pure AM nelle due perpendicolari AP, AO; e così sempre senza fine, risulterà tutto lo sforzo, esercitato contro il punto fisso X in direzione $XA, = AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.*, e similmente lo sforzo fatto contro Y in direzione YA risulterà $= AH + AN +$ ecc. *in inf.*

V. Le rette AE, AI, AO, ecc. *in inf.* formano una progressione geometrica discendente: imperciocchè per li triangoli simili si ha $AB : AG :: \overline{AF}^2 : \overline{AG}^2 :: \overline{AG}^2 : \overline{AL}^2 :: AG : AM$. Dunque $\div\div AB$, AG, AM, ecc. Dunque $\div\div AE, AI, AO$ ecc.

VI. La somma di detta progressione, ovvero $AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.* è uguale ad AC: in fatti si ha questa somma prendendo il quadrato del primo termine, e dividendolo per la differenza fra il primo termine e il secondo, vale a dire $AE + AI + AO +$ ecc. *in inf* $= \frac{\overline{AE}^2}{EI}$ (e prolungando IG in T) $= \frac{\overline{BF}^2}{BT}$; la similitudine poi de' triangoli somministra $BT : BF :: \overline{BG}^2 : \overline{BF}^2 :: \overline{BF}^2 : \overline{BA}^2 :: BF : BD$. Dunque $BD = AC = \frac{\overline{BF}^2}{BT} = AE + AI + AO +$ ecc. *in inf.* Si dimostra similmente $AH + AN +$ ecc. *in inf.* $= AD$.

VII. Finalmente si conchiuda col riflesso importante e decisivo, il quale basta per pienamente convincere, vale a dire che la primitiva comune risoluzione della forza AB in AC, AD è la vera e l'unica per far conoscere gli sforzi totali esercitati contro i punti fissi X, Y in direzione delle ver-

ghe ; e ciò per l' incontraſtabil ragione , che la forza *AC* non può in verun modo agire contro il punto *Y* reſtando tutta conſumata contro *X*, ed *AD* non può in minima parte agire contro *X*, perchè tutta s' impiega e conſuma contro *Y*. Di qui ſi ſcopre l' abbaglio del Sig. *Friſi* , il quale nel 2.° Tomo delle ſue Opere pag. 21 accuſa d' errore tutti i Meccanici perchè non errano con lui.

ARTICOLO IX.

Sopra la ſpinta delle travi, o tetti contro i loro ſoſtegni.

E' coſa a dir vero umiliante, che un Problema ſempliciſſimo, qual è quello di ritrovare la ſpinta d' una ſtanga o verga appoggiata ad un muro, ſia ſtato , e ſia tuttavia una pietra d' inciampo per parecchi Geometri di prima sfera, che ſi ſono poſti a trattarlo. Io eſporrò qui in breve la loro ſoluzione quaſi comunemente adottata; poſcia ne eſaminerò il fondamento ; ed in fine recherò la vera e genuina ſoluzione ricavata da principj ſicuri e incontraſtabili, non già dinamici, ma puramente ſtatici rigoroſamente dimoſtrati.

PROBLEMA.

1. *In una verga diritta* LO (Fig. 10.) *appoggiata in* L *al piano verticale* KL, *in* O *al piano orizzontale* KO, *i quali piani ſi ſuppongono perfettamente levigati, trovare la ſpinta orizzontale, come pure la verticale ſoſtenuta dal punto* O, *eſſendo ritenuto il capo della verga dall' oſtacolo* X.

I. Soluzione ſecondo il metodo comune.

Menata dal centro di gravità *G* della verga la verticale *GH*, che rappreſenti il peſo *P* della verga, ſi riſolva la forza *GH* nelle due *IH*, *GI* , una perpendicolare all' aſſe della verga, l' altra in direzione dell' aſſe iſteſſo. Ciò fatto, egli è chiaro , che la forza *GI* eſercita e conſuma tutta la ſua azione ſecondo la direzione *LO* contro il punto O, e che l' altra *IH* operando con direzione perpendicolare alla verga

distribuisce con la stessa direzione le sue azioni sopra i punti O, L in reciproca ragione delle rispettive distanze dal centro di gravità, onde la parte di tal forza perpendicolare, che s' aspetta al punto O, sarà $ON = IH \cdot \frac{GL}{LO}$. Prolungata la LO si pigli sul suo prolungamento la $OB = GI$, e si guidi la perpendicolare $BM = ON$. Il punto O viene sollecitato nello stesso tempo dalle due forze OB, ON, oppure dalla forza ad esse equivalente OM, ovvero (conducendo la verticale MF) dalla forza verticale FM, e dalla orizzontale OF intesa ad urtare orizzontalmente l' ostacolo. Dico ora $LO = a$, $LG = b$, $LOK = \phi$; e sarà $IH = P \cos.\phi$; $GI = P \text{ sen.}\phi = OB$; $ON = BM = \frac{bP \cos.\phi}{a}$; $OM = P\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}$;

$$\text{sen. } MOB = \frac{BM}{OM} = \frac{b \cos.\phi}{a\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}};$$

$$\cos. MOB = \frac{OB}{OM} = \frac{\text{sen.}\phi}{\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}}; \text{ sen. } MOF =$$

$$\text{sen.}(MOB + BOF) = \text{sen. } MOB \cos. BOF + \text{sen. } BOF \cos. MOB$$

$$= \frac{b \cos.\phi^2 + a \text{ sen.}\phi^2}{a\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}}; \cos. MOF =$$

$$\frac{\sqrt{\left(a^2 \text{ sen.}\phi^2 + b^2 \cos.\phi^2 - (b \cos.\phi^2 + a \text{ sen.}\phi^2)^2\right)}}{a\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}} =$$

$$\frac{\sqrt{(a^2 \text{ sen.}\phi^2 \cos.\phi^2 + b^2 \text{ sen.}\phi^2 \cos.\phi^2 - 2ba \text{ sen.}\phi^2 \cos.\phi^2)}}{a\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}} =$$

$$\frac{(a-b) \text{ sen.}\phi \cos.\phi}{a\sqrt{\left(\text{sen.}\phi^2 + \frac{b^2 \cos.\phi^2}{a^2}\right)}}.$$ Dunque finalmente la spinta verticale FM è $= OM \text{ sen. } MOF = \frac{P}{a}(b \cos.\phi^2 + a \text{ sen.}\phi^2)$, e la

ſpinta orizzontale $OF = OM$. coſ. $MOF = \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ coſ. ϕ $= \frac{P}{2a}(a-b)$ ſen. 2ϕ. Il che era ecc.

COROLLARIO.

2. Per trovare le ſpinte orizzontale, e verticale anche contro il punto L, ſi trasferiſca in L la parte della forza perpendicolare IH che gli compete, e ſia queſta la $L\mathcal{Q}$ perpendicolare all' aſſe della verga; indi ſi guidi l' orizzontale $\mathcal{Q}R$, con che ſarà riſoluta la forza $L\mathcal{Q}$ nelle due LR verticale, ed $R\mathcal{Q}$ orizzontale. Ma $L\mathcal{Q} = \frac{P}{a}(a-b)$ coſ. ϕ. Dunque

$LR = L\mathcal{Q}$. ſen. $L\mathcal{Q}R = \frac{P}{a}(a-b)$ coſ. ϕ^2, ed

$R\mathcal{Q} = \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ coſ. $\phi = \frac{1}{2}\frac{P}{a}(a-b)$ ſen. 2ϕ.

II. Soluzione ſecondo lo ſteſſo metodo.

3. Il peſo, o la forza verticale GH della verga (*Fig.* 11.) ſi diſtribuiſce alle due eſtremità O, ed L per modo, che riſulta in L una forza verticale $LS = \frac{P}{a}(a-b)$, ed in O una forza verticale $OT = \frac{Pb}{a}$. Abbaſſo il perpendicolo SD ſull' aſſe della verga, e rimane riſoluta la forza LS nelle due DS normale alla verga, ed LD in direzione della medeſima tendente a ſpingere il punto O ſecondo OC prolungamento della verga. Prendo $OC = LD$, e meno la verticale CV; con che reſta riſoluta la forza OC nella verticale CV, e nella forza orizzontale OV. Pertanto riſulta $OC = LD = LS$. ſen. LSD $= \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ; $OV = OC$. coſ. $COV = \frac{P}{a}(a-b)$ ſen. ϕ coſ. ϕ

$= \frac{P}{2a}(a-b)$ sen. 2ϕ, che è la spinta orizzontale contro il punto O. La spinta poi verticale contro lo stesso punto è $= OT + CV = \frac{Pb}{a} + OC$. sen. $COV = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a}(a-b)$ sen. ϕ^2

$= \frac{Pb}{a}(\text{sen. } \phi^2 + \text{cos. } \phi^2) + \frac{P}{a}(a-b)$ sen. ϕ^2

$= \frac{P}{a}(a \text{ sen. } \phi^2 + b \text{ cos. } \phi^2)$. Il che era ecc.

COROLLARIO.

4. E' manifesto, che se si vorrà risolvere la forza $LM = DS = \frac{P}{a}(a-b)$ cos. ϕ in altre due, una verticale LR, l' altra orizzontale LI, si troverà quella $= \frac{P}{a}(a-b)$ cos. ϕ^2, e questa $= \frac{P}{a}(a-b)$ sen. ϕ cos. $\phi = \frac{P}{2a}(a-b)$ sen. 2ϕ.

SCOLIO.

5. Potrebbe nascere il sospetto, che dalle due forze LI orizzontale, ed LR verticale nasca qualche altra azione contro l'estremità O della verga, e quindi non sia giusto il valore della spinta verticale, e della orizzontale dianzi determinato contro il punto O. Ma questo scrupolo si leva via mediante una nuova risoluzione delle forze LI, LR conducendo all' asse della verga le perpendicolari In, Rt; con che resta risoluta la forza LR nelle due Lt, Rt, e la forza LI nelle due Ln, In, e di queste quattro le due Lt, Ln dirette appunto contro il punto O per la loro uguaglianza ed opposizione si distruggono, e le due altre tR, nI cospiranti riproducono colla loro somma la forza primitiva LM.

COROLLARIO.

6. Se si cercasse la posizione pel massimo momento della forza fatta da una data trave per rovesciare il muro LK, a cui è appoggiata, converrebbe moltiplicare la forza $LI = \frac{P}{a}(a-b)$ sen. ϕ cos. ϕ pel suo braccio di leva $LK = a$ sen. ϕ, ed uguagliare a zero il differenziale del prodotto, dal che si avrebbe 2 sen. ϕ cos. $\phi^2 -$ sen. $\phi^3 = 0$, e quindi sen. $\phi = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Sicchè log. $2 = 0,3010300$

$$\log. 3 = 0,4771212$$

$$\log. \sqrt{\frac{2}{3}} = 9,9119544. \qquad \phi = 54.^\circ\ 44'.$$

7. E' cosa assai singolare, e degna di tutta la considerazione, che quest' angolo di 54.° 44' domini e regni (a così dire) in una notabil parte delle Scienze Meccaniche; avvegnachè 1.° questo è l' angolo della situazione più vantaggiosa delle ale del mulino a vento; 2.° della situazione più vantaggiosa delle vele nella nave; 3.° della posizione più favorevole del timone per far girare il vascello; 4.° delle cellette, che formano le api ne' loro alveari, per avere il massimo possibil risparmio di cera.

Esame della predetta Soluzione.

8. La precedente soluzione, sebbene conforme a quanto ritrovano *Gio. Bernoulli* Oper. tom. 4. p. 189, il Sig. *Kaestner* nella sua Mem. *Tigni ad parietem inclinati reperire pressiones* negli Atti dell' Acc. di Erfurt. ann. 1778, ed altri Geometri di gran fama, è però indubitatamente erronea, ed anche smentita dall' esperienza (come io ho potuto ocularmente convincermene) la quale dimostra all' occhio, che sempre più cresce la spinta orizzontale contro l' ostacolo inferiore quanto più la verga si accosta alla posizione orizzontale. L' errore nasce dal non tenersi alcun conto della forza AG

(*Fig.* 12) normale alla verga, nata dalla risoluzione della verticale AB, come se la detta AG non potesse più avere la minima azione contro l' estremità inferiore O della verga, il che è falsissimo: imperciocchè essendo la forza AG obbliqua al muro verticale AD non può ritrovare nel muro la sua distruzione, come avverrebbe se fosse ad esso perpendicolare, ed in fatti risoluta AG nell' orizzontale AQ, e nella verticale AX, è evidente, che posto da parte lo sfregamento la verga strisciérebbe sul muro lungo AX, e non rimane distrutta se non la forza AQ normale al muro. Ora è manifesto, che la forza AX ha azione contro l' estremità inferiore O della verga, così che risolvendo AX nelle due forze Az normale alla verga, ed AN in direzione della verga, la forza AN va tutta a caricare il punto O. Parimente se si risolve Az nella forza orizzontale Ay, e nella verticale Av, quella resta distrutta dalla resistenza del muro, e questa esercita parte della sua azione contro O, cioè risolvendo Av nella forza AI normale alla verga, e nella forza AM in direzione di essa, questa forza AM si impiega tutta contro il punto O, e così sempre proseguendo si trova che la spinta contro il punto O in direzione di AO viene rappresentata da $AR + AN + AM +$ ecc. *in inf.* sicchè posti come dianzi $FP = P$, $AO = a$, $AF = b$, e però $AB = \frac{P}{a}(a - b)$, sarà 1.° $AR = AB$ sen. $ABR = AB$ sen. $AOD = \frac{P}{a}(a - b)$ sen. ϕ. Inoltre $AG = AB$. sen. $ABG = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ, $AX = AG$. sen. $AGX = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ^2, 2.° $AN = AX$. sen. $AXN = \frac{P}{a}(a - b)$ sen. ϕ cos. ϕ^2. Similmente risulta $Az = AX$. sen. $AXz = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ^3, $Av = Az$. sen. $Azv = \frac{P}{a}(a - b)$ cos. ϕ^4, 3.° $AM = Av$. sen. $AvM = \frac{P}{a}(a - b)$ sen. ϕ cos. ϕ^4. In tal guisa proseguendo si trova AR

$+ AN$

$+AM+$ ecc. *in inf.* $=\frac{P}{a}(a-b)$ sen. $\phi\left(1+\text{cos.}\,\phi^2+\text{cos.}\,\phi^4\right.$ $\left.+\text{cos.}\,\phi^6+\text{cos.}\,\phi^8+\text{ecc. } in\ inf.\right)$. Ma è manifesto, che la serie $1+\text{cos.}\,\phi^2+\text{cos.}\,\phi^4+$ ecc. ha per somma $\frac{1}{1-\text{cos.}\,\phi^2}$ $=\frac{1}{\text{sen.}\,\phi^2}$. Dunque $AR+AN+AM+$ ecc. *in inf.* $=\frac{P(a-b)}{a\,\text{sen.}\,\phi}$. Perlochè se si piglia sulla direzione della verga la OH $=\frac{P(a-b)}{a\,\text{sen.}\,\phi}$, e indi si abbassa la verticale HK, nasce la ricercata spinta orizzontale $OK=OH.\text{cos.}\,KOH=\frac{P(a-b)\,\text{cos.}\,\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi}$ $=\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$; dalla quale si vede, che il suo valore va sempre crescendo a misura, che scema l'angolo ϕ fatto dalla verga coll' orizzonte, e che diventa infinito quando quest' angolo è infinitamente piccolo.

9. Si dimostra questo stesso più speditamente così: si risolva (*Fig.* 13) la forza verticale FP del peso della verga nella orizzontale FI, e nella FL parallela alla verga, e sarà $FL=\frac{FP}{\text{sen.}\,FLP}=\frac{P}{\text{sen.}\,\phi}$, $FI=\frac{P\,\text{cos.}\,\phi}{\text{sen.}\,\phi}$. Ora la forza FL s'impiega tutta a premere il punto O in direzione della verga, e viene rappresentata da $O\mathcal{Q}=FL=\frac{P}{\text{sen.}\,\phi}$. Se si abbassa la verticale $\mathcal{Q}G$, nasce dalla forza $O\mathcal{Q}$ la spinta orizzontale $OG=O\mathcal{Q}\,\text{sen.}\,O\mathcal{Q}G=\frac{P\,\text{cos.}\,\phi}{\text{sen.}\,\phi}$. La forza poi orizzontale FI trasferendo alle due estremità A, ed O della verga la sua azione per modo, che risulta in A la spinta orizzontale $AS=\frac{OF}{OA}.FI=\frac{P(a-b)\,\text{cos.}\,\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi}$ ed in O la spinta orizzontale $OE=\frac{AF}{OA}.FI=\frac{Pb\,\text{cos.}\,\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi}$. Laonde tutta la spinta orizzontale contro O, ovvero contro l' ostacolo posto in O sarà

$$OG - OE = \frac{P \,.\, \text{cos.}\,\phi}{\text{sen.}\,\phi} - \frac{Pb\,\text{cos.}\,\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi} = \frac{P(a-b)\,\text{cos.}\,\phi}{a\,\text{sen.}\,\phi}$$

$$= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi\,.$$

10. Quando l' angolo AOD è assolutamente nullo, ossia la verga è perfettamente orizzontale, allora è evidente, che essa non può più esercitare veruna spinta orizzontale contro l' ostacolo collocato in O; eppure l' espressione di siffatta spinta $\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$ diviene in tal caso infinita. Vedasi presso il Sig. Cav. *Lorgna* (*Saggi di Statica* §. XI) la ragione assai plausibile di questo paradosso. Intanto è manifesto, che tutta la pressione verticale QG, che soffre il punto O, uguaglia l' intero peso della verga, cioè FP, il che apparisce dalla similitudine de' triangoli FPL, OQG, che hanno le ipotenuse FL, OQ uguali; è ciò parimente s' inferisce dall' essere la spinta verticale contro l' estremità inferiore O (*Fig.* 12) uguale ad

$$OE + HK = \frac{Pb}{a} + OH\,.\,\text{sen.}\,\phi = \frac{Pb}{a} + \frac{P(a-b)}{a} = P$$

11. La spinta orizzontale (*Fig.* 13) risulta la stessa così contro l' estremità superiore A, come contro l' inferiore O della verga, cioè $AS = OG - OE$, poichè pel §. 7. ambedue queste quantità hanno la stessa espressione $\frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$. Ciò pure si dimostra (*Fig.* 12) così: 1.° $AQ = AG\,.\,\text{sen.}\,AGQ = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi$. Inoltre $Az = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cos.}\,\phi^2$, 2.° $Ay = Az\,.\,\text{sen.}\,Azy = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi^2$. Parimente $Av = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cos.}\,\phi^4$, $AI = Av\,.\,\text{sen.}\,AvI = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cos.}\,\phi^5$, 3.° $AT = AI\,.\,\text{sen.}\,AIT = \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi^5$. Così seguitando si troverà la spinta orizzontale contro l' estremo superiore della verga $= AQ + Ay + AT +$ ecc. *in inf.*

$= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi\,(1+\text{cos.}\,\phi^2+\text{cos.}\,\phi^4+\text{cos.}\,\phi^6$

$+\,\text{ecc. } in\ inf.) = \frac{P}{a}(a-b)\frac{\text{sen.}\,\phi\,\text{cos.}\,\phi}{1-\text{cos.}\,\phi^2} = \frac{P}{a}(a-b)\frac{\text{cos.}\,\phi}{\text{sen.}\,\phi}$

$= \frac{P}{a}(a-b)\,\text{cot.}\,\phi$

Propongasi ora più generalmente il seguente

PROBLEMA.

12. *Una trave* AB *è appoggiata in* B *ad un piano orizzontale, ed in* A *ad un piano obbliquo* AC, *che forma coll' orizzontale l' angolo ottuso* ACB (Fig. 14); *si cerca quanta sarà la pressione perpendicolare in* A *contro il piano* AC, *e quanta la pressione così verticale che orizzontale in* B.

SOLUZIONE.

Sia M il centro di gravità della trave omogenea, e la verticale MN rappresenti il peso della trave, che si risolva in due MO perpendicolare al piano AC, ed MQ parallela alla trave. Si trasferisca MQ in BE in direzione della trave, e si guidi la verticale EH. Si trasferisca MO in AR, e BG in direzione perpendicolare ad AC, prendendo $AR = \frac{MB.MO}{AB}$, e $BH = \frac{AM.MO}{AB}$. Quindi si conduca la verticale GD. Ciò fatto, sia $BA = a$, $AM = b$, $BAC = \phi$, $ACB = \omega$, $BAR = QMO = 90° + \phi$, $NMO = 180° - \omega$, $QMN = \omega + \phi - 90°$, $EBH = 180° - \phi - \omega$, $GBD = \omega - 90°$, $MN = P$. Avremo dunque dalla Statica $\text{sen.}\,QMO : \text{sen.}\,NMO :: MN : MQ$, cioè

$\text{cos.}\,\phi : \text{sen.}\,\omega :: P : MQ = BE = \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\phi}$, parimente

$\text{sen.}\,QMO : \text{sen.}\,QMN :: MN : MO$, cioè $\text{cos.}\,\phi : -\text{cos.}\,(\omega+\phi) :: P : MO = -\frac{P\,\text{cos.}\,(\omega+\phi)}{\text{cos.}\,\phi}$. Dunque la prima pressione ricercata $AR = \frac{MB.MO}{AB} = -\frac{P(a-b)\,\text{cos.}\,(\omega+\phi)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Inoltre

Fig: I

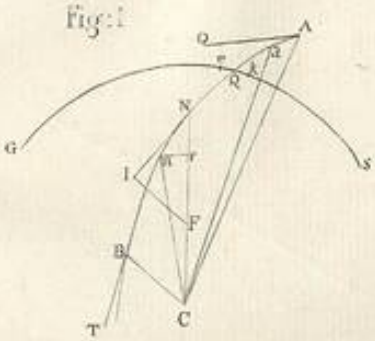


Fig: II

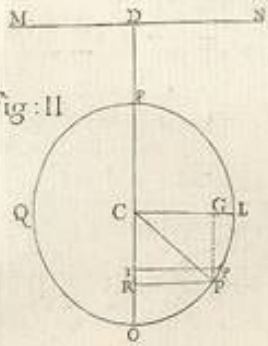


Fig: III

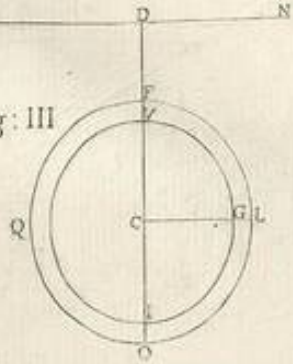


Fig: IV

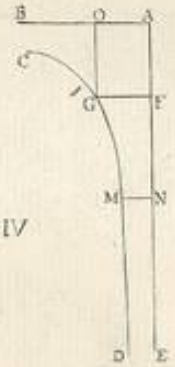


Fig: V

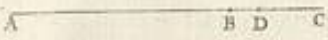


Fig: VI

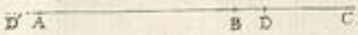


Fig: VII

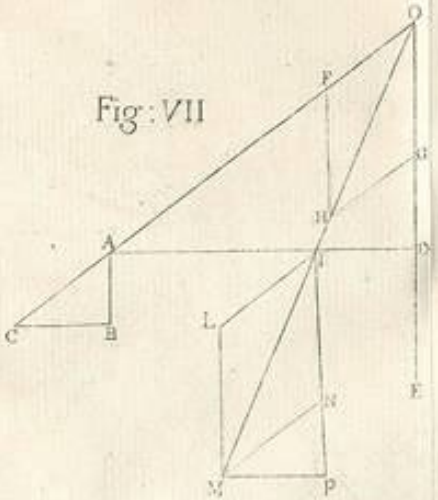


Fig: VIII

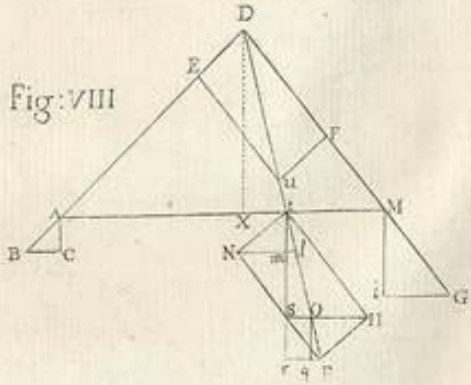


Fig: IX

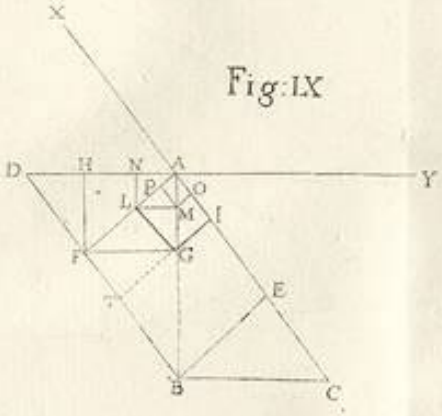


Fig: X

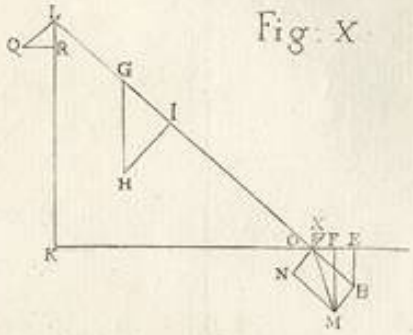


Fig: XI

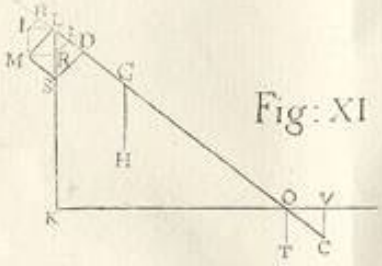


Fig: XII

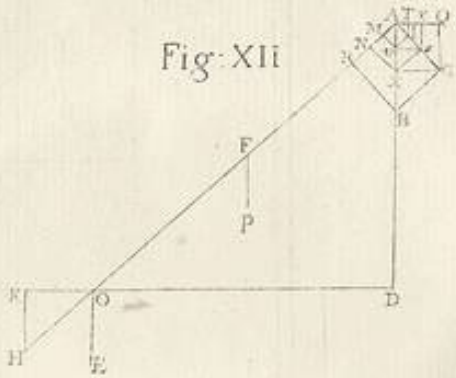


Fig: XIII

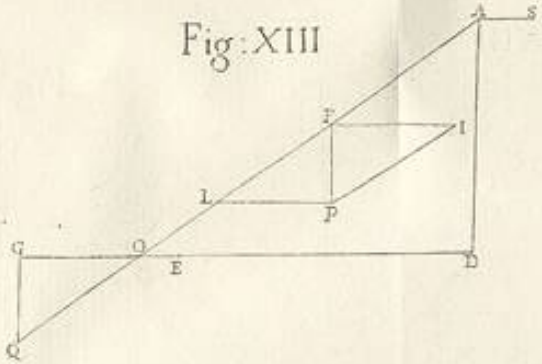
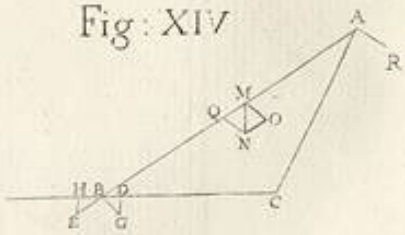


Fig: XIV



$1 : \text{sen.}\, HBE :: BE : HE$, ossia $1 : \text{sen.}(\phi+\omega) :: \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\phi} : HE$; e però $HE = \frac{P\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}(\phi+\omega)}{\text{cos.}\,\phi}$. Similmente

$1 : \text{sen.}\, GBD :: BG : DG$, ovvero $1 : -\text{cos.}\,\omega :: \frac{AM \,.\, MO}{AB} : DG$, oppure $1 : -\text{cos.}\,\omega :: -\frac{Pb\,\text{cos.}(\phi+\omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi} : DG$

$= \frac{Pb\,\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}(\phi+\omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Dunque la pressione verticale contro B sarà $HE + DG = \frac{P}{a\,\text{cos.}\,\phi}\big(a\,\text{sen.}\,\omega\,\text{sen.}(\phi+\omega)$ $+ b\,\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}(\phi+\omega)\big)$. Di più, abbiamo $1 : \text{cos.}\, HBE :: BE : BH$, ovvero, $1 : -\text{cos.}(\phi+\omega) :: \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\phi} : BH = -\frac{P\,\text{sen.}\,\omega\,\text{cos.}(\phi+\omega)}{\text{cos.}\,\phi}$. Così pure $1 : \text{cos.}\, GBD :: BG : BD$, ovvero $1 : \text{sen.}\,\omega :: -\frac{Pb\,\text{cos.}(\phi+\omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi} : BD = -\frac{Pb\,\text{sen.}\,\omega\,\text{cos.}(\phi+\omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Dunque sarà la pressione orizzontale contro $B = BH - BD = \frac{P\,\text{sen.}\,\omega}{a\,\text{cos.}\,\phi}$ $\big(b\,\text{cos.}(\phi+\omega) - a\,\text{cos.}(\phi+\omega)\big) = \frac{P(b-a)\,\text{sen.}\,\omega\,\text{cos.}(\phi+\omega)}{a\,\text{cos.}\,\phi}$. Il che era ecc.