# SOPRA LE SERIE

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella R. Università di Pavia.

## ARTICOLO I.

*Dell' uso del Calcolo Integrale delle equazioni lineari per sommare alcune serie trascendenti.*

I Moderni Analisti si sono a gara esercitati nel perfezionare ed estendere la teoria delle equazioni differenziali lineari, proponendo varj metodi più o meno semplici e generali per assegnare i loro integrali completi; ed è già noto, che uno de' metodi più ingegnosi per conseguir quest' intento è quello di assumere un *integrale particolare*, e di ricavarne poscia mediante gli artifizj e ripieghi, che l' Analisi somministra, la vera forma dell' *integrale completo*. Supponendo io noti pertanto i fondamenti di questo ramo di Calcolo Integrale mi restringo nel I. Articolo di questa Memoria a mostrar l' uso, che quindi può trarsi per rinvenire la somma di alcune serie trascendenti, alcune delle quali assoggettate agl' ingegnosi metodi di *Leon. Eulero*, e del Sig. Cav. *Lorgna* esiggerebbero per sommarsi una lunga e tortuosa complicazione di calcolo, ed ancor dopo questo presenterebbero risultati assai composti, e bisognosi di nuove riduzioni e di nuovi artifizj per vestire una forma semplice ed elegante: laddove all' opposto mercè l' applicazione della predetta teoria si giugne speditamente e direttamente alla somma delle serie proposte, e questa sempre si presenta senza l' ajuto di nuovi ripieghi analitici sotto il più semplice aspetto, cui la natura della quistione permetta.

## PROBLEMA I.

*Sommare la serie* $1 + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8}{1.2.3....8} + \frac{x^{12}}{1.2.3....12}$ $+ \frac{x^{16}}{1.2.3.4....16} + \text{ecc.} = S$

### SOLUZIONE.

Si prenda il differenziale, considerando $x$ come variabile, e $dx$ costante, e sarà $\frac{x^3dx}{1.2.3} + \frac{x^7dx}{1.2.3....7} + \frac{x^{11}dx}{1.2.3....11}$ $+ \frac{x^{15}dx}{1.2.3....15} + \text{ecc.} = dS$. Di nuovo piglisi il secondo differenziale, che sarà $\frac{x^2dx^2}{1.2} + \frac{x^6dx^2}{1.2.3....6} + \frac{x^{10}dx^2}{1.2.3....10}$ $+ \frac{x^{14}dx^2}{1.2.3....14} + \text{ecc.} = ddS$. Si pigli ancora il differenziale terzo $\frac{xdx^3}{1} + \frac{x^5dx^3}{1.2.3.4.5} + \frac{x^9dx^3}{1.2.3....9} + \frac{x^{13}dx^3}{1.2.3....13} + \text{ecc.} = d^3S$. Finalmente si prenda anche il quarto $dx^4 + \frac{x^4dx^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8dx^4}{1.2.3....8}$ $+ \frac{x^{12}dx^4}{1.2.3....12} + \text{ecc.} = dx^4\left(1 + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^8}{1.2.3....8}\right.$ $\left. + \frac{x^{12}}{1.2.3....12} + \text{ecc.}\right) = Sdx^4 = d^4S$. Ma questa equazione differenziale di quart' ordine, contenendo in ciascun termine la variabile $S$, e i suoi differenziali alla sola prima dimensione, è un' equazione *lineare*, e però un suo integrale *particolare* sarà $S = e^{mx}$, essendo $m$ una costante indeterminata, ed $e$ il numero, che ha per logaritmo naturale l' unità. Per trovare le quattro costanti arbitarie, che devono entrare nell' integrale *completo*, si differenzj l' equazione $S = e^{mx}$, e sia $dS = mdxe^{mx}$, e novamente $ddS = m^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = m^3dx^3e^{mx}$,

$d^4S = m^4dx^4e^{mx} = Sdx^4 = e^{mx}dx^4$. Dunque $m^4 = 1$, la qual equazione ha per radici, $m = 1$, $m' = -1$, $m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Laonde l'integrale completo sarà $S = Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x}$, essendo $A$, $B$, $C$, $D$, le quattro costanti da determinarsi nella maniera seguente. Essendo $S = Ae^x + Be^{-x} + Ce^x\sqrt{-1} + De^{-x}\sqrt{-1} = Ae^x + Be^{-x} + C(\text{cos.}\,x + \text{sen.}\,x.\sqrt{-1}) + D(\text{cos.}\,x - \text{sen.}\,x.\sqrt{-1}) = Ae^x + Be^{-x} + (C+D)\,\text{cos.}\,x + (C-D)\,\text{sen.}\,x.\sqrt{-1}$; ed anche dovendo essere per la natura della proposta serie $S = 1$, quand' $x = 0$, ne viene.

1°. $A + B + (C+D) = 1$.

Inoltre, essendo $x = 0$, dev' essere $dS = 0$, e quindi $dxAe^x - dxBe^{-x} - (C+D)dx\,\text{sen.}\,x + (C-D)dx\,\text{cos.}\,x.\sqrt{-1}$; e dividendo per $dx$, e fatto $x = 0$, si ha

2°. $A - B + (C-D)\sqrt{-1} = 0$

Parimenti, quando $x = 0$, dev' essere $ddS = 0$; dunque differenziando il valore ora ritrovato di $dS$, e poscia dividendo per $dx^2$, e fatto $x = 0$, si ha

3.° $A + B - (C+D) = 0$

Così anche, dovendo essere $d^3S = 0$, differenziando il valore di $ddS$, e diviso poi per $dx^3$, e fatto $x = 0$, si ottiene

4.° $A - B - (C-D)\sqrt{-1} = 0$

Da queste quattro equazioni

1.ª $A + B + (C+D) = 1$

2.ª $A - B + (C-D)\sqrt{-1} = 0$

3.ª $A + B - (C+D) = 0$

4.ª $A - B - (C-D)\sqrt{-1} = 0$; si ha subito sommando la 2.ª e la 4.ª, $2A - 2B = 0$, e quindi $A = B$; e sommando la 1.ª e la 3.ª si ottiene $2A + 2B = 1$; onde $A = B = \frac{1}{4}$. Dalla 2.ª poi si ha $C = D$, che sostituito nella 3.ª dà $C = D = \frac{1}{4}$. Dunque finalmente $S = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{1}{4}(\text{cos.}\,x + \text{sen.}\,x\sqrt{-1}) + \frac{1}{4}(\text{cos.}\,x - \text{sen.}\,x.\sqrt{-1}) = \frac{e^{2x}+1}{4e^x} + \frac{1}{2}\text{cos.}\,x$. Il che era ecc.

## PROBLEMA II.

*Sommare la serie* $1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{1.2.3....8}+\frac{x^{10}}{1.2.3....10}+\text{ecc.}=S$.

### SOLUZIONE.

Presi i differenziali si ottiene $dS=\frac{xdx}{1}+\frac{x^3dx}{1.2.3}+\frac{x^5dx}{1.2.3.4.5}+\frac{x^7dx}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{x^9dx}{1.2.3....9}+\text{ecc.}$; $ddS=dx^2+\frac{x^2dx^2}{1.2}+\frac{x^4dx^2}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{ecc.}=dx^2\left(1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{1.2.3...6}+\text{ecc.}\right)=Sdx^2$. Sicchè sarà come dianzi l' integrale *particolare* dell' equazione *lineare* di second' ordine $ddS=Sdx^2$ espresso da $S=Ae^{mx}$; onde $dS=Amdxe^{mx}$, $ddS=Am^2dx^2e^{mx}=Ae^{mx}dx^2$; e quindi $m^2=1$, ed $m=1$, $m'=-1$. Laonde $S=Ae^x+Be^{-x}$ è l' integrale *completo* di detta equazione. Ma quando $x=0$, diventa $S=A+B=1$, $\frac{dS}{dx}=0=A-B$; perciò $A=B=\frac{1}{2}$; e però $S=\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{2}e^{-x}=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$. Il che era ecc.

## PROBLEMA III.

*Sommare la serie* $S=\frac{z^3}{2.3}+\frac{z^7}{2.3....7}+\frac{z^{11}}{2.3....11}+\frac{z^{15}}{2.3....15}+\frac{z^{19}}{2.3....19}+\text{ecc.}$

## SOLUZIONE.

Piglisi il differenziale quattro volte, e sarà $\frac{z^3dz^4}{2.3}+\frac{z^7dz^4}{2.3...7}+\frac{z^{11}dz^4}{2.3...11}+\frac{z^{15}dz^4}{2.3...15}+\text{ecc.}=d^4S=Sdz^4$. Quindi preso $S=Aem^z$ per integrale *particolare* dell' equazione *lineare* $d^4S=Sdz^4$, si ottiene, differenziando, $dS=Amdze^{mz}$, $ddS=Am^2dz^2e^{mz}$, $d^3S=Am^3dz^3e^{mz}$, $d^4S=Am^4dz^4e^{mz}=Sdz^4=Adz^4e^{mz}$. Perlochè dividendo per $Adz^4e^{mz}$, si ha $m^4=1$, che dà quattro radici $m=1$, $m'=-1$, $m''=\sqrt{-1}$, $m'''=-\sqrt{-1}$. Avremo pertanto l' integrale completo della predetta equazione espresso da $Ae^z+Be^{-z}+Ce^{z\sqrt{-1}}+De^{-z\sqrt{-1}}=S$. Ora, siccome allorchè $z=0$, nasce $S=0$, $dS=0$, $ddS=0$, $\frac{d^3S}{dz^3}=1$, quindi risultano le seguenti equazioni

1.ª $A+B+C+D=0$

2.ª $A-B+C\sqrt{-1}-D\sqrt{-1}=0$

3.ª $A+B-C-D=0$

4.ª $A-B-C\sqrt{-1}+D\sqrt{-1}=1$

Da queste si ricavano i valori delle costanti arbitrarie; imperciocchè 1.ª + 3.ª $=2A+2B=0$; 2.ª + 4.ª $=2A-2B=1$, cioè $A=-B=\frac{1}{4}$. Parimenti 1.ª − 3.ª $=2C+2D=0$; 2.ª − 4.ª $=2C\sqrt{-1}-2D\sqrt{-1}=-1$, vale a dire $C=-D=-\frac{1}{4\sqrt{-1}}$. Sostituiti questi valori nell' integrale, ne deriva $S=\frac{e^z}{4}-\frac{e^{-z}}{4}-\frac{e^{z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}+\frac{e^{-z\sqrt{-1}}}{4\sqrt{-1}}=\frac{e^z-e^{-z}}{4}-\frac{1}{2}\text{sen.}z$. Il che era ecc.

## SCOLIO

Si arriva a questa serie nello sciogliere il bel Problema Meccanico, in cui si cerca di determinare gli accidenti del moto di un grave, che discende per un piano inclinato in tanto che il piano si aggira intorno alla linea orizzontale, che ne forma la sommità.

## PROBLEMA IV.

*Sommare la serie* $1 + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \frac{x^{10}}{1.2.3....10} + \frac{x^{15}}{1.2.3....10} + \frac{x^{20}}{1.2.3....20} + \text{ecc.} = S$.

## SOLUZIONE.

Mediante la differenziazione nascono le equazioni $dS = \frac{x^4dx}{1.2.3.4} + \frac{x^9dx}{1.2.3....9} + \frac{x^{14}dx}{1.2.3....14} + \frac{x^{19}dx}{1.2.3....19} + \text{ecc.}$; $ddS = \frac{x^3dx^2}{1.2.3} + \frac{x^8dx^2}{1.2.3....8} + \frac{x^{13}dx^2}{1.2....13} + \frac{x^{18}dx^2}{1.2.3....18} + \text{ecc.}$; $d^3S = \frac{x^2dx^3}{1.2} + \frac{x^7dx^3}{1.2....7} + \frac{x^{12}dx^3}{1.2....12} + \frac{x^{17}dx^3}{1.2....17} + \text{ecc.}$; $d^4S = \frac{xdx^4}{1} + \frac{x^6dx^4}{1.2....6} + \frac{x^{11}dx^4}{1.2....11} + \frac{x^{16}dx^4}{1.2....16} + \text{ecc.}$; $d^5S = dx^5 + \frac{x^5dx^5}{1.2....5} + \frac{x^{10}dx^5}{1.2....10} + \frac{x^{15}dx^5}{1.2....15} + \text{ecc.} = dx^5\left(1 + \frac{x^5}{1.2....5} + \frac{x^{10}}{1.2....10} + \frac{x^{15}}{1.2....15} + \text{ecc.}\right) = Sdx^5$. L'integrale particolare è al solito $S = Ae^{mx}$, dal che si cava, come sopra $d^5S = Am^5dx^5e^{mx} = Sdx^5 = Ae^{mx}dx^5$; onde $m^5 = 1$. Ora l' equazione $m^5 - 1 = 0$

ha per fattori $m-1=0$, $m^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}m+1=0$,

$m^2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}m+1=0$, che danno $m=1$, $m'=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

$+\sqrt{(\frac{-5+\sqrt{5}}{8})}$, $m''=\frac{1-\sqrt{5}}{4}-\sqrt{(\frac{-5+\sqrt{5}}{8})}$,

$m'''=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\sqrt{(\frac{-5+\sqrt{5}}{8})}$, $m''''=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

$-\sqrt{(\frac{-5+\sqrt{5}}{8})}$. Dunque, posto $\frac{-5+\sqrt{5}}{8}=-n$, l' integrale completo della equazione lineare $d^5S=S\,dx^5$ sarà $Ae^{mx}$

$+Be^{m'x}+Ce^{m''x}+De^{m'''x}+Ee^{m''''x}=Ae^x+Be^{(1-\sqrt{5})x:4+x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}$

$+Ce^{(1-\sqrt{5})x:4-x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}+De^{(-1-\sqrt{5})x:4+x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}$

$+Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4-x\sqrt{n}.\sqrt{-1}}=Ae^x+Be^{(1-\sqrt{5})x:4}$

$(\text{cos.}\,x\sqrt{n}+\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})+Ce^{(1-\sqrt{5})x:4}$

$(\text{cos.}\,x\sqrt{n}-\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})+De^{(-1-\sqrt{5})x:4}$

$(\text{cos.}\,x\sqrt{n}+\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})+Ee^{(-1-\sqrt{5})x:4}$

$(\text{cos.}\,x\sqrt{n}-\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1})=Ae^x+(B+C)e^{(1-\sqrt{5})x:4}\times$

$\text{cos.}\,x\sqrt{n}+(B-C)e^{(1-\sqrt{5})x:4}\,\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$

$+(D+E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4}\,\text{cos.}\,x\sqrt{n}$

$+(D-E)e^{(-1-\sqrt{5})x:4}\,\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$, cioè posto

$B+C=F$, $B-C=G$, $D+E=H$, $D-E=I$, nasce

$S=Ae^x+Fe^{(1-\sqrt{5})x:4}\,\text{cos.}\,x\sqrt{n}+Ge^{(1-\sqrt{5})x:4}$

$\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}+He^{(-1-\sqrt{5})x:4}\,\text{cos.}\,x\sqrt{n}+Ie^{(-1-\sqrt{5})x:4}$

$\text{sen.}\,x\sqrt{n}.\sqrt{-1}$. Si osservi ora, che fatto $x=0$, diventa

$S=1$, $\frac{dS}{dx}=\frac{ddS}{dx^2}=\frac{d^3S}{dx^3}=\frac{d^4S}{dx^4}=0$, donde si traggono cin-

que

que equazioni per determinare le costanti arbitrarie $A, F, G, H, I$. In fatti in tal ipotesi di $x=0$, l' equazione $S=1$ dà

$$1^{\circ}.\ A+F+H=1.$$ Così $dS=0$ dà

$$2^{\circ}.\ A+\frac{1-\sqrt{5}}{4}F+G\sqrt{n}.\sqrt{-1}-H.\frac{1+\sqrt{5}}{4}+I.\sqrt{n}.\sqrt{-1}=0.$$

Parimenti $ddS=0$ dà $3^{\circ}.\ A-\frac{1}{4}F+G.\frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}.\sqrt{-1}$

$-H.\frac{1-\sqrt{5}}{4}-I.\frac{1+\sqrt{5}}{2}\sqrt{n}.\sqrt{-1}=0$. Ma siccome per ottenere le altre due equazioni, che restano, cioè la $4^{a}$, e la $5^{a}$. il calcolo riesce assai lungo e tedioso, parmi più espediente procedere così: Le cinque radici dell' equazione $m^{5}-1=0$ sono $1, a+b\sqrt{-1}, a-b\sqrt{-1}, f+g\sqrt{-1}, f-g\sqrt{-1}$, onde l' integrale completo è $Ae^{x}+Be^{ax+bx\sqrt{-1}}$ $+Ce^{ax-bx\sqrt{-1}}+De^{fx+gx\sqrt{-1}}+Ee^{fx+gx\sqrt{-1}}$. Laonde supposto $x=0$, si avranno le seguenti equazioni

$1^{a}.\ A+B+C+D+E=1,$

$2^{a}.\ A+(a+b\sqrt{-1})B+(a-b-\sqrt{-1})C+(f+g\sqrt{-1})D+(f-g\sqrt{-1})E=0,$

$3^{a}\ A+(a+b\sqrt{-1})^{2}B+(a-b\sqrt{-1})^{2}C+(f+g\sqrt{-1})^{2}D+(f-g\sqrt{-1})^{2}E=0,$

$4^{a}.\ A+(a+b\sqrt{-1})^{3}B+(a-b\sqrt{-1})^{3}C+(f+g\sqrt{-1})^{3}D+(f-g\sqrt{-1})^{3}E=0,$

$5^{a}.\ A+(a+b\sqrt{-1})^{4}B+(a-b\sqrt{-1})^{4}C+(f+g\sqrt{-1})^{4}D+(f-g\sqrt{-1})^{4}E=0,$

dalle quali si otterranno i valori delle cinque costanti arbitrarie. Il che ecc

## PROBLEMA V.

*Sommare la serie* $\frac{x^{2}}{1.2}+\frac{x^{6}}{1.2.3....6}+\frac{x^{10}}{1.2.3....10}$

$+\frac{x^{14}}{1.2.3....14}+\text{ecc.}=S$

## SOLUZIONE.

Si trova $dS = \frac{xdx}{1} + \frac{x^5dx}{1.2.3.4.5} + \frac{x^9dx}{1.2.3...9} + \frac{x^{13}dx}{1.2.3...13} + \text{ecc.}$;

$ddS = dx^2 + \frac{x^4dx^2}{1.2.3.4} + \frac{x^8dx^2}{1.2.3...8} + \frac{x^{12}dx^2}{1.2.3...12} + \text{ecc.}$;

$d^3S = \frac{x^3dx^3}{1.2.3} + \frac{x^7dx^3}{1.2.3...7} + \frac{x^{11}dx^3}{1.2.3....11} + \text{ecc.}$;

$d^4S = \frac{x^2dx^4}{1.2} + \frac{x^6dx^4}{1.2.3...6} + \frac{x^{10}dx^4}{1.2.3...10} + \text{ecc.}$

$= dx^4\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^6}{1.2.3...6} + \frac{x^{10}}{1.2...10} + \text{ecc.}\right) = Sdx^4$. Ora per l' indole dell' equazione differenziale lineare di quart' ordine $d^4S = Sdx^4$, si trova, che un suo integrale particolare è $S = Ae^{mx}$; onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = Am^3dx^3e^{mx}$, $d^4S = Am^4dx^4e^{mx} = Sdx^4 = Ae^{mx}dx^4$; e perciò $m^4 - 1 = 0$, ovvero $(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0$, e conseguentemente $m = 1$, $m' = -1$, $m'' = \sqrt{-1}$, $m''' = -\sqrt{-1}$. Sicchè l' integrale completo dell' equazione $d^4S = Sdx^4$ è $Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} + De^{m'''x} = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{x\sqrt{-1}} + De^{-x\sqrt{-1}}$. Per determinare ora le costanti arbitrarie $A$, $B$, $C$, $D$ si osservi, che quando $x = 0$, diventa $S = 0$, $\frac{dS}{dx} = 0$, $\frac{ddS}{dx^2} = 1$, $\frac{d^3S}{dx^3} = 0$. Dunque si avranno le equazioni seguenti

1.ª $A + B + C + D = 0$

2.ª $A - B + C\sqrt{-1} - D\sqrt{-1} = 0$

3.ª $A + B - C - D = 1$

4.ª $A - B - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = 0$. Sommando la 2.ª e la 4.ª si ha $2A - 2B = 0$, cioè $A = B$; e sommando la prima e la 3.ª nasce $2A + 2B = 1$, ovvero $A = B = \frac{1}{4}$.

Posto questo valore nella 1.ª si ha $C+D=-\frac{1}{2}$; ma dall' ultima si ottiene $C=D$; dunque $C=D=-\frac{1}{4}$. Laonde

$$S=\frac{1}{4}e^{x}+\frac{1}{4}e^{-x}-\frac{1}{4}e^{x}\sqrt{-1}-\frac{1}{4}e^{-x}\sqrt{-1}=\frac{e^{2x}+1}{4e^{x}}$$

$$-\frac{1}{4}(\text{cos}.x+\text{sen}.x.\sqrt{-1})-\frac{1}{4}(\text{cos}.x-\text{sen}.x.\sqrt{-1})$$

$=\frac{e^{2x}+1}{4e^{x}}-\frac{1}{2}\text{cos}.x$. Il che era ecc.

## PROBLEMA VI.

*Sommare la serie* $1+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^9}{1.2.3...9}$

$+\frac{x^{12}}{1.2.3...12}+\text{ecc.}=S.$

## SOLUZIONE.

Si trova $dS=\frac{x^2dx}{1.2}+\frac{x^5dx}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8dx}{1.2.3...8}+\frac{x^{11}dx}{1.2.3...11}+\text{ecc.}$;

$ddS=\frac{xdx^2}{1}+\frac{x^4dx^2}{1.2.3.4}+\frac{x^7dx^2}{1.2.3...7}+\frac{x^{10}dx^2}{1.2.3...10}+\text{ecc.}$;

$d^3S=dx^3+\frac{x^3dx^3}{1.2.3}+\frac{x^6dx^3}{1.2.3...6}+\frac{x^9dx^3}{1.2.3...9}+\text{ecc.}=$

$dx^3\left(1+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^6}{1.2.3...6}+\frac{x^9}{1.2.3...9}+\text{ecc.}\right)=Sdx^3$. Perciò pigliando $S=Ae^{mx}$ per integrale *particolare* dell' equazione *lineare* $d^3S=Sdx^3$, si ha $dS=Amdxe^{mx}$, $ddS=Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S=Am^3dx^3e^{mx}=Sdx^3=Ae^{mx}dx^3$; ond' è $m^3=1$, ed $m=1$, $m'=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $m''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Laonde l' integrale completo sarà $S=Ae^{x}$

$+Be^{(-x):2}.e^{(x\sqrt{3}):2}.\sqrt{-1}+Ce^{(-x):2}.e^{(-x\sqrt{3}):2}.\sqrt{-1}=Ae^{x}$

$+Be^{(-x):2}\left(\text{cos.}\frac{x\sqrt{3}}{2}+\text{sen.}\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right)+Ce^{(-x):2}$ $\left(\text{cos.}\frac{x\sqrt{3}}{2}-\text{sen.}\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}\right)=Ae^{x}+(B+C)e^{(-x):2}\times$ $\text{cos.}\frac{x\sqrt{3}}{2}+(B-C)e^{(-x):2}\,\text{sen.}\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}$. Ora, quando $x=0$ diventa $S=1$, $dS=0$, $ddS=0$, cioè

1.° $A+(B+C)=1$

2.° $A-\frac{(B+C)}{2}+\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$

3.° $A-\frac{(B+C)}{2}-\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$. Sottraggo la 3.ª dalla 2.ª, ed ho $(B-C)=0$. Dalla 2.ª poi ottengo $A=\left(\frac{B+C}{2}\right)$; e dalla 1.ª $A=1-(B+C)$, ond' è $\frac{(B+C)}{2}=1-(B+C)$, cioè $(B+C)=\frac{2}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. Dunque $S=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{(-x):2}\,\text{cos.}\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

## PROBLEMA VII.

*Sommare la serie* $x+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^7}{1.2.3...7}+\frac{x^{10}}{1.2.3...10}$ $+\text{ecc.}=S$.

### SOLUZIONE.

Presi i differenziali si ha $dS=dx+\frac{x^3dx}{1.2.3}+\frac{x^6dx}{1.2.3...6}$ $+\frac{x^9dx}{1.2.3...9}+\text{ecc.}$; $ddS=\frac{x^2dx^2}{1.2}+\frac{x^5dx^2}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8dx^2}{1.2.3...8}$ $+\text{ecc.}$; $d^3S=\frac{xdx^3}{1}+\frac{x^4dx^3}{1.2.3.4}+\frac{x^7dx^3}{1.2.3...7}+\text{ecc.}$

$= dx^3 \left( x + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^7}{1.2.3...7} + \text{ecc.} \right) = Sdx^3$. Avutasi ora l' equazione differenziale lineare $d^3S = Sdx^3$, pongasi $S = Ae^{mx}$, onde $dS = Amdxe^{mx}$, $ddS = Am^2dx^2e^{mx}$, $d^3S = Am^3dx^3e^{mx}$, il qual valore sostituito nell' equazione $d^3S = Sdx^3$ dà $Am^3dx^3e^{mx} = Sdx^3 = Ae^{mx}dx^3$, e quindi $m^3 = 1$, cioè $m = 1$ $m'' = \frac{-1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$, $m''' = \frac{-1 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2}$. Laonde l' integrale completo dell' equazione $d^3S = Sdx^3$ sarà $S = Ae^{mx} + Be^{m'x} + Ce^{m''x} = Ae^x + (B + C)e^{(-x):2} \text{cos.} \frac{x\sqrt{3}}{2} + (B - C)e^{(-x):2} \text{sen.} \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1}$.

Ora si rifletta, che quando $x = 0$, $S = 0$; $\frac{dS}{dx} = 1$; $ddS = 0$; onde

1.ª $A + (B + C) = 0$.

2.ª $A - \frac{(B + C)}{2} + \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 1$.

3.ª $A - \frac{(B + C)}{2} - \frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = 0$.

Da questa terza equazione si ottiene $\frac{(B - C)\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = A - \frac{(B + C)}{2}$, il qual valore sostituito nella seconda dà $2A - (B + C) = 1$, ed in questa surrogando il valore $A = -(B + C)$ cavato dalla prima, si ottiene $(B + C) = -\frac{1}{3}$, $A = \frac{1}{3}$, $(B - C)\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Laonde $S = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{(-x):2} \text{cos.} \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{(-x):2} \text{sen.} \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

## PROBLEMA VIII.

*Sommare la serie* $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8}{1.2.3....8}$ $+\frac{x^{11}}{1.2.3....11}+$ ecc. $=S$.

## SOLUZIONE

Pigliati i differenziali nascono le equazioni

$$dS=xdx+\frac{x^4dx}{1.2.3.4}+\frac{x^7dx}{1.2.3....7}+\frac{x^{10}dx}{1.2.3....10}+\text{ecc.};$$

$$ddS=dx^2+\frac{x^3dx^2}{1.2.3}+\frac{x^6dx^2}{1.2.3....6}+\frac{x^9dx^2}{1.2.3....9}+\text{ecc.};$$

$$d^3S=\frac{x^2dx^3}{1.2}+\frac{x^5dx^3}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8dx^3}{1.2.3....8}+\text{ecc.}$$

$=dx^3\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^8}{1.2.3....8}+\text{ecc.}\right)=Sdx^3$. Trattiſi ora l' equazione differenziale lineare $d^3S=Sdx^3$ come dianzi ponendo $S=Ae^{mx}$; ſicchè riſulterà l' integrale completo

$S=Ae^x+(B+C)e^{(-x):2}\text{ coſ.}\frac{x\sqrt{3}}{2}+(B-C)e^{(-x):2}\times$ ſen. $\frac{x\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}$. Se pertanto ſi conſidera, che quando $x=0$, diventa $S=0$, $dS=0$, $\frac{ddS}{dx^2}=1$, naſcono le tre ſeguenti equazioni.

1ª. $A+(B+C)=0$;

2ª. $A-\frac{(B+C)}{2}+\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=0$

3ª. $A-\frac{(B+C)}{2}-\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=1$. Dalla 2ª. ſi ottiene $A-\frac{(B+C)}{2}=-\frac{(B-C)\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$, che ſurro-

gato nella 3ª. dà $2A-(B+C)=1$, ed in questa sostituendo il valore della prima $A=-(B+C)$, si trova per fine $(B+C)=-\frac{1}{3}, A=\frac{1}{3}, (B-C)\sqrt{-1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Dunque $S=\frac{1}{3}e^{x}-\frac{1}{3}e^{(-x):2}\text{cos.}\frac{x\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{(-x):2}\text{sen.}\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Il che era ecc.

## PROBLEMA IX.

*Trovare la somma generale di tutte le serie della forma* $\frac{x^r}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}+\frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)}+\text{ecc.}=S$, *supponendo* r, n *numeri interi affermativi*.

## SOLUZIONE.

### *Caso I°. $n>r$.*

Preso il differenziale $n.^{\text{esimo}}$ di detta serie, si vede facilmente, che nascerà $d^nS=\frac{x^rdx^n}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}dx^n}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}dx^n}{1.2.3....(r+2n)}+\text{ecc.}=dx^n\left(\frac{x^r}{1.2.3....r}+\frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}+\frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}+\text{ecc.}\right)=Sdx^n$. Se ora per la nota teoria delle equazioni differenziali *lineari*, si assume $S=Ae^{mx}$ per integrale particolare dell' equazione lineare $d^nS=Sdx^n$, è chiaro che si avrà $d^nS=Am^ne^{mx}dx^n=Sdx^n=Aem^ndx^n$, d' onde si trae $m^n=1$. Prese pertanto le $n$ radici dell' equazione $m^n=1$ le quali (essendo $n$ pari) sono $1, -1, a+b\sqrt{-1}, a-b\sqrt{-1}, f+g\sqrt{-1}, f-g\sqrt{-1}$, ecc. si otterrà l' integrale completo dell' equazione $d^nS=Sdx^n$, il quale sarà di questa forma $Ae^{x}+Be^{-x}+Ce^{ax+bx\sqrt{-1}}+De^{ax-bx\sqrt{-1}}+Ee^{fx+gx\sqrt{-1}}+Fe^{fx-gx\sqrt{-1}}+\text{ecc.}=Ae^{x}+Be^{-x}$

$+(C+D)e^{ax}$ cos. $bx+(C-D)e^{ax}$ sen. $bx.\sqrt{-1}+(E+F)e^{fx}$ cos. $g.x+(E-F)\sqrt{-1}$. sen. $gx+$ ecc. Per determinare poi le costanti arbitrarie $A$, $B$, $C$, $D$, ecc. convien risolvere le $n$ seguenti equazioni

$1^a.\ A+B+C+D+E+F+\text{ecc.}=0,$

$2^a.\ A-B+(a+b\sqrt{-1})C+(a-b\sqrt{-1})D+(f+g\sqrt{-1})E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+\text{ecc.}=0,$

$3^a.\ A+B+(a+b\sqrt{-1})^2C+(a-b\sqrt{-1})^2D+(f+g\sqrt{-1})^2E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+\text{ecc.}=0,$

$4^a.\ A-B+(a+b\sqrt{-1})^3C+(a-b\sqrt{-1})^3D+(f+g\sqrt{-1})^3E$
$+(f-g\sqrt{-1})F+\text{ecc.}=0,$

ecc.

⋮

$(r+1)^a.\ A\pm B+(a+b\sqrt{-1})^rC+(a-b\sqrt{-1})^rD+(f+g\sqrt{-1})^rE$
$+(f-g\sqrt{-1})^rF+\text{ecc.}=1$

⋮

$n^a\ A-B+(a+b\sqrt{-1})^{n-1}C+(a-b\sqrt{-1})^{n-1}D$
$+(f+g\sqrt{-1})^{n-1}E+(f-g\sqrt{-1})^{n-1}F+\text{ecc.}=0.$

Queste derivano dall' essere, quando $x=0$, ancora $S=0$, $dS=0$, $ddS=0$, ecc... $\frac{d^rS}{dx^r}=1$..... $d^{n-1}S=0$, ed il doppio segno nella $(r+1)^a$ posto al $B$ serve pel doppio caso in cui può trovarsi $r$ di pari o dispari, cioè essendo $r$ pari vale il segno $+$ e vale il segno $-$ quando $r$ è dispari. Se in luogo d'essere $n$ pari, come abbiamo supposto, fosse dispari, allora mancherà una delle due radici reali, cioè $-1$; e perciò sarà $B=0$, e tutto il resto sarà come sopra, con avvertire però che $a$, $b$, $f$, $g$, ecc. non saranno più quelli di prima.

Caso

*Caso II°. $n = r$.*

Si aggiunga alla serie $S$ l' unità, e si faccia $S' = S + 1$

$$= 1 + \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3....2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3....3r} + \text{ecc.}$$

Di qui si deduce $d^r S' = dx^r + \frac{x^r dx^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3....2r} + \text{ecc.}$

$$= dx^r \left( 1 + \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{2r}}{1.2.3....2r} + \frac{x^{3r}}{1.2.3....3r} + \text{ecc.} \right) = S' dx^r.$$

Sicchè prendendo $Ae^{mx}$ per integrale particolare dell' equazione $d^r S' = S' dx^r$, ed essendo $d^r S' = Am^r e^{mx} dx^r = S' dx^r = Ae^{mx} dx^r$, e quindi $m^r = 1$, si trovino le $r$ radici di quest' ultima equazione, che saranno, nel supposto di $r$ pari, $1, -1, \alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}, \gamma + \delta\sqrt{-1}, \gamma - \delta\sqrt{-1}$, ecc. Laonde l' integrale completo dell' equazione differenziale sarà $Ae^x + Be^{-x}$ $+ Ce^{\alpha x + \beta x\sqrt{-1}} + De^{\alpha x - \beta x\sqrt{-1}} + Ee^{\gamma x + \delta x\sqrt{-1}} + Fe^{\gamma x - \delta x\sqrt{-1}}$ $+ \text{ecc.} = Ae^x + Be^{-x} + (C + D)e^{\alpha x} \text{cos.}\, \beta x + (C - D)\sqrt{-1}.\, e^{\alpha x} \times$ $\text{sen.}\, \beta x + (E + F)e^{\gamma x} \text{cos.}\, \delta x + (E - F)\sqrt{-1}.\, e^{\gamma x} \text{sen.}\, \delta x + \text{ecc.}$ Siccome per supposto $x = 0$, si ha $S' = 1$, $dS' = 0$, $ddS = 0$, $\ldots d^{r-1} S = 0$, quindi si avranno per la determinazione delle $n$ costanti $A, B, C, D, E, F$, ecc. le seguenti $n$ equazioni

1°. $A + B + C + D + E + F + \text{ecc.} = 1$

2°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})F + \text{ecc.} = 0$

3°. $A + B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^2 C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^2 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^2 E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})^2 F + \text{ecc.} = 0$

4°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^3 C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^3 D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^3 E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})^3 F + \text{ecc.} = 0$

ecc.

⋮

$n$°. $A - B + (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{n-1} C + (\alpha - \beta\sqrt{-1})^{n-1} D + (\gamma + \delta\sqrt{-1})^{n-1} E$
$+ (\gamma - \delta\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0.$

Dunque la somma ricercata $S = S' - 1 = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x} - 1$ $+ (C + D)e^{\alpha x}$ cos. $\beta x + (C - D)e^{\alpha x}\sqrt{-1}$ . sen. $\beta x$ $+ (E + F)e^{\gamma x}$ cos. $\delta x + (E - F)\sqrt{-1} . e^{\gamma x}$ sen. $\delta x +$ ecc. Anche qui si avverta, che nel caso di $n$ dispari sarà $B = 0$

*Caso III. $n < r$.*

Alla proposta serie $S = \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)}$ $+ \frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)} + \frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)} +$ ecc. si aggiungano tanti termini iniziali $\frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)}$ $+ \frac{x^{r-3n}}{1.2.3....(r-3n)} + \ldots\ldots + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3.....(r-\lambda n)}$ fino a che l' esponente $r - \lambda n$ di $x$ diventa $< n$, oppure $= n$, e si faccia

$$S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)}$$
$$+ \ldots\ldots \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} = \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)}$$
$$+ \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)}$$
$$+ \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + \frac{x^r}{1.2.3....r} + \frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3....(r+2n)}$$
$$+ \frac{x^{r+3n}}{1.2.3....(r+3n)} + \frac{x^{r+4n}}{1.2.3....(r+4n)} + \text{ecc.} = S'.$$

Se ora si prende della serie $S'$ il differenziale $n.^{esimo}$, si scorge facilmente, per essere $r - \lambda n < n$, che risulta

$$d^n S' = \frac{x^{r-\lambda n} dx^n}{1.2.3....(r-\lambda n)}$$
$$+ \frac{x^{r-(\lambda-1)n}\, dx^n}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \frac{x^{r-(\lambda-2)n}\, dx^n}{1.2.3....(r-(\lambda-2)n)} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{x^{r-2n} dx^n}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n} dx^n}{1.2.3....(r-n)} + \frac{x^r dx^n}{1.2.3....r}$$
$$+ \frac{x^{r+n} dx^n}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n} dx^n}{1.2.3....(r+2n)} + \text{ecc.}$$

$$= dx^n \left( \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + \ldots\ldots \right.$$

$$+ \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-2n)} \left( + \frac{x^r}{1.2.3....r} \right.$$

$$\left. + \frac{x^{r+n}}{1.2.3....(r+n)} + \frac{x^{r+2n}}{1.2.3...(r+2n)} + \text{ecc.} \right) = S'dx^n.$$ Considerata pertanto l' equazione lineare differenziale di ordine $n.^{esima}$ $d^nS' = S'dx^n$, è noto dalla teoria di tali equazioni, che un suo integrale particolare sarà della forma $S' = Aem^x$; d' onde si raccoglie $d^nS' = Am^ne^{mx}dx^n = Sdx^n = Ae^{mx}dx^n$, e quindi $m^n = 1$. Trovate le $n$ radici dell' equazione $m^n = 1$, le quali, supposto $n$ pari, saranno $1, -1, \mu + \upsilon\sqrt{-1}$, $\mu - \upsilon\sqrt{-1}, \phi + \omega\sqrt{-1}, \phi - \omega\sqrt{-1}$, ecc. si avrà l' integrale completo dell' equazione $d^nS = S'dx^n$ espresso da

$$Ae^x + Be^{-x} + Ce^{\mu x + \upsilon x\sqrt{-1}} + De^{\mu x - \upsilon x\sqrt{-1}} + Ee^{\phi x + \omega x\sqrt{-1}}$$

$$+ Fe^{\phi x - \omega x\sqrt{-1}} + \text{ecc.} = \frac{Ae^{2x} + B}{e^x} + (C + D)e^{\mu x} \text{cos.}\, \upsilon x$$

$$+ (C - D)\sqrt{-1}.\, e^{\mu x} \text{sen.}\, \upsilon x + (E + F)\, e^{\phi x} \text{cos.}\, \omega x$$

$$+ (E - F)\sqrt{-1}.\, e^{\phi x} \text{sen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$ Ora siccome si ha

$$S' = 0,\ dS' = 0,\ ddS' = 0,\ \text{ecc.}\ldots\ \frac{d^{(r-\lambda n)}S}{dx^{(r-\lambda n)}} = 1, \ldots\ d^{n-1}S = 0$$

nel caso di $x = 0$; quindi per determinare le costanti $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, ecc. si presentano da risolvere le $n$ seguenti equazioni.

1.° $A + B + C + D + E + F + \text{ecc.}\ldots = 0$

2.° $A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})D + (\phi + \omega\sqrt{-1})E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})F + \text{ecc.}\ldots = 0$

3.° $A + B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^2C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^2D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^2E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})^2F + \text{ecc.}\ldots = 0$

4.° $A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^3C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^3D + (\phi + \omega\sqrt{-1})^3E$
$+ (\phi - \omega\sqrt{-1})^3F + \text{ecc.}\ldots = 0$

:
:
:

$$((r-\lambda n)+1)^n . A \pm B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^{r-\lambda n} C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^{r-\lambda n} D$$
$$+ (\phi + \omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^{r-\lambda n} F + \text{ecc.} = 1$$
$$\vdots$$
$$n.^\circ \; A - B + (\mu + \upsilon\sqrt{-1})^{n-1} C + (\mu - \upsilon\sqrt{-1})^{n-1} D$$
$$+ (\phi + \omega\sqrt{-1})^{n-1} E + (\phi - \omega\sqrt{-1})^{n-1} F + \text{ecc.} = 0 .$$

Il doppio ſegno premeſſo al $B$ nella $((r-\lambda n)+1)^n$. ſerve come nel I.° caſo, cioè vale il $+$ quando $(r-\lambda n)$ è pari ed il $-$ quando $(r-\lambda n)$ è diſpari. Qui pure è da avvertirſi, che ſe $n$ ſarà diſpari, diverrà $B=0$ a motivo della mancanza della radice $-1$ nell' equazione $m^n = 1$. Dunque

$$S + \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} + \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} + .....$$
$$+ \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} + \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} = S' = \frac{Ae^{2x}+B}{e^x}$$
$$+ (C+D)\, e^{\mu x} \text{cos.}\, \upsilon x + (C-D)\, e^{\mu x}\sqrt{-1}.\, \text{sen.}\, \upsilon x$$
$$+ (E+F)\, e^{\phi x} \text{cos.}\, \omega x + (E-F)\sqrt{-1}.\, e^{\phi x}\, \text{sen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$

Conſeguentemente la ſomma ricercata $S = \dfrac{Ae^{2x}+B}{e^x}$

$$- \frac{x^{r-\lambda n}}{1.2.3....(r-\lambda n)} - \frac{x^{r-(\lambda-1)n}}{1.2.3....(r-(\lambda-1)n)} - \text{ecc.}.....$$
$$- \frac{x^{r-2n}}{1.2.3....(r-2n)} - \frac{x^{r-n}}{1.2.3....(r-n)} + (C+D)\, e^{\mu x} \text{cos.}\, \upsilon x$$
$$+ (C-D)\sqrt{-1}.\, e^{\mu x}\, \text{sen.}\, \upsilon x + (E+F)\, e^{\phi x} \text{cos.}\, \omega x$$
$$+ (E-F)\sqrt{-1}.\, e^{\phi x}\, \text{sen.}\, \omega x + \text{ecc.}$$ Il che era ecc.

## ARTICOLO II.

### *Della ſomma di alcune Serie di Simpſon, ed altre.*

Il celebre *Tommaſo Simpſon* ne' ſuoi *Eſſays on ſeveral curious and uſeful Subjects in Speculative and Mix'd Mathematicks* facendo uſo del *Metodo* così detto *degl' Incrementi* ritrova la ſomma di quelle ſerie numeriche, i di cui termini hanno per numeratore l' unità, e per denominatore un prodot-

to d' un' egual moltitudine di numeri naturali consecutivi, il primo de' quali in ciascun termine è sempre il secondo del termine precedente. Ma un metodo più generale, per conseguire siffatte somme anche nel caso che i numeratori dei termini delle serie sieno le potestà d' un qualche numero dotate d' un esponente eguale all' ultimo fattore del denominatore di ciascun termine, e che il primo fattore del denominatore di qualunque termine sia sempre non il secondo, ma il terzo, o il quarto, o il quinto ecc. fattore del denominatore del termine prossimo precedente, un tal metodo, dissi, ci viene somministrato dalla comune Teoria degl' *Integrali replicati*, la quale come troppo ovvia e familiare agli Analisti non ha qui bisogno di essere posta in maggior luce, bastando solo di mostrarne l' applicazione e l' uso ne' seguenti Problemi.

## PROBLEMA I.

*Sommare la serie* $S = \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \frac{x^{n+4}}{(n+3)(n+4)} +$ ecc. *in inf.*

## SOLUZIONE.

Differenziata due volte l' equazione nell' ipotesi di $dx$ costante, nasce $ddS = dx^2 (x^{n-1} + x^n + x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} +$ ecc.$) = dx^2 \times \frac{x^{n-1}}{1-x}$. Perlochè $\frac{ddS}{dx} = \frac{x^{n-1}dx}{1-x}$, ed integrando nella detta ipotesi, $\frac{dS}{dx} = \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + A$, ovvero $dS = dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Adx$, e nuovamente integrando, si ottiene $S = \int dx \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} + Ax + B = x \int \frac{x^{n-1}dx}{1-x} - \int \frac{x^n dx}{1-x} + Ax + B$. Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Suppongasi $n=1$, e si avrà $S=-x\log.(1-x)+x+\log.(1-x)+Ax+B$; e siccome dee svanire $S$ allorchè $x=0$, nascerà $B=0$. Inoltre essendo $\frac{dS}{dx}=-\log.(1-x)+A=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+$ ecc.; e però annullandosi $\frac{dS}{dx}$ insieme con $x$, si otterrà $A=0$. Laonde la serie $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{4.5}+$ ecc. *in inf.* $=x-x\log.(1-x)+\log.(1-x)=x+\log.\frac{1-x}{(1-x)^x}$. Se $x=1$, nasce $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+$ ecc. $=1$.

## SCOLIO

Si avverta qui attentamente, che nell' ipotesi di $n=1$ il valore della serie $\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^5}{4.5}+$ ecc. cioè $x+\log.\frac{1-x}{(1-x)^x}$ contiene un logaritmo d' un numero negativo tutte le volte che $x$ è un intero pari, ovvero una frazione spuria, avente un pari per numeratore e un dispari per denominatore. Si avverta però altresì che la serie è divergente allorchè $x>1$.

## PROBLEMA II.

*Sommare la serie* $S=\frac{x^2}{1.2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^6}{4.5.6}+$ ecc. in inf.

## SOLUZIONE.

Si differenzj l' equazione, e si otterrà $dS = dx\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^5}{4.5} + \text{ecc.}\right)$; si torni a differenziare, e nascerà $ddS = dx^2\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{ecc.}\right)$. Si differenzj la terza volta, e risulterà $d^3S = dx^3(1 + x + x^2 + x^3 + \text{ecc.}) = dx^3 \times \frac{1}{1-x}$; e quindi $\frac{d^3S}{dx^3} = \frac{dx}{1-x}$. L' integrale di questa equazione somministra $\frac{d^2S}{dx^2} = -\log.(1-x)$ senza costante, perchè, posto $x = 0$, sparisce l' uno e l' altro membro della equazione. Moltiplicando poi questa per $dx$, sicchè venga $\frac{d^2S}{dx} = -dx\log.(1-x)$, ed integrando di nuovo, si ottiene $\frac{dS}{dx} = -x\log.(1-x) + \int -\frac{xdx}{1-x} = -x\log.(1-x) + \int\left(dx - \frac{dx}{1-x}\right) = -x\log.(1-x) + x + \log.(1-x)$, senza costante per la ragione precedente. Sicchè moltiplicando per $dx$ nascerà $dS = xdx + dx\log.(1-x) - xdx\log.(1-x)$, e preso nuovamente l' integrale, si trova $S = \frac{1}{2}x^2 + x\log.(1-x) - x - \log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x) + \int -\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{1-x} = \frac{1}{2}x^2 + x\log.(1-x) - x - \log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x) + \int\left(\frac{1}{2}xdx + \frac{1}{2}dx - \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x}\right) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log.(1-x) + x\log.(1-x) - \frac{1}{2}x^2\log.(1-x)$, senza costante per la detta ragione. Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Suppoſto $x=1$, ſi ha la ſomma della ſerie $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\text{ecc.}=\frac{1}{1.2.2}$.

## PROBLEMA III.

*Sommare la ſerie* $S=\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^6}{3.4.5.6}+\frac{x^7}{4.5.6.7}+\text{ecc.}$

## SOLUZIONE.

Il primo differenziale dà $dS=dx\left(\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^6}{4.5.6}+\text{ecc.}\right)$, cioè $dx$ moltiplicato nella ſerie del Problema precedente; ſicchè $dS=dx\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)+x\log.(1-x)-\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)\right)$, ed integrando proviene $S=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\int-\frac{\frac{1}{2}xdx}{1-x}+\frac{1}{2}x^2\times\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{2}x^2dx}{1-x}-\frac{1}{2.3}x^3\log.(1-x)+\int-\frac{\frac{1}{6}x^3dx}{1-x}$

$$=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log.(1-x)+\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)$$

$$-\frac{1}{2.3}$$

$-\frac{1}{2.3}x^3\log.(1-x)+\frac{1}{2.3.3}x^3+\frac{1}{2.2.3}x^2+\frac{1}{2.3}x+\frac{1}{2.3}$ $\log.(1-x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2.3.3}\right)x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\log.(1-x)$ $-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)-\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)$. Il che ecc.

## COROLLARIO.

Posta $x=1$, si ha $S=\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}$ $+\frac{1}{4.5.6.7}+\text{ecc.}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2.3.3}-\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{3.3+2-5.3+6}{2.2.3.3}$ $=\frac{9+2+6-15}{2.2.3.3}=\frac{1}{1.2.3.3}$.

## PROBLEMA IV.

*Sommare la serie* $S=\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{3.4.5.6.7}$ $+\frac{x^8}{4.5.6.7.8}+\text{ecc. in inf.}$

## SOLUZIONE.

Il differenziale dell' equazione somministra $dS=dx\left(\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^5}{2.3.4.5}+\frac{x^6}{3.4.5.6}+\frac{x^7}{4.5.6.7}+\text{ecc.}\right)$, che pel Probl. prec. è $=dx\left(\frac{11}{36}x^3-\frac{5}{12}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{6}\log.(1-x)\right.$ $\left.-\frac{1}{2}x\log.(1-x)+\frac{1}{2}x^2\log.(1-x)-\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)\right)$. Dunque integrando sarà $S=\frac{11}{36.4}x^4-\frac{5}{12.3}x^3+\frac{1}{6.2}x^2$

$$+\frac{1}{6}x\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{6}xdx}{1-x}-\frac{1}{4}x^2\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{4}x^2dx}{1-x}$$

$$+\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)+\int\frac{\frac{1}{6}x^3dx}{1-x}-\frac{1}{24}x^4\log.(1-x)$$

$$-\int\frac{\frac{1}{24}x^4dx}{1-x}=\frac{11}{4.36}x^4-\frac{5}{3.12}x^3+\frac{1}{2.6}x^2+\frac{1}{6}x\log.(1-x)$$

$$-\frac{1}{4}x^2\log.(1-x)+\frac{1}{6}x^3\log.(1-x)-\frac{1}{24}x^4\log.(1-x)$$

$$+\int\left(-\frac{1}{6}dx+\frac{\frac{1}{6}dx}{1-x}\right)+\int\left(\frac{1}{4}xdx+\frac{1}{4}dx-\frac{\frac{1}{4}dx}{1-x}\right)$$

$$+\int\left(-\frac{1}{6}x^2dx-\frac{1}{6}xdx-\frac{1}{6}dx+\frac{\frac{1}{6}dx}{1-x}\right)$$

$$+\int\left(\frac{1}{24}x^3dx+\frac{1}{24}x^3dx+\frac{1}{24}xdx+\frac{1}{24}dx-\frac{\frac{1}{24}dx}{1-x}\right)=$$

$$\left.\begin{matrix}\frac{11}{4.36}\\+\frac{1}{4.24}\end{matrix}\right\}x^4\quad\left.\begin{matrix}-\frac{5}{3.12}\\-\frac{1}{3.6}\\+\frac{1}{3.24}\end{matrix}\right\}x^3\quad\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{2.4}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{2.24}\end{matrix}\right\}x^2$$

$$\left.\begin{matrix}-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{4}\\-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{24}\end{matrix}\right\}x\quad\left.\begin{matrix}-\frac{1}{6}\\+\frac{1}{4}\\+\frac{1}{24}\\-\frac{1}{6}\end{matrix}\right\}\log.(1-x)$$

$$+\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4\right)\log.(1-x)=\frac{25}{2.4.6.6}x^4$$

$-\frac{13}{2.6.6}x^3+\frac{7}{2.4.6}x^2-\frac{1}{4.6}x+(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2$
$+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4)\log.(1-x)$. Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Pigliando $x=1$ ne viene la somma $\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{2.3.4.5.6}$
$+\frac{1}{3.4.5.6.7}+\frac{1}{4.5.6.7.8}+\text{ecc.}=\frac{25}{2.4.6.6}-\frac{13}{2.6.6}+\frac{7}{2.4.6}$
$-\frac{1}{4.6}=\frac{1}{1.2.3.4.4}$.

## PROBLEMA V.

*Sommare la serie* $S=\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}$
$+\frac{x^8}{3.4.5.6.7.8}+\text{ecc.}$

## SOLUZIONE.

Dal differenziale dell' equazione se ne ha quest' altra
$dS=dx(\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\frac{x^7}{3.4.5.6.7}+\text{ecc.})$, cioè pel
Probl. prec. $dS=dx(\frac{25}{2.4.6.6}x^4-\frac{13}{2.6.6}x^3+\frac{7}{2.4.6}x^2$
$-\frac{1}{4.6}x)+dx(-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4)\log.(1-x)$.
Dunque integrando si ha $S=\frac{5}{2.4.6.6}x^5-\frac{13}{2.4.6.6}x^4$
$+\frac{7}{2.3.4.6}x^3-\frac{1}{2.4.6}x^2+(\frac{-x}{24}+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4$

$$-\frac{1}{5.24}x^5\Big)\log.(1-x)$$

$$+\int dx\left(\frac{-\frac{1}{24}x+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4-\frac{1}{5.24}x^5}{1-x}\right).$$ E poichè l' integrale di quest' ultimo termine è $=\frac{1}{24}x$

$$+\frac{1}{24}\log.(1-x)-\frac{1}{4.6}x^2-\frac{1}{2.6}x-\frac{1}{2.6}\log.(1-x)$$

$$+\frac{1}{3.3.4}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^2+\frac{1}{3.4}x+\frac{1}{3.4}\log.(1-x)-\frac{1}{4.4.6}x^4$$

$$-\frac{1}{3.4.6}x^3-\frac{1}{2.4.6}x^2-\frac{1}{4.6}x-\frac{1}{4.6}\log.(1-x)+\frac{1}{5.5.24}x^5$$

$$+\frac{1}{4.5.24}x^4+\frac{1}{3.5.24}x^3+\frac{1}{2.5.24}x^2+\frac{1}{5.24}x+\frac{1}{5.24}\log.(1-x),$$

se questo si aggiugne agli altri, risulta

$$S=\left.\begin{matrix}\frac{5}{2.4.6.6}\\+\frac{1}{4.5.5.6}\end{matrix}\right\}x^5\quad\left.\begin{matrix}-\frac{13}{2.4.6.6}\\-\frac{1}{4.4.6}\\+\frac{1}{4.4.5.6}\end{matrix}\right\}x^4\quad\left.\begin{matrix}+\frac{7}{2.3.4.6}\\+\frac{1}{3.3.4}\\-\frac{1}{3.4.6}\\+\frac{1}{3.4.5.6}\end{matrix}\right\}x^3$$

$$\left.\begin{matrix}-\frac{1}{2.4.6}\\-\frac{1}{4.6}\\+\frac{1}{2.3.4}\\-\frac{1}{2.4.6}\\+\frac{1}{2.4.5.6}\end{matrix}\right\}x^2\quad\left.\begin{matrix}+\frac{1}{4.6}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{3.4}\\-\frac{1}{4.6}\\+\frac{1}{4.5.6}\end{matrix}\right\}x\quad\left.\begin{matrix}+\frac{1}{4.6}\\-\frac{1}{2.6}\\+\frac{1}{3.4}\\-\frac{1}{4.6}\\+\frac{1}{4.5.6}\end{matrix}\right\}\log.(1-x)$$

$$+\left(\frac{-x}{4.6}+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4-\frac{1}{4.5.6}\right)\log.(1-x)$$

$$=\frac{137}{2.4.5.5.6.6}x^5-\frac{77}{3.4.4.5.6}x^4+\frac{141}{2.3.3.4.5.6}x^3-\frac{9}{2.4.5.6}x^2$$

$$+\frac{1}{4.5.6}x+\left(-\frac{1}{4.6}x+\frac{1}{2.6}x^2-\frac{1}{3.4}x^3+\frac{1}{4.6}x^4\right)\log.(1-x).$$

Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Assumendo, come dianzi, $x=1$, nasce la somma della serie $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{4.5.6.7.8.9}+$ ecc.

$$=\frac{137}{2.4.5.5.6.6}-\frac{77}{3.4.4.5.6}+\frac{141}{2.3.3.4.5.6}-\frac{9}{2.4.5.6}+\frac{1}{4.5.6}$$

$$=\frac{1}{1.2.3.4.5.5}.$$

Ecco pertanto il seguente

*Prospetto delle Serie di Simpson.*

| *Serie* | *Somme* |
|---|---|
| $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+$ ecc. | $=\frac{1}{1.1}$ |
| $\frac{1}{1.2.3.}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+$ ecc. | $=\frac{1}{1.2.2}$ |
| $\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+$ ecc. | $=\frac{1}{1.2.3.3}$ |
| $\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{2.3.4.5.6}+\frac{1}{3.4.5.6.7}+$ ecc. | $=\frac{1}{1.2.3.4.4}$ |
| $\frac{1}{1.2.3.4.5.6}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{3.4.5.6.7.8}+$ ecc. | $=\frac{1}{1.2.3.4.5.5}$ |
| $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}+$ ecc. | $=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$ |

*Serie* *Somme*

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9}$$

$$+\frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10}+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7}$$

ecc. ecc. ecc.

Dal che si vede, che la somma di ciascuna di queste serie non è altro che il primo termine, dove in luogo dell' ultimo fattore del denominatore si ripete il penultimo.

E' cosa per altro assai rimarchevole, e che a primo aspetto sembra impossibile, che queste serie Simpsoniane possono sommarsi con una semplice sottrazione aritmetica della serie proposta da se medesima mutilata del suo primo termine. Un tal modo di operare può vedersi ne' Teoremi seguenti.

*Teoremi sulle serie di Simpson.*

Dalla serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{ecc.}=S$

togli $S-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\text{ecc.}$, ed avrai

## TEOREMA I.

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\frac{1}{7.8}+\text{ecc.}=1$$

Dalla serie $S=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\text{ecc.}=1$

togli $S-\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+\text{ecc.}=\frac{1}{1.2}$,

ed avrai dividendo per 2,

## TEOREMA II.

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{4.5.6}+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{6.7.8}+\frac{1}{7.8.9}=\frac{1}{1.2.2}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.2}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2.2.3}$,

ed hai dividendo per 3

## TEOREMA III.

$$\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \frac{1}{5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4} = \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{4.5.6.7} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.3.4}$,

ed hai dividendo per 4

## TEOREMA IV.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$$

Dalla ſerie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8}$
$+ \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5} = \frac{1}{2.3.4.5.6} + \frac{1}{3.4.5.6.7} + \frac{1}{4.5.6.7.8}$
$+ \frac{1}{5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.4.5}$,

ed hai dividendo per 5

## TEOREMA V.

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8}$

$+ \frac{1}{4.5.6.7.8.9} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9}$

$+ \frac{1}{5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.5.6}$,

ed hai dividendo per 6

## TEOREMA VI.

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10}$

$+ \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$

Dalla serie $S = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}$

$+ \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6}$

togli $S - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9}$

$+ \frac{1}{4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.6.7}$,

ed hai dividendo per 7

## TEOREMA VII.

$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{1}{3.4.5.6.7.8.9.10} + \text{ecc,}$

$= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.7}$;

ecc. ecc. ecc.

PROBLEMA

## PROBLEMA VI.

*Sommare la serie* $S = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{3.4.5} + \frac{x^7}{5.6.7} + \frac{x^9}{7.8.9} + \text{ecc.}$

### SOLUZIONE.

Il primo differenziale dell' equazione somministra $dS = dx\left(\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} + \frac{x^8}{7.8} + \text{ecc.}\right)$; il secondo dà $ddS = dx^2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{ecc.}\right)$; il terzo presenta $d^3S = dx^2(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \text{ecc.}) = \frac{dx^3}{1-x^2}$. Ond' è $\frac{d^3S}{dx^2} = \frac{dx}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}dx}{1-x}$. Quindi integrando nasce $\frac{ddS}{dx^2} = \frac{1}{2}\log.(1+x) - \frac{1}{2}\log.(1-x)$, senza costante perchè svanisce con $x$ l' uno e l' altro membro dell' equazione. Moltiplico ora per $dx$, ed ho $\frac{ddS}{dx} = \frac{1}{2}dx\log.(1+x)$ $-\frac{1}{2}dx\log.(1-x)$, il di cui integrale è $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{2}x\log.(1+x)$ $-\int\frac{\frac{1}{2}xdx}{1+x} - \frac{1}{2}x\log.(1-x) - \int\frac{\frac{1}{2}xdx}{1-x} = \frac{1}{2}x\log.(1+x)$ $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1+x) - \frac{1}{2}x\log.(1-x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\log.(1-x)$ $= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\log.(1+x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\log.(1-x)$, senza costante come dianzi. Moltiplico di nuovo per $dx$, ed ottengo $S = \left(\frac{1}{2}dx + \frac{1}{2}xdx\right)\log.(1+x) + \left(\frac{1}{2}dx - \frac{1}{2}xdx\right)$ $\log.(1-x)$; e quindi integrando ritrovo $S = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2\right)\times$

$\log.(1+x)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\int\frac{\frac{1}{2}xdx+\frac{1}{4}x^2dx}{1+x}$

$+\int\frac{\frac{1}{2}xdx-\frac{1}{4}x^2dx}{1-x}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$

$+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log.(1+x)-\frac{1}{8}x^2$

$+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\log.(1+x)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\log.(1-x)+\frac{1}{8}x^2$

$+\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\log.(1-x)=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$

$-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}x$. Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Pongasi $x=1$, e sarà la somma della serie $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}$ $+\frac{1}{5.6.7}+\frac{1}{7.8.9}+\frac{1}{9.10.11}+$ ecc. $=\log.2-\frac{1}{2}$.

## PROBLEMA VII.

*Sommare la serie* $S=\frac{x^4}{1.2.3.4}+\frac{x^6}{3.4.5.6}+\frac{x^8}{5.6.7.8}$ $+\frac{x^{10}}{7.8.9.10}+$ ecc.

## SOLUZIONE.

Il differenziale dell' equazione somministra quest' altra $dS=dx\left(\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{3.4.5}+\frac{x^7}{5.6.7}+\frac{x^9}{7.8.9}+\text{ecc.}\right)$, cioè pel *Probl. prec.* $dS=dx\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1+x)$ $-dx\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2\right)\log.(1-x)-\frac{1}{2}xdx$. Perlochè inte-

grando nasce $S = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1+x)$

$$-\int \frac{\frac{1}{4}xdx + \frac{1}{4}x^2dx + \frac{1}{12}x^3dx}{1+x} - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right) \times$$

$$\log.(1-x) - \int \frac{\frac{1}{4}xdx - \frac{1}{4}x^2dx + \frac{1}{12}x^3dx}{1-x} - \frac{1}{4}x^2$$

$$= \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1+x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)$$

$$\log.(1-x) - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\log.(1+x) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$-\frac{1}{4}\log.(1+x) - \frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}\log.(1+x)$$

$$+\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\log.(1-x) - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\log.(1-x)$$

$$+\frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{12}x + \frac{1}{12}\log.(1-x) - \frac{1}{4}x^2$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1+x) + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{4}x\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3\right)\log.(1-x) - \frac{5}{12}x^2.$$ Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Da ciò apparisce che la somma della serie $\frac{1}{1.2.3.4}$

$$+ \frac{1}{3.4.5.6} + \frac{1}{5.6.7.8} + \frac{1}{7.8.9.10} + \text{ecc.} = \frac{2}{3}\log.2 - \frac{5}{12}.$$

I precedenti Problemi sono più che bastanti per dare un' adequata idea della maniera, che dee tenersi per determinare la somma delle serie analoghe alle premesse, qualunque sia nel denominatore d'un dato termine quel fattore, che prendesi per primo nel termine susseguente.

## ARTICOLO III.

*Delle ſerie infinite delle potenze intere de' numeri naturali co' ſegni alternanti.*

E' proprietà caratteriſtica di tutte le ſerie infinite *divergenti*, i di cui termini vanno vie maggiormente aumentandoſi di valore quanto più ſi ſcoſtano dal primo, di non ammettere *ſomma* propriamente detta, non potendo aſſegnarſi veruna quantità, a cui la ſerie divergente propoſta ſia preciſamente eguale, o a cui il valor della ſerie tanto più ſi avvicini, e ciò oltre ogni data differenza, quanto più termini ſi prendono della ſerie. Ma in quella vece ſi ricorre in queſti caſi alla *ſomma impropria* della ſerie, vale a dire a quella quantità o funzione, qualunque ella ſia, la quale, comunque ineguale al valore della data ſerie, genera però e produce col ſuo ſvolgimento mediante i conſueti artifizj analitici la ſerie medeſima. Ad una tal claſſe di ſerie ſi riferiſcono quelle, che vengono formate dalle potenze intere de' numeri naturali, preſe co' ſegni alternativi, e generalmente rappreſentate da

$1^n - 2^n + 3^n - 4^n + 5^n - 6^n + 7^n - 8^n + 9^n -$ ecc. in inf., eſſendo $n$ un numero intero affermativo qualunque. L' *Eulero* nel ſuo *Calcolo Differenziale* con un metodo ingegnoſo, ma oltremodo lungo e laborioſo, determina la quantità o *frazione generatrice* di ſiffatte ſerie, e giugne a conſeguire le formole ſeguenti:

I. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ ecc. ..... $= \frac{1}{4}$

II. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 +$ ecc ..... $= 0$

III. $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 +$ ecc. ..... $= -\frac{2}{16}$

IV. $1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 +$ ecc. ..... $= 0$

V. $1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 +$ ecc. ..... $= \frac{16}{64}$

VI. $1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 +$ ecc. ..... $= 0$

VII. $1^7 - 2^7 + 3^7 - 4^7 + 5^7 - 6^7 + \text{ecc.} \ldots\ldots = -\frac{272}{256}$

VIII. $1^8 - 2^8 + 3^8 - 4^8 + 5^8 - 6^8 + \text{ecc.} \ldots\ldots = 0$

IX. $1^9 - 2^9 + 3^9 - 4^9 + 5^9 - 6^9 + \text{ecc} \ldots\ldots = \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Ma questo gran Geometra dopo aver ritrovata l' espressione generale della *somma* d' un numero qualunque $x$ di termini della serie proposta, ed aver osservato, che del doppio segno $\pm$, di cui trovasi affetta la detta espressione, dee valere il primo ne' casi di $x$ dispari, il secondo in quelli di $x$ pari, volendo poi farne l' applicazione al caso di $x$ infinito discorre così: *Quod si ergo* (Inst. Calc. Diff. p. 500) *$x$ fuerit numerus infinitus, quoniam is est neque par neque impar, hæc consideratio cessare debet, ac proinde in summa termini ambigui sunt rejiciendi: unde sequitur, hujusmodi serierum in infinitum continuatarum summam exprimi per solam quantitatem constantem adjiciendam*. Non pare che un tale ragionamento sia per contentare la corrente de' Geometri, e a più d' uno certamente sembrerà sospetto e precipitoso. Ecco pertanto due differenti semplicissime dimostrazioni delle formole predette.

*Dimostrazione I. delle Formole Euleriane.*

Essendo $1 - x + x^2 - x^3 + \text{ecc.} = \frac{1}{1+x}$, si ha differenziando, e dividendo per $dx$, $-1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - 5x^4 + \text{ecc.} = -\frac{1}{(1+x)^2}$, e moltiplicando per $-x$,

1.° $x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \text{ecc.} = \frac{x}{(1+x)^2}$. $(A)$.

Si differenzj parimenti quest' ultima equazione, e si divida per $x$; e nascerà $1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - \text{ecc.} = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3}$; e moltiplicando per $x$,

2.° $x - 2^2x^2 + 3^2x^3 - 4^2x^4 + 5^2x^5 - 6^2x^6 + \text{ecc.} = \frac{(1-x)x}{(1+x)^3}$. (B).

Si prenda nuovamente il differenzial di quest' ultima equazione, e dividendo per $dx$ si ha $1 - 2^2x + 3^2x^2 - 4^2x^3 + 5^2x^4 - 6^2x^5 + \text{ecc.} = \frac{1-2x}{(1+x)^3} - \frac{3x(1-x)}{(1+x)^4} = \frac{1-4x+xx}{(1+x)^4}$; onde moltiplicando per $x$, nasce

3.° $x - 2^2x^2 + 3^2x^3 - 4^2x^4 + \text{ecc.} = \frac{x(1-4x+xx)}{(1+x)^4}$. (C)

Differenzio ora questa equazione, e divido per $dx$, ed ottengo $1 - 2^4x + 3^4x^2 - 4^4x^3 + \text{ecc.} = \frac{1-4x+xx-4x+2xx}{(1+x)^4} - \frac{4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5} = \frac{(1-8x+3xx)(1+x)-4x(1-4x+xx)}{(1+x)^5} = \frac{1-11x+11x^2-x^3}{(1+x)^5}$; e moltiplicando per $x$,

4.° $x - 2^4x^2 + 3^4x^3 - 4^4x^4 + 5^4x^5 - 6^4x^6 + \text{ecc.} = \frac{x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^5}$. (D)

Prendo all' istesso modo il differenziale di quest' ultima equazione, e divido per $dx$, dal che ricavo

$$1 - 2^5x + 3^5x^2 - 4^5x^3 + \text{ecc.} = \frac{1-11x+11x^2-x^3-11x+22x^2-3x^3}{(1+x)^5} - \frac{5x(1-11x+11x^2-x^3)}{(1+x)^6}$$

$$= \frac{(1-22x+33x^2-4x^3)(1+x)-5x+55x^2+55x^3+5x^4}{(1+x)^6}$$

$= \frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4}{(1+x)^6}$. Quindi moltiplicando per $x$, si trae

5.° $x - 2^5x^2 + 3^5x^3 - 4^5x^4 + 5^5x^5 - 6^5x^6 + \text{eccc.}$

$$= \frac{x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^6}. \quad (E)$$

Prosieguo a differenziare l'equazione ora ottenuta, e divido per $dx$, $1 - 2^6x + 3^6x^2 - 4^6x^3 + 5^6x^4 - \text{ecc.}$

$$= \frac{1-26x+66x^2-26x^3+x^4-26x+132x^2-78x^3+4x^4}{(1+x)^6}$$

$$-\frac{6x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^7})$$

$$= \frac{(1-52x+198x^2-104x^3+5x^4)(1+x)-6x(1-26x+66x^2-26x^3+x^4)}{(1+x)^7}$$

$= \frac{1-57x+302x^2-302x^3+57x^4-x^5}{(1+x)^7}$. Laonde moltiplicando per $x$, si trova

6.° $x-2^6x^2+3^6x^3-4^6x^4+$ ecc.

$$= \frac{x(1-57x+302x^2-302x^3+57x^4-x^5)}{(1+x)^7} \quad (F)$$

Così proseguendo sempre si arriva a ritrovare quante altre si vogliono equazioni analoghe alle precedenti. Se pertanto nelle equazioni ritrovate $(A)$, $(B)$, $(C)$, $(D)$, $(E)$, $(F)$, ecc. si sostituisce l' unità in vece di $x$, esse si trasformano nelle seguenti

I. $1-2+3-4+5-6+$ ecc. ..... $= \frac{1}{4}$

II. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+$ ecc. ..... $=0$

III. $1^3-2^3+3^3-4^3+5^3-6^3+$ ecc. ..... $= -\frac{2}{16}$

IV. $1^4-2^4+3^4-4^4+5^4-6^4+$ ecc. ..... $=0$

V. $1^5-2^5+3^5-4^5+5^5-6^5+$ ecc. ..... $= \frac{16}{64}$

VI. $1^6-2^6+3^6-4^6+5^6-6^6+$ ecc. ..... $=0$

VII. $1^7-2^7+3^7-4^7+5^7-6^7+$ ecc. ..... $= -\frac{272}{256}$

VIII $1^8-2^8+3^8-4^8+5^8-6^8+$ ecc. ..... $=0$

IX. $1^9-2^9+3^9-4^9+5^9-6^9+$ ecc. ..... $= \frac{7936}{1024}$

ecc. ecc. ecc.

Passo ora a dimostrar questo stesso in una maniera forse più soddisfacente col mezzo delle serie infinite de' seni e coseni degli angoli crescenti in progressione aritmetica, e a tal oggetto premetto i due Lemmi seguenti,

## LEMMA I.

*Essendo* x *un arco qualunque di cerchio descritto col raggio* 1, *si ha* $\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \text{ecc. } in\ inf. = -\frac{1}{2}$

### DIMOSTRAZIONE.

Pongasi $S = \cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \text{ecc.}$, e si moltiplichi per $\cos. x$, sicchè risulti $S \cos. x = \cos. x^2 + \cos. x \cos. 2x + \cos. x \cos. 3x + \cos. x \cos. 4x + \text{ecc.}$. Ma si sa dalla Trigonometria, che il prodotto de' coseni di due angoli è uguale alla metà del coseno della somma di detti angoli più la metà del coseno della lor differenza. Dunque risolvendo ciascun prodotto della predetta equazione ne' suoi due termini equivalenti, nasce $S \cos. x = \frac{1}{2}(\cos. 2x + 1) + \frac{1}{2}(\cos. 3x + \cos. x) + \frac{1}{2}(\cos. 4x + \cos. 2x) + \text{ecc.} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. x + \cos. 2x + \cos. 3x + \cos. 4x + \text{ecc.} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos. x + S$. Perlochè sarà $S(1 - \cos. x) = \frac{1}{2}\cos. x - \frac{1}{2}$, cioè $S = -\frac{1}{2}$. Il che era ecc.

## LEMMA II.

*La serie infinita* $S = \text{sen. } x + \text{sen. } 2x + \text{sen. } 3x + \text{sen. } 4x + \text{sen. } 5x + \text{ecc. } in\ inf.$ *è uguale all' espressione* $\frac{\text{sen. } x}{2(1 - \cos. x)}$.

### DIMOSTRAZIONE.

Si moltiplichi per $\cos. x$ la serie proposta, e si avrà $S \cos. x = \text{sen. } x \cos. x + \text{sen. } 2x \cos. x + \text{sen. } 3x \cos. x + \text{sen. } 4x \cos. x + \text{sen. } 5x \cos. x + \text{ecc.}$. Ora dati due angoli

$\varphi$, $\theta$,

$\phi$, $\theta$, per la teoria delle funzioni angolari si sa, essere sen. $\phi$ cos. $\theta = \frac{1}{2}$ sen. $(\phi + \theta) + \frac{1}{2}$ sen. $(\phi - \theta)$; quindi spezzando ciascun termine della predetta equazione in due, risulterà $S$ cos. $x = \frac{1}{2}$ (sen. $2x + 0$) $+ \frac{1}{2}$ (sen. $3x + \frac{1}{2}$ sen. $x$) $+ \frac{1}{2}$ (sen. $4x$ $+$ sen. $2x$) $+ \frac{1}{2}$ (sen. $5x +$ sen. $3x$) $+$ ecc. $= \frac{1}{2}$ sen. $x +$ sen. $2x$ $+$ sen. $3x +$ sen. $4x +$ sen. $5x +$ ecc. $= S - \frac{1}{2}$ sen. $x$. Laon de trasponendo sarà $S - S$ cos. $x = \frac{1}{2}$ sen. $x$, e conseguentemente $S = \frac{\text{sen. } x}{2(1 - \text{cos. } x)}$. Il che era ecc.

Ciò premesso, si dimostrano speditamente i sopraccennati Teoremi nel modo che segue.

*Dimostrazione II. delle formole Euleriane.*

*N.° I.*

Si differenzj la serie del Lemma II., e si divida per $-dx$; da ciò risulta $-$ cos. $x - 2$ cos. $2x - 3$ cos. $3x - 4$ cos. $4x$ $- 5$ cos. $5x - 6$ cos. $6x -$ ecc. *in inf* $= \frac{1}{2(1 - \text{cos. } x)}$ $= \frac{1}{4 \text{ sen. } \frac{1}{2} x^2}$ $(M)$. Sicchè prendendo per $x$ la semicirconferenza, sarà cos. $x = -1$, cos. $2x = 1$, cos. $3x = -1$, cos. $4x = 1$, cos. $5x = -1$, ecc.; e conseguentemente la serie ritrovata si converte nella *I.ª*

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

N.° II.

Si differenzj due volte la ſerie del Lemma I., e ſi divida il riſultato per $dx^2$; e ſi ricaverà $-\text{coſ.}\, x - 2^2 \text{coſ.}\, 2x - 3^2 \text{coſ.}\, 3x - 4^2 \text{coſ.}\, 4x - 5^2 \text{coſ.}\, 5x - 6^2 \text{coſ.}\, 6x - \text{ecc.} = 0$ $(N)$. Dunque prendendo per l' arco $x$ la ſemicirconferenza ne deriva l' equazione II.ª

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots = 0$$

N°. III.

Si prenda dell' equazione $(M)$ n°. I. il ſecondo differenziale, e queſto ſi divida per $-dx^2$. Ciò fatto naſcerà l'equazione

$$-\text{coſ.}\, x - 2^3 \text{coſ.}\, 2x - 3^3 \text{coſ.}\, 3x - 4^3 \text{coſ.}\, 4x - 5^3 \text{coſ.}\, 5x \ldots\ldots\ldots\ldots - \text{ecc.} = \frac{-1 - 2\,\text{coſ.}\, \frac{1}{2}x^3}{8\,\text{ſen.}\, \frac{1}{2}x^4} \; (O);$$

la quale nel ſuppoſto di $x$ eguale alla ſemicirconferenza ſi cangia nel Teorema III.

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\frac{1}{8}$$

N°. IV.

Allo ſteſſo modo, ſi pigli la ſeconda differenza dell' equazione $(N)$ n°. II; e ſi divida per $-dx^2$; il che ſomminiſtra l' equazione $-\text{coſ.}\, x - 2^4 \text{coſ.}\, 2x - 3^4 \text{coſ.}\, 3x - 4^4 \text{coſ.}\, 4x - 5^4 \text{coſ.}\, 5x - 6^4 \text{coſ.}\, 6x - \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ $(P)$, e queſta, nella ſuppoſizione di $x = 180°$, diventa la formola IV.

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

N.° V.

Differenziata due volte l' equazione $(O)$ del n.° III. e diviſa per $-dx^2$, ſi giugne al riſultato

$$-\text{coſ.}\, x - 2^5 \text{coſ.}\, 2x - 3^5 \text{coſ.}\, 3x - 4^5 \text{coſ.}\, 4x - 5^5 \text{coſ.}\, 5x$$

$$-6^5 \text{ cos. } 6x - \text{ecc.} \ldots\ldots = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}x^2 + 13 \text{ cos. } \frac{1}{2}x^2 + 2 \text{ cos. } \frac{1}{2}x^4}{8 \text{ sen. } \frac{1}{2}x^5}$$

(Q); e se in questa si assume al solito $x$ uguale alla semiperiferia, ci si presenta la formola V.

$$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{4}$$

*N.° VI*

Prendendo la differenza seconda dell' equazione ( *P* ) del *n. IV.*, e dividendola per $-dx^2$, se ne ricava l' equazione $-\text{cos. } x - 2^6 \text{ cos. } 2x - 3^6 \text{ cos. } 3x - 4^6 \text{ cos. } 4x - 5^6 \text{ cos. } 5x - 6^6 \text{ cos. } 6x - \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots = 0$ (*R*). Questa poi mediante la sostituzione della semicirconferenza in luogo di $x$ si trasforma nella formola VI.

$$1^6 - 2^6 + 3^6 - 4^6 + 5^6 - 6^6 + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

Con tal procedere restano prontamente dimostrati tutti i Teoremi Euleriani intorno alle serie delle potenze affermative intere de' numeri naturali co' segni alterni, potendo generalmente stabilirsi, che le serie delle potenze pari hanno per *quantità generatrice* lo zero, e le serie delle potenze dispari hanno per grandezza *generatrice* un numero dato.

Non mi tratterrò qui a far vedere, come con questo stesso metodo altri Teoremi analogi agli Euleriani possono dimostrarsi intorno alle serie delle potenze de' numeri dispari co' segni alterni $1^n - 3^n + 5^n - 7^n + 9^n - 11^n + \text{ecc.}$, nelle quali all' opposto di quelle de' numeri naturali generalmente si troverà *che le impari sono generate dal zero, le pari da un numero determinato*.

## ARTICOLO IV.

*Della Somma delle Serie de' seni e coseni degli angoli procedenti in progressione aritmetica, e delle loro potestà intere qualunque.*

Le elegantissime serie de' seni e coseni degli angoli crescenti in progressione aritmetica, come pure delle potestà intere

omologhe di que' ſeni e coſeni ſono ſtate con molto ſtudio eſaminate ed illuſtrate da' celebri Geometri *Eulero*, *Dan. Bernoulli*, *La Grange*, *D' Alembert*, *Boſſut*, *Lexell*, *Lorgna*, ed altri parecchi; e fra i differenti metodi meſſi in opera per determinarne la loro ſomma, ricavati in buona parte dalla teoria delle ſerie ricorrenti, ſi diſtingue ſopra tutti per la facilità e ſpeditezza quello del Sig. Ab. *Boſſut* pubblicato nelle Memorie *dell' Accad. delle Scienze di Parigi*, per l' anno 1769, il quale può a giuſto titolo chiamarſi un capo d'opera di ſemplicità e d'eleganza. Ma queſto illuſtre Geometra non conſidera la progreſſione aritmetica degli angoli ſotto la forma più generale, nè tampoco (ciò che più importa) applica il ſuo pregevoliſſimo metodo al caſo più univerſale delle potenze de' ſeni e coſeni affette d'un eſponente arbitrario, laſciando deſiderare la parte più intereſſante di queſta ricerca, cioè l' eſpoſizione generale della ſomma pel caſo mentovato: così pure ne' *Supplementi dell' Enciclopedia*, dove queſta materia viene ingegnoſamente trattata in un diſtinto articolo, dopo eſſerſi aſſegnata la ſomma per le due o tre prime poteſtà, ſi tralaſcia il punto più prezioſo e difficile, oſſia il canone per tutte le poteſtà affermative ed intere. Non è mancato per verità chi ſi è ſtudiato di ſupplire a queſta mancanza, ma oltrechè il metodo a tal uopo tenuto ſi appoggia a principj rimoti, e poco familiari, i quali eſigono una lunga eſpoſizione per eſſer ridotti alla comune portata, la forma ſteſſa della generale eſpreſſione della ſomma richieſta non ſi è preſentata ſotto un aſpetto abbaſtanza luminoſo e comodo per non aver nulla a deſiderare di più (*a*). In viſta di ciò non ſembrerà affatto inutile un ulterior tentativo: e il Lettore intelligente giudicherà, ſe io ſia riuſcito a porre tutta queſta materia ſotto un punto di veduta più eſteſo e più generale che finora non ſi è fatto, e ſe la novità de' due ultimi Problemi, e de' quattro Teoremi, che terminano queſt' Articolo, in un ſoggetto da tanti altri maneggiato e diſcuſſo poſſa meritare qualche indulgenza.

---

(*a*) Si vegga il I. Vol. della *Soc. Italiana* dalla pag. 361 alla pag. 365, ove è ſtato per la prima volta riſoluto in tutta la ſua generalità queſto Problema dal Sig. Cav. *Lorgna*.

## PROBLEMA I.

*Sommare la serie* sen. p + sen. (p + q) + sen. (p + 2q) + sen. (p + 3q) ..... + sen. (p + nq) = S

### SOLUZIONE.

E' noto, essere $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$

$$+ \frac{e^{(p+q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(p+2q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+2q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$+ \frac{e^{(p+3q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+3q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{e^{(p+nq)\sqrt{-1}} - e^{-(p+nq)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1 + e^{q\sqrt{-1}}\right.$$

$$\left. + e^{2q\sqrt{-1}} + e^{3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + e^{nq\sqrt{-1}}\right)$$

$$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(1 + e^{-q\sqrt{-1}} + e^{-2q\sqrt{-1}} + e^{-3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots + e^{-nq\sqrt{-1}}\right).$$

Ora siccome le quantità rinchiuse tra le parentesi sono evidentemente due progressioni geometriche, delle quali conseguentemente si ha la somma con moltiplicare il secondo termine per l' ultimo, sottrarre il quadrato del primo termine, e dividere il residuo pel secondo termine meno il primo; perciò sarà $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{q\sqrt{-1}} - 1}\right)$

$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{-q\sqrt{-1}} - 1}\right)$; e riducendo allo stesso denominatore nasce $S = \frac{e^{p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{nq\sqrt{-1}} - e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}\right)$

$$- \frac{e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-nq\sqrt{-1}} - e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}}\right)$$

$$= \left( \frac{e^{(p+nq)\sqrt{-1}} - e^{-(p+nq)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{e^{(p+(n+1)q)\sqrt{-1}} - e^{-(p+(n+1)q)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{(q-p)\sqrt{-1}} - e^{-(q-p)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \right) : \left( 2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} \right)$$

$$= \frac{\text{sen.}\,(p+nq) - \text{sen.}\,(p+(n+1)q) + \text{sen.}\,(q-p) + \text{sen.}\,p}{2 - 2\,\text{cos.}\,q}.$$ Ricorrendo pertanto ai noti Teoremi degli angoli

I. $\text{sen.}\,a + \text{sen.}\,b = 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

II. $\text{sen.}\,a - \text{sen.}\,b = 2\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

III. $\text{cos.}\,a + \text{cos.}\,b = 2\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

IV. $\text{cos.}\,b - \text{cos.}\,a = 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(a+b)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(a-b)$

V. $1 - \text{cos.}\,a = 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}a^2$, si otterrà facilmente

$$S = \frac{-2\,\text{cos.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q + 2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q\,\text{cos.}\,(p-\frac{1}{2}q)}{4\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q^2}$$

$$= \frac{\text{cos.}\,(p-\frac{1}{2}q) - \text{cos.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q)}{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q}$$

$$= \frac{\text{sen.}\,(p+\frac{1}{2}nq)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(1+n)q}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}q}.$$ Il che era ecc.

## PROBLEMA II.

*Sommare la serie* $\text{cos.}\,p + \text{cos.}\,(p+q) + \text{cos.}\,(p+2q) + \text{cos.}\,(p+3q) \ldots\ldots + \text{cos.}\,(p+nq) = S$.

## SOLUZIONE.

La dottrina degli angoli somministra $S = \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}}$

$$+\frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{(p+q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+q)\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{2} e^{(p+q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+2q)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{(p+2q)\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{2} e^{-(p+2q)\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2} e^{(p+nq)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+nq)\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} \left( 1 + e^{q\sqrt{-1}} \right.$$

$$\left. + e^{2q\sqrt{-1}} + e^{3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots + e^{nq\sqrt{-1}} \right) + \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}}$$

$$\left( 1 + e^{-q\sqrt{-1}} + e^{-2q\sqrt{-1}} + e^{-3q\sqrt{-1}} \ldots\ldots\ldots + e^{-nq\sqrt{-1}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{q\sqrt{-1}} - 1} \right)$$

$+\frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - 1}{e^{-q\sqrt{-1}} - 1} \right)$. Fatta pertanto la riduzione allo stesso denominatore si ottiene speditamente

$$S = \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{nq\sqrt{-1}} - e^{(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} \left( \frac{e^{-nq\sqrt{-1}} - e^{-(n+1)q\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}} + 1}{2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}}} \right)$$

$$= \left( \frac{1}{2} e^{(p+nq)\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-(p+nq)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{(p+(n+1)q)\sqrt{-1}} \right.$$

$$- \frac{1}{2} e^{-(p+(n+1)q)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{(p-q)\sqrt{-1}} - \frac{1}{2} e^{-(p-q)\sqrt{-1}}$$

$$\left. + \frac{1}{2} e^{p\sqrt{-1}} + \frac{1}{2} e^{-p\sqrt{-1}} \right) : \left( 2 - e^{q\sqrt{-1}} - e^{-q\sqrt{-1}} \right)$$

$$= \frac{\text{cos.}\,(p+nq) - \text{cos.}\,(p+(n+1)q) - \text{cos.}\,(p-q) + \text{cos.}\,p}{2 - 2\,\text{cos.}\,q}$$

$$= \frac{\text{sen.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q - \text{sen.}\,(p-\frac{1}{2}q)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q}{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q^2}$$

$$= \frac{\text{sen.}\,(p+(n+\frac{1}{2})q) - \text{sen.}\,(p-\frac{1}{2}q)}{2\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}q}$$

$$= \frac{\text{cos.}\,(p+\frac{1}{2}nq)\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(1+n)q}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}q}.$$ Il che era ecc.

COROLL. La somma della serie $\text{sen.}\,p + \text{sen.}\,(p+q) + \text{sen.}\,(p+2q) \ldots\ldots + \text{sen.}\,(p+nq)$ sta alla somma della serie $\text{cos.}\,p + \text{cos.}\,(p+q) + \text{cos.}\,(p+2q) \ldots\ldots + \text{cos.}\,(p+nq)$, come sta $\text{sen.}\,(p+\frac{1}{2}nq)$ a $\text{cos.}\,(p+\frac{1}{2}nq)$, cioè come $\text{tang.}\,(p+\frac{1}{2}nq)$ all' unità. Da ciò apparisce, che la somma de' seni degli angoli crescenti in proporzione aritmetica, e continuati per quanti termini si vuole, può esser uguale in infiniti casi alla somma de' coseni corrispondenti, cioè tutte le volte che $p+\frac{1}{2}nq = 45°$, il che può verificarsi in infinite maniere. Anzi quelle due somme saranno parimenti uguali, allorchè, essendo $\pi$ la semicirconferenza del cerchio col raggio 1, l' arco $p+\frac{1}{2}nq$ avrà uno de' seguenti valori

$$\frac{\pi}{4}, +\frac{5\pi}{4}, +\frac{9\pi}{4}, +\frac{13\pi}{4}, \text{ ecc. in inf.}$$
$$-\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{11\pi}{4}, -\frac{15\pi}{4}, \text{ ecc. in inf.}$$

## PROBLEMA III.

*Sommare la serie* $S = \text{sen.}\,p^2 + \text{sen.}\,(p+q)^2 + \text{sen.}\,(p+2q)^2 + \text{sen.}\,(p+3q)^2 \ldots\ldots\ldots + \text{sen.}\,(p+nq)^2$.

SOLUZIONE.

## SOLUZIONE.

Pongasi $e^{p\sqrt{-1}}=a$, $e^{q\sqrt{-1}}=b$; i Teoremi noti degli angoli danno sen. $p^2=\left(\frac{a-a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2=\frac{a^2}{-4}+\frac{a^{-2}}{-4}+\frac{1}{2}$

$$\text{sen. }(p+q)^2=\left(\frac{ab-a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^2=\frac{a^2b^2}{-4}+\frac{a^{-2}b^{-2}}{-4}+\frac{1}{2}$$

$$\text{sen. }(p+2q)^2=\left(\frac{ab^2-a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^2=\frac{a^2b^4}{-4}+\frac{a^{-2}b^{-4}}{-4}+\frac{1}{2}$$

$$\text{sen. }(p+3q)^2=\left(\frac{ab^3-a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^2=\frac{a^2b^6}{-4}+\frac{a^{-2}b^{-6}}{-4}+\frac{1}{2}$$

. . . . . .

$$\text{sen. }(p+nq)^2=\left(\frac{ab^n-a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^2=\frac{a^2b^{2n}}{-4}+\frac{a^{-2}b^{-2n}}{-4}+\frac{1}{2}.$$

Dunque $S=-\frac{1}{4}a^2(1+b^2+b^4+b^6\ldots\ldots+b^{2n})$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}(1+b^{-2}+b^{-4}+b^{-6}\ldots\ldots+b^{-2n})+\frac{1+n}{2},$$

cioè $S=-\frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n+2}-1}{b^2-1}\right)-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n-2}-1}{b^{-2}-1}\right)+\frac{1+n}{2}$.

Perlochè ridotti li due termini binomiali allo stesso denominatore, si avrà $S=\frac{1+n}{2}-\frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n}-b^{2n+2}-b^{-2}+1}{2-b^2-b^{-2}}\right)$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n}-b^{-2n-2}-b^2+1}{2-b^2-b^{-2}}\right)$$

$$=\frac{1+n}{2}+\frac{\frac{1}{2}\text{cos. }2(p+(n+1)q)+\frac{1}{2}\text{cos. }2(p-q)-\frac{1}{2}\text{cos. }2(p+nq)-\frac{1}{2}\text{cos. }2p}{2-2\text{ cos. }2q}.$$

Il che era ecc.

## PROBLEMA IV.

*Sommare la serie* $S=\text{cos. }p^2+\text{cos. }(p+q)^2+\text{cos. }(p+2q)^2+\text{cos. }(p+3q)^2\ldots\ldots\ldots+\text{cos. }(p+nq)^2$.

## SOLUZIONE

Ritenute le precedenti ſoſtituzioni, ſi ſa eſſere

$$\text{coſ.}\, p^2 = \left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^{-2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\,(p+q)^2 = \left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\,(p+2q)^2 = \left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^4}{4} + \frac{a^{-2}b^{-4}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\text{coſ.}\,(p+3q)^2 = \left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^6}{4} + \frac{a^{-2}b^{-6}}{4} + \frac{1}{2}$$

. . . . . .

$$\text{coſ.}\,(p+nq)^2 = \left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^2 = \frac{a^2b^{2n}}{4} + \frac{a^{-2}b^{-2n}}{4} + \frac{1}{2}.$$ Laonde ſcrivendo ordinatamente i termini ſi otterrà $S = \frac{n+1}{2}$

$$+ \frac{1}{4}a^2(1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$+ \frac{1}{4}a^{-2}(1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2+2n}-1}{b^2-1}\right) + \frac{1}{2}a^{-2}\left(\frac{b^{-2-2n}-1}{b^{-2}-1}\right)$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{4}a^2(b^{2n}-b^{2+2n}-b^{-2}+1) + \frac{1}{4}a^{-2}(b^{-2n}-b^{-2-2n}-b^2+1)}{2-b^2-b^{-2}}$$

$$= \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{1}{2}\text{coſ.}\,2(p+nq) + \frac{1}{2}\text{coſ.}\,2p - \frac{1}{2}\text{coſ.}\,2(p+(n+1)q) - \frac{1}{2}\text{coſ.}\,2(p-q)}{2-2\,\text{coſ.}\,2q}.$$

Il che era ecc.

COROLL. Se la ſomma trovata ſi aggiugne a quella del Problema III. ſi ha il riſultato $= n+1$, come appunto eſſer dee, poichè il quadrato di ciaſcun ſeno aggiunto al quadrato del coſeno corriſpondente forma il quadrato del raggio, cioè l' unità.

## PROBLEMA V.

*Sommare la serie* $S = \text{sen.}\, p^3 + \text{sen.}\,(p+q)^3 + \text{sen.}\,(p+2q)^3 + \text{sen.}\,(p+3q)^3 \ldots\ldots\ldots + \text{sen.}\,(p+nq)^3$.

### SOLUZIONE.

$$\text{sen.}\, p^3 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right) = \frac{a^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3a}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{sen.}\,(p+q)^3 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^3}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-1}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{sen.}\,(p+2q)^3 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^6}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^2}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-2}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-6}}{-8\sqrt{-1}}$$

$$\text{sen.}\,(p+3q)^3 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^9}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^3}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-3}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-9}}{-8\sqrt{-1}}$$

. . . . . .

$$\text{sen.}\,(p+nq)^3 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^3 = \frac{a^3b^{3n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{3ab^n}{-8\sqrt{-1}} + \frac{3a^{-1}b^{-n}}{-8\sqrt{-1}} - \frac{a^{-3}b^{-3n}}{-8\sqrt{-1}}.$$

Quindi risulta $S = -\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}(1 + b^3 + b^6 + b^9 \ldots\ldots + b^{3n})$

$+ \frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}(1 + b^{-3} + b^{-6} + b^{-9} \ldots\ldots\ldots + b^{-3n})$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots\ldots+b^n)$$

$$-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{-n})=$$

$$-\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{3+3n}-1}{b^3-1}\right)+\frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-3-3n}-1}{b^{-3}-1}\right)$$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\right).$$ Riducendo ora allo ſteſſo denominatore li due primi termini, e così pure i due altri ſeparatamente, ricaveremo $S=$

$$-\frac{a^3}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{3n}-b^{3n+3}-b^{-3}+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)+\frac{a^{-3}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-3n}-b^{-3n-3}-b^3+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)$$

$$+\frac{3a}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^n-b^{n+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)-\frac{3a^{-1}}{8\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-n}-b^{-n-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\text{ sen. }3(p+(n+1)q)+\frac{1}{4}\text{ sen. }3(p-q)-\frac{1}{4}\text{ sen. }3(p+nq)-\frac{1}{4}\text{ sen. }3p}{2-2\text{ cos. }3q}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\text{ sen. }(p+nq)+\frac{3}{4}\text{ sen. }p-\frac{3}{4}\text{ sen. }(p+(n+1)q)-\frac{3}{4}\text{ sen. }(p-q)}{2-2\text{ cos. }q}.$$

Il che era ecc.

## PROBLEMA VI.

*Sommare la ſerie* $S=\text{cos. }p^3+\text{cos. }(p+q)^3+\text{cos. }(p+2q)^3+\text{cos. }(p+3q)^3\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{cos. }(p+nq)^3$.

### SOLUZIONE.

$$\text{cos. }p^3=\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^3=\frac{a^3}{8}+\frac{3a}{8}+\frac{3a^{-1}}{8}+\frac{a^{-3}}{8}$$

$$\text{cos. }(p+q)^3=\left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^3}{8}+\frac{3ab}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-1}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-3}}{8}$$

$$\text{cos. }(p+2q)^3=\left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^6}{8}+\frac{3ab^2}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-2}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-6}}{8}$$

$$\text{cos.}\,(p+3q)^3=\left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^9}{8}+\frac{3ab^3}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-3}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-9}}{8}$$

. . . . . .

$$\text{cos.}\,(p+nq)^3=\left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^3=\frac{a^3b^{3n}}{8}+\frac{3ab^n}{8}+\frac{3a^{-1}b^{-n}}{8}+\frac{a^{-3}b^{-3n}}{8}.$$

Sarà perciò $S=\frac{1}{8}a^3\left(1+b^3+b^6+b^9\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{3n}\right)$

$$+\frac{1}{8}a^{-3}\left(1+b^{-3}+b^{-6}+b^{-9}\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{-3n}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots+b^n\right)$$

$$+\frac{3a^{-1}}{8}\left(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots\ldots+b^{-n}\right)$$

$$=\frac{1}{8}a^3\left(\frac{b^{3n+3}-1}{b^3-1}\right)+\frac{1}{8}a^{-3}\left(\frac{b^{-3n-3}-1}{b^{-3}-1}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(\frac{b^{n+1}-1}{b-1}\right)+\frac{3a^{-1}}{8}\left(\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}a^3\left(\frac{b^{3n}-b^{3n+3}-b^{-3}+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)+\frac{1}{8}a^{-3}\left(\frac{b^{-3n}-b^{-3n-3}-b^3+1}{2-b^3-b^{-3}}\right)$$

$$+\frac{3a}{8}\left(\frac{b^n-b^{n+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)+\frac{3a^{-1}}{8}\left(\frac{b^{-n}-b^{-n-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\text{cos.}\,3(p+nq)+\frac{1}{4}\text{cos.}\,3p-\frac{1}{4}\text{cos.}\,3\left(p+(n+1)q\right)-\frac{1}{4}\text{cos.}\,3(p-q)}{2-2\,\text{cos.}\,3q}$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\text{cos.}\,(p+nq)+\frac{3}{4}\text{cos.}\,p-\frac{3}{4}\text{cos.}\,\left(p+(n+1)q\right)-\frac{3}{4}\text{cos.}\,(p-q)}{2-2\,\text{cos.}\,q}.$$

Il che era ecc.

## PROBLEMA VII.

*Sommare la serie* $S=\text{sen.}\,p^4+\text{sen.}\,(p+q)^4+\text{sen.}\,(p+2q)^4$ $+\text{sen.}\,(p+3q)^4\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{sen.}\,(p+nq)^4$.

## SOLUZIONE.

$$\text{sen. } p^4 = \left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4}{16} - \frac{4a^2}{16} - \frac{4a^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{sen. } (p+q)^4 = \left(\frac{ab - a^{-1}b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^4}{16} - \frac{4a^2b^2}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{sen. } (p+nq)^4 = \left(\frac{ab^2 - a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^8}{16} - \frac{4a^2b^4}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-4}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-8}}{16} + \frac{6}{16}$$

$$\text{sen. } (p+3q)^4 = \left(\frac{ab^3 - a^{-1}b^{-3}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^{12}}{16} - \frac{4a^2b^6}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-6}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-12}}{16} + \frac{6}{16}$$

. . . . . .

$$\text{sen. } (p+nq)^4 = \left(\frac{ab^n - a^{-1}b^{-n}}{2\sqrt{-1}}\right)^4 = \frac{a^4b^{4n}}{16} - \frac{4a^2b^{2n}}{16} - \frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16} + \frac{a^{-4}b^{-4n}}{16} + \frac{6}{16}.$$

Sarà dunque $S = \frac{1}{16}a^4(1 + b^4 + b^8 + b^{12} \ldots\ldots\ldots + b^{4n})$

$$+ \frac{1}{16}a^{-4}(1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-4n})$$

$$- \frac{1}{4}a^2(1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$- \frac{1}{4}a^{-2}(1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$+ \frac{6(1+n)}{16} = \frac{1}{16}a^4\left(\frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1}\right) + \frac{1}{16}a^{-4}\left(\frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1}\right)$$

$$- \frac{1}{4}a^2\left(\frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}\right) - \frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1}\right) + \frac{6(n+1)}{16}$$

$$= \frac{1}{16}a^4\left(\frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}}\right)$$

$$+\frac{1}{16}a^{-4}\left(\frac{b^{-4n}-b^{-4n-4}-b^{4}+1}{2-b^{4}-b^{-4}}\right)-\frac{1}{4}a^{2}\left(\frac{b^{2n}-b^{2n+2}-b^{-2}+1}{2-b^{2}-b^{-2}}\right)$$

$$-\frac{1}{4}a^{-2}\left(\frac{b^{-2n}-b^{-2n-2}-b^{2}+1}{2-b^{2}-b^{-2}}\right)+\frac{3(n+1)}{8}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\text{cos. }4(p+nq)+\frac{1}{2}\text{cos. }4p-\frac{1}{2}\text{cos. }4\big(p+(n-1)q\big)-\frac{1}{2}\text{cos. }4(p-q)}{2-2\text{cos. }4q}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\text{cos. }2(p+(n+1)q)+\frac{1}{2}\text{cos. }2(p-q)-\frac{1}{2}\text{cos. }2(p+nq)-\frac{1}{2}\text{cos. }2p}{2-2\text{cos. }2q}$$

$+\frac{3(n+1)}{8}$. Il che era ecc.

## PROBLEMA VIII.

*Sommare la serie* $S=\text{cos. }p^4+\text{cos. }(p+q)^4+\text{cos. }(p+2q)^4+\text{cos. }(p+3q)^4\ldots\ldots\ldots+\text{cos. }(p+nq)^4$

### SOLUZIONE.

Procedendo sempre come dianzi, si ha

$$\text{cos. }p^4=\left(\frac{a+a^{-1}}{2}\right)^4=\frac{a^4}{16}+\frac{4a^2}{16}+\frac{4a^{-2}}{16}+\frac{a^{-4}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\text{cos. }(p+q)^4=\left(\frac{ab+a^{-1}b^{-1}}{2}\right)^4=\frac{a^4b^4}{16}+\frac{4a^2b^2}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-2}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-4}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\text{cos. }(p+2q)^4=\left(\frac{ab^2+a^{-1}b^{-2}}{2}\right)^4=\frac{a^4b^8}{16}+\frac{4a^2b^4}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-4}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-8}}{16}+\frac{6}{16}$$

$$\text{cos. }(p+3q)^4=\left(\frac{ab^3+a^{-1}b^{-3}}{2}\right)^4=\frac{a^4b^{12}}{16}+\frac{4a^2b^6}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-6}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-12}}{16}+\frac{6}{16}$$

. . . . . .

$$\text{cos. }(p+nq)^4=\left(\frac{ab^n+a^{-1}b^{-n}}{2}\right)^4=\frac{a^4b^{4n}}{16}+\frac{4a^2b^{2n}}{16}+\frac{4a^{-2}b^{-2n}}{16}+\frac{a^{-4}b^{-4n}}{16}+\frac{6}{16}.$$

Perlochè raccolti i termini a dovere, se ne ricava

$$S = \frac{6}{16} a^4 (1 + b^4 + b^8 + b^{12} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{4n})$$

$$+ \frac{1}{16} a^{-4} (1 + b^{-4} + b^{-8} + b^{-12} \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{-4n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 (1 + b^2 + b^4 + b^6 \ldots\ldots\ldots\ldots + b^{2n})$$

$$+ \frac{1}{4} a^{-2} (1 + b^{-2} + b^{-4} + b^{-6} \ldots\ldots\ldots + b^{-2n})$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8} = \frac{1}{16} a^4 \left( \frac{b^{4n+4} - 1}{b^4 - 1} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left( \frac{b^{-4n-4} - 1}{b^{-4} - 1} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left( \frac{b^{-2n-2} - 1}{b^{-2} - 1} \right) + \frac{3(n+1)}{8}.$$

Dunque riducendo al comune denominatore i due primi termini, non meno che i due susseguenti, risulterà

$$S = \frac{1}{16} a^4 \left( \frac{b^{4n} - b^{4n+4} - b^{-4} + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right) + \frac{1}{16} a^{-4} \left( \frac{b^{-4n} - b^{-4n-4} - b^4 + 1}{2 - b^4 - b^{-4}} \right)$$

$$+ \frac{1}{4} a^2 \left( \frac{b^{2n} - b^{2n+2} - b^{-2} + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right) + \frac{1}{4} a^{-2} \left( \frac{b^{-2n} - b^{-2n-2} - b^2 + 1}{2 - b^2 - b^{-2}} \right)$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \text{cos. } 4(p + nq) + \frac{1}{2} \text{cos. } 4p - \frac{1}{2} \text{cos. } 4(p + (n+1)q) - \frac{1}{2} \text{cos. } 4(p - q)}{2 - 2 \text{ cos. } 4q}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} \text{cos. } 2(p + nq) + \frac{1}{2} \text{cos. } 2p - \frac{1}{2} \text{cos. } 2(p + (n+1)q) - \frac{1}{2} \text{cos. } 2(p - q)}{2 - 2 \text{ cos. } 2q}$$

$$+ \frac{3(n+1)}{8}.$$ Il che era ecc.

## PROBLEMA IX.

*Sommare la serie* $S = \text{sen. } p^m + \text{sen. } (p+q)^m + \text{sen. } (p+2q)^m + \text{sen. } (p+3q)^m \ldots\ldots + \text{sen. } (p+rq)^m$; *posto l' esponente* m *eguale ad un numero qualunque intero affermativo*.

SOLUZIONE.

## SOLUZIONE.

### *Caso I. di* m *dispari.*

E' noto dalla Trigonometria Analitica, e dalla teoria delle funzioni circolari, essere

1.° $\text{sen.}\, p^m = \pm \frac{\text{sen.}\, mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m\,\text{sen.}\,(m-2)p}{2^{m-1}} \pm \frac{m.m-1.\,\text{sen.}\,(m-4)p}{2^{m-1}.\,1.2}$

$\mp \frac{m.m-1.m-2.\,\text{sen.}\,(m-6)p}{2^{m-1}.\,1.2.3} \ldots\ldots + \frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\,\text{sen.}\,p}{2^{m-1}.\,1.2.3\ldots\ldots}$

$= \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m - a^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right) \mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} - a^{2-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4} - a^{4-m}}{2\sqrt{-1}}\right) \mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} - a^{6-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{a - a^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right)$; in questa formola, come nelle susseguenti, vagliono i segni superiori nell' ipotesi di $m = 4\lambda + 1$, e gl' inferiori nel supposto di $m = 4\lambda - 1$, essendo $\lambda$ un numero intero qualunque.

2.° $\text{sen.}\,(p+q)^m = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^m - a^{-m} b^{-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} b^{m-2} - a^{2-m} b^{2-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4} b^{m-4} - a^{4-m} b^{4-m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6} b^{m-6} - a^{6-m} b^{6-m}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab - a^{-1} b^{-1}}{2\sqrt{-1}}\right).$

3.° $\text{sen.}\,(p+2q)^m = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^{2m} - a^{-m} b^{-2m}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2} b^{2(m-2)} - a^{2-m} b^{2(2-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{2(m-4)}-a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{2(m-6)}-a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab^2-a^{-1}b^{-2}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

4.° $\text{sen.}(p+rq)^m = \pm \frac{1}{2^{m-1}}\left(\frac{a^m b^{rm}-a^{-m}b^{-rm}}{2\sqrt{-1}}\right)$

$$\mp \frac{m}{2^{m-1}}\left(\frac{a^{m-2}b^{r(m-2)}-a^{2-m}b^{r(2-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^{m-1}.1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{r(m-4)}-a^{4-m}b^{r(4-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^{m-1}.1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{r(m-6)}-a^{6-m}b^{r(6-m)}}{2\sqrt{-1}}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{ab^r-a^{-1}b^{-r}}{2\sqrt{-1}}\right).$$ Dunque raccogliendo i termini corrispondenti si ha

$$S = \pm \frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}(1+b^m+b^{2m}+b^{3m}\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{rm})$$

$$\mp \frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}(1+b^{-m}+b^{-2m}+b^{-3m}\ldots\ldots\ldots+b^{-rm})$$

$$\mp \frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}(1+b^{m-2}+b^{2(m-2)}+b^{3(m-2)}\ldots\ldots\ldots+b^{r(m-2)})$$

$$\pm \frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}(1+b^{2-m}+b^{2(2-m)}+b^{3(2-m)}\ldots\ldots\ldots+b^{r(2-m)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}(1+b^{m-4}+b^{2(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots\ldots+b^{r(m-4)})$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots+b^{r(4-\ )})$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots\ldots+b^{r(m-6)})$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots\ldots+b^{r(6-m)})$$

. . . . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots}(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots+b^r)$$

$$-\frac{m.m-1.m-2\ldots a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots}(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots+b^{-r}).$$

Dunque $S=\pm\frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{m(r+1)}-1}{b^m-1}\right)$

$$\mp\frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-m(r+1)}-1}{b^{-m}-1}\right)\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{(m-2)(r+1)}-1}{b^{m-2}-1}\right)$$

$$\pm\frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-(m-2)(r+1)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{(4-m)(r+1)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{(6-m)(r+1)}-1}{b^{6-m}-1}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^{r+1}-1}{b-1}\right)$$

$$-\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^m\sqrt{-1}.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^{-r-1}-1}{b^{-1}-1}\right).$$ Riducendo ora ciascuna coppia di termini separatamente al comune denominatore si conseguisce

$$S=\pm\frac{a^m}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{rm}-b^{rm+m}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$\mp\frac{a^{-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-rm}-b^{-rm-m}-b^m+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$\pm\frac{ma^{2-m}}{2^m\sqrt{-1}}\left(\frac{b^{-r(m-2)}-b^{-(r+1)(m-2)}-b^{m-2}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m \sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)}-b^{(r+1)(m-4)}-b^{4-m}+1}{2-b^{m-4}-b^{4}-b^{4-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m \sqrt{-1}.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)}-b^{-(r+1)(m-4)}-b^{m-4}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m \sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)}-b^{(r+1)(m-6)}-b^{6-m}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m \sqrt{-1}.1.2.3}\left(\frac{b^{-r(m-6)}-b^{-(r+1)(m-6)}-b^{m-6}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

. . . . . .

$$+ \frac{m.m-1.m-2.....a}{2^m \sqrt{-1}.1.2.3.....}\left(\frac{b^{r}-b^{r+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$- \frac{m.m-1.m-2.....a^{-1}}{2^m \sqrt{-1}.1.2.3.....}\left(\frac{b^{-r}-b^{-r-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$= \pm \frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{sen. } m(p+rq)-\text{sen. } m(p+(r+1)q)-\text{sen. } m(p-q)+\text{sen. } mp}{1-\text{cos. } mq}\right)$$

$$\mp \frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{sen. } (m-2)(p+rq)-\text{sen. } (m-2)(p+(r+1)q)-\text{sen. } (m-2)(p-q)+\text{sen. } (m-2)p}{1-\text{cos. } (m-2)q}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{sen. } (m-4)(p+rq)-\text{sen. } (m-4)(p+(r+1)q)-\text{sen. } (m-4)(p-q)+\text{sen. } (m-4)p}{1-\text{cos. } (m-4)q}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}\left(\frac{\text{sen. } (m-6)(p+rq)-\text{sen. } (m-6)(p+(r+1)q)-\text{sen. } (m-6)(p-q)+\text{sen. } (m-6)p}{1-\text{cos. } (m-6)q}\right)$$

. . . . . .

$$+ \frac{m.m-1.m-2.....}{2^m.1.2.3.....}\left(\frac{\text{sen. } (p+rq)-\text{sen. } (p+(r+1)q)-\text{sen. } (p-q)+\text{sen. } p}{1-\text{cos. } q}\right);$$

qui vale la regola data da principio in ordine ai segni. Il che era ecc.

*Caso II. di* m *pari*.

La dottrina delle Funzioni circolari ci dà l'equazioni seguenti

I.° $\text{sen. } p^m = \pm \frac{\text{cos. } mp}{2^{m-1}} \mp \frac{m \text{ cos. } (m-2)p}{2^{m-1}}$

$$\pm \frac{m.m-1. \text{ cos. } (m-4)p}{2^{m-1}.1.2} \mp \frac{m.m-1.m-2\text{cos. } (m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3} .....$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right)\text{cos.}(m-m)p=\pm\left(\frac{a^m+a^{-m}}{2^m}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}+a^{2-m}}{2^m}\right)\pm m.m-1\left(\frac{a^{m-4}+a^{4-m}}{2^m.1.2}\right)$$

$$\mp m.m-1.m-2.\left(\frac{a^{m-6}+a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right);$$ in questa formola, come nelle susseguenti, si adoprano i segni superiori quando $m=4\lambda$, e gl' inferiori allorchè $m=4\lambda-2$, preso per $\lambda$ qualsivoglia numero intero affermativo.

2.° $$\text{sen.}(p+q)^m=\pm\frac{\text{cos.}\,m(p+q)}{2^{m-1}}\mp\frac{m\,\text{cos.}(m-2)(p+q)}{2^{m-1}}$$

$$\pm\frac{m.m-1.\text{cos.}(m-4)(p+q)}{2^{m-1}.1.2}\mp\frac{m.m-1.m-2.\text{cos.}(m-6)(p+q)}{2^{m-1}.1.2.3}$$

. . . . . .

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\right)=\pm\left(\frac{a^m b^m+a^{-m}b^{-m}}{2^m}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{m-2}+a^{2-m}b^{2-m}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{m-4}+a^{4-m}b^{4-m}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{m-6}+a^{6-m}b^{6-m}}{2^m}\right)\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots\ldots}\right).$$

3.° $$\text{sen.}(p+2q)^m=\pm\left(\frac{a^m b^{2m}+a^{-m}b^{-2m}}{2^m}\right)$$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{2(m-2)}+a^{2-m}b^{2(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{2(m-4)}+a^{4-m}b^{2(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{2(m-6)}+a^{6-m}b^{2(6-m)}}{2^m}\right)\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots}\right).$$

4.° sen. $(p+3q)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{3m}+a^{-m}b^{-3m}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{3(m-2)}+a^{2-m}b^{3(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{3(m-4)}+a^{4-m}b^{3(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{3(m-6)}+a^{6-m}b^{3(6-m)}}{2^m}\right)\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots}\right).$$

5.° sen. $(p+rq)^m = \pm\left(\frac{a^m b^{rm}+a^{-m}b^{-rm}}{2^m}\right)$

$$\mp m\left(\frac{a^{m-2}b^{r(m-2)}+a^{2-m}b^{r(2-m)}}{2^m}\right)$$

$$\pm\frac{m.m-1}{1.2}\left(\frac{a^{m-4}b^{r(m-4)}+a^{4-m}b^{r(4-m)}}{2^m}\right)$$

$$\mp\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\left(\frac{a^{m-6}b^{r(m-6)}+a^{6-m}b^{r(6-m)}}{2^m}\right)\ldots\ldots$$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots}\right)$. Dunque distribuendo, come conviene, i termini delle precedenti equazioni, si giugne alla somma

$$S=\pm\frac{a^m}{2^m}\left(1+b^m+b^{2m}+b^{3m}\ldots\ldots\ldots\ldots+b^{rm}\right)$$

$$\pm\frac{a^{-m}}{2^m}\left(1+b^{-m}+b^{-2m}+b^{-3m}\ldots\ldots\ldots+b^{-rm}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(1+b^{m-2}+b^{2(m-2)}+b^{3(m-2)}\ldots\ldots+b^{r(m-2)}\right)$$

$$\mp\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(1+b^{2-m}+b^{2(2-m)}+b^{3(2-m)}\ldots\ldots+b^{r(2-m)}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(1+b^{m-4}+b^{2(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots\ldots+b^{r(m-4)}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots\ldots+b^{r(4-m)}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots\ldots+b^{r(m-6)}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots\ldots+b^{r(6-m)}\right)$$

. . . . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\right)=$$

$$\pm \frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{m(r+1)}-1}{b^m-1}\right)\pm \frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-m(r+1)}-1}{b^{-m}-1}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(m-2)}-1}{b^{m-2}-1}\right)\mp \frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(2-m)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(4-m)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(6-m)}-1}{b^{6-m}-1}\right)$$

. . . . . .

$+\frac{(1+r)}{2}\left(\frac{m.m-1.m-1.m-3\ldots\ldots\ldots}{2^{m-1}.1.2.3.4\ldots\ldots}\right)$. Perlochè riducendo questi termini di due in due allo stesso denominatore, si trova risultarne

$$S=\pm \frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^m-b^{m(r+1)}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$\pm \frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-rm}-b^{-m(r+1)}-b^m+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$\mp \frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-r(m-2)} - b^{(r+1)(2-m)} - b^{m-2} + 1}{2 - b^{m-2} - b^{2-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)} - b^{(r+1)(m-4)} - b^{4-m} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)} - b^{(r+1)(4-m)} - b^{m-4} + 1}{2 - b^{m-4} - b^{4-m}}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)} - b^{(r+1)(m-6)} - b^{6-m} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{-r(m-6)} - b^{(r+1)(6-m)} - b^{m-6} + 1}{2 - b^{m-6} - b^{6-m}}\right)$$

. . . . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3....}{2^{m-1}.1.2.3.4....}\right) =$$

$$\pm \frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{cos.}\, m(p+rq) - \text{cos.}\, m(p+(r+1)q) - \text{cos.}\, m(p-q) + \text{cos.}\, mp}{1 - \text{cos.}\, mq}\right)$$

$$\mp \frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{cos.}\,(m-2)(p+rq) - \text{cos.}\,(m-2)(p+(r+1)q) - \text{cos.}\,(m-2)(p-q) + \text{cos.}\,(m-2)p}{1 - \text{cos.}\,(m-2)q}\right)$$

$$\pm \frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{cos.}\,(m-4)(p+rq) - \text{cos.}\,(m-4)(p+(r+1)q) - \text{cos.}\,(m-4)(p-q) + \text{cos.}\,(m-4)p}{1 - \text{cos.}\,(m-4)q}\right)$$

$$\mp \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3.}\left(\frac{\text{cos.}\,(m-6)(p+rq) - \text{cos.}\,(m-6)(p+(r+1)q) - \text{cos.}\,(m-6)(p-q) + \text{cos.}\,(m-6)p}{1 - \text{cos.}\,(m-6)q}\right)$$

. . . . . .

$$+\left(\frac{1+r}{2}\right)\left(\frac{m.m-1.m-2.m-3.....}{2^{m-1}.1.2.3.4.....}\right).$$ Il che era ecc.

## PROBLEMA X.

*Sommare la serie* $S = \text{cos.}\, p^m + \text{cos.}\,(p+q)^m + \text{cos.}\,(p+2q)^m + \text{cos.}\,(p+3q)^m \ldots\ldots + \text{cos.}\,(p+rq)^m$.

SOLUZIONE.

## SOLUZIONE.

*Caso I. di* m *dispari*

Dall' Analisi Trigonometrica ci viene somministrato,

I.° $\cos. p^m = \frac{\cos. mp}{2^{m-1}} + \frac{m \cos. (m-2)p}{2^{m-1}} + \frac{m.m-1. \cos. (m-4)p}{2^{m-1}\, 1.2.}$

$+ \frac{m.m-1.m-2.\cos. (m-6)p}{2^{m-1}.1.2.3} \ldots\ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3 \ldots\ldots \cos. p}{2^{m-1}.1.2.3.\ldots\ldots}$

$= \frac{a^m + a^{-m}}{2^m} + m\left(\frac{a^{m-2} + a^{2-m}}{2^m}\right) + \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4} + a^{4-m})$

$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6} + a^{6-m}) \ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots}{2^m.1.2.3\ldots\ldots}(a + a^{-1}).$

2.° $\cos. (p+q)^m = \frac{a^m b^m + a^{-m} b^{-m}}{2}$

$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2} b^{m-2} + a^{2-m} b^{2-m})$

$+ \frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4} b^{m-4} + a^{4-m} b^{4-m})$

$+ \frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6} b^{m-6} + a^{6-m} b^{6-m}) \ldots\ldots$

$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3 \ldots\ldots}{2^m.2.3.4.\ldots\ldots\ldots\ldots}(ab + a^{-1} b^{-1}).$

3.° $\cos. (p+2q)^m = \frac{a^m b^{2m} + a^{-m} b^{-2m}}{2^m}$

$+ \frac{m}{2^m}(a^{m-2} b^{2(m-2)} + a^{2-m} b^{2(2-m)})$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4}b^{2(m-4)}+a^{4-m}b^{2(4-m)})$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6}b^{2(m-6)}+a^{6-m}b^{2(6-m)})\ldots.$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots.}{2^m.1.2.3\ldots.}(ab^2+a^{-1}b^{-2})$$

4.° $\text{cos.}(p+3q)^m=\dfrac{a^m b^{3m}+a^{-m}b^{-3m}}{2^m}$

$$+\frac{m}{2^m}(a^{m-2}b^{3(m-2)}+a^{2-m}b^{3(2-m)})$$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4}b^{3(m-4)}+a^{4-m}b^{3(4-m)})$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6}b^{3(m-6)}+a^{6-m}b^{3(6-m)})\ldots.$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^m.1.2.3\ldots}(ab^3+a^{-1}b^{-3}).$$

5°. $\text{cos.}(p+rq)^m=\dfrac{a^m b^{rm}+a^{-m}b^{-rm}}{2^m}$

$$+\frac{m}{2^m}(a^{m-2}b^{r(m-2)}+a^{2-m}b^{r(2-m)})$$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}(a^{m-4}b^{r(m-4)}+a^{4-m}b^{r(4-m)})$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.2.3}(a^{m-6}b^{r(m-6)}+a^{6-m}b^{r(6-m)})\ldots$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3\ldots}{2^m.1.2.3.4\ldots}(ab^r+a^{-1}b^{-r}).$$ Sicchè ordinando per serie distinte i termini corrispondenti, nasce

$$S=\frac{a^m}{2^m}\quad(1+b^m+b^{2m}+b^{3m}\ldots\ldots+b^{rm})$$

$$+\frac{a^{-m}}{2^m}\quad(1+b^{-m}+b^{-2m}+b^{-3m}\ldots.+b^{-rm})$$

$$+\frac{ma^{m-2}}{2^m}(1+b^{m-2}+b^{3(m-2)}+b^{3(m-2)}\ldots.+b^{r(m-2)})$$

$$+\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(1+b^{2-m}+b^{3(2-m)}+b^{3(2-m)}\ldots\ldots+b^{r(2-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(1+b^{m-4}+b^{3(m-4)}+b^{3(m-4)}\ldots\ldots+b^{r(m-4)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(1+b^{4-m}+b^{2(4-m)}+b^{3(4-m)}\ldots\ldots+b^{r(4-m)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(1+b^{m-6}+b^{2(m-6)}+b^{3(m-6)}\ldots\ldots+b^{r(m-6)}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(1+b^{6-m}+b^{2(6-m)}+b^{3(6-m)}\ldots\ldots+b^{r(6-m)}\right)$$

. . . . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m.1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots}\left(1+b+b^2+b^3\ldots\ldots\ldots+b^r\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^m.1.2.3\ldots\ldots\ldots}\left(1+b^{-1}+b^{-2}+b^{-3}\ldots\ldots+b^{-r}\right)$$

$$=\frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)m}-1}{b^m-1}\right)+\frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-(r+1)m}-1}{b^{-m}-1}\right)$$

$$+\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(m-2)}-1}{b^{m-2}-1}\right)+\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{(r+1)(2-m)}-1}{b^{2-m}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(m-4)}-1}{b^{m-4}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{(r+1)(4-m)}-1}{b^{4-m}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(m-6)}-1}{b^{m-6}-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{(r+1)(6-m)}-1}{b^{6-m}-1}\right)$$

. . . . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m.1.23\ldots\ldots}\left(\frac{b^{(r+1)}-1}{b-1}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^m.1.2.3\ldots\ldots}\left(\frac{b^{-r-1}-1}{b^{-1}-1}\right).$$

Se ora ciascuna coppia di tali termini viene portata sotto un comune denominatore, ne risulta

$$S=\frac{a^m}{2^m}\left(\frac{b^{rm}-b^{(r+1)m}-b^{-m}+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$+\frac{a^{-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-rm}-b^{-(r+1)m}-b^m+1}{2-b^m-b^{-m}}\right)$$

$$+\frac{ma^{m-2}}{2^m}\left(\frac{b^{r(m-2)}-b^{(r+1)(m-2)}-b^{2-m}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$+\frac{ma^{2-m}}{2^m}\left(\frac{b^{-r(m-2)}-b^{(r+1)(2-m)}-b^{m-2}+1}{2-b^{m-2}-b^{2-m}}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{m-4}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{r(m-4)}-b^{(r+1)(m-4)}-b^{4-m}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.a^{4-m}}{2^m.1.2}\left(\frac{b^{-r(m-4)}-b^{(r+1)(4-m)}-b^{m-4}+1}{2-b^{m-4}-b^{4-m}}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{m-6}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(m-6)}-b^{(r+1)(m-6)}-b^{6-m}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2.a^{6-m}}{2^m.1.2.3}\left(\frac{b^{r(6-m)}-b^{(r+1)(6-m)}-b^{m-6}+1}{2-b^{m-6}-b^{6-m}}\right)$$

. . . . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a}{2^m.1.2.3\ldots.}\left(\frac{b^r-b^{r+1}-b^{-1}+1}{2-b-b^{-1}}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots\ldots a^{-1}}{2^m.1.2.3\ldots.}\left(\frac{b^{-r}-b^{-r-1}-b+1}{2-b-b^{-1}}\right).$$ Sicchè fatte le debite sostituzioni, ne viene finalmente

$$S=\frac{1}{2^m}\left(\frac{\text{cos.}\,m(p+rq)-\text{cos.}\,m(p+(r+1)q)-\text{cos.}\,m(p-q)+\text{cos.}\,mp}{1-\text{cos.}\,mq}\right)$$

$$+\frac{m}{2^m}\left(\frac{\text{cos.}(m-2)(p+rq)-\text{cos.}(m-2)(p+(r+1)q)-\text{cos.}\,(m-2)(p-q)+\text{cos.}\,(m-2)p}{1-\text{cos.}\,(m-2)q}\right)$$

$$+\frac{m.m-1}{2^m.1.2}\left(\frac{\text{cos.}(m-4)(p+rq)-\text{cos.}\,(m-4)(p+(r+1)q)-\text{cos.}\,(m-4)(p-q)+\text{cos.}(m-4)p}{1-\text{cos.}\,(m-4)q}\right)$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{2^m.1.23}\left(\frac{\text{cos.}\,(m-6)(p+rq)-\text{cos.}\,(m-6)(p+(r+1)q)-\text{cos.}(m-6)(p-q)+\text{cos.}\,(m-6)p}{1-\text{cos.}\,(m-6)q}\right)$$

. . . . . .

$$+\frac{m.m-1.m-2\ldots}{2^m.1.2.3\ldots}\left(\frac{\text{cos.}\,(p+rq)-\text{cos.}\,(p+(r+1)q)-\text{cos.}\,(p-q)+\text{cos.}\,p}{1-\text{cos.}\,q}\right)$$

Il che era ecc.

*Caso II. di* m *pari*.

In questa supposizione dell' esponente $m$ pari il valore di cos. $p^m$ non differisce dal precedente se non nell' ultimo termine, il quale trovasi libero da cos. $p$, e veste questa forma $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$, e questo termine rimane inalterabile nell' espressione del valore della potenza $m$ di qualunque altro coseno. E' dunque bastantemente chiaro, che il calcolo da farsi in questo caso non è punto diverso dal già fatto nel caso di $m$ dispari, avendo soltanto riguardo, che nel precedente valore della somma $S$ in vece dell' ultimo termine si dee prendere $r+1$ volte la frazione $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$, il che dà la stessa somma già trovata $S$ mutilata dell' ultimo termine, ed accresciuta di $\frac{m.m-1.m-2\ldots\frac{1}{2}m+1.r+1}{2^m.1.2.3\ldots\frac{1}{2}m}$. Il che era ecc.

## PROBLEMA XI.

*Preso* $\phi$ *per l' arco di cerchio descritto col raggio* $=1$, ed m, n *due numeri qualunque o positivi o negativi; cercasi la somma* $S = m\,\text{sen.}\,m\phi + (m+n)\,\text{sen.}\,(m+n)\phi + (m+2n)\,\text{sen.}\,(m+2n)\phi + (m+3n)\,\text{sen.}\,(m+3n)\phi \ldots + (m+rn)\,\text{sen.}\,(m+rn)\phi$, *essendo* r *qualunque intero affermativo*.

### SOLUZIONE.

Dal Probl. II. si ha $\text{cos.}\,m\phi + \text{cos.}\,(m+n)\phi + \text{cos.}\,(m+2n)\phi + \text{cos.}\,(m+3n)\phi + \ldots\ldots + \text{cos.}\,(m+rn)\phi = \frac{\text{cos.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\phi\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(r+1)n\phi}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}n\phi}$. Quindi prendendo i differenziali nasce $-md\phi\,\text{sen.}\,m\phi - (m+n)\,d\phi\,\text{sen.}\,(m+n)\phi - (m+2n)\,d\phi\,\text{sen.}\,(m+2n)\phi - (m+3n)\,d\phi\,\text{sen.}\,(m+3n)\phi \ldots - (m+rn)\,d\phi\,\text{sen.}\,(m+rn)\phi =$

$$-\Big((m+\tfrac{1}{2}rn)\,d\phi\,\text{sen.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi$$

$$-\tfrac{1}{2}(r+1)\,nd\phi\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{cos.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi$$

$$+\tfrac{1}{2}nd\phi\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}n\phi\,\text{cos.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\Big):\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi^2,$$

e dividendo per $-d\phi$, ne proviene $m\,\text{sen.}\,m\phi$

$$+(m+n)\,\text{sen.}\,(m+n)\,\phi+(m+2n)\,\text{sen.}\,(m+2n)\,\phi$$

$$+(m+3n)\,\text{sen.}\,(m+3n)\,\phi\ldots+(m+rn)\,\text{sen.}\,(m+rn)\,\phi=$$

$$\Big((m+\tfrac{1}{2}rn)\,\text{sen.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi$$

$$-\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{cos.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi$$

$$+\tfrac{1}{2}n\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}n\phi\,\text{cos.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\Big):\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi^2.$$

Il che era ecc.

## PROBLEMA XII.

*Sommare la serie* $S=m\,\text{cos.}\,m\phi+(m+n)\,\text{cos.}\,(m+n)\,\phi+(m+2n)\,\text{cos.}\,(m+2n)\,\phi+(m+3n)\,\text{cos.}\,(m+3n)\,\phi\ldots+(m+rn)\,\text{cos.}\,(m+rn)\,\phi$.

### SOLUZIONE

Il Probl. I. somministra l'equazione $\text{sen.}\,m\phi+\text{sen.}\,(m+n)\phi+\text{sen.}\,(m+2n)\,\phi+\text{sen.}\,(m+3n)\,\phi\ldots+\text{sen.}\,(m+rn)\,\phi=\dfrac{\text{en.}\,(m+\frac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\frac{1}{2}(r+1)\,n\phi}{\text{sen.}\,\frac{1}{2}n\phi}$, la quale differenziata, e divisa per $d\phi$, diventa $m\,\text{cos.}\,m\phi+(m+n)\,\text{cos.}\,(m+n)\,\phi+(m+2n)\,\text{cos.}\,(m+2n)\,\phi+(m+3n)\,\text{cos.}\,(m+3n)\,\phi\ldots\ldots+(m+rn)\,\text{cos.}\,(m+rn)\,\phi=$

$$\Big((m+\tfrac{1}{2}rn)\,\text{cos.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi$$

$$+\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\,\text{cos.}\,\tfrac{1}{2}(r+1)\,n\phi\,\text{sen.}\,(m+\tfrac{1}{2}rn)\,\phi\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}n\phi$$

$-\frac{1}{2}n\,\text{cos.}\frac{1}{2}n\phi\,\text{sen.}(m+\frac{1}{2}rn)\phi\,\text{sen.}\frac{1}{2}(r+1)n\phi\big):\text{sen.}\frac{1}{2}n\phi^2.$

Il che era ecc.

## COROLLARIO.

Applicando il metodo da me esposto in questi due ultimi Problemi alle serie quivi sommate, cioè differenziando le medesime, egli è manifesto, che si otterrà la somma così de' seni come de' coseni degli angoli aritmeticamente crescenti, anche quando ciascuno di essi verrà moltiplicato pel quadrato del numero moltiplice dell' angolo. E così sempre operando, si giungerà sempre a determinare la somma di siffatte serie quand' anche ciascun seno e coseno venga moltiplicato per qualsivoglia potestà intera del numero moltiplice dell' angolo respettivo. E perciò saranno sempre sommabili le due serie

I°. $m^\lambda\,\text{sen.}\,m\phi+(m+n)^\lambda\,\text{sen.}\,(m+n)\phi$
$+(m+2n)^\lambda\,\text{sen.}\,(m+2n)\phi+(m+3n)^\lambda\,\text{sen.}\,(m+3n)\phi$
$\ldots+(m+rn)^\lambda\,\text{sen.}\,(m+rn)\phi$

II°. $m^\lambda\,\text{cos.}\,m\phi+(m+n)^\lambda\,\text{cos.}\,(m+n)\phi$
$+(m+2n)^\lambda\,\text{cos.}\,(m+2n)\phi+(m+3n)^\lambda\,\text{cos.}\,(m+3n)\phi\ldots$
$+(m+rn)^\lambda\,\text{cos.}\,(m+rn)\phi$, preso per $\lambda$ qualunque numero intero affermativo. In fatti chiamata $S'$ la prima di queste due serie, $S''$ la seconda, se si prende $P$ per indicare la somma già trovata di $\text{sen.}\,m\phi+\text{sen.}\,(m+n)\phi$ $+\text{sen.}\,(m+2n)\phi\ldots\text{sen.}\,(m+rn)\phi$, e $\mathfrak{Q}$ per denotare la somma nota di $\text{cos.}\,m\phi+\text{cos.}\,(m+n)\phi+\text{cos.}\,(m+2n)\phi\ldots$ $+\text{cos.}\,(m+rn)\phi$, si otterranno i seguenti Teoremi.

*Caso I. di $\lambda$ pari*

TEOREMA I°.

$$S'=\pm\frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda}.$$

TEOREMA II°.

$$S''=\pm\frac{d^\lambda \mathfrak{Q}}{d\phi^\lambda}.$$

In questi due Teoremi i segni superiori vagliono per tutti i numeri pari divisibili per 4, gl' inferiori per li non divisibili.

*Caso II. di λ dispari*

TEOREMA III°. TEOREMA IV°.

$$S' = \pm \frac{d^\lambda Q}{d\phi^\lambda}. \qquad S'' = \pm \frac{d^\lambda P}{d\phi^\lambda}.$$

Pel Teorema 3°. vale il segno superiore quando il numero λ è della forma $4n - 1$, essendo $n$ qualunque intero a cominciare dall' unità; vale poi il segno inferiore allorchè λ ha la forma $4n + 1$, essendo $n$ qualunque intero, ed anche zero.

Nel Teorema 4°. si adopra il segno superiore tutte le volte che $\lambda$ è $= 4n + 1$, essendo $n$ un intero qualunque, ed anche zero; e si usa il segno inferiore qualora $\lambda$ è $= 4n - 1$, preso per $n$ qualunque intero, escluso il zero.

NUOVA