MEMORIA

SULL' EQUAZIONI A DIFFERENZE FINITE E PARZIALI.

Del Sig. PIETRO PAOLI Pubblico Professore nella Università di Pavia.

I Due illustri Geometri, i Signori *de la Place* e *de la Grange* hanno insegnato ad integrare l' equazioni a differenze finite e parziali. Il primo nel Tomo 6.° e 7.° delle *Memorie presentate all' Accademia di Parigi* ha dato un metodo generale per integrare l' equazioni lineari a differenze finite e parziali di un ordine qualunque n, a coefficienti comunque variabili o costanti. Il secondo nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* dell' anno 1775. ha dato due metodi per integrare le medesime equazioni, quando i coefficienti sono costanti. Se $Z^{(y,x)}$ rappresenta una funzione delle variabili y ed x, l' equazioni finora trattate si riducono alla forma seguente:

$$\begin{aligned} Z^{(y,x)} = {} & AZ^{(y-1,x)} + BZ^{(y-2,x)} + \ldots + NZ^{(y-n,x)} + X \\ & + A'Z^{(y,x-1)} + B'Z^{(y-1,x-1)} + \ldots + N'Z^{(y-n,x-1)} \\ & + A''Z^{(y,x-2)} + B''Z^{(y-1,x-2)} + \ldots + N''Z^{(y-n,x-2)} \\ & \vdots \\ & + A^{(n)}Z^{(y,x-n)} + B^{(n)}Z^{(y-1,x-n)} + \ldots + N^{(n)}Z^{(y-n,x-n)} \end{aligned}$$

ove per A, A', ecc., B, B', ecc., e per X il Sig. *de la Place* intende qualunque funzione data di x; il Sig. *de la Grange* suppone che A, B, ecc. siano quantità costanti, ed $X = 0$: ambedue pongono n essere una quantità costante.

Niuno di loro ha mai pensato a trattare quel caso, in cui

le differenze di y suppongonsi funzioni della variabile x (a). Tale è l' equazione semplicissima $Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$, alla quale si giunge, se il numero delle maniere si cerca, nelle quali un numero y può esser la somma di x termini della serie naturale 1, 2, 3, 4, 5 ecc. I metodi del Sig. *de la Grange* sono inapplicabili a questa sorte di equazioni: quello del Sig. *de la Place* può applicarvisi, come vedremo in appresso; ma egli non ha mai considerate quest' equazioni. Avendomi pertanto il primo metodo del Sig. *de la Grange* suggerita un' altra via, per cui giunger si può alla integrazione di quest' equazioni, ho pensato di presentare ai Geometri un saggio di quelle ricerche, che ho fatte in questa materia.

ARTICOLO I.

Dell' integrazione dell' equazioni a differenze finite, variabili, e parziali.

1. Sia pertanto proposto d' integrar l' equazione

$$Z^{(y,x)} = \underset{x}{A} Z^{(y-1,x)} + \underset{x}{B} Z^{(y-2,x)} + \ldots + \underset{x}{X} Z^{(y-x,x)} + \ldots$$
$$+ \underset{x}{A'} Z^{(y,x-1)} + \underset{x}{B'} Z^{(y-1,x-1)} + \ldots + \underset{x}{X'} Z^{(y-x,x-1)} + \ldots$$

ove $\underset{x}{A}$, $\underset{x}{A'}$, $\underset{x}{B}$, $\underset{x}{B'}$, ecc. esprimono funzioni date di x, e nelle diverse funzioni $Z^{(y-1,x)}$, $Z^{(y-1,x-1)}$, ecc. la y può variare comunque, purchè però la sua variazione sia sempre una funzione di x.

Supponghiamo, che l' integrale cercato abbia questa forma:

$$Z^{(y,x)} = ma^y \nabla \underset{x}{\alpha} + nb^y \nabla \underset{x}{\beta} + pc^y \nabla \underset{x}{\gamma} + \text{ecc.}$$

ove le lettere m, n, p, ecc. a, b, c, ecc. esprimono quan-

(a) Il Sig. Cav. *Lorgna* è il primo, che abbia trattato delle funzioni ed equazioni differenziali finite a due variabili, supponendo le differenze di y funzioni della variabile x (Mem. della *Società Italiana* Tomo I. pag. 377, 388, 395 e segu.); ma non ha ancora pubblicato la continuazione delle sue ricerche sull' equazioni a più di due variabili, come s' è proposto di fare alla pag. 375.

tità costanti, $\underset{x}{\alpha}$, $\underset{x}{\beta}$, $\underset{x}{\gamma}$, ecc. sono funzioni di x; $\underset{x}{\nabla\alpha}$ secondo la maniera di scrivere del Sig. *de la Place* rappresenta il prodotto $\underset{1}{\alpha}.\underset{2}{\alpha}.\underset{3}{\alpha}\ldots\underset{x}{\alpha}$; in modo che sarà $\underset{x-1}{\nabla\alpha}$ $=\underset{1}{\alpha}.\underset{2}{\alpha}.\underset{3}{\alpha}\ldots\underset{x-1}{\alpha}$, e perciò $\underset{x}{\nabla\alpha}=\underset{x}{\alpha}\,\underset{x-1}{\nabla\alpha}$: il numero poi de' termini dell' integrale è indefinito. Sostituendo adunque nella equazione proposta in luogo di $Z^{(y,x)}$ il di lui valore, avremo

$$
\begin{aligned}
ma^{y}\underset{x}{\nabla\alpha} &= m\underset{x}{A}\,a^{y-1}\underset{x}{\nabla\alpha} + m\underset{x}{B}\,a^{y-2}\underset{x}{\nabla\alpha} + \ldots \\
&\quad + m\underset{x}{X}\,a^{y-x}\underset{x}{\nabla\alpha} + \ldots + m\underset{x}{A'}\,a^{y}\underset{x-1}{\nabla\alpha} \\
&\quad + m\underset{x}{B'}\,a^{y-1}\underset{x-1}{\nabla\alpha} + \ldots + m\underset{x}{X'}\,a^{y-x}\underset{x-1}{\nabla\alpha} + \ldots \\
+ nb^{y}\underset{x}{\nabla\beta} &+ n\underset{x}{A}\,b^{y-1}\underset{x}{\nabla\beta} + n\underset{x}{B}\,b^{y-2}\underset{x}{\nabla\beta} + \ldots \\
&\quad + n\underset{x}{X}\,b^{y-x}\underset{x}{\nabla\beta} + \ldots + n\underset{x}{A'}\,b^{y}\underset{x-1}{\nabla\beta} \\
&\quad + n\underset{x}{B'}\,b^{y-1}\underset{x-1}{\nabla\beta} + \ldots + n\underset{x}{X'}\,b^{y-x}\underset{x-1}{\nabla\beta} + \ldots \\
+ pc^{y}\underset{x}{\nabla\gamma} &+ p\underset{x}{A}\,c^{y-1}\underset{x}{\nabla\gamma} + p\underset{x}{B}\,c^{y-2}\underset{x}{\nabla\gamma} + \ldots \\
&\quad + p\underset{x}{X}\,c^{y-x}\underset{x}{\nabla\gamma} + \ldots + p\underset{x}{A'}\,c^{y}\underset{x-1}{\nabla\gamma} \\
&\quad + p\underset{x}{B'}\,c^{y-1}\underset{x-1}{\nabla\gamma} + \ldots + p\underset{x}{X'}\,c^{y-x}\underset{x-1}{\nabla\gamma} + \ldots \\
+ \text{ecc.} &\quad + \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

Per soddisfare a questa equazione, ponghiamo

$$
\begin{aligned}
ma^{y}\underset{x}{\nabla\alpha} &= m\underset{x}{A}\,a^{y-1}\underset{x}{\nabla\alpha} + m\underset{x}{B}\,a^{y-2}\underset{x}{\nabla\alpha} + \ldots \\
&\quad + m\underset{x}{X}\,a^{y-x}\underset{x}{\nabla\alpha} + \ldots + m\underset{x}{A'}\,a^{y}\underset{x-1}{\nabla\alpha} \\
&\quad + m\underset{x}{B'}\,a^{y-1}\underset{x-1}{\nabla\alpha} + \ldots + m\underset{x}{X'}\,a^{y-x}\underset{x-1}{\nabla\alpha} + \ldots \\
nb^{y}\underset{x}{\nabla\beta} &= n\underset{x}{A}\,b^{y-1}\underset{x}{\nabla\beta} + n\underset{x}{B}\,b^{y-2}\underset{x}{\nabla\beta} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$+nX_{\varkappa}\, b^{\jmath-\varkappa}\nabla\beta_{\varkappa} + \ldots + nA'_{\varkappa}\, b^{\jmath}\nabla\beta_{\varkappa-1}$$

$$+nB'_{\varkappa}\, b^{\jmath-1}\nabla\beta_{\varkappa-1} + \ldots + nX'_{\varkappa}\, b^{\jmath-\varkappa}\nabla\beta_{\varkappa-1} + \ldots$$

$$pc^{\jmath}\nabla\gamma_{\varkappa} = pA_{\varkappa}\, c^{\jmath-1}\nabla\gamma_{\varkappa} + pB_{\varkappa}\, c^{\jmath-2}\nabla\gamma_{\varkappa} + \ldots$$

$$+pX_{\varkappa}\, c^{\jmath-\varkappa}\nabla\gamma_{\varkappa} + \ldots + pA'_{\varkappa}\, c^{\jmath}\nabla\gamma_{\varkappa-1}$$

$$+pB'_{\varkappa}\, c^{\jmath-1}\nabla\gamma_{\varkappa-1} + \ldots + pX'_{\varkappa}\, c^{\jmath-\varkappa}\nabla\gamma_{\varkappa-1} + \ldots$$

ecc.

e siccome $\nabla\alpha_{\varkappa} = \alpha_{\varkappa}\nabla\alpha_{\varkappa-1}$, $\nabla\beta_{\varkappa} = \beta_{\varkappa}\nabla\beta_{\varkappa-1}$,

$\nabla\gamma_{\varkappa} = \gamma_{\varkappa}\nabla\gamma_{\varkappa-1}$, ecc. avremo

$$\alpha_{\varkappa} = \frac{A'_{\varkappa} + B'_{\varkappa}\, a^{-1} + \ldots + X'_{\varkappa}\, a^{-\varkappa} + \ldots}{1 - A_{\varkappa}\, a^{-1} - B_{\varkappa}\, a^{-2} - \ldots - X_{\varkappa}\, a^{-\varkappa} - \ldots}$$

$$\beta_{\varkappa} = \frac{A'_{\varkappa} + B'_{\varkappa}\, b^{-1} + \ldots + X'_{\varkappa}\, b^{-\varkappa} + \ldots}{1 - A_{\varkappa}\, b^{-1} - B_{\varkappa}\, b^{-2} - \ldots - X_{\varkappa}\, b^{-\varkappa} - \ldots}$$

$$\gamma_{\varkappa} = \frac{A'_{\varkappa} + B'_{\varkappa}\, c^{-1} + \ldots + X'_{\varkappa}\, c^{-\varkappa} + \ldots}{1 - A_{\varkappa}\, c^{-1} - B_{\varkappa}\, c^{-2} - \ldots - X_{\varkappa}\, c^{-\varkappa} - \ldots}$$

ecc.

e quindi ancora i valori di $\nabla\alpha_{\varkappa}$, $\nabla\beta_{\varkappa}$, $\nabla\gamma_{\varkappa}$, ecc.

2. Si riduca in serie discendente la quantità $\nabla\alpha_{\varkappa}$, lo che secondo i diversi casi potrà per i metodi cogniti farsi in diverse maniere. In generale ponghiamo

$$\nabla\alpha_{\varkappa} = A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$l.\nabla\alpha_{\varkappa} = l.\left(A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}\right)$$

Differenziando adesso nell' ipotesi di x costante, ed a variabile, sarà

$$\frac{-a^2 d\nabla\alpha_{x}}{\nabla\alpha_{x}\,.\,da} = \frac{A' + 2A''a^{-1} + 3A'''a^{-2} + \text{ecc.}}{A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}}.$$

Ora, essendo $\nabla\alpha_{x}$ una funzione fratta di a^{-1}, se cerchiamo le radici del numeratore e del denominatore di questa frazione, cioè i valori di a facendo l' uno e l'altro $= 0$; è facile il vedere, che posta $r =$ alla somma delle radici del denominatore meno quelle del numeratore, $r' =$ ai quadrati delle radici del denominatore meno quelli del numeratore, e in generale $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici del denominatore meno le potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici del numeratore, avremo

$$\frac{-a^2 d\nabla\alpha_{x}}{\nabla\alpha_{x}\,d.a} = r + r'a^{-1} + r''a^{-2} + r'''a^{-3} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$r + r'a^{-1} + r''a^{-2} + r'''a^{-3} + \text{ecc.}$$
$$= \frac{A' + 2A''a^{-1} + 3A'''a^{-2} + \text{ecc.}}{A + A'a^{-1} + A''a^{-2} + A'''a^{-3} + \text{ecc.}}.$$

Quindi si deduce

$$A' = Ar$$
$$2A'' = A'r + Ar'$$
$$3A''' = A''r + A'r' + Ar''$$
$$4A'''' = A'''r + A''r' + A'r'' + Ar'''$$
$$\text{ecc.}$$

La quantità A si determinerà ponendo $a = 0$ nella funzione $\nabla\alpha_{x}$. Dall' equazioni precedenti si rileva

$$\frac{A'}{A} = r$$
$$\frac{A''}{A} = \frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}$$

$$\frac{A''}{A}=\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

$$\frac{A'''}{A}=\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}.$$

e in generale

$$\frac{A^{(m+1)}}{A}=\frac{r^{(m)}}{m+1}+r\frac{r^{(m-1)}}{m+1}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1}+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r^{(m-3)}}{m+1}+\left(\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right)\frac{r^{(m-4)}}{m+1}$$

$$+\left\{\frac{r''''}{5}+r\frac{r'''}{5}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r''}{5}+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}\right.\right.$$

$$\left.+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r'}{5}+\left(\frac{r'''}{4}+r\frac{r''}{4}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r'}{4}\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{r''}{3}+r\frac{r'}{3}+\left(\frac{r'}{2}+r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}\right)\frac{r}{4}\right)\frac{r}{5}\right\}\frac{r^{(m-5)}}{m+1}+\text{ecc.}$$

Merita di essere osservata questa formola per la legge, che osservano tra di loro i di lei diversi termini. Il coefficiente del secondo termine si ha ponendo nel primo $m=0$; il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel secondo $m=1$; e generalmente il coefficiente del termine $(\mu+2)^{esimo}$ facendo ne' termini antecedenti $m=\mu$.

3. Abbiamo dunque

$$\nabla\alpha_{n}=A+A'a^{-1}+A''a^{-2}+A'''a^{-3}+\text{ecc.}$$

ed è evidente che sarà similmente

$$\nabla\beta_{n}=A+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+\text{ecc.}$$

$$\nabla\gamma_{n}=A+A'c^{-1}+A''c^{-2}+A'''c^{-3}+\text{ecc.}$$

ecc.

Dunque l' integrale cercato sarà

$Z^{(s-n)}$

$$Z^{(y,x)} = mAa^y + mA'a^{y-1} + mA''a^{y-2} + mA'''a^{y-3} + \text{ecc.}$$
$$+ nAb^y + nA'b^{y-1} + nA''b^{y-2} + nA'''b^{y-3} + \text{ecc.}$$
$$+ pAc^y + pA'c^{y-1} + pA''c^{y-2} + pA'''c^{y-3} + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.}$$

Ma la quantità $ma^y + nb^y + pc^y + \text{ecc.}$ può rappresentare qualunque funzione di y; supponghiamo dunque che questa funzione di y sia $\phi.y$, ed avremo

$$Z^{(y,x)} = A\phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

La funzione $\phi.y$ è quella funzione arbitraria, che deve aver luogo nell' integrale della equazione proposta. Per determinarla conviene che sia dato il valore di $Z^{(y,0)}$, cioè il valore di $Z^{(y,x)}$, quando vi si fa $x = 0$, come più chiaramente vedremo ne' casi particolari.

4. Ecco adunque come si deve operare per aver l' integrale della proposta equazione. Si faccia $Z^{(y,x)} = b^y \nabla^x \alpha$, e sostituendo questo valore di $Z^{(y,x)}$ nella proposta, se ne dedurrà il valore di α, e quindi quello di $\nabla^x \alpha$. Si riduca $\nabla^x \alpha$ nella serie $A + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$ e si avrà subito l' integrale cercato così espresso:

$$Z^{(y,x)} = A\phi.y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

5. Per applicare l' esposta Teoria ai casi particolari, cerchiamo il termine generale di alcune di quelle serie, che il Sig. *de la Place* ha chiamate *ricorro-ricorrenti*. Le serie di questa specie, che sono state finora trattate, erano tali, che un termine qualunque dipendeva con una certa legge da altri antecedenti sempre ugualmente remoti da quello: nelle serie, delle quali siamo per parlare, un termine dipende con una certa legge da altri sempre disugualmente distanti da quello.

PROBLEMA I.

6. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 .... y
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
4	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84
5	0	0	0	0	0	0	1	5	15	35 ....
x										

In questa serie ciascun termine dipende da altri due in modo, che è uguale alla somma del termine precedente della medesima linea orizzontale, e di quel termine della fila antecedente, il di cui posto è distante di $x-2$ unità dal numero proposto. Così nella quinta fila, ove $x=5$, ciascun numero, come il 35, è uguale al numero precedente 15 + quel numero che nella fila antecedente è nel terzo posto avanti il 35, che in questo caso è il 20. Sia $Z^{(y,x)}$ il termine generale di questa serie, e per le condizioni del Problema avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-1,x)} + Z^{(y-x+2,x-2)}$$

Ponghiamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = b^{-1}\alpha_x + b^{-x+2}$,

cioè $\alpha_x = \dfrac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_x = \dfrac{b^1.b^0.b^{-1}.b^{-2}\ldots.b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^x}$

$= \dfrac{b^{-x(x-3):2}}{(1-b^{-1})^x}$. Si riduca in serie per mezzo del Teorema *Newtoniano* la quantità $\dfrac{1}{(1-b^{-1})^x}$, e si avrà

$$\nabla\alpha_x = b^{-x(x-3):2} + xb^{-x(x-3):2-1} + \frac{x(x+1)}{2} b^{-x(x-3):2-2} + \text{ecc.}$$

Onde per le cose precedenti sarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2}\right) + x\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 1\right)$$
$$+ \frac{x(x+1)}{2}\phi\left(y - \frac{x(x-3)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Adesso per determinare la funzione arbitraria $\phi.y$, facciamo $x=0$, ed avremo $Z^{(y,0)}=\phi.y$. Dunque $\phi.y$ è ciò che diviene $Z^{(y,x)}$, quando vi si fa $x=0$. Ma noi non conosciamo il valore di $Z^{(y,0)}$; onde converrà dedurre il valore di questa funzione da quello di $Z^{(y,1)}$, il quale è espresso dalla prima linea orizzontale della serie proposta. Bisogna prima osservare, che continuando la serie dalla parte sinistra, cioè dando ad y i valori $0, -1, -2$, ecc., i valori di $Z^{(y,1)}$ diverranno tutti $=0$, cioè sarà $Z^{(0,1)}=0$, $Z^{(-1,1)}=0$, $Z^{(-2,1)}=0$, ecc. In fatti ponendo nella equazione del problema x successivamente $=2, 3$, ecc., ed $y=0, 1, 2$, ecc. avremo

$$Z^{(0,1)}=Z^{(0,2)}-Z^{(-1,2)} \qquad Z^{(-1,2)}=Z^{(0,3)}-Z^{(-1,3)}$$
$$Z^{(0,2)}=Z^{(1,3)}-Z^{(0,3)} \qquad Z^{(-1,3)}=Z^{(1,4)}-Z^{(0,4)}$$
$$Z^{(0,3)}=Z^{(2,4)}-Z^{(1,4)} \qquad Z^{(0,4)}=Z^{(3,5)}-Z^{(2,5)}$$
ecc. ecc.

Ora $Z^{(2,4)}=0$, e $Z^{(1,4)}=0$; dunque $Z^{(0,3)}=0$: quindi siccome $Z^{(1,3)}=0$, sarà $Z^{(0,2)}=0$. Così, siccome $Z^{(3,5)}$ e $Z^{(2,5)}$ sono $=0$, sarà $Z^{(0,4)}=0$, $Z^{(-1,3)}=0$, $Z^{(-1,2)}=0$, e perciò $Z^{(0,1)}=0$. Nella medesima maniera si dimostrerà essere uguali a zero tutt' i valori di $Z^{(y,1)}$, quando y è negativa.

Adesso, se facciamo $x=1$, avremo $Z^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}+Z^{(y+1,0)}$. cioè $Z^{(y,0)}=Z^{(y-1,1)}-Z^{(y-2,1)}$; e quindi

$$Z^{(0,0)}=Z^{(-1,1)}-Z^{(-2,1)}=0$$
$$Z^{(1,0)}=Z^{(0,1)}-Z^{(-1,1)}=0$$
$$Z^{(2,0)}=Z^{(1,1)}-Z^{(0,1)}=1$$
$$Z^{(3,0)}=Z^{(2,1)}-Z^{(1,1)}=0$$
ecc.

Di qui apparisce, che la funzione $Z^{(y,0)}$ è $=1$ nel solo caso di $y=2$; negli altri casi è sempre $=0$. Se adunque facciamo $y-\frac{x(x-3)}{2}-m=2$, sarà

$\phi\left(y-\frac{x(x-3)}{2}-m\right)=1$, e $Z^{(y,x)}$ sarà uguale al coefficiente del termine $\phi\left(y-\frac{x(x-3)}{2}-m\right)$, poichè gli altri

termini della serie svaniscono. Essendo $m = y - \frac{x(x-3)}{2} - 2$, si troverà questo coefficiente uguale a

$$\frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots x+y-\frac{x(x-3)}{2}-3}{1.2.3\ldots\ldots(y-\frac{x(x-3)}{2}-2)},$$

e la funzione ricercata $Z^{(y,x)}$, o sia il termine generale della serie proposta

$$= \frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots x+y-\frac{x(x-3)}{2}-3}{1.2.3\ldots\ldots(y-\frac{x(x-3)}{2}-2)}.$$

Per esempio supponendo $y = 10$, $x = 5$, avremo il decimo termine della quinta fila $= \frac{5.6.7}{1.2.3} = 35$, come appunto è nella serie.

7. La funzione arbitraria introdotta nell' integrale della equazione proposta si è trovata essere $Z^{(y,0)}$; se vogliamo invece introdurvi la funzione $Z^{(y,1)}$, che data dalla prima linea della serie, basterà fare $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_{x-1}$, supponendo $\nabla\alpha_{x-1} = \alpha_1 . \alpha_2 . \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_{x-1}$. Perchè avremo $\alpha_{x-1} = b^{-1}\alpha_{x-1} + b^{-x+2}$, cioè $\alpha_{x-1} = \frac{b^{-x+2}}{1-b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_{x-1} = \frac{b^0 . b^{-1} . b^{-2} \ldots . b^{-x+2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$ $= \frac{b^{-(x-1)(x-2):2}}{(1-b^{-1})^{x-1}}$, o sia $\nabla\alpha_{x-1} = b^{-(x-1)(x-2):2}$ $+ (x-1)\, b^{-(x-1)(x-2):2-1} + \frac{(x-1)x}{2} b^{-(x-1)(x-2):2-2} +$ ecc. e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2}\right) + (x-1)\,\phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 1\right)$$
$$+ \frac{(x-1)x}{2}\,\phi\left(y - \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, abbiamo $\phi . y = Z^{(y,1)}$, cioè $\phi . y = 1$, se y

è positiva, $e=0$, se y è zero o negativa. Avremo dunque

$$Z^{(y,x)}=1+(x-1)+\frac{(x-1)x}{2}+\frac{(x-1)x(x+1)}{2.3}+\ldots$$

$$+\frac{(x-1)x\ldots\ldots\left(x+y-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-3\right)}{2\ldots\ldots\left(y-\frac{(x-1)(x-2)}{2}-1\right)}$$, la quale

espressione combina coll' altra superiormente ritrovata.

8. Similmente, se si vorrà nell' integrale introdurre la funzione $Z^{(y,z)}$, basterà supporre $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_{x-2}$. Perchè sostituendo si avrà $\alpha_{x-2}=b^{-z}\alpha_{x-3}+b^{-x+z}$, cioè $\alpha_{x-2}=\frac{b^{-x+z}}{1-b^{-z}}$, e $\nabla\alpha_{x-2}=\frac{b^{-(x-2)(x-1):2}}{(1-b^{-1})^{x-2}}$, cioè riducendo questo valore in serie

$$\nabla\alpha_{x-2}=b^{-(x-2)(x-1):2}+(x-2)b^{-(x-2)(x-1):2-1}$$

$$+\frac{(x-2)(x-1)}{2}b^{-(x-2)(x-1):2-2}+\text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)}=\phi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}\right)+(x-2)\phi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-1\right)$$

$$+\frac{(x-2)(x-1)}{2}\phi\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-2\right)+\text{ecc.}$$

Facendo $x=2$, si ha $\phi y=Z^{(y,2)}$, cioè $\phi y=y$, quando y è positiva, $e=0$, quando y è zero o negativa. Quindi sarà

$$Z^{(y,x)}=y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}+(x-2)\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-1\right)$$

$$+\frac{(x-2)(x-1)}{2}\left(y-\frac{(x-2)(x-1)}{2}-2\right)+\text{ecc.}$$

finchè si giunga ad un termine uguale a zero. Di qui si vede, come introdur si possa nell' integrale che si cerca qualunque altra funzione espressa da una linea orizzontale della serie. E questo ha luogo generalmente, qualunque sia l' equazione, che si voglia integrare.

PROBLEMA II.

9. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7	8....y
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	7	15	31	63	127
3	0	0	0	1	6	25	90	301
4	0	0	0	0	0	0	1	10.....
⋮								
x								

In questa serie ciascun termine è uguale al termine precedente della medesima linea moltiplicato per x, più quel termine della linea antecedente, il di cui posto è distante di $x-1$ unità. Per esempio il termine 90 della terza fila, che corrisponde a $y=7$, è $=3.\ 25+15$, ove il 15 è quel termine che nella fila precedente corrisponde ad $y-x+1=7-2=5$. Supponghiamo che il termine generale di questa serie sia $Z^{(y,x)}$, ed avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)}=x\,Z^{(y-1,x)}+Z^{(y-x+1,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, e l' equazione proposta diventerà

$\alpha_x=xb^{-1}\alpha_x+b^{-x+1}$, cioè $\alpha_x=\dfrac{b^{-x+1}}{1-xb^{-1}}$, e perciò

$\Delta\alpha_x=\dfrac{b^{-x(x-1):2}}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})(1-3b^{-1})\ldots(1-xb^{-1})}$. Ponghiamo $\dfrac{1}{(1-b^{-1})(1-2b^{-1})\ldots(1-xb^{-1})}=A+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+$ ecc. ed è chiaro essere $A=1$. Le radici del denominatore sono $1, 2, 3, \ldots\ldots x$: dunque facendo (2)

$$r=1+2+3+\ldots\ldots+x$$
$$r'=1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+x^2$$
$$\vdots$$
$$r^{(m)}=1^{m+1}+2^{m+1}+3^{m+1}+\ldots+x^{m+1}$$

avremo

$A'=r$

$$A'' = \frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}$$

$$A''' = \frac{r''}{3} + r\frac{r'}{3} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r}{3}$$

ed in generale

$$A^{(m+1)} = \frac{r^{(m)}}{m+1} + r\frac{r^{(m-1)}}{m+1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\frac{r^{(m-2)}}{m+1} + \text{ecc.}$$

come sopra (2). Quindi avremo

$$\nabla\alpha_{x} = b^{-x(x-1):2} + rb^{-x(x-1):2-1} + \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)b^{-x(x-1):2-2} + \text{ecc.}$$

e perciò sarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2}\right) + r\phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 1\right)$$
$$+ \left(\frac{r'}{2} + r\frac{r}{2}\right)\phi\left(y - \frac{x(x-1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 0$, è chiaro che sarà $r = r' = r'' = \text{ecc.} = 0$; dunque $Z^{(y,0)} = \phi y$. Per trovare il valore di $Z^{(y,0)}$, il quale non è dato dalla serie proposta, facciamo nella equazione del problema $x = 1$, ed avremo $Z^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)} + Z^{(y,0)}$. Ora è facile il vedere, come nel Problema I., che sarà $Z^{(y,1)} = 0$ se y è zero o negativa. Quindi sarà $Z^{(1,0)} = Z^{(1,1)} - Z^{(0,1)} = 1$, $Z^{(2,0)} = Z^{(2,1)} - Z^{(1,1)} = 0$, e così tutti gli altri valori di $Z^{(y,0)} = 0$, fuorchè il solo $Z^{(1,0)}$. Dunque la ricercata funzione $Z^{(y,x)} =$ a quel termine che nella serie è coefficiente di $\phi 1$. Sia $m+2$ il posto che occupa nella serie questo termine, cioè sia $A^{(m+1)}$ il coefficiente di $\phi . 1$, ed avremo $y - \frac{x(x-1)}{2} - m - 1 = 1$, cioè $m + 1 = y - \frac{x(x-1)}{2} - 1$. Se adesso esprimiamo col segno Sx^m la somma della serie $1 + 2^m + 3^m + \ldots + x^m$, sarà il termine generale cercato

$$Z^{(y,x)} = \frac{Sx^{y-x(x-1):2-1}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + Sx.\frac{Sx^{y-x(x-1):2-2}}{y - \frac{x(x-1)}{2} - 1} + \left(\frac{Sx^2}{2}\right.$$

$$+ Sx.\frac{Sx}{2})\frac{Sx^{y-x(x-1):2-3}}{y-\frac{x(x-1)}{2}-1}+\Big(\frac{Sx^3}{3}+Sx.\frac{Sx^2}{3}+\Big(\frac{Sx^2}{2}$$

$$+ Sx.\frac{Sx}{2})\frac{Sx}{3}\Big)\frac{Sx^{y-x(x-1):2-4}}{y-\frac{x(x-1)}{2}-1}+\text{ecc.}$$

nella quale espressione il coefficiente del termine $(m+1)^{esimo}$ si trova ponendo ne' termini precedenti $y-\frac{x(x-1)}{2}-1=m$.

Supponghiamo per esempio che si voglia sapere, qual termine corrisponda ad $x=3$, $y=8$, cioè il valore di $Z^{(8,3)}$; avremo

$$Z^{(8,3)}=\frac{Sx^4}{4}+Sx.\frac{Sx^3}{4}+\Big(\frac{Sx^2}{2}+Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx^2}{4}+\Big(\frac{Sx^3}{3}$$

$$+Sx.\frac{Sx^2}{3}+\Big(\frac{Sx^2}{2}+Sx.\frac{Sx}{2}\Big)\frac{Sx}{3}\Big)\frac{Sx}{4}=\frac{98}{4}+\frac{6.36}{4}$$

$$+(7+18)\frac{14}{4}+\Big(12+2.14+(7+18)2\Big)\frac{6}{4}$$

$$=\frac{1204}{4}=301 \text{ come nella figura.}$$

PROBLEMA III.

10. *Trovare il termine generale della serie*

	1	2	3	4	5	6	7....y
1	1	2	4	8	16	32	64
2	1	5	16	44	112	272	640
3	1	9	45	171	558	1656	4610
4	1	14	103	540	2295	8478	29379....
:							
x							

La legge, che osservano tra di loro i termini di questa serie, è espressa dall' equazione

$$Z^{(y,x)}=2Z^{(y-1,x)}+Z^{(y,x-1)}+(x-1)Z^{(y-1,x-1)}$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)}{2}Z^{(y-2,x-1)}+....+Z^{(y-x+1,x)}$$

In

In questa equazione non solo sono variabili le differenze di y, ma è ancora variabile il numero de' termini. Facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, e sostituendo avremo

$$\alpha_x = 2b^{-1}\alpha_x + 1 + (x-1)b^{-1} + \frac{(x-1)(x-2)}{2}b^{-2} + \ldots + b^{-x+1}$$

cioè $\alpha_x = \frac{(1+b^{-1})^{x-1}}{1-2b^{-1}}$, e $\nabla\alpha_x = \frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x}$. Sia

$$\frac{(1+b^{-1})^{x(x-1):2}}{(1-2b^{-1})^x} = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e differenziando logaritmicamente avremo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{A' + 2A''b^{-1} + 3A'''b^{-2} + \text{ecc.}}{1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}}$$

Ma riducendo in serie il primo membro abbiamo

$$\frac{x(x-1)}{2(1+b^{-1})} + \frac{2x}{1-2b^{-1}} = \frac{x(x-1)}{2}(1 - b^{-1} + b^{-2} - b^{-3} + \text{ecc.})$$
$$+ 2x(1 + 2b^{-1} + 4b^{-2} + 8b^{-3} + \text{ecc.})$$
$$= \frac{x(x+3)}{2} - \frac{x(x-9)}{2}b^{-1} + \frac{x(x+15)}{2}b^{-2}$$
$$- \frac{x(x-33)}{2}b^{-3} + \text{ecc.}$$ Dunque (2) $r = \frac{x(x+3)}{2}$,

$r' = -\frac{x(x-9)}{2}$, $r'' = \frac{x(x+15)}{2}$, e generalmente

$r^{(m)} = \pm\frac{x(x \pm 2^{m+2} - 1)}{2}$, ove il segno superiore vale nel caso di m pari, l' inferiore nel caso di m dispari. Quindi avremo

$$A' = \frac{x(x+3)}{2}$$

$$A'' = -\frac{x(x-9)}{2} + \frac{x(x+3)}{2} \cdot \frac{x(x+3)}{2.2}$$

e in generale

$$A^{(m-1)} = \pm\frac{x(x \pm 2^m - 1)}{2(m-1)} + \frac{x(x+2^2-1)}{2} \cdot \mp\frac{x(x \mp 2^{m-2} - 1)}{2(m-1)}$$

$$+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)$$
$$\pm\frac{x(x\pm 2^{m-2}-1)}{2(m-1)}+\left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$
$$\cdot-\frac{x(x-2^3-1)}{2.3}+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\cdot\frac{x(x+2^3-1)}{2.2}\right)\frac{x(x+2^2-1)}{2.3}\right)$$
$$\mp\frac{x(x\mp 2^{m-1}-1)}{2(m-1)}+\text{ecc.}$$

Determinate in questa maniera le quantità A', A'', ecc., avremo

$$Z^{(y,x)}=\phi y+A'\phi(y-1)+A''\phi(y-2)+A'''\phi(y-3)+\text{ecc.}$$

Facendo $x=0$, abbiamo $A'=A''=\text{ecc.}=0$; dunque $\phi y=Z^{(y,0)}$. Per trovare il valore di questa funzione, ponghiamo nella equazione del problema $y=1, 2, 3$, ecc.; $x=2, 3$, ecc.; ed avremo

$$Z^{(1,2)}=2Z^{(0,2)}+Z^{(1,1)}+Z^{(0,1)}$$
$$Z^{(2,3)}=2Z^{(1,3)}+Z^{(2,2)}+2Z^{(1,2)}+Z^{(0,2)}$$
$$\text{ecc.}$$

Quindi $Z^{(0,1)}=-2Z^{(0,2)}$, e $Z^{(0,2)}=0$, e così in generale $Z^{(0,x)}=0$. Adesso facendo $y=0, 1$, ecc.; $x=2, 3$, ecc. sarà

$$Z^{(0,2)}=2Z^{(-1,2)}+Z^{(0,1)}+Z^{(-1,1)}$$
$$Z^{(1,3)}=2Z^{(0,3)}+Z^{(1,2)}+2Z^{(0,2)}+Z^{(-1,2)}$$
$$\text{ecc.}$$

e perciò $Z^{(-1,1)}=-2Z^{(-1,2)}$, $Z^{(-1,2)}=0$, e generalmente $Z^{(-1,x)}=0$. Nell' istessa maniera si vedrà, che $Z^{(y,1)}$ è sempre $=0$ nel caso di y negativa. Ponghiamo adesso nella equazione proposta $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=2Z^{(y-1,1)}+Z^{(y,0)}$: dunque $Z^{(y,0)}$ è $=1$ nel solo caso di $y=1$; negli altri casi $Z^{(y,0)}=0$, e perciò $Z^{(y,x)}$ è $=$ al coefficiente di $\phi.1$. Sia $A^{(m-1)}$ questo coefficiente, avremo $y-m+1=1$, cioè $m=y$. Quindi sarà

$$Z^{(y,x)}=\pm\frac{x(x\pm 2^{y}-1)}{2(y-1)}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\mp\frac{x(x\mp 2^{y-1}-1)}{2(y-1)}$$

$$+\left(-\frac{x(x-2^2-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)$$
$$\pm\frac{x(x\pm 2^{y-1}-1)}{2(y-1)}+\left(\frac{x(x+2^4-1)}{2.3}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$
$$\cdot-\frac{x(x-2^3-1)}{2.3}+\left(-\frac{x(x-2^3-1)}{2.2}+\frac{x(x+2^2-1)}{2}\right.$$
$$\left.\left.\cdot\frac{x(x+2^2-1)}{2.2}\right)\frac{x(x+2^2-1)}{2.3}\right)\mp\frac{x(x\mp 2^{y-1}-1)}{2(y-1)}+\text{ecc.}$$

Di questa serie si devono prender $y-1$ termini; la serie poi è tale, che si ottiene il coefficiente del secondo termine facendo nel primo $y=2$, il coefficiente del terzo facendo nel primo e nel secondo $y=3$, ecc. Il segno superiore si prende se y è pari, l' inferiore se y è dispari.

Cerchiamo per esempio il termine quinto della quarta fila, cioè quello che corrisponde ad $y=5$, $x=4$; avremo

$$z^{(5,4)}=\frac{29}{2}+\frac{14.19}{2}+(5+14.7)\frac{5}{2}+\left(\frac{38}{3}+\frac{14.10}{3}\right.$$
$$\left.+(5+14.7)\frac{14}{3}\right)\frac{7}{2}=2295.$$

ARTICOLO II.

Riflessioni intorno ai metodi dei Signori de la Grange *e* de la Place *per integrare l' equazioni a differenze finite e parziali.*

11. In questo articolo io mi son proposto di mostrare qual rapporto abbia il mio metodo con quello del Sig. *de la Grange*, il quale me ne ha fatta nascere l' idea; come ancora di far vedere, che il metodo del Sig. *de la Place* può applicarsi felicemente a quella specie di equazioni, che abbiamo nell' articolo precedente considerate. Si abbia adunque l' equazione

$$z^{(y,x)}=Az^{(y-1,x)}+Bz^{(y-2,x)}+Cz^{(y-3,x)}+\ldots+Mz^{(y-n,x)}$$
$$+A'z^{(y,x-1)}+B'z^{(y-1,x-1)}+C'z^{(y-2,x-1)}+\ldots.$$
$$+M'z^{(y-n,x-1)}$$

Supponghiamo $z^{(y,x)}=b^y\phi.x$, ove ϕx esprime una funzione

di x, b è una quantità costante. Sostituito questo valore avremo dividendo per $b^{\jmath}$

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - Cb^{-3} - \ldots - Mb^{-n})\phi x$$
$$= (A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \ldots + M'b^{-n})\phi(x-1).$$

Questa è una equazione a differenze ordinarie, l' integrazione della quale ci darà il valore di ϕx. Ora se A, B, ecc. A', B', ecc. sono quantità costanti, ed n similmente è costante, sarà $\phi . x = \alpha^{x}$, e per determinare la quantità costante α avremo l' equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \ldots - Mb^{-n})\alpha = A' + B'b^{-1} + C'b^{-2} + \ldots$$
$$+ M'b^{-n}.$$

Questo è il caso, che considera il Sig. *de la Grange*, e da ciò che abbiamo detto apparisce l' origine della sostituzione che egli adopra, cioè $Z^{(\jmath,x)} = m\alpha^{x}b^{\jmath}$.

12. Ma se n è una funzione di x, come nel nostro caso, allora o siano o non siano costanti le quantità A, B, ecc. A', B', ecc. siccome i coefficienti della equazione precedente sono variabili, sarà com' è noto $\phi x = \nabla\alpha_{x}$, essendo α_{x} una funzione di x, per determinar la quale avremo l' equazione

$$(1 - Ab^{-1} - Bb^{-2} - \ldots - Mb^{-n})\alpha_{x} = A' + B'b^{-1} + \ldots + M'b^{-n}.$$

Ed ecco l' origine di quella sostituzione, che abbiamo usata di sopra, cioè $Z^{(\jmath,x)} = mb^{\jmath}\nabla\alpha_{x}$.

13. Se poi sarà n costante, ma le quantità A, B, ecc. saranno funzioni di x, avremo di nuovo $\phi . x = \nabla\alpha_{x}$, e la nostra sostituzione condurrà felicemente alla integrazione dell' equazioni a differenze finite e parziali e a coefficienti variabili. Convien però intendere dell' equazioni simili nella forma a quella del n°. 11, nella quale la variabile x in ciascun termine non varia che di una unità. Perchè per l' equazioni de' gradi superiori, $\phi . x$ sarebbe data da una equazione a differenze ordinarie de' gradi superiori, la quale com' è noto non sa integrarsi, che in alcuni casi particolari. Ma con ulteriori artifizj si potrà anche superare questa difficoltà, e partendo dalla supposizione, $Z^{(\jmath,x)} = b^{\jmath}\phi x$ giungere

alla integrazione generale di queſt' equazioni. Noi ci riſerbiamo un' altra volta a continuare queſte rifleſſioni, perchè l' integrazione di quell' equazioni, che abbiamo nell' articolo primo conſiderate, ci baſta per l' oggetto principale, il quale ci ſiamo propoſto in queſte ricerche, cioè per riſolvere i problemi relativi alla *partizione de' numeri*. Solo avvertiremo, che queſte poche oſſervazioni ſembra che diano intanto una maggior generalità all' elegantiſſimo metodo del Sig. *de la Grange*.

14. Il metodo del Sig. *de la Place* può applicarſi a quell' equazioni, che abbiamo di ſopra trattate. Si abbia per eſempio l' equazione

$$(a)\quad Z^{(y,x)} = A_x Z^{(y-1,x)} + B_x Z^{(y-x,x-1)}$$

e quello che diremo di queſta equazione potrà a qualunque altra applicarſi. Eliminiamo da queſta equazione il termine $Z^{(y-x,x-1)}$, e ſiccome abbiamo

$$B_x Z^{(y-x,x-1)} = B_x A_{x-1} Z^{(y-x-1,x-1)} + B_x B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)}$$

ſoſtituendo avremo

$$(b)\quad \begin{aligned} &Z^{(y,x)} - A_x Z^{(y-1,x)} = B_x B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)} \\ &- A_{x-1}\left(Z^{(y-1,x)} - A_x Z^{(y-2,x)}\right) \end{aligned}$$

Si oſſervi, che ſe il ſecondo membro di queſta equazione foſſe $=0$, il primo rappreſenterebbe una equazione a differenze ordinarie; onde ponendo $Z^{(y,x)} = f^y$, e dividendo per f^y

ſi avrebbe $1 - \frac{A_x}{f} - \frac{A_{x-1}}{f}\left(1 - \frac{A_x}{f}\right) = \left(1 - \frac{A_x}{f}\right)\left(1 - \frac{A_{x-1}}{f}\right) = 0$,

cioè ſarebbe $f = A_x$, $f = A_{x-1}$, e $Z^{(y,x)} = mA^y_x + m'A^y_{x-1}$,

ove m ed m' ſono funzioni di x, perchè x ſi è ſuppoſta coſtante.

Eliminiamo adeſſo dalla equazione (b) il termine $Z^{(y-2x+1,x-2)}$, e ſiccome abbiamo dalla equazione (a)

$$B_x . B_{x-1} Z^{(y-2x+1,x-2)} = B_x . B_{x-1} . A_{x-2} Z^{(y-2x,x-2)}$$

$$+B_{n}\cdot B_{n-1}\,.B_{n-2}\,Z^{(y-3n+2,\,n-3)}$$

sostituendo avremo

$$Z^{(y,n)}-A_{n}\,Z^{(y-1,n)}=B_{n}\,.B_{n-1}\,.B_{n-2}\,.Z^{(y-3n+2,\,n-3)}$$

$$(c)\quad -A_{n-1}\,(Z^{(y-1,n)}-A_{n}\,Z^{(y-2,n)})$$

$$-A_{n-2}\,\big(Z^{(y-1,n)}-A_{n}\,Z^{(y-2,n)}-A_{n-1}\,(Z^{(y-1,n)}-A_{n}\,Z^{(y-1,n)})\big)$$

Qui pure, se il secondo membro fosse $=0$, avremmo sostituendo nel primo f^{y} in luogo di $Z^{(y,n)}$, avremmo io dico

$$\left(1-\frac{A_{n}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{n-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{n-2}}{f}\right)=0;$$ dunque sarebbe

$$Z^{(y,n)}=mA^{y}_{n}+m'A^{y}_{n-1}+m''A^{y}_{n-2}.$$

Seguitando ad eliminare nella istessa maniera, troveremo finalmente

$$Z^{(y,n)}-A_{n}\,Z^{(y-1,n)}=B_{n}\,.B_{n-1}\,\ldots.B_{2}\,Z^{(y-\text{ecc.},1)}$$

$$-A_{n-1}\,(Z^{(y-1,n)}-A_{n}\,Z^{(y-2,n)})$$

$-$ecc.

e sostituendo nel primo membro f^{y} in luogo di $Z^{(y,n)}$, e dividendo per f^{y}, esso diventerà

$$\left(1-\frac{A_{n}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{n-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{n-2}}{f}\right)\ldots\left(1-\frac{A_{2}}{f}\right).$$ Ora supponghiamo che la funzione $Z^{(y,1)}$ sia data dalla equazione $Z^{(y,1)}=CZ^{(y-1,1)}$ ed avremo dopo di aver fatto le sostituzioni opportune $\left(1-\frac{A_{n}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{n-1}}{f}\right)\left(1-\frac{A_{n-1}}{f}\right)\ldots\ldots$

$$\left(1-\frac{A_{2}}{f}\right)=\frac{C}{f}\left(1-\frac{A_{n}}{f}\right)\ldots\left(1-\frac{A_{2}}{f}\right),$$ cioè $\left(1-\frac{C}{f}\right)$

$\left(1-\frac{A_2}{f}\right)\left(1-\frac{A_3}{f}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{A_x}{f}\right)=0$. Dunque $f=C$, $=A_2$, $=A_3\ldots\ldots=A_x$, e l' integrale della equazione proposta $Z^{(y,x)}=mC+m'A^y_2+\ldots\ldots+m^{(x)}A^y_x$. Le quantità m, m' ecc. sono funzioni di x, per determinar le quali si sostituirà nella equazione proposta il valore trovato di $Z^{(y,x)}$.

15. E' chiaro che l' istesso può dirsi di qualunque equazione: cioè sarà l' integrale di essa $Z^{(y,x)}=mf^y+m'f^y$ $m''f^y+$ecc. Per trovare le quantità f, f', f'', ecc. si prendano dall'equazione data quei termini, che sono funzioni di x, lasciando da parte quei che sono funzioni di $x-1$. Si ponga in quelli $Z^{(y,x)}=f^y$, e dividendo per f^y si faccia x successivamente $=1, 2, 3, \ldots\ldots x$; dalle quantità che ne nasceranno uguagliate a zero si prendano i valori di f, che saranno i ricercati valori di f, f', f'', ecc. Le funzioni m, m', m'', ecc. si determineranno sostituendo l' integrale trovato nella equazione data. Ho supposto che nella equazione proposta non vi siano che le funzioni di x, e di $x-1$: ma il metodo è generale per qualunque caso. Si veda la Memoria del Sig. *de la Place*

16. Per applicare questo metodo a qualche caso particolare, prendiamo ad integrare l' equazione del n°. 6, dove abbiamo $Z^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}$, e

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-1,x)}+Z^{(y-x+1,x-1)}$$

Ne' due termini $Z^{(y,x)}-Z^{(y-1,x)}$ facciamo $Z^{(y,x)}=f^{y-1}$, e dividendo per f^{y-1} avremo $1-\frac{1}{f}$; sostituiamo in questa quantità $1, 2, 3\ldots\ldots x$ in luogo di x, ed avremo $\left(1-\frac{1}{f}\right)^x$ per determinare f. Questa equazione dà x valori di f uguali all' unità; dunque l' integrale sarà della forma

$$Z^{(y,x)}=A_x\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-1)}+B_x\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$+C_{x}\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-3)}+$ ecc. (Si vedano le Memorie de' Signori *de la Place* e *de la Grange*).

Per determinare le funzioni A_{x}, B_{x}, ecc. sostituiamo il valore di $Z^{(y,x)}$ nella equazione data, ed avremo

$$A_{x}\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-1)}+B_{x}\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$$+C_{x}\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+3)}{1.2\ldots(x-3)}+\text{ecc.}$$

$$=A_{x}\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x)}{1.2\ldots(x-1)}+B_{x}\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1.2\ldots(x-2)}$$

$$+C_{x}\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1.2\ldots(x-3)}+\text{ecc.}$$

$$+A_{x-1}\frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots\ldots(x-2)}+B_{x-1}\frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$+C_{x-1}\frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots\ldots(x-4)}+$ ecc. Ma è evidente che

$$\frac{(y-1)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-1)}=\frac{(y-2)\ldots(y-x)}{1\ldots(x-1)}+\frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)},$$

così pure $\frac{(y-1)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-2)}=\frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)}$

$+\frac{(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-3)}$; ecc. Dunque sostituendo questi valori avremo

$$A_{x}\frac{(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\ldots(x-2)}+B_{x}\frac{(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\ldots(x-3)}$$

$$+C_{x}\frac{(y-2)\ldots(y-x+3)}{1\ldots(x-4)}+\text{ecc.}$$

$=A_{x-1}$

$$= A_{n-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots.(x-2)} + B_{n-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots.(x-3)}$$

$$+ C_{n-1} \frac{(y-x+1)\ldots..(y-2x+6)}{1\ldots.(x-4)} + \text{ecc.}$$

Ora è facile il vedere che

$$\frac{(y-2)\ldots.(y-x+1)}{1\ldots.(x-2)} = \frac{(y-x+1)\ldots.(y-2x+4)}{1\ldots.(x-2)}$$

$$+ (x-3)\frac{(y-x+1)\ldots..(y-2x+5)}{1\ldots.(x-3)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1)\ldots..(y-2x+6)}{1\ldots.(x-4)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2.3} \cdot \frac{(y-x+1)\ldots.(y-2x+7)}{1\ldots.(x-5)} + \text{ecc.}$$

Similmente $\frac{(y-2)\ldots.(y-x+2)}{1\ldots.(x-3)} = \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots.(x-3)}$

$$+ (x-3)\frac{(y-x+1)\ldots..(y-2x+6)}{1\ldots.(x-4)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} \cdot \frac{(y-x+1)\ldots.(y-2x+7)}{1\ldots.(x-5)} + \text{ecc.};$$ e

così in seguito. Sostituendo tutti questi valori avremo

$$A_n \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots.(x-2)} + (x-3) A_n \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots.(x-3)}$$

$$+ \frac{(x-3)(x-4)}{2} A_n \frac{(y-x+1)\ldots.(y-2x+6)}{1\ldots.(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$+ B_n \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots.(x-3)} + (x-3) B_n \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots.(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$+ C_n \frac{(y-x+1)\ldots.(y-2x+6)}{1\ldots.(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{n-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+4)}{1\ldots(x-2)} + B_{n-1} \frac{(y-x+1)\ldots(y-2x+5)}{1\ldots(x-3)}$$

$+C_{x-2}\dfrac{(y-x+1)\ldots(y-2x+6)}{1\ldots(x-4)}+$ ecc. Quindi sarà

$A_x-A_{x-1}=0$, $B_x-B_{x-1}=-(x-3)A_x$,

$C_x-C_{x-1}=-\dfrac{(x-3)(x-4)}{2}A_x-(x-3)B_x$,

$D_x-D_{x-1}=-\dfrac{(x-3)(x-4)(x-5)}{2.3}A_x$

$-\dfrac{(x-3)(x-4)}{2}B_x-(x-3)C_x$; ecc. Convien dunque integrare quest' equazioni; ora si osservi che la prima non comincia ad aver luogo, che quando x è maggiore di 1; la seconda non ha luogo che quando x è maggiore di 2, e così delle altre. Posto questo la prima equazione ci dà $A_x=$ Cost. Per determinar questa costante facciamo $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A_x=$ Cost; ma ponendo $y=1$ abbiamo $Z^{(1,1)}=1$; dunque $A_x=1$. La seconda equazione $B_x-B_{x-1}=-(x-3)$ integrata ci dà

$B_x=-\dfrac{(x-3)(x-2)}{2}+$ Cost. Per determinar la costante facciamo nell' integrale $x=2$, ed avremo $Z^{(y,2)}=y-1+$ Cost; e ponendo $y=1$, abbiamo $Z^{(1,2)}=1=1-1+$ Cost; dunque $B_x=1-\dfrac{(x-3)(x-2)}{2}$.

Nell' istesso modo troveremo $C_x=\dfrac{(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)}{2.4}$, e così delle altre.

Ma siccome non si vede bastantemente la legge, che osservano tra di loro le funzioni A_x, B_x, C_x, ecc. cerchiamo

un' altra maniera di esprimere l' integrale dell' equazione data. Questo integrale può essere ancora della forma seguente

$$Z^{(y,x)} = A_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (x-1)}$$

$$+ B_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (x-2)} + \text{ecc.}$$

ove X è una funzione di x, che determineremo in appresso. Si sostituisca nella equazione data questo valore di $Z^{(y,x)}$, e si avrà

$$A_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (x-1)}$$

$$+ B_x \frac{(y-X)(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (x-2)} + \text{ecc.}$$

$$= A_x \frac{(y-X-1)(y-X-2)\ldots(y-X-x+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (x-1)}$$

$$+ B_x \frac{(y-X-1)(y-X-2)\ldots(y-X-x+2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (x-2)} + \text{ecc.}$$

$$+ A_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots(y-X'-2x+5)}{1 \ldots\ldots (x-2)}$$

$$+ B_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots(y-X'-2x+6)}{1 \ldots\ldots (x-3)} + \text{ecc.}$$

ove X' è ciò che diventa X ponendovi $x-1$ in luogo di x. Ma abbiamo

$$\frac{(y-X)\ldots(y-X-x+2)}{1 \ldots (x-1)} = \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+1)}{1 \ldots (x-1)}$$

$$+ \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1 \ldots (x-2)}, \quad \frac{(y-X)\ldots(y-X-x+3)}{1 \ldots (x-2)}$$

$$= \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1 \ldots (x-2)} + \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1 \ldots (x-3)},$$

ecc.

Dunque sostituendo questi valori sarà

$$A_x \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+2)}{1\ldots\ldots(x-2)} + B_x \frac{(y-X-1)\ldots(y-X-x+3)}{1\ldots\ldots(x-3)}$$

$$+ C_x \frac{(y-X-1)\ldots\ldots(y-X-x+4)}{1\ldots\ldots\ldots(x-4)} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots\ldots(y-X'-2x+5)}{1\ldots\ldots\ldots(x-2)}$$

$$+ B_{x-1} \frac{(y-X'-x+2)\ldots\ldots(y-X'-2x+6)}{1\ldots\ldots\ldots\ldots(x-3)} + \text{ecc.}$$

Siccome X è una funzione indeterminata, determiniamola in modo, che sia $y-X-1=y-X'-x+2$, cioè $X-X'=x-3$, e integrando sarà $X=\frac{(x-2)(x-3)}{2}$. Adesso paragonando i termini omologi avremo $A_x=A_{x-1}$, $B_x=B_{x-1}$, $C_x=C_{x-1}$, ecc. dunque tutte le funzioni A_x, B_x, ecc. sono in questo caso quantità costanti. Per determinare il valore di queste costanti, le quali chiameremo respettivamente A, B, C, ecc. supponghiamo in primo luogo $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A$, e nel caso di $y=1$ essendo $Z^{(1,1)}=1$, sarà $A=1$. Sia adesso $x=2$, e sarà $Z^{(0,2)}=y+B$; ma facendo $y=1$ abbiamo $Z^{(1,2)}=1=1+B$; dunque $B=0$. Sia $x=3$, sarà $Z^{(y,3)}=\frac{y(y-1)}{2}+C$, e quindi $Z^{(1,3)}=0=C$. Nella medesima maniera si troveranno le altre costanti D, E, ecc. uguali a zero. Dunque l' integrale della equazione proposta sarà così espresso:

$$Z^{(y,x)}=\frac{\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}\right)\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}-1\right)(\ldots)\left(y-\frac{(x-2)(x-3)}{2}-x+2\right)}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots(x-1)}.$$

la qual formola, quantunque di una forma diversa, coincide però con le altre trovate di sopra (6, 7, 8).

17. Cerchiamo adesso l' integrazione dell' equazione trattata al n.° 9; cioè la seguente

$$Z^{(y,x)} = xZ^{(y-1,x)} + Z^{(y-x+1,x-1)}$$

per la quale si ha $Z^{(y,1)} = Z^{(y-1,1)}$. Ponendo ne' due termini $Z^{(y,x)} - xZ^{(y-1,x)}$ la quantità f^{y-X} in luogo di $Z^{(y,x)}$, e dividendo per f^{y-X} avremo $1 - \frac{x}{f}$, e $\nabla(1 - \frac{x}{f})$ $= (1 - \frac{1}{f})(1 - \frac{2}{f})(1 - \frac{3}{f}) \ldots (1 - \frac{x}{f})$. Questa quantità posta $= 0$ ci darà per f i valori $1, 2, 3, \ldots x$. Dunque l' integrale cercato sarà della forma

$$Z^{(y,x)} = A_x + B_x 2^{y-X} + C_x 3^{y-X} + D_x 4^{y-X} + \text{ecc.}$$

Sostituendo questo valore nella equazione proposta, essa diventerà

$$A_x + B_x 2^{y-X} + C_x 3^{y-X} + D_x 4^{y-X} + \text{ecc.}$$

$$= xA_x + xB_x 2^{y-X-1} + xC_x 3^{y-X-1} + xD_x 4^{y-X-1} + \text{ecc.}$$

$$+ A_{x-1} + B_{x-1} 2^{y-x-X'+1} + C_{x-1} 3^{y-x-X'+1}$$

$$+ D_{x-1} 4^{y-x-X'+1} + \text{ecc.}$$

cioè

$$(1-x)A_x + (2-x)B_x 2^{y-X-1} + (3-x)C_x 3^{y-X-1} + \text{ecc.}$$

$$= A_{x-1} + B_{x-1} 2^{y-x-X'+1} + C_{x-1} 3^{y-x-X'+1} + \text{ecc.}$$

Per determinare X, facciamo $y - X - 1 = y - x - X' + 1$, cioè $X - X' = x - 2$, e integrando avremo $X = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$. Adesso paragonando i termini omologi avremo l' equazioni,

$(1-x)A_x = A_{x-1}$, $(2-x)B_x = B_{x-1}$, $(3-x)C_x = C_{x-1}$, ecc.

Sia A il valore di A_x, quando $x=1$, e dall' equazione $A_x = \frac{-1.A_{x-1}}{x-1}$ avremo $A_2 = \frac{-1.A}{1}$, $A_3 = \frac{-1.A_2}{2} = \frac{(-1)^2 A}{1.2}$; così $A_4 = \frac{(-1)^3 A}{1.2.3}$, e generalmente $A_x = \frac{(-1)^{x-1}.A}{1.2.3...(x-1)}$. Sia B il valore di B_x quando $x=2$, e l' equazione $B_x = \frac{-1.B_{x-1}}{x-2}$ ci darà $B_3 = \frac{-1.B}{1}$, $B_4 = \frac{-1.B_3}{2} = \frac{(-1)^2.B}{1.2}$, $B_5 = \frac{(-1)^3 B}{1.2.3}$, ed in generale $B_x = \frac{(-1)^{x-2}.B}{1.2.3...(x-2)}$. Similmente si troverà $C_x = \frac{(-1)^{x-3}.C}{1.2.3...(x-3)}$, $D_x = \frac{(-1)^{x-4}.D}{1.2.3...(x-4)}$, ove $C=C_x$ posto $x=3$, e $D=D_x$ postovi $x=4$. Adesso per determinare le costanti A, B, C, ecc. facciamo nell' integrale $x=1$, ed avremo $Z^{(y,1)}=A$, e ponendo $y=1$, $A=Z^{(1,1)}=1$; onde $A_x = \frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)}$. Ponghiamo $x=2$, ed avremo $Z^{(y,2)} = -1 + B2^y$, e facendo $y=2$, $Z^{(2,2)} = 1 = -1 + 4B$, cioè $B = \frac{1}{2}$, e $B_x = \frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2...(x-2)}$. Posto $x=3$, sarà $Z^{(y,3)} = \frac{1}{2} - \frac{1.2^{y-2}}{1} + C3^{y-1}$, e facendo $y=3$,

$Z^{(1,1)} = 0 = \frac{1}{2} - 2 + 9C$, cioè $C = \frac{1}{2.3}$, e

$C_{x} = \frac{(-1)^{x-3}}{2.3.1.2...(x-3)}$. Così si troverà

$D_{x} = \frac{(-1)^{x-4}}{2.3.4.1.2...(x-4)}$, ecc. Dunque l' integrale cercato sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{(-1)^{x-1}}{1.2.3...(x-1)} + \frac{(-1)^{x-2}}{2.1.2.3...(x-2)} 2^{y-(x-1)(x-2):2}$$
$$+ \frac{(-1)^{x-3}}{2.3.1.2...(x-3)} 3^{y-(x-1)(x-2):2}$$
$$+ \frac{(-1)^{x-4}}{2.3.4.1.2...(x-4)} 4^{y-(x-1)(x-2):2} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $x = 3$, $y = 8$, ed avremo $Z^{(8,1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2^7 + \frac{1}{6} 3^7 = \frac{1 - 128 + 729}{2} = \frac{602}{2} = 301$, il qual valore combina con quello che abbiamo trovato di sopra per mezzo dell' altra formola.

Sia $y = 7$, $x = 4$, cioè si cerchi il settimo termine nella quarta fila della serie del n.° 9. Avremo

$$Z^{(7,4)} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} 2^4 - \frac{1}{6} 3^4 + \frac{1}{24} 4^4 = -\frac{1}{6} + 4 - \frac{27}{2} + \frac{64}{6}$$
$$= \frac{-1 + 24 - 81 + 64}{6} = 1,$$ come appunto è nella serie.

L' introdurre nell' integrale una funzione X da determinarsi poi a piacere, come abbiamo fatto ne' due passati Problemi, può esser di molta utilità per determinare in varj casi più semplicemente le funzioni della variabile x, che entrano nell' integrale. La ragione poi della sostituzione $Z^{(y,x)} = af^{y-X}$ invece di $Z^{(y,x)} = f^y$, è la seguente. Essendo $Z^{(y,x)} = af^y$ un integrale particolare di una equazione a dif-

ferenze finite, nella quale x è costante, sarà a una funzione di x; onde in luogo di a si potrà porre af^{-x}, ed allora si avrà $Z^{(y,x)} = af^{-x} f^{y} = af^{y-x}$.

ARTICOLO III.

Della partizione de' numeri.

18. I problemi della partizione de' numeri mi hanno condotto a quella specie di equazioni, delle quali ho cercato l' integrale nell' articolo I. Questi problemi sono stati trattati per la prima volta dal celebre Sig. *Eulero* nella sua *Introduzione all' analisi degl' Infiniti*, e ne' *Comentarj dell' Accademia di Pietroburgo*. Egli ha dedotto un metodo ingegnosissimo dalla evoluzione delle funzioni in serie, tanto più a ragione stimato dal suo Autore, perchè, com' ei dice nella *Prefazione* dell' Opera citata, sembravangli questi problemi senza il suo metodo affatto inaccessibili alle forze dell' analisi. Niuno, che io sappia, ha in seguito fatte ulteriori ricerche in questa materia. Esaminando direttamente questi problemi, ho tentato di ridurli alla integrazione di una equazione a differenze finite e parziali; il qual metodo sembra la regia strada per risolvere tutt' i problemi, che in qualche modo dipendono dalla dottrina delle combinazioni. Quindi integrando quest' equazioni, le quali da principio mi presentarono non ordinarie difficoltà, son giunto in una maniera, che sembrami non affatto inelegante, ad una formola generale, che mi dà la soluzione cercata in tutt' i casi; la qual formola difficilmente rintracciar si potrebbe col metodo del Sig. *Eulero*. Questo io esporrò ne' seguenti problemi, i quali comprendono i diversi casi di partizione di numeri.

PROBLEMA

PROBLEMA IV.

19. *Trovare il numero delle maniere, nelle quali un numero qualunque* y *può esser la somma di* x *termini della serie naturale* 1, 2, 3, 4, ecc., *o uguali o disuguali tra loro.*

Disponendo per ordine tutte le maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti o uguali o disuguali, ne nasceranno le seguenti serie.

$$
\begin{array}{l}
y = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + (y - x + 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + (y - x) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - x - 1) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (a) \\
\quad \ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + 2 + (y - x - 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - x - 2) \\
\qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots + 1 + 3 + 3 + (y - x - 3) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - x - 4) \\
\qquad \text{ecc.} \\
y = 2 + 2 + 2 + \ldots + 2 + 2 + 2 + (y - 2x + 2) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + (y - 2x + 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + (y - 2x) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (b) \\
\quad \ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + 3 + (y - 2x) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 2x - 1) \\
\qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + 4 + (y - 2x - 2) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 2x - 3) \\
\qquad \text{ecc.} \\
y = 3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 3 + 3 + (y - 3x + 3) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x + 2) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x + 1) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (c) \\
\quad \ldots\ldots\ldots + 3 + 4 + 4 + (y - 3x + 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x) \\
\qquad \text{ecc.} \\
\quad \ldots\ldots\ldots + 3 + 5 + 5 + (y - 3x - 1) \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 6 + (y - 3x - 2) \\
\qquad \text{ecc.} \quad \text{ecc.}
\end{array}
$$

In tutte queste serie, che sono composte di x termini, tutt' i numeri si devono combinare in tutte le maniere soddisfacenti, purchè il primo termine resti sempre l'istesso. Le lettere a, b, c, ecc. esprimono il numero delle serie corrispondenti, e quindi il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti, è $= a + b + c +$ ecc. Ora è chiaro che a è il numero delle maniere, nelle quali il numero $y - 1$ può dividersi in $x - 1$ parti; le altre serie (b), (c), ecc. sono tali, che il valore di b, c, ecc. sarà l' istesso, se ad esse sostituiamo le seguenti serie composte di x termini.

$$
\begin{array}{l}
1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + 1 + 1 + (y - 2x + 1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + (y - 2x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 2x - 1) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (b) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 2 + 2 + (y - 2x - 1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 2x - 2) \\
\qquad \text{ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 1 + 3 + 3 + (y - 2x - 3) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 2x - 4) \\
\qquad \text{ecc.} \\
2 + 2 + 2 + \ldots\ldots + 2 + 2 + (y - 3x + 2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 3 + (y - 3x + 1) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x) \\
\qquad \text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (c) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 3 + 3 + (y - 3x) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 4 + (y - 3x - 1) \\
\qquad \text{ecc.} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots + 2 + 4 + 4 + (y - 3x - 2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 5 + (y - 3x - 3) \\
\qquad \text{ecc.} \quad \text{ecc.}
\end{array}
$$

Ora è evidente, che queste seconde serie rappresentano le maniere, nelle quali il numero $y - x$ può dividersi in x parti; infatti ponendo nelle prime $y - x$ in luogo di y ne nascono le seconde; dunque il numero delle maniere, nelle quali può in x parti dividersi il numero $y - x$, è $= b + c + d +$ ecc. Posto questo, se $Z^{(y,x)}$ rappresenta il numero delle maniere, nelle quali può il numero y dividersi in x parti, avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$$

l' integrazione della quale ci darà la soluzione del problema.

Ponghiamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \underset{x}{\alpha}$, e sostituendo avremo

$\underset{x}{\alpha} = b^{-x} \underset{x}{\alpha} + b^{-1}$, cioè $\underset{x}{\alpha} = \dfrac{b^{-1}}{1 - b^{-x}}$, e

$\nabla \underset{x}{\alpha} = \dfrac{b^{-x}}{(1 - b^{-1})(1 - b^{-2})\ldots(1 - b^{-x})}$. Quindi avremo in generale (2) $r^{(m)} =$ alle potenze $(m+1)^{esime}$ delle radici dell' equazioni $b - 1 = 0$, $b^2 - 1 = 0$, $b^3 - 1 = 0$, ... $b^x - 1 = 0$. Ora le potenze delle radici di quest' equazioni sono espresse dalla Tavola seguente.

Potenze	1^e	2^e	3^e	4^e	5^e	6^e	ecc.
equazione 1^a	1	1	1	1	1	1	
2^a	0	2	0	2	0	2	
3^a	0	0	3	0	0	3	
4^a	0	0	0	4	0	0	
ecc.							

E' facile il vedere, che la somma delle potenze $m.^{esime}$ delle radici di tutte quest' equazioni potrà esprimersi dalla formola $m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots + \frac{m}{m}$, purchè da questa si rigettino tutt' i termini fratti, e quei che sono maggiori di x. Questa formola così intesa esprimiamola col segno $\delta.m$, ed avremo, qualunque sia la quantità m, $r^{(m)} = \delta(m+1)$. Quindi sarà (2)

$$A' = \delta 1$$

$$A'' = \frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}$$

$$A''' = \frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}$$

e in generale

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(m-4)}{m}+\text{ecc.}$$

Trovati questi valori sarà

$$\nabla^{\alpha}_{x}=b^{-x}+A'b^{-x-1}+A''b^{-x-2}+A'''b^{-x-3}+\text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)}=\phi(y-x)+A'\phi(y-x-1)+A''\phi(y-x-2)+\text{ecc.}$$

Facendo $x=1$, abbiamo $A'=A''=A'''=\text{ecc.}=1$: dunque

$$Z^{(y,1)}=\phi(y-1)+\phi(y-2)+\phi(y-3)+\phi(y-4)+\text{ecc.}$$

e ponendo $y-1$ in luogo di y

$$Z^{(y-1,1)}=\phi(y-2)+\phi(y-3)+\phi(y-4)+\text{ecc.}$$

Quindi sarà $Z^{(y,1)}-Z^{(y-1,1)}=\phi(y-1)$. Ora dalla natura del problema si deduce $Z^{(y,1)}=1$ se y è positiva, e $Z^{(y,1)}=0$ se y è zero o negativa; dunque $Z^{(1,1)}-Z^{(0,1)}=1=\phi.0$, cioè $\phi.y$ è $=1$ nel solo caso di $y=0$, negli altri casi è sempre $=0$. Avremo perciò $Z^{(y,x)}=$ al coefficiente di $\phi.0$, il quale se si suppone essere $A^{(m)}$ sarà $y-x-m=0$, cioè $m=y-x$, e quindi

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta(y-x)}{y-x}+\delta 1\frac{\delta(y-x-1)}{y-x}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-x-2)}{y-x}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-x-3)}{y-x}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4}+\delta 1\frac{\delta 3}{4}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(y-x-4)}{y-x}+\text{ecc.}$$

Si debba per esempio trovare in quante maniere il numero 18 può dividersi in sedici parti; avremo $x=16$, $y=18$, $\delta(y-x)=\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$: quindi $Z^{(18,16)}=\frac{3}{2}$

$+\frac{1}{2}=2$. Queste due maniere sono le seguenti

$18=1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+3$
$18=1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+1+2+2$

Cerchiamo adesso in quante maniere si può dividere il numero 9 in quattro parti; sarà $x=4$, $y=9$, $\delta(y-x)=\delta 5=1$, $\delta 4=4+2+1=7$, $\delta 3=3+1=4$, $\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$. Onde il numero delle maniere cercato

$$Z^{(9,4)}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$

$$+\left\{\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{8}{5}+\frac{9}{5}+\frac{5}{5}=\frac{30}{5}=6.$$

Queste maniere sono le seguenti;

$9=1+1+1+6$
$9=1+1+2+5$
$9=1+1+3+4$
$9=1+2+2+4$
$9=1+2+3+3$
$9=2+2+2+3$

PROBLEMA V.

20. *Trovare in quante maniere il numero* y *può esser la somma di* x *diversi termini della serie naturale.*

Nel Problema precedente abbiamo considerato la partizione de' numeri in parti o uguali o disuguali; in questo passiamo a trattare della partizione de' numeri in parti tra loro disuguali. Sia dunque $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere, nelle quali il numero y può dividersi in x parti tutte disuguali tra loro, e con un discorso simile a quello usato nel Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y-x,x-1)}$$

Per integrare questa equazione facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla^x\alpha$, e so-

ſtituendo avremo $\alpha_{\varkappa} = b^{-\varkappa}\alpha_{\varkappa} + b^{-\varkappa}$, cioè $\alpha_{\varkappa} = \frac{b^{-\varkappa}}{1-b^{-\varkappa}}$, e

$\nabla\alpha_{\varkappa} = \frac{b^{-\varkappa(\varkappa+1):2}}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-\varkappa})}$. Dunque ſarà come nel Problema precedente $i^{(m)} = \delta(m+1)$, e

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1\,\frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+\left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\,\frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}$$

$$+\left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1\,\frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1\,\frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(m-4)}{m} + \text{ecc.}$$

ove $\delta m = m + \frac{m}{2} + \frac{m}{3} + \frac{m}{4} + \ldots\ldots + \frac{m}{m}$, lasciati da parte i termini fratti e quei che sono maggiori di x.

Trovati per la formola precedente i valori di A', A'', ecc. avremo

$$\nabla\alpha_{\varkappa} = b^{-\varkappa(\varkappa+1):2} + A'b^{-\varkappa(\varkappa+1):2-1} + A''b^{-\varkappa(\varkappa+1):2-2} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,\varkappa)} = \varphi\left(y - \frac{x(x+1)}{2}\right) + A'\varphi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 1\right)$$

$$+ A''\varphi\left(y - \frac{x(x+1)}{2} - 2\right) + \text{ecc.}$$

Ponendo $x = 1$ abbiamo

$Z^{(y,1)} = \varphi(y-1) + \varphi(y-2) + \varphi(y-3) + \varphi(y-4) + \text{ecc.}$

$Z^{(y-1,1)} = \varphi(y-2) + \varphi(y-3) + \varphi(y-4) + \text{ecc.}$

Dunque $Z^{(y,1)} - Z^{(y-1,1)} = \varphi(y-1)$. Ma per la natura del problema $Z^{(y,1)} = 1$ nel caso di y positiva, ed è $= 0$ nel caso di y zero o negativa; dunque $\varphi.y$ sarà $= 1$ nel solo caso di $y = 0$, negli altri casi sarà sempre $\varphi.y = 0$. Sarà dunque $Z^{(y,\varkappa)} =$ al coefficiente di $\varphi.0$, il quale se si pone

essere $A^{(m)}$, avremo $y-\frac{x(x+1)}{2}-m=0$, cioè $m=y-\frac{x(x+1)}{2}$, e quindi

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}\right)}{y-\frac{x(x+1)}{2}}+\delta_1\frac{\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}-1\right)}{y-\frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}-1\right)}{y-\frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+\left(\frac{\delta_3}{3}+\delta_1\frac{\delta_2}{3}+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta_1}{3}\right)\frac{\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}-2\right)}{y-\frac{x(x+1)}{2}}$$

$$+\left\{\frac{\delta_4}{4}+\delta_1\frac{\delta_3}{4}+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta_2}{4}+\left(\frac{\delta_3}{3}+\delta_1\frac{\delta_2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta_1}{3}\right)\frac{\delta_1}{4}\right\}\frac{\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}-3\right)}{y-\frac{x(x+1)}{2}}+\text{ecc.}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 18 può dividersi in 5 parti disuguali; avremo $x=5$, $y=18$, $\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}\right)=\delta_3=4$, $\delta_2=3$, $\delta_1=1$; e quindi il numero delle maniere cercato

$$Z^{(18,5)}=\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}=3.$$

Sia adesso $x=4$, $y=15$, cioè cerchiamo in quante maniere può il 15 dividersi in 4 parti disuguali. Sarà

$\delta\left(y-\frac{x(x+1)}{2}\right)=\delta 5=1$, $\delta 4=4+2+1=7$, $\delta 3=3+1=4$, $\delta 2=2+1=3$, $\delta 1=1$, e quindi

$$Z^{(11,4)}=\frac{1}{5}+\frac{7}{5}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{3}{5}$$

$$+\left\{\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}\right\}\frac{1}{5}$$

$$=\frac{8+8+9+5}{5}=6.$$

21. Se nella formola del Problema precedente si pone $y-\frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y, ne nascerà l' espressione di questo. Dunque il numero y può dividersi in tante maniere in parti tutte disuguali, in quante maniere nel medesimo numero di parti o uguali o disuguali può dividersi il numero $y-\frac{x(x-1)}{2}$.

PROBLEMA VI.

22. *Trovare il numero delle maniere, nelle quali il numero* y *può esser la somma di* x *termini della serie de' numeri dispari* 1, 3, 5, 7, ecc. *uguali tra loro o disuguali.*

Facendo $Z^{(y,x)}=$ al cercato numero delle maniere, avremo l' equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-2x,x)}+Z^{(y-1,x-1)}.$$

Posto $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$ avremo sostituendo $\alpha_x=\alpha_x b^{-2x}+b^{-1}$,

cioè $\alpha_x=\frac{b^{-1}}{1-b^{-2x}}$, e $\nabla\alpha_x=\frac{b^{-x}}{(1-b^{-2})(1-b^{-4})\ldots(1-b^{-2x})}$.

Facciamo $\frac{1}{(1-b^{-2})(1-b^{-4})\ldots(1-b^{-2x})}=1+A'b^{-2}+A''b^{-4}+A'''b^{-6}+$ ecc. e sarà (2) $r=\delta 1$, $r'=\delta 2$, e generalmente $r^{(m)}=\delta(m+1)$. Onde qualunque sia il numero m, avremo sempre

$A^{(m)}$

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(m-2)}{m}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Sarà dunque

$$\nabla^{\alpha}_{x} = b^{-x} + A' b^{-x-2} + A'' b^{-x-4} + A''' b^{-x-6} + \text{ecc.}$$

e perciò (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi(y-x) + A'\phi(y-x-2) + A''\phi(y-x-4)$$
$$+ A'''\phi(y-x-6) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$ sarà $A^{(\mu)} = 1$, qualunque sia il numero μ; quindi

$$Z^{(y,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$
$$Z^{(y-2,1)} = \phi(y-3) + \phi(y-5) + \phi(y-7) + \text{ecc.}$$

Avremo perciò $Z^{(y,1)} - Z^{(y-2,1)} = \phi(y-1)$; ma $Z^{(y,1)} = 1$ nel caso di y dispari e positiva, ed è $= 0$ nel caso di y pari o negativa; dunque sarà $\phi.0 = Z^{(1,1)} - Z^{(-1,1)} = 1$; negli altri casi sarà $\phi.y = 0$. Quindi $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$; sia questo coefficiente $A^{(m)}$, avremo $y - x - 2m = 0$, cioè $m = \frac{y-x}{2}$. Siccome il valore di m deve essere intero, converrà che il numero $y - x$ sia divisibile per due, cioè che i numeri y ed x siano o ambedue pari o ambedue dispari; ciò che deve necessariamente succedere, acciò il problema sia possibile. Posto questo sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta^{\frac{y-x}{2}}}{\frac{y-x}{2}} + \delta 1 \frac{\delta^{\frac{y-x-2}{2}}}{\frac{y-x}{2}} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta^{\frac{y-x-4}{2}}}{\frac{y-x}{2}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta 1}{3}\right) \frac{\delta^{\frac{y-x-6}{2}}}{\frac{y-x}{2}}$$

$$+\left\{\frac{\delta_4}{4}+\delta_1\frac{\delta_3}{4}+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta_2}{4}+\left(\frac{\delta_3}{3}+\delta_1\frac{\delta_2}{3}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta_1}{3}\right)\frac{\delta_1}{4}\right\}\frac{\delta^{\frac{y-x-8}{2}}}{\frac{y-x}{2}}+\text{ecc.}$$

Sia per esempio $y=14$, $x=6$, avremo $\delta^{\frac{y-x}{2}}=\delta_4=7$, $\delta_3=4$, $\delta_2=3$, $\delta_1=1$, e $Z^{(14,6)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}$ $+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=\frac{7+4+6+3}{4}=5=$ al numero delle maniere, nelle quali il 14 può esser la somma di sei numeri dispari.

23. Se si aggiungerà nel Problema la condizione, che i termini della serie de' numeri dispari, la somma de' quali forma il numero y, siano tutti disuguali, avremo allora l'equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-2x,x)}+Z^{(y-2x+1,x-1)}$$

e operando come sopra troveremo l'integrale di questa equazione così espresso:

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta^{\frac{y-x^2}{2}}}{\frac{y-x^2}{2}}+\delta_1\frac{\delta^{\frac{y-x^2-2}{2}}}{\frac{y-x^2}{2}}$$

$$+\left(\frac{\delta_2}{2}+\delta_1\frac{\delta_1}{2}\right)\frac{\delta^{\frac{y-x^2-4}{2}}}{\frac{y-x^2}{2}}+\text{ecc.}$$

Supponendo per esempio $y=24$, $x=4$, avremo $\delta^{\frac{y-x^2}{2}}=\delta_4=7$, $\delta_3=4$, $\delta_2=3$, $\delta_1=1$, e

$$Z^{(24,4)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{3}{4}+\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\right)\frac{1}{4}=5;$$

cioè cinque sono le maniere, nelle quali il numero 24 può esser la somma di quattro numeri dispari disuguali.

24. Se nella espressione del numero 22 si pone $y - x(x-1)$ in luogo di y, ne verrà la formola del numero precedente. Di qui nasce il seguente Teorema: il numero y in tante maniere può esser la somma di x termini tutti disuguali della serie de' numeri dispari, in quante il numero $y - x(x-1)$ può esser la somma di x termini della medesima serie o uguali o disuguali.

PROBLEMA VII.

25. *Trovare in quante maniere il numero* y *può nascere dalla somma de' numeri* 1, 2, 3, 4, ... x.

Finora abbiamo supposto, che fosse assegnato il numero delle parti, nelle quali deve dividersi il numero y; adesso passiamo ad un' altra sorte di problemi, ne' quali il numero delle parti può esser qualunque, ma sono soltanto determinate le parti; in modo che nella composizione del numero y non devono aver luogo che i numeri non maggiori di x, ma questi possono prendersi in qualunque numero. Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e ponendo

$$y = p + 2q + 3r + 4s + \ldots + xt$$

è chiaro che tante saranno le maniere cercate, in quante possono da questa equazione determinarsi in numeri interi le lettere $p, q, r, s, \ldots t$. Ora tutte queste maniere si troveranno facendo successivamente $t = 0, 1, 2, 3$, ecc. ma le maniere, che corrispondono a questi valori di t, è chiaro che saranno espresse respettivamente da $Z^{(y,x-1)}$, $Z^{(y-x,x-1)}$, $Z^{(y-2x,x-1)}$, ecc. Dunque avremo

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y,x-1)} + Z^{(y-x,x-1)} + Z^{(y-2x,x-1)} + \text{ecc.}$$

e ponendo $y - x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x,x)} = Z^{(y-x,x-1)} + Z^{(y-2x,x-1)} + \text{ecc.}$$

donde nasce l' equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y,x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla \alpha_x$, e sarà $\alpha_x = \frac{1}{1 - b^{-x}}$, e quindi

$\nabla^{\alpha}_{x} = \frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-x})}$, cioè (2) ponendo

$$A^{(m)} = \frac{\delta m}{m} + \delta 1 \frac{\delta(m-1)}{m} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m} + \text{ecc.}$$

come sopra (22), sarà (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$$

Posto $x = 1$, avremo $A^{(\mu)} = 1$ qualunque sia μ; dunque

$$Z^{(y,1)} = \phi y + \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-1,1)} = \phi(y-1) + \phi(y-2) + \phi(y-3) + \text{ecc.}$$

e quindi $\phi y = Z^{(y,1)} - Z^{(y-1,1)}$. Ora si osservi che $Z^{(y,1)}$ è $= 0$, quando y è negativa, perchè i numeri negativi non possono mai nascere dalla somma di unità; ed è $= 1$ quando y è zero, perchè il zero nasce dalla somma di 0 unità. Dunque $Z^{(0,1)} - Z^{(-1,1)} = \phi 0 = 1$. Sia $A^{(m)}$ il coefficiente di $\phi 0$, ed avremo $y - m = 0$, cioè $m = y$, e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-2)}{y}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-3)}{y}$$

$$+ \left\{\frac{\delta 4}{4} + \delta 1 \frac{\delta 3}{4} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 2}{4}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta 1}{4}\right\}\frac{\delta(y-4)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\delta 5 = 1$, $\delta 4 = 7$, $\delta 3 = 4$, $\delta 2 = 3$, $\delta 1 = 1$, e quindi $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{8}{5} + \frac{9}{5} + \frac{5}{5} = 6$. Dunque in sei maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' numeri 1, 2, 3, 4.

26. Se in questa formola ponghiamo $y - x$ in luogo di y, ne verrà quella del Problema quarto. Dunque il numero y in tante maniere può esser la somma di x numeri, in quante il numero $y - x$ può nascere dalla somma de' numeri 1,

2, 3, ... x. Paragonando con questa le formole degli altri Problemi, ne nasceranno altri Teoremi.

PROBLEMA VIII.

27. *Data una serie qualunque aritmetica* (A) m, m + n, m + 2n, ecc. *trovare in quante maniere da* x *termini di questa serie si può formare il numero* y.

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e facendo primieramente $x = 2$, sia $y = m + (m + nz) = 2m + nz$, alla qual forma può sempre ridursi il numero y, se pure può esser la somma di due termini della serie (A). Ma per la natura delle progressioni aritmetiche tra i termini m ed $m + nz$ ve ne sono altri di numero $z - 1$, il primo de' quali e l'ultimo, il secondo e il penultimo, e gli altri nel medesimo ordine danno insieme l'istesso numero y; ove si osservi che se $z - 1$ è dispari, il doppio del termine medio è uguale al medesimo numero y. Dunque avremo $Z^{(y,2)} = \frac{2+2}{2}$, o $= \frac{z+1}{2}$, secondochè z è pari o dispari; quindi nell'uno e nell'altro caso avremo $Z^{(y-2n,2)} = Z^{(y,2)} - 1$, $Z^{(y-3n,2)} = Z^{(y-n,2)} - 1$, e generalmente $Z^{(y-\mu n,2)} = Z^{(y-(\mu-2)n,2)} - 1$.

Sia adesso $x = 3$, ed $y = m + m + (m + nz) = 3m + nz$; le lettere poi c, d, e siano i termini della serie (A), dalla somma de' quali nasce y, cioè sia $y = c + d + e$. Se facciamo $c = m$, avremo $d + e = 2m + nz$, lo che può succedere in $Z^{(y-m,2)}$ maniere; se $c = m + n$, sarà $d + e = 2m + n(z - 1)$, il che succede in $Z^{(y-m-n,2)}$ maniere. Similmente se $c = m + 2n$, $m + 3n$, $m + 4n$, ecc. saranno i numeri delle maniere rispettivi $Z^{(y-m-2n,2)}$, $Z^{(y-m-3n,2)}$, $Z^{(y-m-4n,2)}$, ecc. Ma si osservi, che delle maniere rappresentate da $Z^{(y-m-n,2)}$ una dà $d = a$, la qual maniera è contenuta in quelle espresse da $Z^{(y-m,2)}$. Così $Z^{(y-m-2n,2)}$, $Z^{(y-m-3n,2)}$, $Z^{(y-m-4n,2)}$, ecc. contengono due, tre, quattro, ecc. maniere, che sono già state contate.

Ora per trovare il valore di $Z^{(y,3)}$ convien sommare tutte queste particolari maniere, e sarà perciò

$$Z^{(y,1)} = Z^{(y-m,2)} + Z^{(y-m-n,2)} - 1 + Z^{(y-m-2n,2)} - 2$$
$$+ Z^{(y-m-3n,2)} - 3 + \text{ecc.}$$
$$= Z^{(y-m,2)} + Z^{(y-m-3n,2)} + Z^{(y-m-6n,2)} + Z^{(y-m-9n,2)} + \text{ecc.}$$

Ponendo $y - 3n$ in luogo di y, sarà similmente

$$Z^{(y-3n,1)} = Z^{(y-m-3n,2)} + Z^{(y-m-6n,2)} + Z^{(y-m-9n,2)} + \text{ecc.}$$

cioè $Z^{(y,1)} = Z^{(y-3n,1)} + Z^{(y-m,2)}$.

Con un discorso simile troveremo

$$Z^{(y,4)} = Z^{(y-4n,4)} + Z^{(y-m,3)}$$
$$Z^{(y,5)} = Z^{(y-5n,5)} + Z^{(y-m,4)}$$

e generalmente

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-nx,x)} + Z^{(y-m,x-1)}$$

Per integrare questa equazione facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, e sostituendo avremo $\alpha_x = \frac{b^{-n}}{1-b^{-nx}}$, e quindi

$$\nabla\alpha_x = \frac{b^{-mx}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n})\ldots\ldots(1-b^{-nx})}.$$ Adesso ponendo

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

come sopra, avremo

$$\nabla\alpha_x = b^{-mx} + A' b^{-mx-n} + A'' b^{-mx-2n} + A''' b^{-mx-3n} + \text{ecc.}$$

e quindi (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi(y-mx) + A'\phi(y-mx-n) + A''\phi(y-mx-2n) + \text{ecc.}$$

Facendo $x = 1$, sarà

$$Z^{(y,1)} = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$$

e quindi $Z^{(y,1)} - Z^{(y-n,1)} = \phi(y-m)$. Di qui è facile il vedere, che $\phi . y = 1$ nel solo caso di $y = 0$: dunque se $A^{(\mu)}$ è nel valore di $Z^{(y,x)}$ il coefficiente di $\phi . 0$, cioè se $y - mx - n\mu = 0$, e perciò $\mu = \frac{y-mx}{n}$, sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y-mx}{n}}{\frac{y-mx}{n}} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y-mx-n}{n}}{\frac{y-mx}{n}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta^{\frac{y-mx-2n}{n}}}{\frac{y-mx}{n}}+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta^{\frac{y-mx-3n}{n}}}{\frac{y-mx}{n}}+\text{ecc.},$$

28. Se in questa formola ponghiamo $m=n=1$, ne nascerà quella del n°. 19. Se facciamo $m=1$, $n=2$, avremo il caso de' numeri dispari sopra (22) considerato. Se si pone $n=m$, ed $y=my$, ne verrà di nuovo la formola del n°. 19. Dunque il numero my in tante maniere si può dividere in x parti della forma mz, in quante maniere il numero y può dividersi in x parti di qualunque forma. Sia adesso $m=1$, $n=3$, ed avremo la serie (B) 1, 4, 7, 10, 13, ecc.; e sarà in questo caso

$$Z^{(y,x)}=\frac{\delta^{\frac{y-x}{3}}}{\frac{y-x}{3}}+\delta 1\frac{\delta^{\frac{y-x-3}{3}}}{\frac{y-x}{3}}$$

$$+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta^{\frac{y-x-6}{3}}}{\frac{y-x}{3}}+\text{ecc.}$$

Quindi, acciò un numero y possa esser la somma di x termini della serie (B), conviene che $y-x$ sia divisibile per 3. Sia per esempio $y=16$, $x=4$, avremo $\delta^{\frac{y-x}{3}}=\delta 4$ $=7$, $\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(16,4)}=\frac{7}{4}+\frac{4}{4}+\frac{6}{4}$ $+\frac{3}{4}=5=$ al numero delle maniere, nelle quali il numero

16 può esser la somma di quattro termini della serie (B). Queste maniere sono le seguenti; $16 = 1 + 1 + 1 + 13$, $16 = 1 + 1 + 4 + 10$, $16 = 1 + 1 + 7 + 7$, $16 = 1 + 4 + 4 + 7$, $16 = 4 + 4 + 4 + 4$.

PROBLEMA IX.

29. Trovare in quante maniere da x diversi termini della serie (A) possa formarsi il numero y.

Con un discorso simile a quello del Problema precedente giungeremo alla equazione

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-nx,x)} + Z^{(y-n(x-1)-m,x-1)}$$

Ponendo al solito $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$ avremo $\alpha_x = \frac{b^{-n(x-1)-m}}{1-b^{-nx}}$, e

$$\nabla\alpha_x = \frac{b^{-mx-n\cdot x(x-1):2}}{(1-b^{-n})(1-b^{-2n})\ldots\ldots(1-b^{-nx})};$$ cioè sarà (2)

$$\nabla\alpha_x = b^{-mx-n\cdot x(x-1):2} + A'b^{-mx-n\cdot x(x-1):2-n}$$

$$+ A''b^{-mx-n\cdot x(x-1):2-2n} + \text{ecc.}$$

facendo come sopra

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1\,\frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1\,\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

Quindi avremo (4)

$$Z^{(y,x)} = \phi\left(y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}\right) + A'\phi\left(y - mx - n\frac{x(x-1)}{2} - n\right)$$

$$+ A''\phi\left(y - mx - n\frac{x(x-1)}{2} - 2n\right) + \text{ecc.}$$

Ponendo $x = 1$, abbiamo $A' = A'' = \text{ecc.} = 1$; onde

$Z^{(y,1)} = \phi(y-m) + \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc.}$

$Z^{(y-n,1)} = \phi(y-m-n) + \phi(y-m-2n) + \text{ecc}$

cioè $\phi(y-m) = Z^{(y,1)} - Z^{(y-n,1)}$. Di qui apparisce, che sarà $\phi(y-m) = 1$ nel solo caso di $y = m$; dunque $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$; il quale se si pone essere $A^{(\mu)}$ avremo

$$y - mx - n\frac{x(x-1)}{2} - n\mu = 0,$$ cioè

$\mu =$

$$\mu = \frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}, \text{ e}$$

$$z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}}{\frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2} - n}{n}}{\frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}}$$

$$+ \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2} - 2n}{n}}{\frac{y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}}{n}} + \text{ecc.}$$

30. I Problemi de' numeri 20 e 23 sono casi particolari del precedente. Se vogliamo sapere ciò che succeda per riguardo alla serie (B), facciamo $m = 1$, $n = 3$, ed avremo

$$z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y - x\frac{3x-1}{2}}{3}}{\left(y - x\frac{3x-1}{2}\right):3} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y - x\frac{3x-1}{2} - 3}{3}}{\left(y - x\frac{3x-1}{2}\right):3}$$

$$+ \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\frac{y - x\frac{3x-1}{2} - 3}{3}}{\left(y - x\frac{3x-1}{2}\right):3} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 31 può esser la somma di 4 termini diversi della serie (B); a-

vremo $x=4$, $y=31$, $\dfrac{\delta\, y-x\,\frac{3x-1}{2}}{3}=\delta 3=4$, $\delta 2=3$, $\delta 1=1$, e $Z^{(31,4)}=\frac{4}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}=3$, le quali maniere sono: $31=1+4+7+19$, $31=1+4+10+16$, $31=1+7+10+13$.

31 Se nella formola del numero 27 ponghiamo $y-n\,\frac{x(x-1)}{2}$ in luogo di y, ne nascerà quella del numero 29. Di qui nasce il Teorema: in quante maniere il numero y può dividersi in x termini tutti disuguali della serie (A), in altrettante il numero $y-n\,\frac{x(x-1)}{2}$ può dividersi in x termini della medesima serie o uguali o disuguali.

PROBLEMA X.

32. *Data una serie di numeri qualunque, della quale il termine generale sia* Z_x, *trovare in quante maniere il numero* y *può esser la somma de' termini di questa serie* $z_1, z_2, z_3 \ldots z_x$.

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e facciamo

$$y=pz_1+qz_2+rz_3+sz_4+\ldots\ldots+tz_x$$

E' evidente che il numero cercato sarà uguale al numero delle diverse maniere, nelle quali possono determinarsi le lettere p, q, r, ecc. in modo che soddisfacciano alla equazione precedente. Ora tutte queste maniere saranno in numero uguali alla somma di tutte quelle, che si hanno ponendo successivamente $t=0$, 1, 2, ecc. Ma il numero delle maniere corrispondenti a $t=0$ è espresso da $Z^{(y,x-1)}$; e similmente il numero delle altre che convengono ai valori di $t=1$, 2, 3, ecc. è rappresentato respettivamente da $Z^{(y-z_x,x-1)}$,

$Z^{(y-2z_{\prime\prime},x-1)}$, $Z^{(y-3z_{\prime\prime},x-1)}$ ecc. Dunque sarà

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y,x-1)}+Z^{(y-z_{\prime\prime},x-1)}$$
$$+Z^{(y-2z_{\prime\prime},x-1)}+Z^{(y-3z_{\prime\prime},x-1)}+\text{ecc.}$$

ma ponendo $y-z_{\prime\prime}$ in luogo di y si ha

$$Z^{(y-z_{\prime\prime},x)}=Z^{(y-z_{\prime\prime},x-1)}+Z^{(y-2z_{\prime\prime},x-1)}$$
$$+Z^{(y-3z_{\prime\prime},x-1)}+\text{ecc.}$$

Dunque si avrà l' equazione

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-z_{\prime\prime},x)}+Z^{(y,x-1)}.$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_{\prime\prime}$, ed avremo $\alpha_{\prime\prime}=\dfrac{1}{1-b^{-z_{\prime\prime}}}$, e quindi $\nabla\alpha_{\prime\prime}=\dfrac{1}{(1-b^{-z_1})(1-b^{-z_2})\ldots(1-b^{-z_{\prime\prime}})}$. Ponendo adesso $\nabla\alpha_{\prime\prime}=1+A'b^{-1}+A''b^{-2}+A'''b^{-3}+\text{ecc.}$

è facile il vedere che sarà sempre

$$A^{(m)}=\frac{\delta m}{m}+\delta 1\frac{\delta(m-1)}{m}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(m-2)}{m}$$
$$+\left(\frac{\delta 3}{3}+\delta 1\frac{\delta 2}{3}+\left(\frac{\delta 2}{2}+\delta 1\frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(m-3)}{m}+\text{ecc.}$$

ove $\delta m=m+\frac{m}{2}+\frac{m}{3}+\ldots+\frac{m}{m}$; ma di questo valore non devono prendersi che i termini interi non maggiori di $z_{\prime\prime}$, e della forma $z_{\prime\prime}$. Dunque sarà sempre $A'=A''=A'''=\text{ecc.}=0$, fino ad $A^{(z_1)}=z_1$. Posto questo avremo (4)

$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$

Ma ponendo $x = 1$ abbiamo, com' è facile il vedere

$$Z^{(y,1)} = \phi y + \phi(y - x_1) + \phi(y - 2x_1) + \phi(y - 3x_1) + \text{ecc.}$$

$$Z^{(y-x_1,1)} = \phi(y - x_1) + \phi(y - 2x_1) + \phi(y - 3x_1) + \text{ecc.}$$

Dunque $\phi y = Z^{(y,1)} - Z^{(y-x_1,1)}$, e $\phi y = 1$ nel solo caso di $y = 0$. Sarà perciò $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi.0$, cioè sarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(y-2)}{y}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta(y-3)}{y} + \text{ecc.}$$

33. Per darne un esempio, si abbia l'equazione a due indeterminate r, t di primo grado, $a = br + ct$, ove a, b, c sono quantità cognite e positive, e $c > b$. E' noto che questa equazione ammette in numeri interi un numero finito di soluzioni. Per trovar questo numero si faccia $z_1 = b$, $z_2 = c$, e il valore di $Z^{(a,2)}$ preso dal n.° precedente darà il numero cercato. Si abbia per esempio l' equazione $6 = 2r + 3t$, sarà $z_1 = 2$, $z_2 = 3$, $\delta 1 = 0$, $\delta 2 = 2$, $\delta 3 = 3$, $\delta 4 = 2$, $\delta 5 = 0$, $\delta 6 = 5$, e il numero delle soluzioni, che ammette in numeri interi questa equazione, sarà $Z^{(6,2)} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = 2$. Queste due soluzioni sono le seguenti; $r = 0$, $t = 2$; $r = 3$, $t = 0$, e oltre queste due non ve ne sono altre. L' istesso si dica dell' equazioni a più indeterminate.

34. Supponghiamo $z_x = nx$, cioè la serie proposta sia n, $2n$, $3n$, ... xn. E' chiaro che in questo caso il valore di $\nabla\alpha_n$ sarà della forma

$$\nabla^{\alpha}_{x} = 1 + A'b^{-n} + A''b^{-2n} + A'''b^{-3n} + \text{ecc.}$$

ove al ſolito

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ma nel valore di $\delta\mu$ devono prenderſi tutt' i numeri interi. Avremo dunque

$$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-n) + A''\phi(y-2n) + A'''\phi(y-3n) + \text{ecc.}$$

e $\phi.y$ eſſendo $= 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$ (32), ſarà $Z^{(y,x)} =$ al coefficiente di $\phi 0$, il quale ſe ſi ſuppone eſſere $A^{(\mu)}$, avremo $y - \mu n = 0$, cioè $\mu = \frac{y}{n}$; e quindi

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n}$$

$$+ \left(\frac{\delta 3}{3} + \delta 1 \frac{\delta 2}{3} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta 1}{3}\right)\frac{\delta\frac{y-3n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

35. Se nella formola del numero 27. ponghiamo $y + mx$ in luogo di y, ne naſcerà queſta. Dunque il numero y in tante maniere può naſcere dalla ſomma di x termini della ſerie m, $m+n$, $m+2n$, ecc; in quante il numero $y - mx$ può naſcere dalla ſomma de' numeri n, $2n$, $3n$, ... xn.

36. Sia $z_{x} = (2x-1)n$, cioè la ſerie propoſta ſia la ſeguente, n, $3n$, $5n$, ... $(2x-1)n$. Avremo

$$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-n) + A''\phi(y-2n) + A'''\phi(y-3n) + \text{ecc.}$$

e qui pure ſarà

$$A^{(\mu)} = \frac{\delta\mu}{\mu} + \delta 1 \frac{\delta(\mu-1)}{\mu} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right)\frac{\delta(\mu-2)}{\mu} + \text{ecc.}$$

ove $\delta\mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \ldots\ldots + \frac{\mu}{\mu}$, ma di queſta ſerie non devono prenderſi che i termini interi, diſpari, e non maggiori di $2x-1$. E ſiccome $\phi y = 1$ nel ſolo caſo di $y = 0$, ſarà

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

Facendo $n = 1$, sarà il numero delle maniere, nelle quali y può esser la somma de' numeri dispari $1, 3, 5, \ldots 2x-1$ espresso da

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta y}{y} + \delta 1 \frac{\delta(y-1)}{y} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 3$, cioè si cerchi in quante maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' numeri 1, 3, 5. Avremo $\delta y = \delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta 4 = 1$, $\delta 3 = 3 + 1 = 4$, $\delta 2 = 1$, $\delta 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $= Z^{(5,3)} = \frac{6}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 3$, le quali sono, $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 3$, $5 = 5$.

37. Così se sarà più generalmente $z_x = ((a-1)x - (a-2)n)$, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\delta\frac{y}{n}}{y:n} + \delta 1 \frac{\delta\frac{y-n}{n}}{y:n} + \left(\frac{\delta 2}{2} + \delta 1 \frac{\delta 1}{2}\right) \frac{\delta\frac{y-2n}{n}}{y:n} + \text{ecc.}$$

e nel valore di $\delta\mu = \mu + \frac{\mu}{2} + \frac{\mu}{3} + \ldots + \frac{\mu}{\mu}$ non dovranno prendersi che i numeri interi della forma $(a-1)p - (a-2)$ non maggiori di $(a-1)x - (a-2)$.

38. Sia $z_x = c^{x-1}$; cioè si abbia la progressione geometrica $1, c, c^2, \ldots c^{x-1}$; il valore di $Z^{(y,x)}$ sarà quel medesimo del n°. 32, e δy sarà $= y + \frac{y}{2} + \frac{y}{3} + \ldots + \frac{y}{y}$ prendendo solamente da questo valore i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di questa forma. Si cerchi per esempio in quante maniere il numero 5 può nascere dalla somma de' termini 1, 2, 4. Sarà $c = 2$, $y = 5$, $x = 3$, $c^{x-1} = 4$, e $\delta y = \delta 5 = 1$, $\delta 4 = 4 + 2 + 1 = \delta 7$, $3 = 1$, $\delta 2 = 2 + 1 = 3$,

$\delta 1 = 1$, e quindi il numero cercato $Z^{(5,1)} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} + \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 4$, le quali maniere sono $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$, $5 = 1 + 4$.

39. Sia finalmente z_n il termine generale de' numeri primi della forma $4m + 1$; in questo caso nel valore di δy dovranno prendersi i soli termini, che sono numeri primi della forma $4m + 1$ non maggiori di z_n. Se per esempio si cerca in quante maniere il numero 7 può esser la somma de' numeri primi della forma $4m + 1$, sarà $\delta y = \delta 7 = 1$, $\delta 6 = 1$, $\delta 5 = 5 + 1 = 6$, $\delta 4 = 1$, $\delta 3 = 1$, $\delta 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 2$, le quali maniere sono $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $7 = 1 + 1 + 5$.

PROBLEMA XI.

40. *Data una serie di numeri qualunque, della quale il termine generale sia* z_n, *trovare in quante maniere il numero* y *può nascere dalla somma di termini diversi di questa serie, continuata fino al termine* z_n.

Sia $Z^{(y,x)}$ il numero delle maniere cercato, e supponghiamo $y = pz_1 + qz_2 + rz_3 + \ldots + tz_n$. Per la natura del Problema ciascuna delle quantità p, q, ecc. non può essere che $= 0$, oppure $= 1$; quindi il numero delle maniere cercato sarà uguale alla somma de' numeri delle maniere, che nascono dal fare $t = 0$, e $t = 1$. Ma facendo $t = 0$, e $t = 1$, $Z^{(y,x)}$ diventa $Z^{(y,x-1)}$, e $Z^{(y-z_n,x-1)}$; dunque l'equazione del Problema sarà

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y,x-1)} + Z^{(y-z_x,x-1)}$$

Per integrar questa equazione facciamo $Z^{(y,x)} = b^y \nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x = 1 + b^{-z_x}$, e $\nabla\alpha_x = (1+b^{-z_1})(1+b^{-z_2})(1+b^{-z_3})\ldots(1+b^{-z_x})$. Ponghiamo

$$\nabla\alpha_x = 1 + A'b^{-1} + A''b^{-2} + A'''b^{-3} + \text{ecc.}$$

e supponendo $\gamma m = m - \frac{m}{2} + \frac{m}{3} - \frac{m}{4} \ldots \pm \frac{m}{m}$, ma prendendo di questa serie solo i termini interi non maggiori di z_x, e della forma z_x, è facile il vedere che avremo (2)

$$A^{(m)} = \frac{\gamma m}{m} + \gamma 1 \frac{\gamma(m-1)}{m} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(m-2)}{m}$$
$$+ \left(\frac{\gamma 3}{3} + \gamma 1 \frac{\gamma 2}{3} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma 1}{3}\right)\frac{\gamma(m-3)}{m} + \text{ecc.}$$

Posto questo valore di $A^{(m)}$, avremo
$Z^{(y,x)} = \phi y + A'\phi(y-1) + A''\phi(y-2) + A'''\phi(y-3) + \text{ecc.}$
ove $\phi y = Z^{(y,0)}$. Ma $Z^{(y,0)} = 1$ nel solo caso di $y = 0$, negli altri casi $Z^{(y,0)} = 0$; dunque $Z^{(y,x)} = A^{(y)}$.

41. Sia $z_x = x$, cioè la serie proposta sia quella de' numeri naturali; in questo caso prendendo nel valore di γm tutt' i termini interi minori di x, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\gamma y}{y} + \gamma 1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Sia per esempio $y = 5$, $x = 4$, avremo $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 3 + 1 = 4$, $\gamma 2 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e il numero delle maniere cercato $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{4}{5} + \frac{2}{5}$

+

$+\frac{2}{5}=2$, le quali maniere sono $5=1+4$, $5=2+3$.

42. Ripigliamo l' equazione appartenente a questo caso

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y,x-1)}+Z^{(y-x,x-1)}$$

e ponendovi $y-x$ in luogo di y

$$Z^{(y-x,x)}=Z^{(y-x,x-1)}+Z^{(y-2x,x-1)}$$

e sostituendo nella prima il valore di $Z^{(y-x,x-1)}$ preso da questa

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y,x-1)}-Z^{(y-2x,x-1)}$$

Facciamo $Z^{(y,x)}=b^y\nabla\alpha_x$, ed avremo $\alpha_x=\frac{1-b^{-2x}}{1-b^{-x}}$, e

$\nabla\alpha_x=\frac{(1-b^{-1})(1-b^{-4})\ldots(1-b^{-2x})}{(1-b^{-1})(1-b^{-2})\ldots(1-b^{-x})}$; e ponendo x infinito

$\nabla\alpha_x=\frac{1}{(1-b^{-1})(1-b^{-3})(1-b^{-5})\ldots}$, ove gli esponenti di b sono i numeri dispari. Quindi $Z^{(y,x)}$ avrà in questo caso il medesimo valore, che ha al n°. 36. (formola seconda); onde nasce il Teorema. In tante maniere il numero y può formarsi dalla somma di numeri disuguali, in quante il medesimo numero y può essere la somma di numeri dispari o uguali tra loro o disuguali. Similmente paragonando la formola del n°. 36. con quella del n°. precedente troveremo quest' altro curioso Teorema; cioè $\delta.y=\gamma.y$, o sia

$$y+\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+\ldots+\frac{y}{y}=y-\frac{y}{2}+\frac{y}{3}-\frac{y}{4}+\ldots\pm\frac{y}{y}$$

prendendo nel primo membro solo i termini interi, e dispari; nel secondo i termini interi. Il Teorema è evidente se y è dispari, ma è ugualmente vero se y è pari.

43. Sia $z_x=c^{x-1}$, cioè si abbia la serie geometrica

$1, c, c^2, \ldots c^{x-1}$, e prendendo nel valore di

$\gamma m=m-\frac{m}{2}+\frac{m}{3}-\frac{m}{4}+\ldots\pm\frac{m}{m}$ solo i termini interi non maggiori di c^{x-1} e di questa forma, avremo

$$Z^{(y,x)} = \frac{\gamma y}{y} + \gamma 1 \frac{\gamma(y-1)}{y} + \left(\frac{\gamma 2}{2} + \gamma 1 \frac{\gamma 1}{2}\right)\frac{\gamma(y-2)}{y} + \text{ecc.}$$

Cerchiamo per esempio in quante maniere il numero 5 può esser la somma di numeri diversi presi tra i termini della progressione 1, 2, 4. Sarà $x = 3$, $c = 2$, $y = 5$, $\gamma y = \gamma 5 = 1$, $\gamma 4 = 4 - 2 - 1 = 1$, $\gamma 3 = 1$, $\gamma 2 = 2 - 1 = 1$, $\gamma 1 = 1$, e $Z^{(5,4)} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$.

Generalmente se supporremo x comunque grande, cioè se non sarà più limitato il numero de' termini della progressione geometrica 1, 2, 4, 8, 16, ecc. si toglierà la condizione di prendere dal valore di $\gamma.m$ i numeri non maggiori di 2^{x-1}. Sarà dunque $\gamma.m$ della forma $2^{m} - 2^{m-1} - 2^{m-2} - \ldots - 2 - 1$, cioè sarà sempre $= 1$. Quindi $Z^{(y,x)}$ sarà sempre $= 1$ qualunque sia il numero y. Abbiamo adunque questo Teorema: che qualunque numero può nascere dalla somma di termini diversi della progressione geometrica 1, 4, 8, ecc. in una sola maniera.

44. Quei teoremi, che abbiamo in qua e in là osservati, sono già stati per la maggior parte ritrovati dal Sig. Eulero. Noi gli abbiamo dedotti dalla soluzione de' diversi problemi; ma dall' equazione de' medesimi potevano subito senza alcuna integrazione ritrovarsi, come insegnano i seguenti Problemi, i quali insieme ci aprono la strada a ritrovare molti altri simili teoremi.

PROBLEMA XII.

45. *Date le due seguenti equazioni*

$$Z^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-g.x,\,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-f.x,\,x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-g.x,\,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-f.x,\,x-1)}$$

composte di tre termini, nelle quali i coefficienti respettivi siano uguali, e i primi due termini siano della medesima forma, ridurre l' integrazione della seconda equazione alla integrazione della prima.

Facciamo $\Pi^{(y,x)} = Z^{(y-F.x,x)}$, e sostituendo questo valore nella seconda equazione essa diventerà

$$Z^{(y-F.x,x)} = A_x Z^{(y-\phi.x-F.x,x)}$$

$$+ B_x Z^{(y-f'.x-F(x-1),x-1)}.$$

Ma dalla prima equazione abbiamo

$$Z^{(y-F.x,x)} = A_x Z^{(y-\phi.x-F.x,x)}$$

$$+ B_x Z^{(y-f.x-F.x,x-1)},$$

Dunque $y-f.x-F(x-1)=y-f.x-F.x$, cioè $F.x-F(x-1)=f'.x-f.x$, e $F.x=\Sigma\big(f'(x+1)-f(x+1)\big)+\text{Cost.}$ La costante si determinerà così. Sia $\Sigma f'(x+1)-\Sigma f(x+1)=a$ nel caso di $x=1$, e si abbia $\Pi^{(y,1)}=Z^{(y-b,1)}$, avremo $F.1=b$, e $\text{Cost.}=b-a$.

46. Si abbiano per esempio le due equazioni

$$Z^{(y,x)}=Z^{(y-x,x)}+Z^{(y,x-1)}$$
$$\Pi^{(y,x)}=\Pi^{(y-x,x)}+\Pi^{(y-x,x-1)}$$

la prima delle quali appartiene al n°. 25, la seconda al n°. 20. Avremo $F.x=\Sigma(x+1)=\frac{x(x+1)}{2}+\text{Cost.}$ Ora si osservi che

$$Z^{(0,1)}=1,\ Z^{(1,1)}=1,\ Z^{(2,1)}=1,\ \text{ecc.}$$
$$\Pi^{(0,1)}=0,\ \Pi^{(1,1)}=1,\ \Pi^{(2,1)}=1,\ \text{ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y,1)}=Z^{(y-1,1)}$, cioè $b=1$, $a=1$, e la costante $=0$: quindi $F.x=\frac{x(x+1)}{2}$, e $\Pi^{(y,x)}=Z^{(y-x(x+1):2,x)}$.

Di qui nasce il Teorema: In quante maniere il numero y può dividersi in x parti disuguali, in altrettante il numero $y-\frac{x(x+1)}{2}$ può nascere dalla somma de' numeri $1, 2, 3, \ldots x$.

47. Più generalmente si abbiano l' equazioni

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-nx,x)} + Z^{(y,x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = \Pi^{(y-nx,x)} + \Pi^{(y-n(x-1)-m,x-1)},$$

che sono quelle de' numeri 34, e 29. Sarà $F.x = \Sigma(nx+m) = n\frac{x(x-1)}{2} + mx + \text{Cost.}$ Ma sappiamo essere

$$Z^{(0,1)} = 1,\ Z^{(n,1)} = 1,\ Z^{(2n,1)} = 1, \text{ ecc.}$$

$\Pi^{(0,1)} = 0$, $\Pi^{(m,1)} = 1$, $\Pi^{(m+n,1)} = 1$, $\Pi^{(m+2n,1)} = 1$, ecc. e quindi $\Pi^{(y,1)} = Z^{(y-m,1)}$. Dunque $b = m$, $a = m$, e Cost. $= m - m = 0$, cioè $\Pi^{(y,x)} = Z^{(y-mx-nx(x-1):2,x)}$: onde in tante maniere il numero y può esser la somma di x termini della serie m, $m+n$, $m+2n$, ecc. disuguali tra loro, in quante il numero $y - mx - n\frac{x(x-1)}{2}$ può nascere dalla somma de' numeri n, $2n$, $3n$, ... xn.

PROBLEMA XIII.

48. *Più generalmente date l' equazioni*

$$Z^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{(y-\varphi.x,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{(y-f.x,x-1)}$$

$$\Pi^{(y,x)} = \underset{x}{A}\, \Pi^{(y-m\varphi.x,x)} + \underset{x}{B}\, \Pi^{(y-f.x,x-1)}$$

ove m *è costante, ridurre l' integrazione della seconda equazione a quella della prima.*

Facciamo $\Pi^{(y,x)} = Z^{((y-F.x):m,x)}$, e la seconda equazione diventerà

$$Z^{((y-F.x):m,x)} = \underset{x}{A}\, Z^{((y-m\varphi.x-F.x):m,x)} + \underset{x}{B}\, Z^{((y-f.x-F(x-1)):m,x-1)}$$

Ma ponendo nella prima equazione $y - \frac{(m-1)y + F.x}{m}$ in luogo di y avremo

$$Z^{((y-F.x):m,x)} = A_x Z^{((y-m\phi.x-F.x):m,x)}$$
$$+ B_x Z^{((y-mf.x-F.x):m,x-1)}$$

Dunque $y - mf.x - F.x = y - f'.x - F(x-1)$, cioè $F.x - F(x-1) = f'.x - mf.x$, e integrando $F.x = \Sigma f(x+1) - m\Sigma f(x+1) +$ Cost. e la costante si determinerà come sopra.

49. Si abbiano per esempio l' equazioni de' numeri 19, e 22,

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$$
$$\Pi^{(y,x)} = \Pi^{(y-2x,x)} + \Pi^{(y-1,x-1)}.$$

Sarà $F.x = \Sigma(1-2) = -x +$ Cost. per determinare questa costante si osservi che

$$Z^{(1,1)} = 1,\ Z^{(2,1)} = 1,\ Z^{(3,1)} = 1, \text{ ecc.}$$
$$\Pi^{(1,1)} = 1,\ \Pi^{(2,1)} = 0,\ \Pi^{(3,1)} = 1, \text{ ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y,1)} = Z^{((y+1):2,1)}$, e la Cost. $= 0$; avremo perciò $\Pi^{(y,x)} = Z^{((y+x):2,x)}$, e quindi il Teorema: In quante maniere il numero y può dividersi in x parti dispari, in altrettanti il numero $\frac{y+x}{2}$ può dividersi in x parti o pari o dispari.

50. Siano proposte l' equazioni de' numeri 19, e 27,

$$Z^{(y,x)} = Z^{(y-x,x)} + Z^{(y-1,x-1)}$$
$$\Pi^{(y,x)} = \Pi^{(y-nx,x)} + {}^{(y-m,x-1)}$$

Avremo $F.x = \Sigma(m-n) = (m-n)x +$ Cost. Ora si rifletta che i valori di $\Pi^{(y,x)}$ vanno con quest' ordine;

$$\Pi^{(m,1)} = 1,\ \Pi^{(m+n,1)} = 1,\ \Pi^{(m+2n,1)} = 1, \text{ ecc.}$$

dunque $\Pi^{(y,1)} = Z^{((y-m+n):n,1)}$, quindi la Cost. $= 0$, e $\Pi^{(y,x)} = Z^{((y-(m-n)x):n,x)}$. Onde in tante maniere il numero y è la somma di x termini della serie m, $m+n$, $m+2n$, ecc; in quante il numero $\frac{y-(m-n)x}{n}$ è la somma di x termini della serie naturale. Col metodo medesimo paragonando tra loro le altre equazioni di sopra ritrovate, se ne dedurranno altri Teoremi.