SOPRA LA FORZA CENTRIFUGA.

Del P. Gregorio Fontana delle Scuole Pie Pubblico Professore delle Matematiche superiori nella R. Università di Pavia.

1. Ridurre alla massima semplicità la dimostrazione delle varie affezioni della Forza Centrifuga, aggiugnervi alcune non inutili osservazioni, estenderne l' applicazione a qualche punto importante della Meccanica, e finalmente ricavarne la dimostrazione de' Teoremi Meccanici da me esposti nel primo Volume di queste Memorie della *Società Italiana*, è l' unico oggetto di questo breve Opuscolo. In esso io suppongo nota la dottrina generale delle forze acceleratrici, e parto dal notissimo principio, che la misura della forza centrifuga, ovvero anche della centripeta (giacchè l' una è sempre uguale all' altra) è il doppio della lineetta, la quale congiunge l' estremo dell' archetto infinitesimo descritto dal corpo in un istante coll' estremo di quella porzione della tangente di detto arco, cui il corpo descriverebbe in quello stesso istante colla velocità quivi acquistata, e senza l' azione di alcuna forza, la qual doppia lineetta divisa che sia pel quadrato dell' indicato istante esprime la vera quantità e misura della forza centrale, così centrifuga, come centripeta.

2. Immaginiamoci pertanto un corpo (la di cui massa fingeremo sempre concentrata in un sul punto) attaccato ad un filo; e questo fermato per una estremità ad un piano orizzontale, e disteso in retta linea dall' uno all' altro estremo lungo il detto piano. Si prescinda dall' attrito e da qualunque altro impedimento, e si dia al corpo un colpo in direzione perpendicolare al filo: il corpo incomincierà a descrivere un cerchio avente per semidiametro la lunghezza del filo, e quindi farà forza di stirare e stendere il filo, cioè e-

ſerciterà una forza centrifuga impiegata in queſto caſo a produrre la tenſione del medeſimo. Si chiami f la forza centrifuga, o la tenſione del filo, ddz la lineetta, che congiunge gli eſtremi dell' archetto e della tangente del cerchio (la qual lineetta ſi ſa eſſere infiniteſima di ſecond' ordine), r il raggio del cerchio, dt l' iſtante o tempicciuolo infiniteſimo, ds l' archetto, v la velocità del corpo per l' archetto ds, h l' altezza *dovuta* alla velocità v. Ciò poſto ſarà

TEOREMA I.

3. $f = \frac{v^2}{r} = \frac{2h}{r}$, *vale a dire la forza centrifuga nel cerchio in quel punto della circonferenza, dove il corpo ſi trova, è uguale al quadrato della velocità del corpo in quel punto, diviſo pel ſemidiametro, ovvero uguale al doppio dell' altezza* dovuta *a tale velocità, e diviſo pel raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

E' evidente, che la lineetta ddz diventa nel cerchio uguale al ſeno verſo dell' archetto ds, e conſeguentemente $ddz = \frac{ds^2}{2r}$. Ma $f = \frac{2ddz}{dt^2}$; dunque $f = \frac{ds^2}{rdt^2}$; e ſiccome $v = \frac{ds}{dt}$, ſi ha $f = \frac{v^2}{r}$. Perchè poi dalle leggi del moto equabilmente accelerato, poſta la gravità terreſtre acceleratrice $= 1$, ſi ricava $v^2 = 2h$, ſi ottiene pur anco $f = \frac{2h}{r}$. Il che era ecc.

4. COROLL. Poichè nel corpo, che ſi rivolge in un cerchio, la forza centrifuga ha dovunque una direzione perpendicolare all' arco, ella non tende in conſeguenza nè ad accreſcere, nè a ſminuire la velocità del corpo per l' arco, la quale ſarà dunque la ſteſſa in tutti i punti della circonferenza, come pure la ſteſſa la forza centrifuga. Dunque il moto è uniforme, e la forza centrifuga è coſtante.

TEOREMA II

5. *L' arco circolare descritto dal corpo in un dato tempo è medio proporzionale fra il diametro del cerchio e lo spazio, che sarebbe da esso trascorso in quel tempo, se posto in libertà venisse sollecitato per tutto quel tempo dalla data forza centrifuga.*

DIMOSTRAZIONE.

Si è già dimostrato essere $2r : ds :: ds : ddz$, e chiamato t il tempo proposto sta parimenti $1 : t :: t : t^2$; onde moltiplicate le due analogie nasce $2r : tds :. tds : t^2ddz$. Ma tds è l' arco descritto dal corpo con moto uniforme nel tempo t, perchè ds è l' archetto scorso in un istante: e t^2ddz è lo spazio scorso dal corpo libero nel medesimo tempo con moto uniformemente accelerato per l' azione costante della forza centrifuga, poichè ddz è lo spazietto descritto in un istante in virtù di tal forza. Dunque ecc. Il che era ecc.

6. COROLL. La velocità, colla quale il corpo si rivolge nel cerchio, è quella stessa che acquista scorrendo liberamente la metà del semidiametro per l' azione costante della forza centrifuga. Imperciocchè per le leggi del moto equabilmente accelerato, lo spazio da descriversi dal corpo per acquistare una tale velocità è la metà dell' arco percorso equabilmente nello stesso tempo. Ma pel Teorema antecedente quest' arco è medio proporzionale fra il diametro e il detto spazio. Dunque quattro volte il quadrato di esso spazio è uguale al prodotto di tale spazio nel diametro; e quindi si ha lo stesso spazio uguale alla metà del semidiametro

TEOREMA III.

7. *Le forze centrifughe di varj corpi mossi circolarmente come nel §. 2 sono come i quadrati delle loro velocità direttamente, e come i semidiametri inversamente.*

DIMOSTRAZIONE.

Nominando colle lettere majuſcole le quantità dianzi indicate colle minuſcole, ſi ha non meno $f = \frac{v^2}{r}$, che $F = \frac{V^2}{R}$ onde $f : F :: \frac{v^2}{r} : \frac{V^2}{R}$. Il che era ecc.

8. COROLL. I. Se i raggi ſono come i quadrati delle velocità, le forze centrifughe ſono eguali, e *viceverſa*.

9. COROLL. II. Se le velocità ſono come le poteſtà $n.^{esime}$ de' raggi, le forze centrifughe ſono come le poteſtà $2n - 1.^{esime}$ de' raggi medeſimi, e *viceverſa*; e quindi allorchè le velocità ſono in proporzione de' raggi; anche le forze centrifughe ſtanno in tal proporzione, e *viceverſa*.

TEOREMA IV.

10. *Le forze centrifughe de' corpi, che ſi muovono in un cerchio, ſono come i raggi direttamente, ed inverſamente come i quadrati de' tempi periodici, cioè de' tempi delle intere rivoluzioni*

DIMOSTRAZIONE.

Nominando T, t i tempi periodici, C, c le circonferenze, è manifeſto per la legge del moto equabile, che $V = \frac{C}{T}$, $v = \frac{c}{t}$; e però $F : f :: \frac{V^2}{R} : \frac{v^2}{r} :: \frac{C^2}{T^2 R} : \frac{c^2}{t^2 r} :: \frac{R^2}{T^2 R} : \frac{r^2}{t^2 r} :: \frac{R}{T^2} : \frac{r}{t^2}$: Il che era ecc.

11. COROLL. I. Le forze centrifughe ſono come le velocità direttamente, e i tempi periodici inverſamente, perchè eſſendo $V : v :: \frac{C}{T} : \frac{c}{t} :: \frac{R}{T} : \frac{r}{t}$, ne viene $F : f :: \frac{V}{T} : \frac{v}{t}$.

12. COROLL. II. Se i quadrati de' tempi periodici ſono come i raggi, le forze centrifughe ſono eguali, e *viceverſa*: così pure

pure se le velocità sono come i tempi periodici, le forze centrifughe sono eguali, e *viceversa*.

13. COROLL. III. Se i tempi periodici sono come le potestà $n.^{esime}$ de' raggi, le forze centrifughe sono inversamente come le potestà $\overline{2n-1.}^{esime}$ de' medesimi raggi, e *viceversa*, e le velocità sono inversamente come le potestà $\overline{n-1.}^{esime}$ de' raggi, e *viceversa*.

14. COROLL. IV. Se i tempi periodici sono in ragione sesquiplicata de' raggi (che è il caso delle rivoluzioni de' pianeti), le forze centrifughe, e però ancora le centripete sono in ragione inversa duplicata de' raggi, e *viceversa*, e le velocità in ragione inversa sudduplicata de' raggi, e *viceversa*.

TEOREMA V.

15. *Se la velocità del moto circolare è dovuta all' altezza uguale alla metà del semidiametro, cioè è uguale a quella che acquista un corpo libero cadendo per l' azione della gravità terrestre dall' altezza d' un mezzo semidiametro, allora la forza centrifuga uguaglia la gravità terrestre*, e viceversa.

DIMOSTRAZIONE.

In questa ipotesi diviene $h=\frac{1}{2}r$; e conseguentemente $f=\frac{2h}{r}=\frac{r}{r}=1$, che è appunto la gravità terrestre. Il che era ecc.

SCOLIO.

16. Fino a qui non si è avuto riguardo alla massa del corpo, e perciò si è considerata la sola forza centrifuga *acceleratrice*, la quale si cangia in *motrice* con moltiplicarla per la massa. Dunque moltiplicando per le rispettive masse i termini delle precedenti ugualtà, e analogie si verrà ad ottenere i valori assoluti, e relativi delle forze centrifughe motrici. Così per esemp. nel caso di questo V. Teorema la forza

centrifuga motrice uguaglia il peso del corpo, perchè posta la sua massa $= m$, ed essendo $f = 1$, nasce $mf = 1 \times m$, che è appunto il peso del corpo; ond' è, che il filo sarà teso e stirato nè più, nè meno che se il corpo attaccatovi pendesse verticalmente, ed agisse contro il filo con tutto il suo peso.

PROBLEMA I.

17. *Se il corpo attaccato al filo riceve un tal colpo, che il suo tempo periodico* t *sia noto, e risulti nel filo una tensione uguale a quella che produce il peso del corpo immobile e verticalmente pendente; si domanda qual sia la lunghezza del filo, o il raggio* r *del cerchio.*

SOLUZIONE.

Supposto $1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza, sarà $2r\pi$ la circonferenza del cerchio descritto, e per la legge del moto uniforme si ha $t = \frac{2r\pi}{v} = \frac{2r\pi}{\sqrt{2b}}$. Ora (§. 15.) $r = 2b$; dunque $t = \frac{2r\pi}{\sqrt{r}} = 2\pi\sqrt{r}$; e quindi $r = \frac{t^2}{4\pi^2}$. Il che era ecc.

SCOLIO.

18. Si noti qui bene, che siccome l' espressione $\frac{t^2}{4\pi^2}$ dee rappresentare una quantità lineare, e $4\pi^2$ è un numero astratto, non può t^2 esprimere che una linea, cui diremo l. Per determinare poi questa si rifletta, che nominando θ il tempo, ed a l' altezza, da cui casca un grave in quel tempo, nasce $\theta^2 = 2a$ nella presente ipotesi della gravità acceleratrice $= 1$. Laonde se t sarà dato in secondi, starà il numero de' secondi in θ^2 al numero de' secondi in t^2 come la linea $2a$ alla linea l, cioè si avrà $l = \frac{2t^2a}{\theta^2}$; e perchè fatto $\theta = 1'$ si tro-

va $a = 15$, 1 *pi.*, si ha quindi $l = t^2 \times 30$, 2 *pi.*, e conseguentemente $r = \frac{t^2}{4\pi^2} \times 30$, 2 *pi.*, essendo t dato in secondi.

19. COROLL. Se il tempo, che mette una palla inerte ma non pesante a descrivere la circonferenza d'un cerchio, è due volte tanto quanto il tempo d' un' oscillazione minima d'un pendolo, la di cui lunghezza è uguale al semidiametro r del predetto cerchio, e porta all'estremità una picciola massa pesante; la forza centrifuga *assoluta* o motrice della palla inerte è uguale al peso d' una massa grave di egual quantità di materia con detta palla. Imperciocchè si sa dalla dottrina de' pendoli, che il tempo d' un' oscillazione minima sta al tempo della caduta libera per la doppia altezza del pendolo, cioè pel diametro del cerchio descritto dalla palla inerte, come sta la semicirconferenza al diametro, ovvero come $\pi : 2$; onde essendo il tempo di tal caduta $= \sqrt{4r} = 2\sqrt{r}$, ne viene che il tempo dell' oscillazione sarà $= \pi\sqrt{r}$. Ma il tempo periodico della palla inerte è $= \frac{2r\pi}{\sqrt{2b}}$; dunque dovendo esser questo doppio di quello, nascerà $\frac{2r\pi}{\sqrt{2b}} = 2\pi\sqrt{r}$, e quindi $r = 2b$, cioè finalmente $f = \frac{2b}{r} = 1$, che è quanto dire la forza centrifuga acceleratrice uguale alla gravità terrestre; dal che deriva la forza centrifuga *assoluta* o motrice uguale al peso della palla considerata non solo come inerte, ma anche come grave.

PROBLEMA II. (*fig.* 1)

20. *Sia una curva* RA, *la quale rotandosi intorno all' asse verticale* AC *generi una sferoide, di cui tutte le sezioni orizzontali sono tanti cerchj aventi le ordinate* HM *della curva genitrice per raggi. Si collochi in qualunque interno luogo* M *della sferoide cava un grave, e gli si dia un colpo, per cui incominci a descrivere il cerchio corrispondente del raggio* HM. *Si domanda quanta esser debba la velocità impressa dal colpo, perchè il corpo non sia costretto dalla gravità a calare al basso, ma seguiti a moversi nel cerchio incominciato.*

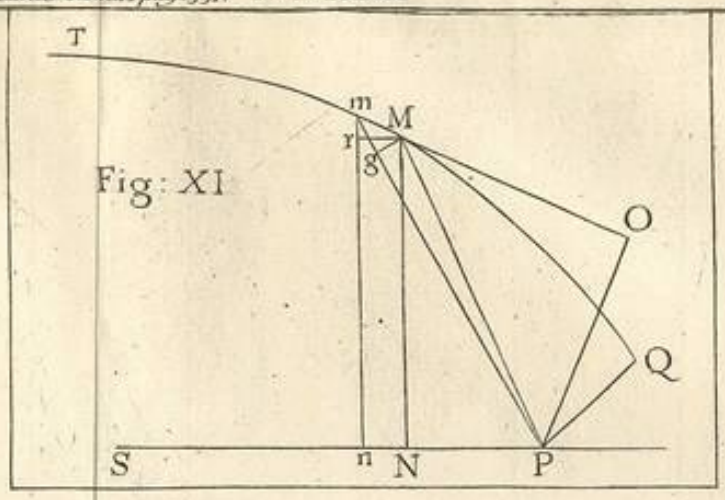

Fig: XI

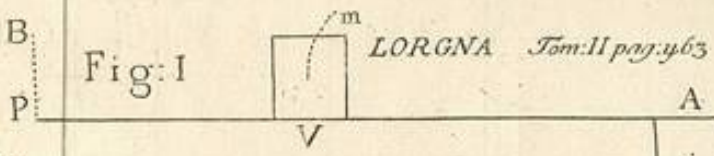

Fig: I

LORGNA Tom:II pag:463

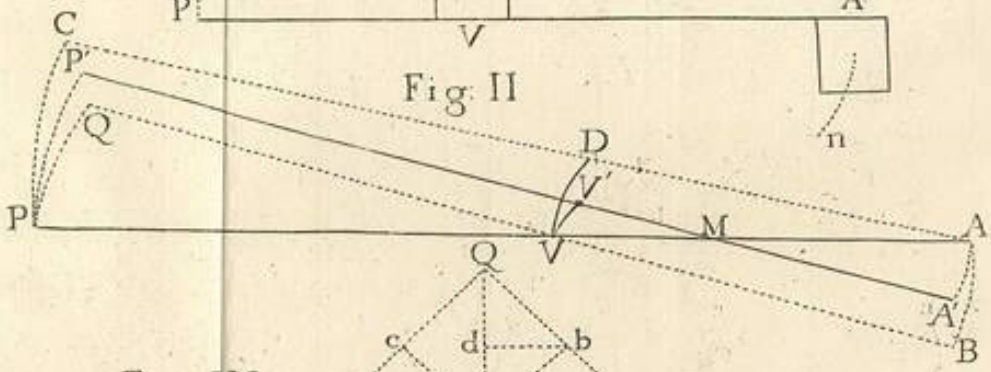

Fig: II

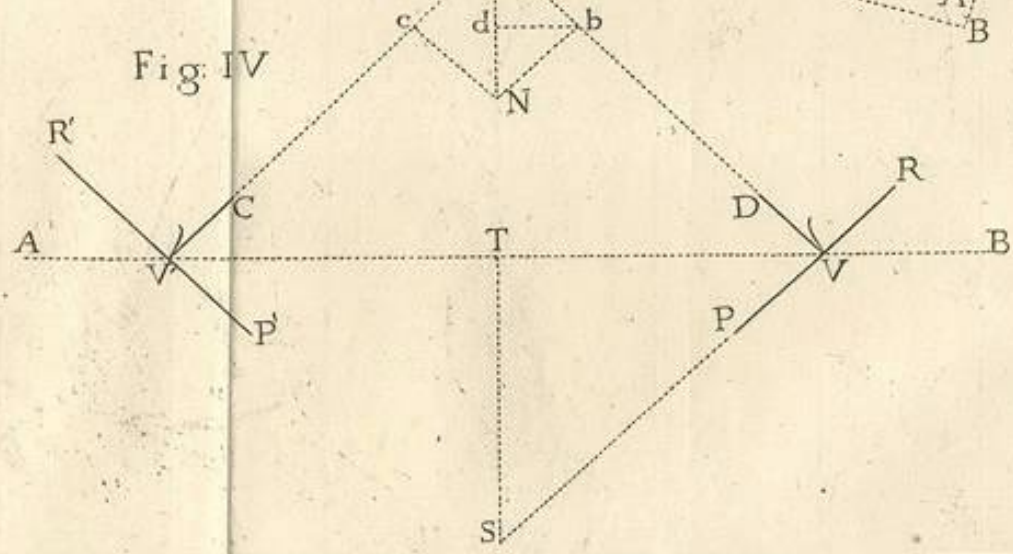

Fig: IV

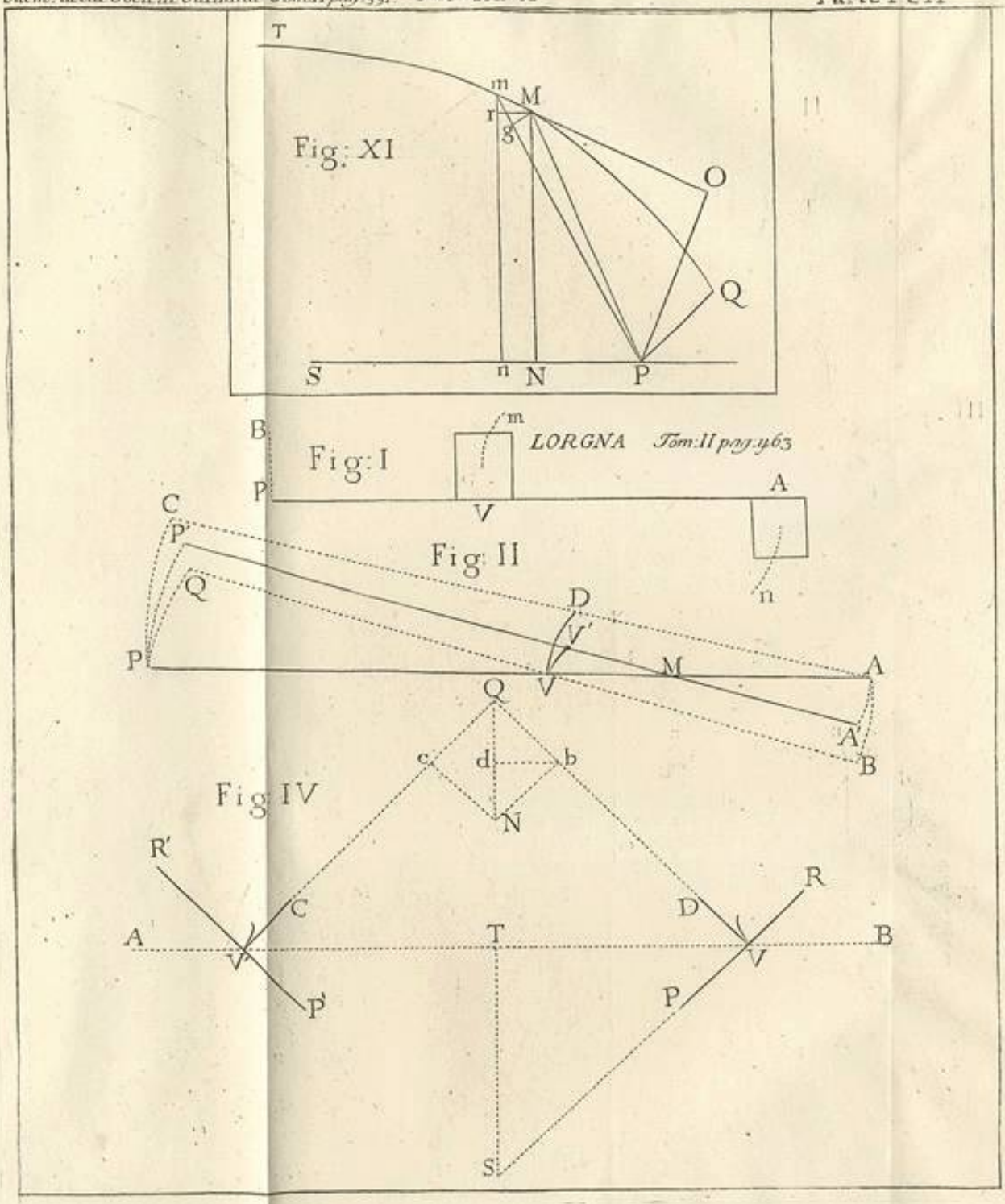
Fig: XI
T
m
M
r
g
O
Q
S
n
N
P
Fig: I
B
m
LORGNA Tom: II pag: 463
P
V
A
n
Fig: II
C
P'
Q
D
V'
P
M
A
Q
V
A'
B
Fig: IV
c
d
b
N
R'
C
R
D
A
T
B
V
V
P'
P
S

SOLUZIONE.

Sia l' aſciſſa $AH = x$, l' ordinata $HM = y$, e l' altezza dovuta alla ricercata velocità $= b$. Condotta la normale CM alla curva, la verticale MN, e l' orizzontale MF in direzione del raggio HM, ſi ponga mente, che la gravità ſpinge il corpo ſecondo MN con uno sforzo $= 1$, e la forza centrifuga riſultante dal moto circolare lo ſollecita ſecondo MF con una ſpinta $= \frac{2b}{y}$; e però ſia $FM : MN :: \frac{2b}{y} : 1$. Se pertanto il corpo ha da perſiſtere in M, e così pure in ciaſcun punto della circonferenza, che ha HM per raggio, ſenza calare, nè aſcendere, la riſultante MO delle due forze MF, MN dovrà eſſere perpendicolare all' elemento della curva in M, ſicchè reſti interamente eliſa. Laonde MO è un prolungamento della normale CM, e i triangoli ſimili OMF, MHC danno l' analogia $MN : MF :: CH : HM$, cioè $1 : \frac{2b}{y} :: \frac{ydy}{dx} : y$; ond' è $b = \frac{ydx}{2dy}$, cioè uguale alla metà della ſottangente della curva genitrice. Data dunque la curva, la ſua equazione differenziale farà conoſcere l' altezza dovuta alla velocità ricercata. Il che era ecc.

21. COROLL. I. Se la sferoide è un cono colla punta in baſſo, cioè ſe la linea genitrice AM è retta, ſicchè $y = nx$, ſi ottiene $b = \frac{1}{2}x$.

22. COROLL. II. Se è una paraboloide, ne viene $y = x$, doppia della precedente

PROBLEMA III.

23. *Nell' ipoteſi precedente che il grave ſeguiti a muoverſi dopo l' urto nel cerchio incominciato, ſi domanda l' equazione della curva genitrice quando la velocità impreſſa al corpo ſia una funzione delle coordinate.*

SOLUZIONE.

Essendo in tal supposto h una funzione di x, y, ed insieme $=\frac{ydx}{2dy}$, co' metodi conosciuti del calcolo Integrale si ritrova un' equazione fra y ed x. Il che ecc.

24. COROLL. I. Supposta la velocità proporzionale all' ordinata, e però $h=\frac{y^2}{a}$, nasce $adx=2ydy$, ed integrando in ipotesi che svaniscano insieme y ed x, si ottiene $y^2=ax$, cioè la parabola conica.

25. COROLL. II. Supposto $h=\frac{y^n}{a^{n-1}}$, proviene $2y^{n-1}dy$ $=a^{n-1}dx$, ed integrando $\frac{2}{n}y^n=a^{n-1}x$ in ipotesi, che si annullino insieme y ed x, ed n sia un numero positivo.

26. COROLL. III. Se si suppone $h=\frac{x^2}{a^{n-1}}$, ne risulta $\frac{2dy}{y}$ $=\frac{a^{n-1}dx}{x^n}$, e coll' integrazione proviene

$$2\log.y=\frac{-a^{n-1}}{(n-1)x^{n-1}}+\text{cost.}$$

PROBLEMA IV.

27. *Determinare la sferoide, nella quale collocato un grave in qualunque punto* M *della sua cavità, e colpito colla conveniente velocità, che lo obblighi a descrivere il cerchio orizzontale senza discendere, compia il suo giro sempre nello stesso tempo.*

SOLUZIONE.

Essendo h l' altezza dovuta alla velocità, colla quale il grave percorre la circonferenza del raggio HM, ossia y senza essere costretto a discendere per la sua gravità, e $2\pi y$ la

circonferenza, proviene il tempo periodico costante $t = \frac{2\pi y}{\sqrt{2h}}$; e in conseguenza $y^2 = \frac{t^2}{2\pi^2} h$. Il perchè la curva genitrice della sferoide è la parabola conica colle ordinate y, le ascisse h, e il parametro $\frac{t^2}{2\pi^2}$, e perciò la sferoide cercata è una paraboloide. Il che ecc.

28. COROLL. Col discorso del §. 18. si trova il parametro di questa parabola $= \frac{t^2}{2\pi^2} \times 30,2\ pi.$, prendendo il tempo t espresso in secondi.

PROBLEMA V. (*fig.* II.)

29. *Un filo* AC *fermato in* A *sostiene nell' altro estremo* C *un grave (la di cui massa dee concepirsi concentrata in un punto): guidata la retta verticale* AB, *e portato il filo nella situazione obliqua* AC, *si dà al grave una percossa in direzione perpendicolare al piano* BAC, *sicchè il grave incomincia a descrivere un cerchio normale ad* AB, *ed il filo* AC *un cono retto coll' asse* AB. *Si cerca quanta debba essere la velocità comunicata al corpo, affinchè continui a descrivere questo cerchio, ed il filo a scorrere l' intiero cono*

SOLUZIONE.

Poichè *CB* normale a *BA* è raggio del cerchio percorso, se si nomina h l' altezza dovuta alla ricercata velocità, la forza centrifuga del corpo in direzione di *CE* sarà $= \frac{2h}{r}$, posto $r = BC$, e la gravità terrestre, che lo sollecita secondo la verticale *CI*, è $= 1$. Prese pertanto le linee *CE*, *CI* proporzionali a queste forze, la loro azione non dee punto cambiare l'angolo *BAC*, se il filo ha da descrivere un cono. Perlochè la risultante *CF* di esse forze dee trovarsi nella stessa direzione del filo per poter esserne interamente distrutta. Ma la similitudine de' triangoli *ABC*, *CFE* dà l' analogia

$CE:EF::CB:BA$, cioè fatta $AB=a$, risulta $\frac{2b}{r}:1::r:a$; dal che si raccoglie $b=\frac{r^2}{2a}$. Il che ecc.

30. COROLL. I. Il tempo periodico impiegato dal grave a descrivere il cerchio, e del filo a trascorrere il cono è $=\frac{2r\pi}{\sqrt{2b}}$, ed essendosi trovato $b=\frac{r^2}{2a}$, appare un tal tempo $=2\pi\sqrt{a}$; il che mostra, che i coni di egual altezza sono tutti descritti nel medesimo tempo; e che ad altezze disuguali i quadrati de' tempi periodici sono come queste altezze.

31. COROLL. II. Se la forza centrifuga di questo movimento è uguale alla gravità, il filo fa un angolo semiretto colla verticale, e *viceversa*: imperciocchè supposto $\frac{2b}{r}=1$, nasce $r=a$, e supposto $r=a$, nasce $\frac{2b}{r}=1$.

32. COROLL. III. Chiamato ϕ l'angolo CAB, ed l la lunghezza AC del filo, si ritrova $a=l\cos.\phi$, e perciò $t=2\pi\sqrt{a}=2\pi\sqrt{l\cos.\phi}$, cioè ne' coni, che hanno lo stesso angolo alla punta, i quadrati de' tempi periodici sono come le lunghezze de' fili, e generalmente come le lunghezze de' fili e i coseni degli angoli in punta, ovvero come le lunghezze de' fili, e i seni delle loro obliquità all' orizzonte.

33. COROLL. IV. Questo tempo periodico pel cono sta al tempo della libera caduta d' un grave dalla doppia altezza del cono come la circonferenza del cerchio al diametro; perchè il tempo di tal caduta per la dottrina del moto equabilmente accelerato si sa essere $=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$, e il tempo periodico si è trovato $=2\pi\sqrt{a}$.

34. COROLL. V. Se il cono è acutissimo per modo che sia a un dipresso $a=l$, e $\phi=0$, il tempo, in cui viene descritto, diventando $2\pi\sqrt{l}$, uguaglia il tempo, in cui resta descritto un cerchio, il di cui raggio sia la lunghezza del filo, e dove la forza centrifuga (§. 17.) sia uguale alla gravità.

35. COROLL. VI. Se il tempo periodico del filo per un cono

uguaglia il tempo della libera caduta d' un grave da un' altezza uguale alla lunghezza del filo, il seno dell' obliquità del filo all' orizzonte sta al seno tutto come il quadrato inscritto in un cerchio sta al quadrato della circonferenza, e *viceversa*. Imperciocchè quel tempo periodico $= 2\pi\sqrt{l}\cos.\phi$, e quello della caduta $= \sqrt{2l}$; onde dovendo essere $\sqrt{2l} = 2\pi\sqrt{l}\cos.\phi$, cioè $1 = 2\pi^2\cos.\phi$, nasce la proporzione $\cos.\phi : 1 :: \frac{1}{2} : \pi^2$, ossia la proposta.

PROBLEMA VI. (*fig.* I.)

36. *Muovasi un corpo non libero nella linea* RMA *da* R *verso* A, *e venga continuamente sollecitato da una forza in direzione parallela all' asse* CA. *Si domanda la pressione, che il corpo esercita in ciascun luogo* M *della curva*

SOLUZIONE.

Si supponga, che il corpo abbia descritto l' arco RM, e si chiami p la forza, che lo sollecita secondo MP parallela all' asse. Risoluta questa nella *forza tangenziale* secondo la tangente MQ, e nella *forza normale* secondo la perpendicolare MO alla curva, nasce la forza tangenziale $= \frac{MQ}{MP}p$, e la *normale* $= \frac{MO}{MP}p$; e se si fa $AH = x$, $HM = y$, $AM = s$, è facile il conoscere, che $\frac{MQ}{MP} = \frac{-dx}{-ds} = \frac{dx}{ds}$; ed $\frac{MO}{MP} = \frac{-dy}{-ds} = \frac{dy}{ds}$: laonde la forza tangenziale $= \frac{pdx}{ds}$, e la forza normale $= \frac{pdy}{ds}$. La prima di queste non ha alcuna parte nel premere il corpo contro la curva, la seconda all' opposto è tutta impiegata in produrre questo effetto. Vi ha inoltre una forza risultante dal moto curvilineo, la quale è parimente tutta rivolta a premere il corpo perpendicolarmente contro la curva; perchè essendo l' archetto Mm della curva lo stesso

che

che quello del ſuo circolo oſculatore in M, ſarà anche una tal forza del corpo nel punto M della curva la ſteſſa che la centrifuga nel circolo oſculatore percorſo colla velocità in M acquiſtata, e però agirà in direzione di MO, o del raggio oſculatore perpendicolare ad Mm. Il perchè chiamata b l' altezza dovuta alla velocità in M, r il raggio oſculatore, ſi ottiene queſta forza, ovvero la preſſione contro $Mm = \frac{2b}{r}$. Dunque la preſſione totale del corpo contro un luogo indeterminato M della curva è $= \frac{pdy}{ds} + \frac{2b}{r} = \frac{pdy}{ds} + \frac{2b}{ds^3 : dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ per eſſere, come ſi ſa, il raggio r dell' evoluta $= \frac{ds^3}{dx^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$. Se dunque la forza ſollecitante p, e l' altezza b dovuta alla velocità in M ſono quantità note, o anche date per le coordinate x, y, l' equazione della curva ſomminiſtrerà il vero valore della preſſione, che ſi cerca. Il che ecc.

37. Coroll. I. Per ritrovare la velocità del corpo in qualunque punto M della curva baſta moltiplicare la forza tangenziale $\frac{pdx}{ds}$ per l' archetto $-ds$, ed ottienſi, come è noto, $db = -pdx$, $b = -\int pdx + \text{coſt.}$, e ſuppoſto, che il corpo parta da R colla velocità dovuta ad un' altezza nota a, e preſo l' integrale $\int pdx$ per modo che ſvaniſca allorchè $x = AB = b$, proviene $b = a - \int pdx$.

38. Coroll. II. Si ritrova il tempo t impiegato a ſcorrere l' arco indefinito RM colla nota formola $dt = \frac{-ds}{\sqrt{2b}}$

$= \frac{-ds}{\sqrt{2(a-\int pdx)}}$, la quale dà $t = \int \frac{-ds}{\sqrt{(2a-2\int pdx)}}$, prendendo quest' integrale in modo che si annulli allorchè $s = AMR$, ovvero $x = a$.

39. COROLL. III. Se un corpo viene lanciato da B in direzione di BA con una velocità dovuta alla predetta altezza a, ed agisce in esso la stessa forza sollecitante p comunque variabile in direzione parimente di BA, e si chiama h' l' altezza dovuta alla velocità in H, nasce anche in questo caso $dh' = -pdx$, ed $h' = a - \int pdx = h$. In conseguenza acquista egli la stessa velocità così discendendo per l' altezza rettilinea BH, come per la via comunque curvilinea RM; e lo stesso accade quand' anche il corpo incominci a moversi dalla quiete, cioè senza velocità impressa.

40. COROLL. IV. Se il corpo con una data velocità dovuta all' altezza a incomincia a moversi da A verso M sulla linea obbligata AM, ed intanto agisce in esso continuamente la forza p in direzione parallela all' asse dal basso all' alto, siccome in questo caso la forza tangenziale tende a sminuire la velocità del corpo, si ritrova $pdx = -dh$, ed $h = a - \int pdx$, prendendo però l' integrale $\int pdx$ in modo che si annulli con x. Perchè poi trovasi questa stessa formola anche pel corpo lanciato da A lungo l' asse AC colla stessa velocità, ed animato dalla stessa forza p in direzione opposta al suo moto; quindi ne viene, che o il corpo ascenda per la via rettilinea AM, o per la curvilinea di qualunque forma AM, ad eguali elevazioni in H, ed M si trova aver perdute uguali velocità; cosicchè nell' integrale $\int pdx$ se si prende x di tal grandezza AB, che il detto integrale diventi $= a$, si estingue tutta la velocità del corpo sia che s' inalzi direttamente per AB, sia che ascenda ad uguale elevazione per l' arco comunque formato AR. Giunto poi in B oppure in R discende dalla quiete per BA, ovvero per RMA per l' azione continua della forza p sollecitante dall' alto al basso, ed acquista in A nell' un caso e nell' altro la medesima velocità.

PROBLEMA VII. (*fig.* III.)

41. *Dall' estremità* G *d' un filo fermato in* C *pende un grave, e sollevandosi il filo disteso nella situazione orizzontale* CA *si abbandona a se stesso sicchè il corpo incominci a descrivere l' arco* AE *del cerchio verticale* AGBF. *Si fa la ricerca quanto sia premuto dal grave qualunque punto* E *della circonferenza del cerchio, ovvero quanto sia teso il filo in qualunque situazione.*

SOLUZIONE.

Nominate al solito x, y le coordinate GQ, QE, ed r il semidiametro, si ha pel cerchio l' equazione $y^2 = 2rx - x^2$, $ydy = (r-x)\,dx$, $y^2dy^2 = (r-x)^2\,dx^2$, $\frac{(2rx-x^2)\,dy^2}{(r-x)^2} = dx^2$, $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{r^2dy^2}{(r-x)^2}$, $ds = \frac{rdy}{r-x}$. Ora, quando il grave è disceso per AE, ha acquistato in E una velocità dovuta all' altezza $CQ = r - x$ (§. 39.). Dunque fatte queste sostituzioni nella formola della pressione $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r}$, e posto $p = 1$, perchè la forza sollecitante in quest' ipotesi è la gravità, si ottiene la cercata pressione in $E = \frac{r-x}{r} + \frac{2r-2x}{r} = \frac{3r-3x}{r}$, cioè uguale a tre volte l' altezza CQ dell' arco descritto. Il che era ecc.

42. COROLL. I. Nel punto infimo G, dove $x = 0$, la pressione uguaglia tre volte la gravità; e moltiplicando per la massa del corpo, risulta la pressione *motrice* (che è la pressione propriamente detta), e quindi la tensione del filo tre volte maggiore del peso del corpo.

43. COROLL. II. Rimosso il filo dalla direzione verticale, e portato nella situazione obliqua CI, e qui abbandonato, la pressione in qualunque punto E proviene

$= \frac{r-x}{r} + \frac{2a-2x}{r} = \frac{r+2a-3x}{r}$, chiamando a l'altezza GN del corpo sopra il punto infimo, ed avuto riguardo alla velocità acquistata dal corpo in E, la quale è dovuta all' altezza $N\mathcal{Q} = a - x$ della discesa (§. 39.). La pressione poi nel punto infimo G nasce $= \frac{r+2a}{r}$.

44. COROLL. III. Se l' arco GI è di $60°$, la pressione in G, ovvero la tensione del filo fa due volte il peso del corpo, giacchè in questo caso $a = \frac{1}{2} r$, onde $\frac{r+2a}{r} = 2$

PROBLEMA VIII.

45. *Se un grave pendente da un filo fermato in* C *viene obbligato a percorrere il cerchio verticale* AGBF *; si domanda quanto sia teso il filo da questo corpo allorchè passa pel punto infimo* G.

SOLUZIONE.

Se il corpo trovandosi in A, quando il filo è tenuto nella situazione orizzontale CA, casca dalla quiete e descrive il quadrante AG, acquista in G la velocità dovuta all' altezza del semidiametro CG (§. 39.), velocità che interamente si estingue con portarsi che fa il corpo ad uguale altezza in B per l' altro quadrante GB. E' dunque mestieri al corpo in quiete nel punto A dare un tal urto in direzione della tangente, che lo obblighi a salire da G fino al punto supremo F, e a tender quivi il filo con una forza per lo meno eguale al suo peso: dico *per lo meno*, poichè una forza maggiore del peso del corpo non produrrebbe qui alcun inconveniente se non forse quello di allungare il filo, al che rimedia l' ipotesi del filo *inestensibile*, ma una forza minore del peso non impedirebbe il corpo di cascare per FC senza poter continuare a percorrere tutto il cerchio. Laonde chiamata b l' altezza dovuta alla velocità del corpo nel più alto punto F, debb'

essere la tensione del filo, o la forza centrifuga $\frac{2h}{r}$ per lo meno $= 1$, e quindi $h = \frac{1}{2}r$. Ma il corpo nel salire per la semicirconferenza GBF perde (§. 40.) tanta velocità quanta è quella che è dovuta all' altezza $GF = 2r$: dunque ritenendo in F ancora la velocità dovuta per lo meno all' altezza $\frac{1}{2}r$, dee avere in G la velocità per lo meno dovuta all' altezza $\frac{5}{2}r$. Conseguentemente la forza centrifuga del corpo in G sarà per lo meno $= \frac{5r}{r} = 5$, cioè cinque volte la gravità, o a meglio dire denominata m la massa del corpo, la forza centrifuga riuscirà $= \frac{5rm}{r} = 5m$, vale a dire a cinque volte il suo peso. E siccome nel punto infimo G il filo vien teso non solo dalla forza centrifuga, ma ancora da tutto il peso del corpo pendente, proviene perciò la tensione in G almeno sei volte maggiore del peso del corpo. Il che ecc.

46. Coroll. I. Per trovare (in quest' ipotesi che la tensione del filo in G sia sei volte il peso del corpo) la tensione di esso in qualunque punto E de' due quadranti inferiori AEG, GSB, si ricorre alla formola $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r}$, e si osserva, che in questo caso la velocità impressa al corpo in A colla percossa è dovuta all' altezza $\frac{3}{2}r$, e conseguentemente in E è dovuta all' altezza $\frac{3}{2}r + CQ = \frac{5}{2}r - x$; dal che si raccoglie $h = \frac{5}{2}r - x$; e già si è trovato $\frac{pdy}{ds} = \frac{r-x}{r}$. Perlochè la tensione del filo in E $\frac{pdy}{ds} + \frac{2h}{r} = \frac{r-x}{r} + \frac{5r-2x}{r}$ $= \frac{6r-3x}{r}$.

47 COROLL. II. Per determinare poi la tensione del filo in qualsivoglia punto de' due quadranti superiori *AVF*, *FHB* convien fare attenzione, che in questo caso la gravità in vece di cospirare colla forza centrifuga ad accrescere la tensione, vi si oppone anzi e ne sminuisce l' azione; onde per questa parte il termine $\frac{pdy}{ds}$ dovrebbe sottrarsi dall' altro $\frac{2b}{r}$: ma siccome in questo stesso caso la frazione $\frac{dy}{ds}$ è necessariamente negativa, perchè quando il corpo ascende per l' uno o l' altro de' due quadranti cresce la s e scema la y, e quando discende cresce la y e scema la s; quindi nasce che il termine $\frac{pdy}{ds}$ rimane additivo, come lo era nel primo caso. Sicchè anche pe' due quadranti superiori risulta la tensione del filo $=\frac{6r-3x}{r}$, intendendo per x un' ascissa maggiore del semidiametro, come è *GL* per riguardo al punto *H*, e *GO* per rispetto al punto V.

PROBLEMA IX.

48. *Tenuto il filo nella situazione orizzontale* CA *si cerca nel raggio verticale* CG *un tal punto* Q, *che piantandovi un chiodo e lasciando cadere il corpo liberamente questo descriva intorno a* Q *un intero cerchio colla parte* GQ=QN *del filo, attortigliandosi (senza però accorciarsi) intorno a* Q.

SOLUZIONE.

Giunto il corpo in *G* acquista la velocità dovuta all' altezza r, alzandosi poi fino in *N* perde tanta velocità quanta è dovuta all' altezza *GN*, cioè $2x$, facendo $GQ=x$. Dunque ritiene in *N* una velocità dovuta all' altezza $r-2x$, ed ha quivi una forza centrifuga $=\frac{2r-4x}{x}$. Ora questa forza dee per lo meno essere uguale alla gravità, se il corpo ha da sos-

tenersi in N, e proseguire il suo moto circolare. Perciò si ricava $\frac{2r-4x}{x}=1$, e di qui $x=\frac{2}{5}r$. Il che ecc.

PROBLEMA X. (*fig.* I.)

49. *Determinare la curva* RA *situata in un piano verticale, la quale da un grave, che discende per essa e che ha ricevuta una velocità primitivamente impressa, sia premuta ugualmente in tutti i suoi punti.*

SOLUZIONE.

Posta n la massa del corpo si è dianzi trovato, che la pressione contro qualunque punto indefinito M è $=\frac{ndy}{ds}+\frac{2nhdx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$; e siccome si suppone costante, e però equivalente al peso d' una data massa m, si ha quindi $\frac{m}{n}=\frac{dy}{ds}+\frac{2hdx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$. Ora essendo a l' altezza dovuta alla velocità impressa al corpo in R, e BH, cioè $BA-AH$, ossia $b-x$ l' altezza dovuta alla velocità acquistata nella discesa per RM, proviene $h=a+b-x$, e conseguentemente $\frac{m}{n}=\frac{dy}{ds}+\frac{2(a+b-x)dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^3}$. Per facilitare l' integrazione di questa equazione, supporremo costante la ds, che dà $dds=d\sqrt{dx^2+dy^2}=0$, cioè $ddx=\frac{-dyddy}{dx}$. E poichè

$dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = dx^2\left(\frac{dxddy - dyddx}{dx^2}\right) = dxddy - dyddx$, fatta la sostituzione del valore di ddx, apparisce $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $= \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx} = \frac{ds^2 ddy}{dx}$; onde la nostra equazione diventa $\frac{m}{n} = \frac{dy}{ds} + \frac{2(a+b-x)\,ddy}{dsdx}$, cioè $\frac{m}{n}\,dsdx = dydx +$ $2(a+b-x)\,ddy$. Divido questa equazione per $2(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$, ed ottengo $\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{2}(a+b-x)^{-\frac{1}{2}}\,dsdx = \frac{1}{2}(a+b-x)^{-\frac{1}{2}}\,dydx$ $+ (a+b-x)^{\frac{1}{2}}\,ddy$, il di cui integrale si trova subito essere $\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}}\,ds = (a+b-x)^{\frac{1}{2}}\,dy + C\,ds$. La costante C si determina con supporre, che l' angolo formato dalla tangente della curva colla verticale nel punto R della partenza del corpo sia noto, ed $= \phi$: allora essendo $\frac{dy}{ds}$ $= \frac{\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}{(a+b-x)^{\frac{1}{2}}}$, e $\frac{dy}{ds}$ rappresentando il seno d'un tal angolo per un punto indefinito della curva, risulta pel punto dato R, dove $x = b$, sen. $\phi = \frac{m}{n} - \frac{C}{\sqrt{a}}$, e conseguentemente $C = \left(\frac{m}{n} - \text{sen.}\,\phi\right)\sqrt{a}$. Riguardo ora C come una quantità determinata, e dall' equazione integrata ricavo

$$ds = \frac{(a+b-x)^{\frac{1}{2}}\,dy}{\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C}, \text{ cioè}$$

$ds^2 =$

$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \dfrac{(a+b-x)\,dy^2}{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}$; e quindi

$dy^2 = \dfrac{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2 dx^2}{a+b-x-\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}$, e per ultimo

$dy = \dfrac{\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right) dx}{\sqrt{a+b-x-\left(\frac{m}{n}(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C\right)^2}}$. Per integrare quest' equazione prendo $u = (a+b-x)^{\frac{1}{2}}$, $u^2 = a+b-x$, $-2u\,du = dx$, ed ottengo $dy = \dfrac{-2\left(\frac{m}{n}u - C\right)u\,du}{\sqrt{\left(u^2 - \frac{m^2}{n^2}u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}}$,

e posto $1 - \dfrac{m^2}{n^2} = K^2$, ne traggo $dy = \dfrac{2\left(C - \frac{m}{n}u\right)u\,du}{\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)}}$.

Piglio inoltre $\sqrt{\left(K^2u^2 + \frac{2m}{n}Cu - C^2\right)} = Ku + z$, e però $\frac{2m}{n}Cu - C^2 = 2Kzu + z^2$, ovvero $u = \dfrac{C^2 + z^2}{\frac{2m}{n}C - 2Kz}$,

$du = \dfrac{2z\,dz\left(\frac{2m}{n}C - 2Kz\right) + 2K\,dz\,(C^2 + z^2)}{\left(\frac{2m}{n}C - 2Kz\right)^2}$.

$$=\frac{(KC^2+\frac{2m}{n}Cz-Kz^2)\,dz}{2(\frac{m}{n}C-Kz)^2},\quad Ku+z=\frac{KC^2+Kz^2}{\frac{2m}{n}C-2Kz}+z$$

$$=\frac{KC^2+\frac{2m}{n}Cz-Kz^2}{\frac{2m}{n}C-2Kz}=\sqrt{(K^2u^2+\frac{2m}{n}Cu-C^2)},$$

$$\frac{du}{\sqrt{(K^2u^2+\frac{2m}{n}Cu-C^2)}}=\frac{dz}{\frac{m}{n}C-Kz}.$$ Resta a trovare

$2(C-\frac{m}{n}u)u$ dato pure per z, e già si vede essere

$$C-\frac{m}{n}u=C-\frac{\frac{m}{n}C^2-\frac{m}{n}z^2}{2(\frac{m}{n}C-Kz)}=\frac{\frac{m}{n}C^2-2CKz-\frac{m}{n}z^2}{2(\frac{m}{n}C-Kz)},$$ e quindi

$$2(C-\frac{m}{n}u)u=\frac{(C^2+z^2)(\frac{m}{n}C^2-2CKz-\frac{m}{n}z^2)}{2(\frac{m}{n}C-Kz)^2},$$ e final-

mente $$\frac{2(C-\frac{m}{n}u)u\,du}{\sqrt{(K^2u^2+\frac{2m}{n}Cu-C^2)}}$$

$$=\frac{(C^2+z^2)(\frac{m}{n}C^2-2CKz-\frac{m}{n}z^2)\,dz}{2(\frac{m}{n}C-Kz)^2}$$

$$=\frac{\left(\frac{m}{n}C^4-2C^3Kz-2CKz^3-\frac{m}{n}z^4\right)dz}{2\left(\frac{m}{n}C-Kz\right)^3}.$$ Si faccia

$\frac{m}{n}C-Kz=t$, $z=\frac{\frac{m}{n}C-t}{K}$, $dz=-\frac{dt}{K}$. Laonde la precedente espressione si trasforma in

$$\frac{-\left(\frac{m}{n}C^4-2C^3\left(\frac{m}{n}C-t\right)-\frac{2C}{K^2}\left(\frac{m}{n}C-t\right)^3-\frac{1}{K^4}\left(\frac{m}{n}C-t\right)^4\right)\frac{dt}{K}}{2t^3}=$$

$$\left(\frac{m}{n}C^4-2C^3t+\frac{2m^3C^4}{n^3K^2}-\frac{6m^2C^3t}{n^2K^2}+\frac{6mC^2t^2}{nK^2}-\frac{2Ct^3}{K^2}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{K^4}\left(\frac{m^4}{n^4}C^4-\frac{4m^3}{n^3}C^3t+\frac{6m^2}{n^2}C^2t^2-\frac{4m}{n}Ct^3+t^4\right)\right)\frac{dt}{2Kt^3},$$

la quale è integrabile parte algebraicamente, parte per la quadratura dell' iperbola. Dunque ecc. Il che ecc.

50. COROLL. I. Se si vuole, che la pressione costante sia uguale al peso istesso del corpo, cioè $n=m$ si ha $dy=\frac{(2Cu-2u^2)\,du}{\sqrt{(2Cu-C^2)}}$. Perciò posto $\sqrt{(2Cu-C^2)}=p$, cioè $2Cu-C^2=p^2$, $Cdu=pdp$, $u=\frac{p^2+C^2}{2C}$, $2Cu-2u^2=p^2+C^2-\frac{(p^2+C^2)^2}{2C^2}=\frac{C^4-p^4}{2C^2}$, $\frac{(2Cu-2u^2)du}{\sqrt{(2Cu-C^2)}}=\frac{(C^4-p^4)dp}{2C^3}$.

Laonde l' integrale sarà $y=\frac{1}{2}Cp-\frac{p^5}{10C^3}+\text{cost.}$

$$=\frac{1}{2}C\sqrt{(2Cu-C^2)}-\frac{(2Cu-C^2)^2\sqrt{(2Cu-C^2)}}{10C^3}+\text{cost.}$$

$$=\frac{1}{2}C\sqrt{(2Cu-C^2)}-\frac{(2u-C)^2\sqrt{(2Cu-C^2)}}{10C}+\text{cost.}$$

$= \frac{(2C^2 + 2Cu - 2u^2)\sqrt{(2Cu - C^2)}}{5C} + \text{cost.} = (2C^2 + 2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$

$- 2a - 2b + 2x)\sqrt{(2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C^2)} + \text{cost.}$ Sicchè annullandosi insieme y ed x, proviene cost. $= (2a + 2b - 2C^2$

$- 2C(a+b)^{\frac{1}{2}})\sqrt{(2C(a+b)^{\frac{1}{2}} - C^2)}$. Dunque finalmente $y = (2a + 2b - 2C^2 - 2C(a+b)^{\frac{1}{2}})\sqrt{(2C(a+b)^{\frac{1}{2}} - C^2)}$

$+ (2C^2 + 2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - 2a - 2b + 2x)\sqrt{(2C(a+b-x)^{\frac{1}{2}} - C^2)}$.

51. COROLL. II. Qualora vogliasi, che la pressione non sia costante, ma variabile secondo una data legge, la quantità $\frac{m}{n}$ sarebbe variabile, e sarebbe nota la legge della sua variazione. Se per esempio si suppone, che la pressione sia in ogni punto proporzionale alla velocità del corpo, $\frac{m}{n}$ diviene proporzionale a $\sqrt{(a+b-x)}$; onde presa una quantità nota λ nasce $\frac{m}{n} = \lambda(a+b-x)^{\frac{1}{2}}$. Perlochè

$dy = \frac{(\lambda(a+b-x) - C)dx}{\sqrt{(a+b-x-(\lambda(a+b-x)-C)^2)}}$; e posto $a+b-x = u$, si trova $dy = \frac{(C - \lambda u)du}{\sqrt{(u^2 - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2)}}$. Per integrare questa equazione bisogna renderla razionale, ed a quest'effetto cerco prima i divisori della quantità radicale, supponendo $u - \lambda^2 u^2 + 2C\lambda u - C^2 = 0$, cioè $u^2 - \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2}u + \frac{C^2}{\lambda^2} = 0$, donde si trae $u = \frac{2C\lambda + 1 \pm \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}$. Laonde si ha

$\left(u - \frac{2C\lambda - 1 - \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda}\right)\left(u - \frac{2C\lambda - 1 + \sqrt{(4C\lambda + 1)}}{2\lambda^2}\right) = u^2$

$- \frac{(2C\lambda + 1)}{\lambda^2}u + \frac{C^2}{\lambda^2}$; e moltiplicando per λ^2, e mutando i segni apparisce $-\lambda^2 u^2 + 2C\lambda u + u - C^2 =$

$$\left(-\lambda u+\frac{2C\lambda+1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}\right)\left(\lambda u-\frac{2C\lambda-1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}\right).$$

Prendo per brevità $\frac{2C\lambda+1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}=f$, e parimente $\frac{-2C\lambda-1+\sqrt{(4C\lambda+1)}}{2\lambda}=g$; ciò fatto la nostra equazione da integrarsi si cangia in $dy=\frac{(C-\lambda u)\,du}{\sqrt{(u-\lambda^2u^2+2C\lambda u-C^2)}}$ $=\frac{(C-\lambda u)\,du}{\sqrt{(f-\lambda u\times g+\lambda u)}}$. Assumo ora $\sqrt{(f-\lambda u\times g+\lambda u)}$ $=(f-\lambda u)z$; ond' è $g+\lambda u=(f-\lambda u)z^2$, $\lambda u+\lambda uz^2$ $=fz^2-g$, $u=\frac{fz^2-g}{\lambda+\lambda z^2}$, $du=\frac{2f(\lambda+\lambda z^2)zdz-2\lambda(fz^2-g)zdz}{(\lambda+\lambda z^2)^2}$ $=\frac{2\lambda(f+g)zdz}{(\lambda+\lambda z^2)^2}$. Parimente si trova $(f-\lambda u)z$ $=\left(f+\frac{\lambda g-\lambda fz^2}{\lambda+\lambda z^2}\right)z=\frac{(f+g)z}{1+z^2}$, $C-\lambda u=C+\frac{g-fz^2}{1+z^2}$ $=\frac{C+g+(C-f)z^2}{1+z^2}$, $(C-\lambda u)\,du$ $=\frac{2(C+g)(f+g)zdz+2(C-f)(f+g)z^3dz}{\lambda(1+z^2)^2}$. Dunque $dy=\frac{2(C+g)dz+2(C-f)z^2dz}{\lambda(1+z^2)^2}=\frac{2(C+g)}{\lambda}\times\frac{dz}{(1+z^2)^2}$ $+\frac{2(C-f)}{\lambda}\times\frac{z^2dz}{(1+z^2)^2}$. Riduco prima ad integrazione il primo termine di questo secondo membro ricorrendo al noto Teorema del Calcolo Integrale, che $\int\frac{dt}{(a+bt^2)^n}$ $=\frac{t}{(2n-2)a(a+bt^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{(2n-2)a}\int\frac{dt}{(a+bt^2)^{n-1}}$; onde fatto il confronto con $\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}$, si trova questo

$$= \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\text{arc. tang. } z.$$

Parimente paragonando l' altro termine $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2}$ col noto canone del Calcolo Integrale $\int \frac{t^p dt}{(a+bt^m)^q} =$

$$\frac{-t^{p-m+1}}{m(q-1)b(a+bt^m)^{q-1}} + \frac{(p-m+1)}{(q-1)mb}\int \frac{t^{p-m}dt}{(a+bt^m)^{q-1}}$$ otten-

go $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^2} = \frac{-z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z^2} =$

$-\frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}$ arc. tang. z. Dunque risulta $y = \frac{(C+g)z}{\lambda(1+z^2)}$

$$+ \frac{C+g}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \frac{(f-C)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{C-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \text{cost.}$$

$$= \frac{(g+f)z}{\lambda(1+z^2)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } z + \text{cost.}$$

$$= \frac{(g+f)\sqrt{\left(\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)}}{\lambda\left(1+\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}\right)} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{(\overline{g+\lambda u} \times \overline{f-\lambda u})} + \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda u}{f-\lambda u}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{(a+b-x-(\lambda \times \overline{a+b-x}-C)^2)}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}} + \text{cost.}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sqrt{(a+b-x-(\lambda \times \overline{a+b-x}-C)^2)}$$

$$- \frac{1}{\lambda}\sqrt{(a+b-(\lambda \times \overline{a+b}-C)^2)}$$

$$+ \frac{2C+g-f}{\lambda} \times \text{arc. tang. } \sqrt{\frac{g+\lambda(a+b-x)}{f-\lambda(a+b-x)}}$$

$$-\frac{2C+g-f}{\lambda}\text{ arc. tang. }\sqrt{\left(\frac{g+\lambda\times\overline{a+b}}{f-\lambda\times\overline{a+b}}\right)}.$$

52. COROLL. III. Se si vuole, che la legge della variazione della pressione sia di essere in ragione inversa della velocità del corpo, allora $\frac{m}{n}$ si cangia in $\frac{\lambda}{\sqrt{(a+b-x)}}$, e conseguentemente si ha $dy=\frac{(\lambda-C)\,dx}{\sqrt{(a+b-x-(\lambda-C)^2)}}$, ed integrando $y=2(C-\lambda)\sqrt{a+b-x-(\lambda-C)^2}-2(C-\lambda)\sqrt{a+b-(\lambda-C)^2}$.

PROBLEMA XI (*fig.* IV)

53. *Se per la convessità della curva* AMB *scavata in foggia di canale, ed avente il suo asse in situazione verticale, discende un grave partendo da qualunque punto della curva, si domanda quel punto, dove il corpo abbandona la curva, e si distacca dal canale.*

SOLUZIONE.

La gravità $=1$, che tiene il corpo attaccato alla curva, agisce con uno sforzo $=\frac{dy}{ds}$ (§. 36) chiamando y la NM, x la AN, s l' arco AM, e con questo sforzo il corpo preme il canale. Ma ad un tale sforzo direttamente si oppone quello della forza centrifuga, che spinge il corpo lungi dalla curva in direzione ad essa perpendicolare, e che si è trovato $=\frac{2b}{r}$, preso r pel raggio del circolo osculatore della curva in quel punto, dove il corpo si trova, ed b per l' altezza dovuta alla velocità del corpo in quel punto. Quando adunque sarà $\frac{dy}{ds}=\frac{2b}{r}$, ovvero $\frac{dy}{ds}-\frac{2b}{r}=0$, allora il grave abbandonerà la curva, e si distaccherà dal canale descrivendo, come è manifesto, una parabola conica in virtù dell' impeto acquistato nel punto del distacco, e delle sollicitazioni co-

ſtanti della gravità. Pertanto l' equazione della curva applicata alla formola $\frac{dy}{ds} - \frac{2b}{r} = 0$ farà conoſcere l' aſciſſa, o l' ordinata corriſpondente al punto del diſtacco, che ſi cerca. Il che ecc.

54. COROLL. I. Se AMB è un arco di cerchio col raggio r, e parte il corpo dalla quiete dal punto più alto A, già ſi ſa eſſere $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$, $2b = 2x$; conſeguentemente $\frac{r-x}{r} - \frac{2x}{r} = 0$, $x = \frac{1}{3}r$. Il che moſtra, che il punto del diſtacco corriſponde ad un' aſciſſa che è la terza parte del raggio, e però è l' eſtremità dell' arco di 48°. 12′ all' incirca.

55. COROLL. II. Se il corpo ſi muove dalla quiete dal punto M, e ſia $AN = a$, $AG = x$, $GF = y$, diventa $\frac{dy}{ds} = \frac{r-x}{r}$, $2b = 2NG = 2x - 2a$; onde $\frac{r-x}{r} + \frac{2a-2x}{r} = 0$, e quindi $x = \frac{r+2a}{3}$, o piuttoſto $x - a = NG = \frac{r-a}{3} = \frac{1}{3}NC$ eſſendo C il centro. Dal che ſi vede, che il punto del diſtacco è l' eſtremo dell' arco che ha per altezza la terza parte del coſeno dell' arco AM, dal cui termine comincia il moto.

56. COROLL. III. Di qui appariſce la bella proprietà meccanica del cerchio verticalmente eretto, che ſe per la ſua conveſſità ſcavata in canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è ſempre il terzo dell' altezza di detto arco continuato ſino al diametro orizzontale.

57. COROLL. IV. Nella parabola conica col parametro $= 2p$ dalla ſua equazione $y^2 = 2px$ ſi inferiſce $ydy = pdx$, $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{p^2}$, $ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2+y^2)dy^2}{p^2}$,

$ds =$

$ds = \frac{(p^2+y^2)^{\frac{1}{2}}dy}{p}$; ond' è $\frac{dy}{ds} = \frac{p}{\sqrt{(p^2+y^2)}} = \frac{p}{\sqrt{(p^2+2px)}}$. Si sa inoltre, che il raggio osculatore di tutte le sezioni coniche è uguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semiparametro, cioè $= \frac{N^3}{p^2}$; e siccome nella parabola $N = \sqrt{(y^2+p^2)} = \sqrt{(p^2+2ex)}$, e però il raggio osculatore $= \frac{p+2x}{p}\sqrt{(p^2+2px)}$; quindi viene, che supposto il grave partito dal vertice della parabola l' espressione $\frac{2h}{r}$ si cangia in $\frac{2px}{(p+2x)\sqrt{(p^2+2px)}}$, e questa uguagliata a $\frac{p}{\sqrt{(p^2+2px)}}$ somministra l' ugualtà $\frac{2x}{p+2x} = 1$, cioè $p = 0$, che è visibilmente assurdo. Dunque il grave discende per la convessità del canale parabolico senza mai distaccarsene, allorquando la discesa incomincia dal vertice. Altro assurdo parimente s' incontra quand' anche il grave incominci a discendere da un punto qualunque inferiore; e però dovunque incominci il suo moto, il corpo non abbandona mai il canale.

58. COROLL. V. Nell' ellisse conica coll' asse $= 2a$, col parametro $= 2p$ si ha l' equazione $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$; ond' è

$$ydy = \frac{(pa-px)\,dx}{a},\ dx^2 = \frac{a^2y^2dy^2}{(pa-px)^2} = \frac{(2a^2px-pax^2)\,dy^2}{(pa-px)^2},$$

$$ds^2 = dy^2 + dx^2 = \frac{(p^2a^2-2ap^2x+2a^2px+p^2x^2-pax^2)\,dy^2}{(pa-px)^2},$$

$ds = \frac{dy\sqrt{(p^2a^2-2ap^2x+2a^2px+p^2x^2-apx^2)}}{pa-px}$: conseguentemente $\frac{dy}{ds} = \frac{pa-px}{\sqrt{(p^2a^2-2ap^2x+2a^2px+p^2x^2-apx^2)}}$. Siccome poi la normale $N = \frac{yds}{dx} = \frac{(pa-px)\,ds}{ady}$, se ne raccoglie il

raggio osculatore $r = \frac{N^3}{p^2} = \frac{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3p^2}$.
Dunque se il corpo incomincia a muoversi dal vertice dell' ellisse, sicchè sia $h = x$, nascerà

$\frac{2h}{r} = \frac{2a^3p^2x}{(p^2a^2 - 2ap^2x + 2a^2px + p^2x^2 - apx^2)^{\frac{3}{2}}}$, la qual espressione uguagliata al valore di $\frac{dy}{ds}$ somministra l'equazione $2a^3x = (a - x)(pa^2 - 2apx + 2a^2x + px^2 - ax^2)$, che si riduce alla cubica di questa forma $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$. La radice di quest' equazione reperibile co' noti metodi rappresenta l' altezza dell' arco ellittico, descritto il quale, il corpo abbandona il canale. La stessa equazione cubica si ritrova anche quando l' asse verticale dell' ellisse è il minore, e il corpo parte dal vertice di quest' asse, col solo divario, che in questo caso, a indica il semiasse minore, p il semiparametro di quest' asse, x l' ascissa del medesimo.

59. COROLL. VI. Per l' iperbola conica con un procedere affatto simile al precedente s' incontra l' equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{p+a} + \frac{pa^3}{p+a} = 0$, la di cui radice x sarà l' ascissa dell' arco iperbolico, descritto il quale il corpo, che incomincia a discendere dal vertice, si distacca dalla convessità del canale iperbolico. Ma qui un tal distacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola; avvegnachè essendo positivi tutti i termini della predetta equazione il valor reale di x non può essere che negativo; il che, nell' ipotesi in cui siamo, è un assurdo. Dunque il grave, che discende per la convessità d' un canale iperbolico, resta sempre unito al canale anche protratto in infinito senza scostarsene mai. Non è mestieri di far vedere, essendo troppo facile, che ciò accade anche quando il corpo comincia a discendere da qualunque punto più basso del vertice.

60. COROLL. VII. Sia la cicloide *CAD* (*fig.* V.) la di cui

equazione è $dy = dx\sqrt{\frac{2r-x}{x}}$, preso r pel semidiametro del cerchio generatore $AOBS$. Qui si ha $ds^2 = dy^2 + dx^2 = dx^2 + \frac{dx^2(2r-x)}{x} = \frac{2rdx}{x}$, $ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}}$, $\frac{dy}{ds} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$. Si sa di più, che il raggio dell' evoluta della cicloide per qualunque punto indefinito M è il doppio della corda corrispondente BO del cerchio generatore, cioè $r = 2\sqrt{(2r \times 2r - x)}$. Quindi, essendo $b = x$, e però $\frac{2b}{r} = \frac{x}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}}$, risulta pel nostro intento $\frac{x}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}} = \sqrt{\frac{2r-x}{2r}}$, e per fine $x = r$. Dunque il grave, che parte dalla quiete dal vertice della cicloide giù per la sua convessità scanalata, se ne distacca dopo essere arrivato al punto, che resta sotto il vertice un semidiametro del cerchio generatore. Se il grave incomincia a discendere da un punto F sotto il vertice, posta $AE = a$, il valore di $\frac{2b}{r}$ si cangia in $\frac{x-a}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}}$, e dall' equazione $\sqrt{\frac{2r-x}{2r}} = \frac{x-a}{\sqrt{(2r \times 2r - x)}}$ si raccoglie $2r - x = x - a$, cioè $EN = NB$, $EN = \frac{1}{2} EB$. Dunque, da qualsivoglia punto del canale cicloidale incominci il moto, il grave si distacca sempre dopo aver percorso un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello stesso arco continuato fino alla base orizzontale della cicloide.

61. Coroll. VIII. Suppongasi, che la figura del canale sia quella d' una parabola qualunque di genere superiore rappresentata dall' equazione $y^m = x$, essendo m un numero intero > 2. In quest' ipotesi si ha $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dy^2 + m^2y^{2m-2}dy = dy^2\left(1 + m^2x^{(2m-2):m}\right)$; e però

$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})}}$. Ora è facile il vedere, che per le parabole superiori il raggio dell' evoluta, ovvero $r = \frac{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}{m(m-1)x^{(m-2):m}}$. Sicchè posta l' altezza dovuta alla velocità, cioè $h = x$ nell' ipotesi, che il grave parta dal vertice, risulta $\frac{2h}{r} = \frac{2m(m-1)x^{(2m-2):m}}{(1 + m^2 x^{(2m-2):m})^{3:2}}$. Laonde dovendo essere nel caso del distacco $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$, sarà $1 + m^2 x^{(2m-2):m} = 2m(m-1)x^{(2m-2):m}$; e perciò $x^{(2m-2):m} = \frac{1}{m(m-2)}$, e finalmente $x = \left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{m:(2m-2)}$. Dunque ne' canali parabolici di grado superiore al secondo il grave, che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico si distacca allorquando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{m:(2m-2)}$; la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{27}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così discorrendo. Che se il grave, in vece di spiccarsi dalla sommità del canale, partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale, che passa per la sommità, sia $= a$, allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere questa equazione $x^{(2m-2):m} - \frac{2(m-1)a}{m-2} x^{(m-2):m} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza a resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

62. COROLL. IX. Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, facilmente si trova

$ds = \frac{dy}{n}\sqrt{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{n}{\sqrt{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})}}$,

il raggio d'osculo $r = \frac{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}{mn(m-n)x^{(m-2n):m}}$. Supposto pertanto, che il grave incominci a rotolare dalla sommità, sicchè sia $b = x$, si ha $\frac{2b}{r} = \frac{2mn(m-n)x^{(2m-2n):m}}{(n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m})^{3:2}}$; e conseguentemente dovendo essere pel caso del distacco $\frac{2b}{r} = \frac{dy}{ds}$, risulta $n^2 + m^2 x^{(2m-2n):m} = 2m(m-n)x^{(2m-2n):m}$, e quindi per fine $x = \left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{m:(2m-2n)}$, che è l' altezza di quell' arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorso discendendo, si distacca dal canale. Qualora poi il grave incominci il suo moto da un altro punto più basso del vertice, e sia a la depressione verticale di questo luogo, si ritrova il punto del distacco mediante la risoluzione dell' equazione $x^{(2m-2n):m} - \frac{2(m-n)a}{m-2n}x^{(m-2n):m} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0$, dalla di cui radice sottraendo la quantità a si ottiene l' altezza dell' arco, al termine del quale giunto che sia il corpo, questo abbandona il canale.

63. COROLL. X. Sia OBS (*fig.* VI.) la logaritmica situata in un piano verticale, col suo asintoto MN al di sopra di essa ed orizzontale. Si supponga la sottangente costante $= 1$, e la FB normale all' asintoto ed uguale alla sottangente si produca indefinitamente in P, e si prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. La natura di questa curva somministra l' equazione transcendente $1 + x = e^y$, essendo e il numero, il di cui logaritmo iperbolico o naturale è l' unità. Da questa equazione si ricava subito $dx = e^y dy$, $dx^2 = (1+x)^2 dy^2$, $ds^2 = (1 + (1+x)^2)dy^2$, $ds = dy\sqrt{(1+(1+x)^2)}$, $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(1+(1+x)^2)}}$. Essendo poi $dy = \frac{dx}{1+x}$, e supposto dx costante, avendosi

$-dxddy = \frac{dx^3}{(1+x)^2}$, se nella formola $\frac{ds^3}{-dxddy}$ del raggio osculatore r si sostituiscono questi valori, si ritrova $r = \frac{dy^3(1+x)^2\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dx^3} = \frac{\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{1+x}$. Sicchè nel supposto, che il grave incominci a rotolare giù per la convessità della curva dal punto B fino al punto indefinito S, onde si abbia $b = BI = x$, si ottiene $\frac{2b}{r} = \frac{2x(1+x)}{\left(1+(1+x)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, che pareggiato con $\frac{dy}{ds}$ offre per risultato $x = \sqrt{2}$. Dunque il corpo che incomincia la sua discesa dal punto B, che chiameremo vertice, abbandona la curva dopo aver percorso un arco, la di cui altezza è la diagonale del quadrato descritto sopra la sottangente. Qualora poi il corpo parta da un punto inferiore a B, e la distanza d' un tal punto dalla retta orizzontale menata per B sia $= a$, apparisce $b = x - a$, e si presenta l' equazione $(2x - 2a)(1+x) = 1 + (1+x)^2$, cioè $x^2 - 2ax - 2a - 2 = 0$, la quale somministra $x - a = \sqrt{(a^2 + 2a + 2)} = \sqrt{\left(1 + (a+1)^2\right)}$. Di qui è evidente, che dovunque incominci sotto il vertice la discesa del grave lungo la convessità della logaritmica, esso si scosta dalla curva dopo aver percorso un arco, che ha per altezza l' ipotenusa d' un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la somma di questa sottangente e della distanza del principio di detto arco dalla orizzontale menata pel vertice.

64. COROLL. XI. Se vuolsi (*fig.* VII.) che il corpo partendo dal vertice A discenda lungo la convessità scanalata della cissoide ACO riferita all' asse AM parallelo all' asintoto verticale FN, chiamate al solito x, y le coordinate AB, BC, ed a il semidiametro AP del cerchio generatore, è manifesto, che si ha l' equazione $x = \frac{y^2}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$, e però

$$dx = \frac{2ydy\sqrt{(2ay-y^2)} - \frac{ay^2dy + y^3dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}}}{2ay - y^2} = \frac{(3a-y)y^2dy}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dx^2+dy^2=\frac{(3a-y)^2y^4dy^2}{(2ay-y^2)^3}+dy^2=\frac{(8a^3y^3-3a^2y^4)\,dy^2}{(2ay-y^2)^3}$$

$$=\frac{a^2y^3(8a-3y)\,dy^2}{(2ay-y^2)^3},\ ds=\frac{ay^{\frac{3}{2}}(8a-3y)^{\frac{1}{2}}\,dy}{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$ds^3=\dfrac{a^3y^{\frac{9}{2}}(8a-3y)^{\frac{3}{2}}\,dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{9}{2}}}$. Parimenti essendo

$dy=\dfrac{(2ay-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx}{(3ay^2-y^3)}$, si avrà

$$ddy=\Big\{dxdy\big((3a-3y)(3ay^2-y^3)\sqrt{(2ay-y^2)}$$

$$-(6ay-3y^2)(2ay-y^2)\sqrt{(2ay-y^2)}\big)\Big\}:(3ay^2-y^3)^2$$

$$=\Big\{dxdy\big((3a-3y)(3a-y)$$

$$-(6a-3y)(2a-y)\big)\sqrt{(2ay-y^2)}\Big\}:(3a-y)^2y^2$$

$=-\dfrac{3dxdya^2\sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2y^2}$. Laonde

$-dxddy=\dfrac{3dx^2dya^2\sqrt{(2ay-y^2)}}{(3a-y)^2y^2}$, e sostituendo il valore di

dx^2, nasce $-dxddy=\dfrac{3a^2y^2dy^3}{(2ay-y^2)^{\frac{7}{2}}}$. Pertanto il raggio oscu-

latore $r=\dfrac{ds^3}{-dxddy}=\dfrac{ay^{1:2}(8a-3y)^{3:2}}{3(2ay-y^2)^2}$; e poichè il valore di

$\dfrac{dy}{ds}$ dee nella nostra ipotesi uguagliare quello di $\dfrac{2x}{r}$, fatte le opportune sostituzioni in quest' espressione si ritrova

$\dfrac{(2ay-y^2)^{3:2}}{ay^{3:2}(8a-3y)^{3:2}}=\dfrac{6(2ay-y^2)^{3:2}}{ay^{1:2}(8a-3y)^{3:2}}$, e quindi $\dfrac{6y}{8a-3y}=1$,

cioè in fine $y = \frac{8}{9}a$. Dunque il corpo che partendo dal vertice discende per la convessità della cissoide, se ne distacca dopo aver trascorso un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore. Qualora poi il corpo parte da un punto inferiore al vertice A, e distante dall' orizzontale AF d' una data quantità b, se ne inferisce $\frac{2x - 2b}{r} = \frac{dy}{ds}$, e fatte le debite sostituzioni, si ha $\frac{6(2ay - y^2)^{3:2}}{ay^{1:2}(8a - 3y)^{3:2}} - \frac{6b(2ay - y^2)^{2}}{ay^{3:2}(8a - 3y)^{3:2}} = \frac{(2ay - y^2)^{3:2}}{ay^{3:2}(8a - 3y)^{3:2}}$, cioè $\frac{6y}{8a - 3y} - \frac{6b\sqrt{(2ay - y^2)}}{y(8a - 3y)} = 1$, ovvero $6y^2 - 6b\sqrt{(2ay - y^2)} = 8ay - 3y^2$, dalla quale per ultimo si ricava la seguente equazione di terzo grado $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \left(\frac{64a^2 + 36b^2}{81}\right)y - \frac{8ab^2}{9} = 0$. La radice di tale equazione dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di cissoide, dal quale se si sottrae l' arco compreso fra il vertice e il principio del moto si ha l' arco ricercato, al di cui termine giunto che sia il corpo, abbandona la cissoide.

65. COROLL. XII. Per tutte le ellissi, ed iperbole superiori si ha l' equazione generalissima $y^{m+n} = fx^m(a \mp x)^n$, dove a rappresenta l' asse trasverso, f una grandezza costante. Questa equazione si riduce all' altra $y = gx^{m:(m+n)}(a \mp x)^{n:(m+n)}$ mettendo g in luogo di $f^{1:(m+n)}$. Quindi si avrà

$$dy = \frac{m}{m+n}gx^{-n:(m+n)}dx(a \mp x)^{n:(m+n)}$$

$$\mp \frac{n}{m+n}gx^{m:(m+n)}dx(a \mp x)^{-m:(m+n)} = \frac{mg(a \mp x)^{n:(m+n)}}{(m+n)x^{n:(m+n)}}dx$$

$$\mp \frac{ngx^{m:(m+n)}dx}{(m+n)(a \mp x)^{m:(m+n)}} = \frac{mg(a \mp x)dx \mp ngxdx}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

mgadx

$$= \frac{mgadx \mp (m+n)gxdx}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}},$$

$$dy^2 = \frac{(m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2)dx^2}{(m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}}, \quad \sqrt{(dy^2+dx^2)}$$

$$= dx\sqrt{\left(1 + \frac{m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2}{(m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}}\right)}$$

$$= \frac{dx\sqrt{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)}}{(m+n)x^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}}$$

$= ds$. Prendo ora il differenziale di dy, ed ottengo

$$ddy = \Big\{ \mp (m+n)^2gx^{n:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}dx^2$$
$$-\left(mga \mp (m+n)gx\right)\left(nx^{-m:(m+n)}(a \mp x)^{m:(m+n)}\right.$$
$$\left. \mp mx^{n:(m+n)}(a \mp x)^{-m:(m+n)}\right)dx^2 \Big\} : \left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)}\right)$$

$$= \Big\{ \mp (m+n)^2gx(a \mp x) - \left(mga \mp (m+n)gx\right)\left(n(a \mp x) \mp mx\right) \Big\} dx^2 :$$
$$(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}$$

$$= \Big\{ (\mp m^2 \mp 2mn \mp n^2)(a \mp x)gx$$
$$+ (\pm mgx \pm ngx - mga)(na \mp nx \mp mx) \Big\} dx^2 :$$
$$(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}$$

$= \dfrac{-mnga^2dx^2}{(m+n)^2x^{(2n+m):(m+n)}(a \mp x)^{(2m+n):(m+n)}}$. Sarà dunque, fatte le opportune sostituzioni, il raggio r dell' evoluta, ossia

$$\frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a \mp x)^{2m:(m+n)} + m^2g^2a^2 \mp 2m(m+n)ag^2x + (m+n)^2g^2x^2\right)^{3:2}}{mn(m+n)ga^2x^{(n-m):(m+n)}(a \mp x)^{(m-n):(m+n)}}.$$

Laonde supposto, che il corpo incominci a discendere lungo la convessità della curva dalla sommità, sicchè sia $h = x$, l' equazione $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ dopo le debite sostituzioni si convertirà in

$$\frac{mga \mp (m+n)gx}{\sqrt{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)}+m^2g^2a^2\mp 2m(m+n)ag^2x+(m+n)^2g^2x^2\right)}}$$

$$= \frac{2mn(m+n)ga^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{(m-n):(m+n)}}{\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)}+m^2g^2a^2\mp 2m(m+n)ag^2x+(m+n)^2g^2x^2\right)^{3:2}},$$

donde si trae $2mn(m+n)a^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{(m-n):(m+n)}$ $=(ma\mp(m+n)x)\left((m+n)^2x^{2n:(m+n)}(a\mp x)^{2m:(m+n)}\right.$ $\left.+m^2g^2a^2\mp 2m(m+n)ag^2x+(m+n)^2g^2x^2\right)$. La radice di quest' ultima equazione darà l' altezza dell' arco ellittico, o iperbolico, percorso il quale, il corpo partito dalla sommità abbandona le convessità della curva, e prosiegue poi liberamente il suo moto in una parabola conica secondo la nota legge de' projetti.

66. COROLL. XIII. Sia l' iperbola equilatera *FOM* (*fig.* VIII.) fra gli asintoti ortogonali *AC*, *AB*, de' quali *AC* sia verticale, *AB* orizzontale; e guidata pel vertice *O* la verticale *ON* parallela all' asintoto *AC*, si piglino in essa le ascisse *OH* x, e le ordinate normali *HE* y, e si ponga il lato della potenza dell' iperbola *OS*, ovvero $SA=1$. Per la nota proprietà dell' iperbola si ha l' equazione $(1+x)(1-y)=1$; e però $1-y=\frac{1}{1+x}$, $dy=\frac{dx}{(1+x)^2}$, $dy^2+dx^2=ds^2=\frac{dx^2(1+(1+x)^4)}{(1+x)^4}$, $ds=\frac{dx}{(1+x)^2}\sqrt{(1+(1+x)^4)}$, $\frac{dy}{ds}=\frac{1}{\sqrt{(1+(1+x)^4)}}$. Inoltre $ddy=\frac{-2dx^2}{(1+x)^3}$, $-dxddy=\frac{2dx^3}{(1+x)^3}$, $r=\frac{ds^3}{-dxddy}=\frac{(1+(1+x)^4)^{3:2}}{2(1+x)^3}$. Dunque supposta $b=x$, sarà $\frac{2b}{r}=\frac{4x(1+x)^3}{(1+(1+x)^4)^{3:2}}$. Laonde dovendo essere $\frac{dy}{ds}=\frac{2b}{r}$ nasce $\frac{1}{\sqrt{(1+(1+x)^4)}}=\frac{4x(1+x)^3}{(1+(1+x)^4)^{3:2}}$, cioè $1+(1+x)^4=4x(1+x)^3$, donde si trae l' equazione di quarto grado $x^4+\frac{8}{3}x^3+2x^2-\frac{2}{3}=0$. La radice pertan-

to di questa equazione darà ciò che si cerca, vale a dire l' altezza dell' arco iperbolico, dopo del quale il grave partito dalla sommità giù per la convessità dell' iperbola si porta fuori di essa, e prosiegue a muoversi ormai liberamente. Ogni qualvolta il grave in vece di spiccarsi dal vertice incomincia a discendere da un punto più basso distante per l' intervallo a dalla orizzontale che passa pel vertice, si presenta quest' altra equazione biquadratica da risolversi

$x^4 + \frac{(8-4a)}{3}x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \frac{2-4a}{3} = 0$, la di cui radice dà l' altezza di quell' arco iperbolico, dal quale togliendosi il primo arco di altezza a, il residuo è appunto quello, al di cui termine giunto che sia il corpo si disimpegna dalla curva e prosiegue il suo cammino con moto libero.

67. COROLL. XIV. Avendo ritrovata nel Coroll. IV la parabola conica dotata della proprietà singolare, che il grave non si distacca mai dalla medesima nel discendere per la sua convessità da qualunque punto incominci il suo moto qualora ella sia situata coll' asse verticale; nasce ora la curiosità di sapere cosa sia per accadere al grave scorrente per la detta convessità ogni qualvolta la situazione della parabola giacente in un piano verticale sia coll' asse orizzontale. Tirisi adunque nella parabola ANM (*fig.* IX) coll' asse orizzontale MO dal punto dato A, da cui il grave incomincia a discendere, la verticale AB, a cui si riferiscono le coordinate ortogonali AF, FN, cioè x, y. Si dimostra facilmente, che chiamato p il parametro della parabola, b la data BM, e λ la $BA = \sqrt{bp}$ si ha l' equazione $py = 2\lambda x - x^2$. Quindi

$dy = \frac{2\lambda dx - 2xdx}{p}$, $dy^2 + dx^2 = ds^2 = \left(\frac{4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2}{p^2}\right)dx^2$,

$ds = \frac{dx}{p}\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}$,

$\frac{dy}{ds} = \frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}}$. Parimente $ddy = -\frac{2dx^2}{p}$;

$-dxddy = \frac{2dx^3}{p}$. Dunque $r = \frac{ds^3}{-dxddy}$

$= \frac{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2}$. Fatta pertanto l' ipotesi, che il grave parta dal punto A, onde si abbia $h = x$, l' uguaglianza delle due espressioni $\frac{dy}{ds} = \frac{2h}{r}$ offre l' equazione

$$\frac{2\lambda - 2x}{\sqrt{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)}} = \frac{4p^2 x}{(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2)^{3/2}},$$ ovvero $(2\lambda - 2x)(4\lambda^2 - 8\lambda x + 4x^2 + p^2) = 4p^2 x$, che si riduce alla cubica

$$x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$$

la di cui radice dà l'altezza dell'arco parabolico ricercato, sicchè il corpo discendendo pel convesso della curva se ne allontana allorchè giugne al termine di tal arco. Qualunque volta il grave parte da un punto più basso di A, e distante per l' intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A si trova l' equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 + \frac{1}{2}p^2 a = 0,$$

e la radice di questa dà l' altezza dell' arco, dal quale sottratto l' arco di altezza a il residuo è appunto il ricercato.

Se nell' ipotesi della gravità costante si vuole collocato il corpo sulla convessità della parabola in un punto infinitamente distante dal vertice, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all' asse orizzontale acquisti un valore infinito, allora si fa manifesto, che nell' equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + (3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0,$$ il valore della radice x non può essere che infinito, altrimenti verrebbe l' assurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l' infinito sarebbe uguale a zero. Essendo poi infinito il valore così di λ come

di x, svaniscono al confronto degli altri i due termini $\frac{3}{4}p^2x$ $-\frac{1}{4}\lambda p^2$, e resta $x^3-3\lambda x^2+3\lambda^2x-\lambda^3=0$, che è visibilmente $(x-\lambda)^3=0$, e quindi $x=\lambda$. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dal vertice nella parabola verticalmente collocata ma coll' asse orizzontale, e discende per la convessità, descrive tutto l' arco infinito fino al menzionato vertice senza mai distaccarsi.

PROBLEMA XII. (*fig.* X.)

§. 68. *Ritrovare la linea* CMN *situata in un piano verticale, e riferita all' asse verticale* AB, *sulla quale collocato un grave in parte opposta all' asse, questo discenda per essa senza premerla per essere la pressione nata dalla gravità uguale dovunque alla forza centrifuga.*

SOLUZIONE.

L' ipotesi somministra l' equazione differenziale della curva $\frac{dy}{ds}=\frac{2b}{r}$. Posto pertanto, che il grave incominci a discendere dal punto M più basso della sommità A dell' asse per l' intervallo $AO=a$, per modo che essendo $AR=x$ diventi $b=OR=x-a$, si otterrà $\frac{dy}{ds}=\frac{2x-2a}{r}$; e perchè il raggio r dell' evoluta si sa essere $=\frac{ds^3}{-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}$, nasce quindi $dy=\frac{-2(x-a)\,dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2}$. Prendo ora l' elemento ds, cioè $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ per costante, ed ho $\frac{dxddx+dyddy}{ds}=0$,

ovvero $-dxddx = dyddy$, e di qui $-dyddx = \frac{dy^2ddy}{dx}$. Ma $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dxddy - dyddx}{dx^2}$; dunque sostituendo per $-dyddx$ il valore ritrovato, si deduce $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(dx^2 + dy^2)\,ddy}{dx^3}$, ovvero $dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ds^2ddy}{dx}$, cioè $\frac{dx^2 d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{ds^2} = \frac{ddy}{dx}$; e questo valore sostituito nell'espressione di dy, nasce $dy = \frac{-2(x-a)\,ddy}{dx}$, che separate le variabili diventa $\frac{ddy}{dy} = -\frac{dx}{2(x-a)}$. Ora si vede chiaro, che l'integrale di questa equazione è $\log. dy = -\frac{1}{2}\log.(x-a) + \log. cds$, essendosi presa per costante ds. Laonde passando da' logaritmi a' numeri si troverà $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$, e quadrando $dy^2 = \frac{c^2(dx^2 + dy^2)}{x-a}$; onde $(x-a)dy^2 - c^2dy^2 = c^2dx^2$, e finalmente $dy = \frac{cdx}{\sqrt{(x-a-c^2)}}$, ed integrando $y = 2c\sqrt{(x-a-c^2)} + \text{cost.}$ Suppongasi, che alla sommità A, quando $x = 0$, sia $y = AC = b$, e nascerà $\text{cost.} = b - 2c\sqrt{(-a-c^2)}$. Perciò $y = b - 2c\sqrt{(-a-c^2)} + 2c\sqrt{(x-a-c^2)}$. A ritrovare poi la prima costante c ricorro all' equazione differenziale $dy = \frac{cds}{\sqrt{(x-a)}}$, dalla quale si ricava $c = \frac{dy}{ds}\sqrt{(x-a)}$; e siccome $\frac{dy}{ds}$ esprime il seno dell' angolo, cui la linea ricercata forma in qualsivoglia punto colla retta verticale, se un tal seno pel punto M quando $x = a$ si chiama ϕ, è manifesto provenire $c = \phi \times 0 = 0$; e conseguentemente l' equazione alla linea cercata è $y = b$, che è quanto dire, che una tal linea è la retta verticale CS. Che

se il seno ϕ del predetto angolo si facesse corrispondere non alla posizione $x = a$, ma bensì ad $x = 0$, allora nascerebbe $c = \phi\sqrt{-a}$, e però $y = b + 2\phi\sqrt{-a}\left(\sqrt{(x - a + \phi^2 a)} - \sqrt{(\phi^2 a - a)}\right) = b + 2\phi\left(\sqrt{(a^2 - a^2\phi^2 - ax)} - \sqrt{(a^2 - \phi^2 a^2)}\right) = b + 2\phi\sqrt{(a^2(1 - \phi^2) - ax)} - 2\phi\sqrt{(a^2(1 - \phi^2))}$; dalla quale equazione si scorge, che dovendo essere $x > a$, oppure $= a$, il valore di y diventa immaginario, e il Problema impossibile fintantochè ϕ persiste ad essere qualche cosa, siccome è altronde manifesto; ma diventando $\phi = 0$, l' equazione alla linea cercata si cangia in $y = b$, cioè a dire la detta linea è una retta verticale, come dianzi. Il che ecc.

§. 69. Aggiungo per ultimo il Problema delle forze centrali secondo la Teoria Neutoniana trattato qui in una maniera particolare, dove qualche ripiego tenuto per giungere all' integrazione delle espressioni relative ai tempi potrebbe per avventura non essere inutile in qualche altra occasione. Dalla soluzione del Problema ho ricavato speditamente in tanti Teoremi tutte le proprietà più singolari ed eleganti del moto prodotto in virtù d' una forza acceleratrice variabile in ragione duplicata inversa delle distanze dal centro della forza. Tutto ciò è qui ridotto sotto un sol punto di vista, e immediatamente inferito dalla sola soluzione del Problema fondamentale.

PROBLEMA.

Un mobile gettato da principio con una certa velocità di projezione viene obbligato a camminare per una via curvilinea QMT (fig. XI.) *da una forza acceleratrice, la quale lo spinge di continuo verso un punto fisso* P *con una intensità reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del corpo dal detto punto : si cerca la curva descritta* QMT.

SOLUZIONE.

Si guidi pel dato punto P una retta PS nel piano della trajettoria, e sia M il luogo del mobile dopo un certo tempo t, e da M si conduca a PS come asse l' ordinata perpendicolare MN, e l' infinitamente prossima mn, sopra cui si ab-

baſſi il perpendicolo Mr. Chiamato al ſolito x, y reſpettivamente le coordinate ortogonali PN, MN, v il raggio vettore PM, ϕ l' angolo MPS, convien riflettere, che il corpo, il quale ſi muove per la curva QM e deſcrive nell' iſtante dt l' archetto infiniteſimo Mm, può conſiderarſi come animato da due moti, uno parallelo all' aſciſſa PN, l' altro all' ordinata NM, percorrendo col primo di queſti due moti nello ſteſſo iſtante dt la Mr ovvero dx, col ſecondo la rm, o dy, cioè i lati del rettangolo, di cui Mm è la diagonale, la velocità del primo moto ſarà dunque $= \frac{dx}{dt}$, la velocità del ſecondo $= \frac{dy}{dt}$. Ora riſolvendo la forza centrale, che ſpinge il corpo ſecondo MP, in due X, Y, quella parallela alle aſciſſe, queſta alle ordinate, è manifeſto, che dalla forza X viene ritardata la velocità $\frac{dx}{dt}$, e dalla Y viene ſminuita la velocità $\frac{dy}{dt}$, e tali diminuzioni iſtantanee di velocità (preſo dt per coſtante) ſono $\frac{-ddx}{dt}$, e $\frac{-ddy}{dt}$. Perlochè il noto principio Dinamico, che la forza acceleratrice o ritardatrice moltiplicata per l' iſtante è uguale alla variazione iſtantanea della velocità, ſomminiſtra le due equazioni $\frac{-ddx}{dt^2} = X$, $\frac{-ddy}{dt^2} = Y$. Suppongaſi in oltre, che la forza centrale in una data diſtanza r dal punto P ſia $= R$, ſicchè riſulti $\frac{Rr^2}{v^2}$ per la forza in M. Quindi è evidente, eſſere $X = \frac{Rr^2 \cos. \phi}{v^2} = \frac{-ddx}{dt^2}$, $Y = \frac{Rr^2 \text{ ſen. } \phi}{v^2} = \frac{-ddy}{dt^2}$. Se pertanto ſi mena l' altro raggio vettore Pm, e coll' intervallo PM ſi deſcrive l' archetto circolare Mg, rieſce $mg = dv$, $Mg = vd\phi$, $Mm^2 = dx^2 + dy^2 = dv^2 + v^2 d\phi^2$, $v^2 = x^2 + y^2$; e queſt' ultima equazione

zione due volte differenziata diventa $vddv + dv^2 = xddx + yddy + dx^2 + dy^2 = xddx + yddy + dv^2 + v^2 d\phi^2$, cioè $xddx + yddy = vddv - v^2 d\phi^2$, ovvero $\frac{xddx}{dt^2} + \frac{yddy}{dt^2} = \frac{vddv - v^2 d\phi^2}{dt^2}$

Ma $\frac{xddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 x \text{ cos. } \phi}{v^2} = \frac{-Rr^2 \cos. \phi^2}{v}$ (poichè $\frac{x}{v} = \cos. \phi$); ed $\frac{yddy}{dt^2} = \frac{Rr^2 y \text{ sen. } \phi}{v^2} = -\frac{Rr \text{ sen. } \phi^2}{v}$ (giacchè $\frac{y}{v} = \text{sen. } \phi$). sicchè $\frac{xddx + yddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v} = \frac{vddv - v^2 d\phi^2}{dt^2}$, ovvero $\frac{ddv - vd\phi^2}{dt^2} = \frac{-Rr^2}{v^2}$ (A). Siccome poi si ha $\frac{y}{x} = \text{tang. } \phi$, e differenziando $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\phi}{\cos. \phi^2}$, cioè $xdy - ydx = \frac{x^2 d\phi}{\cos. \phi^2}$, ed è $\frac{x}{\cos. \phi} = v$, perciò si ha $xdy - ydx = v^2 d\phi$, ovvero $vd\phi = \frac{xdy}{v} - \frac{ydx}{v} = dy \cos. \phi - dx \text{ sen. } \phi$, e questa equazione differenziata si cangia in $ddy \cos. \phi - ddx \text{ sen. } \phi - d\phi\ (dy \text{ sen. } \phi + dx \cos. \phi) = vdd\phi + dvd\phi$, ossia $ddy \text{ cos. } \phi - ddx \text{ sen. } \phi = vdd\phi + dvd\phi + d\phi\ (dy \text{ sen. } \phi + dx \text{ cos. } \phi)$, e se in questa si sostituisce il valore ricavato dal differenziare l'equazione $v^2 = x^2 + y^2$, vale a dire $vdv = xdx + ydy$ oppure $dv = \frac{xdx}{v} + \frac{ydy}{v} = dx \text{ cos. } \phi + dy \text{ sen. } \phi$, ne deriva $ddy \text{ cos. } \phi - ddx \text{ sen. } \phi = vdd\phi + 2dv\, d\phi$. Ora essendosi già trovate le due equazioni $ddy = \frac{-Rr^2 dt^2 \text{ sen. } \phi}{v^2}$, $ddx = \frac{-Rr^2 dt^2 \text{ cos. } \phi}{v^2}$, se si moltiplica la prima per cos. ϕ la seconda per sen. ϕ sottraendola dalla prima, si ottiene $ddy \text{ cos. } \phi - ddx \text{ sen. } \phi = o$; e quindi $vdd\phi + 2dvd\phi = o$, e questa moltiplicata per v, ed integrata diventa $v^2 d\phi = c^2 dt$, essendo c^2 una costante arbitraria. Preso poi di qui il valore

$dt^2 = \frac{v^4 d\phi^2}{c^4}$, e surrogato nell' equazione (A) nasce $ddv - vd\phi^2 = \frac{-Rr^2 v^2 d\phi^2}{c^4} = \frac{-v^2 d\phi^2}{b}$, posto $b = \frac{c^4}{Rr^2}$. Dunque $(bv - v^2)\, d\phi^2 = bddv$, oppure $d\phi^2 = \frac{bddv}{v(b-v)}$. Per integrale di quest' ultima equazione si prenda $\frac{bdv}{v(b-v)} = Td\phi$, essendo T una funzione variabile da definirsi; e il differenziale sarà $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = Tdd\phi + dTd\phi$. Siccome pertanto si è trovato $vdd\phi + 2dvd\phi = 0$, cioè $dd\phi = \frac{-2dvd\phi}{v}$, se si sostituisce questo valore nell' equazione precedente, essa diviene $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{-2Tdvd\phi}{v} + dTd\phi$, ed in questa sostituendo il valore assunto di $Td\phi = \frac{bdv}{v(b-v)}$, si ottiene $\frac{bddv}{v(b-v)} - \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{-2bdv^2}{v^2(b-v)} + dTd\phi$, ovvero $\frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{bdv^2}{v^2(b-v)} + \frac{bdv^2}{v(b-v)^2} = \frac{bddv}{v(b-v)} + \frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = dTd\phi$. Ma si è trovato $\frac{bddv}{v(b-v)} = d\phi^2$, e $\frac{b^2dv^2}{v^2(b-v)^2} = T^2d\phi^2$. Dunque $d\phi^2 + T^2d\phi^2 = dTd\phi$, e quindi $d\phi = \frac{dT}{1+T^2}$; e questa equazione integrata dà arc. tang. $T = \phi + \beta$, preso per β un angolo costante da determinarsi. Da quest' integrale si deduce subito $T = \text{tang.}(\beta + \phi)$ e $Td\phi = d\phi\, \text{tang.}(\beta + \phi) = \frac{bdv}{v(b-v)} = \frac{dv}{v} + \frac{dv}{b-v}$, e nuovamente integrando nasce finalmente $-\log.\cos.(\beta + \phi) = \log. v - \log.(b - v) + \log. e$, ovveramente $\log. e + \log.$

cos. $(\beta+\phi)=$ log. $(b-v)-$ log. v. Dunque per ultimo passando dai logaritmi ai numeri, risulta e cos. $(\beta+\phi)$ $=\frac{b-v}{v}$, e conseguentemente $v=\frac{b}{1+e\cos.(\beta+\phi)}$. Ora questa equazione al raggio vettore della trajettoria ricercata appartiene notoriamente ad una Sezione Conica di cui il punto P è il fuoco, b il semiparametro dell' asse principale, e l' eccentricità ossia la distanza tra il centro e il fuoco divisa pel semiasse principale, ed è rispettivamente una parabola, un' ellisse, o un' iperbola secondo i tre casi, 1°. di $e=1$, 2°. di $e<1$, 3°. di $e>1$. Il che era ecc.

70. Rimane ora a determinare il preciso valore delle costanti arbitrarie c^2, β, e introdotte nelle integrazioni. A tal effetto, si chiami u la velocità del mobile nel punto M, e ds l' archetto Mm, sicchè sia $u=\frac{ds}{dt}$; e si supponga, che il corpo da principio sia stato lanciato dal punto dato Q posto ad una distanza nota f dal centro P della forza con una velocità iniziale o di projezione $=b$, e che quivi l' angolo fatto dal raggio vettore f colla direzione della projezione, o colla tangente della curva sia $=\alpha$. Con ciò è manifesto, che nel punto iniziale Q si ha $\frac{fd\phi}{ds}=$ sen. α, $ds=\frac{fd\phi}{\text{sen.}\,\alpha}$; ed inoltre $u=\frac{ds}{dt}=\frac{fd\phi}{dt\,\text{sen.}\,\alpha}=b$, onde $\frac{d\phi}{dt}=\frac{b\,\text{sen.}\,\alpha}{f}$. Ma si è trovato $c^2=\frac{v^2d\phi}{dt}$; dunque sostituendo i valori di $v^2=f^2$, e di $\frac{d\phi}{dt}=\frac{b\,\text{sen.}\,\alpha}{f}$ si ottiene la ricercata costante $c^2=fb\,\text{sen.}\,\alpha$.

71. Per ritrovare l' altra costante β, osservo, che l' equazione differenziale $Td\phi=\frac{bdv}{v(b-v)}$ dà $T=\frac{bdv}{v(b-v)d\phi}$, dove $\frac{vd\phi}{dv}$ esprime la tangente dell' angolo fatto dal raggio vettore coll' elemento della curva, ovvero colla sua tangente, sicchè

nel punto iniziale ♀ diviene $\frac{vd\phi}{dv} = \text{tang.}\,\alpha, v = f$, e conſeguentemente $T = \frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}$. Laonde arc. tang. T $= \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right. = \beta + \phi$. Se pertanto nel detto punto ♀ l' angolo ϕ diventa uguale ad un angolo noto Δ, ne deriva il valore ricercato di $\beta = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $- \Delta = \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha} - \text{tang.}\,\Delta\right) : \left(1 + \frac{b\,\text{tang.}\,\Delta}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $= \text{arc. tang.}\left(\frac{b - (b-f)\,\text{tang.}\,\alpha\,\text{tang.}\,\Delta}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha + b\,\text{tang.}\,\Delta}\right)$

72. Per ciò che riguarda l' eccentricità e, eſſendoſi trovata l' equazione della trajettoria $v = \frac{1}{1 + e\,\text{coſ.}\,(\beta + \phi)}$ queſta ſomminiſtra $e = \frac{b - v}{v\,\text{coſ.}\,(\beta + \phi)}$; e però, diventando nel punto iniziale ♀ della curva $v = f$, $\phi = \Delta$, naſce $e = (b - f) : (f\,\text{coſ.}\,(\beta + \Delta))$. Siccome poi ſi è trovato $\beta + \Delta$ $= \text{arc. tang.}\left(\frac{b}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $= \text{arc. ſec.}\left(\frac{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}\right)$ $= \text{arc. coſ.}\left(\frac{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}\right)$; e quindi coſ. $(\beta + \Delta)$ $= \frac{(b-f)\,\text{tang.}\,\alpha}{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}$: riſulta finalmente $e = \frac{\sqrt{(b^2 + (b-f)^2\,\text{tang.}\,\alpha^2)}}{f\,\text{tang.}\,\alpha}$.

73. Per indagare preſentemente i varj accidenti del moto per la trajettoria già ritrovata, incomincio ad oſſervare, che la precedente equazione $v^2 d\phi = c^2 dt$ ſi riduce all' altra

$\frac{\frac{1}{2}v^2 d\phi}{dt} = \frac{1}{2}c^2$, nella quale essendo $\frac{1}{2}v^2 d\phi$ uguale all' ajuola MPm della curva, si vede tosto il rapporto costante dell'elemento dell' area all' istante, in cui è descritto, e ciò succedendo in tutti gl' istanti d'un dato tempo qualunque, ne discende immediatamente il seguente

TEOREMA I.

Le aree comprese da due raggi vettori e dall' arco della trajettoria sono proporzionali al tempo, cui il mobile consuma a percorrer quell' arco.

74. Guidata la tangente MO, e ad essa la normale $PO = p$, è cosa evidente, che l' ajuola PMm ha per valore tanto $\frac{1}{2}v^2 d\phi = \frac{1}{2}c^2 dt$, quanto $\frac{1}{2}pds$; e però si ha $c^2 dt = pds$. Ma $u = \frac{ds}{dt}$, ovvero $udt = ds$. Dunque $c^2 dt = pudt$, ossia $u = \frac{c^2}{p}$, e quindi il

TEOREMA II.

La velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria è in ragione inversa della normale condotta dal fuoco alla tangente della curva in quel punto.

75. L' equazione $v^2 d\phi = c^2 dt$ dà $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c^2}{v^2}$. Ora $\frac{d\phi}{dt}$ esprime la velocità angolare del mobile; ne viene adunque il

TEOREMA III.

La velocità angolare del corpo nella trajettoria seguita la ragione inversa del quadrato della sua distanza dal centro della forza, ovvero del fuoco.

76. Per determinare poi la misura precisa della velocità u del corpo in qualunque punto della curva, si consideri, che

essendo $u^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$, si ha per la differenziazione $udu = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2}$, e poichè si è trovato $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \text{ cos. } \phi}{v^2}$, $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{-Rr^2 \text{ sen. } \phi}{v^2}$, se si moltiplica la prima di queste equazioni per dx, la seconda per dy, ne deriva $\frac{dxddx + dyddy}{dt^2} = udu = \frac{-Rr^2 (dx \text{ cos. } \phi + dy \text{ sen. } \phi)}{v^2} = \frac{-Rr^2 dv}{v^2}$. Laonde integrando si ottiene $u^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{cost.}$ La costante di quest' integrale si ritrova con avvertire, che quando diviene $v = f$, la velocità u si cangia nella velocità iniziale o di projezione h, il che dà cost. $= h^2 - \frac{2Rr^2}{f}$: e quindi $u^2 = h^2 - 2Rr^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)$). Ed ecco il

TEOREMA IV.

La misura assoluta della velocità del mobile in qualunque punto della trajettoria è uguale all' espressione

$$\sqrt{\left(h^2 - 2Rr^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)\right)}.$$

76. Ritrovata l' espressione della velocità in qualsivoglia punto della curva, è facile ora il passaggio a determinare que' punti, ne' quali la velocità del mobile è la *massima*, o la *minima* di tutte le altre. Basta uguagliare a zero il differenziale della detta espressione, e da ciò deriva

$$d.\sqrt{\left(h^2 - 2Rr^2 \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)\right)} = \frac{-Rr^2 dv}{v^2 \sqrt{\left(h^2 - 2Rr^2 \left(\frac{1}{f} = \frac{1}{v}\right)\right)}} = 0,$$ va-

le a dire $-\frac{dv}{v^2} = d.\frac{1}{v} = 0$. Ma già si è veduto essere

$v = \frac{b}{1 + e \cos.(\beta + \phi)}$. Per conseguenza sarà $d.\frac{1}{v}$ $= d.\left(\frac{1 + e \cos.(\beta + \phi)}{b}\right) = -ed\phi \operatorname{sen.}(\beta + \phi) = 0$. Dal che si deduce tanto $\beta + \phi = 0$, quanto $\beta + \phi = 180°$. Di qui

TEOREMA V.

La massima e la minima velocità del mobile nella trajettoria da esso percorsa corrispondono alle due estremità dell' asse principale, ossia alle due apsidi ima, e somma.

77. Se un altro corpo sollecitato verso il punto fisso P da quella stessa forza, che accompagna il mobile nella trajettoria, casca in linea retta verso P, e giunto ad una distanza da P, la qual sia uguale al raggio vettore v, acquista ivi una velocità $= u'$, è manifesto che sarà $du' = \frac{Rr^2 dt}{v^2}$, ed essendo $u'dt$ $= -dv$, cioè $dt = \frac{-dv}{u'}$, nascerà $u'du' = \frac{-Rr^2 dv}{v^2}$, il di cui integrale è $u'^2 = \frac{2Rr^2}{v} + \text{cost.}$ Perciò supposto, che ad una distanza nota f dal centro della forza la velocità u' diventa uguale ad una velocità data b', si deduce cost. $= b'^2 - \frac{2Rr^2}{f}$, e conseguentemente $u'^2 = b'^2 - 2Rr^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)$, ed $u' = \sqrt{\left(b'^2 - 2Rr^2\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{v}\right)\right)}$. Da ciò apparisce $u' = u$ allorchè $b' = b$, vale a dire il

TEOREMA VI.

Il mobile ha in ogni punto della sua trajettoria quella velocità che avrebbe un altro corpo il quale si trovasse alla stessa distanza dal centro della forza, verso cui discendesse in linea retta, supponendo semplicemente, che esso abbia avuto una volta

la medesima velocità del primo ad uguale distanza dal centro.

78. Fingasi ora, che il mobile dal punto della trajettoria, in cui si trova, caschi lungo il raggio vettore verso il centro della forza, e venga sollecitato dalla stessa forza centripeta, la quale però rimanga costante per tutta la caduta: in questo supposto si scorge chiaramente che chiamato z lo spazio descritto dal corpo nella caduta lungo il raggio vettore v verso il centro, u'' la velocità da esso acquistata alla fine di tale spazio, si ricava l'equazione $u''du'' = \frac{Rr^2dz}{v^2}$, e mediante l'integrazione $\frac{2Rr^2z}{v^2} = u''^2$ senza costante da aggiungersi, giacchè si annullano insieme z, ed u''. Se pertanto si suppone che la velocità u'' acquistata dal mobile nella caduta sia uguale alla velocità u del medesimo nella trajettoria, siccome $u = \frac{c^2}{p}$, sarà parimente $u''^2 = \frac{c^4}{p^2} = \frac{2Rr^2z}{v^2}$, ed essendo $c^4 = Rr^2b$, ne viene $\frac{2z}{v^2} = \frac{b}{p^2}$, ovvero $z = \frac{\frac{1}{2}bv^2}{p^2}$. Di qui

TEOREMA VII.

Cascando verso il centro della forza da qualunque punto della trajettoria il mobile sollecitato dalla forza centrale corrispondente al detto punto, la quale però rimanga costante per tutta la caduta, acquista la velocità, che esso aveva in quel punto della curva, dopo esser caduto per uno spazio, che è quarto proporzionale al quadrato della normale condotta dal centro della forza sulla tangente della trajettoria nel mentovato punto, al quadrato del raggio vettore, ed alla quarta parte del parametro dell' asse principale.

79. Cada ora lo stesso corpo verso il centro della forza lungo il raggio vettore, e si supponga, che la forza non rimanga più costante come nel Teor. prec.; ma varii durante la caduta in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro. In questa ipotesi essendo $\frac{Rr^2}{v^2}$ la forza centripeta nel

principio

principio della caduta, sarà essa, scorso lo spazio z, ovvero alla distanza $v-z$ dal centro, espressa da $\frac{Rr^2}{(v-z)^2}$. Laonde nominando u''' la velocità acquistata nel cadere per lo spazio z, si ottiene $\frac{Rr^2dz}{(v-z)^2}=u'''du'''$, il di cui integrale è $\frac{2Rr^2}{v-z}$ $=u'''^2+$ cost. E poichè u''' e z svaniscono insieme, proviene cost. $=\frac{2Rr^2}{v}$; e conseguentemente $u'''^2=2Rr^2\left(\frac{1}{v-z}-\frac{1}{v}\right)$ $=\frac{2Rr^2z}{v(v-z)}$. Perlochè supponendo $u'''=u=\frac{c^2}{p}$, cioè $u'''^2=\frac{c^4}{p^2}=\frac{Rr^2b}{p^2}$, ne deriva $\frac{2z}{(v-z)v}=\frac{b}{p^2}$; e quindi $z=\frac{bv^2}{2p^2+bv}=\frac{bv}{\frac{2p^2}{v}+b}$. Dunque il

TEOREMA VIII.

Un corpo, che da qualunque punto della sua trajettoria cade lungo il raggio vettore verso il centro della forza, e viene sollecitato durante la sua caduta dalla stessa forza variante in ragione duplicata inversa della distanza dal centro, acquista la stessa velocità, che compete al detto punto della trajettoria dopo aver trascorso uno spazio, il quale si ha, se dopo aver presa una terza proporzionale al raggio vettore, e alla normale si piglia una quarta proporzionale al doppio di quella congiunto col semiparametro, allo stesso semiparametro ed al raggio vettore.

80. Per ciò che spetta al tempo impiegato dal mobile a correre per un arco qualunque QM della trajettoria, basta ricorrere alla formola $dt=\frac{v^2d\phi}{c^2}=\frac{v^2d\phi}{hf\,\text{sen.}\,\alpha}=\frac{2PMm}{hf\,\text{sen.}\,\alpha}$, dalla quale mediante l'integrazione si ricava $t=\frac{2QPM}{hf\,\text{sen.}\,\alpha}$ senza costante perchè si annullano insieme t, e PQM.

81. Se si vuole l'espressione del tempo indipendentemente dall' aja QPM, si sostituisca nell'equazione $dt = \frac{v^2 d\phi}{c^2}$ il valore dianzi trovato di v^2, e si avrà $dt = \frac{b^2}{c^2} \cdot \frac{d\phi}{(1 + e \cos.(\beta+\phi))^2}$; onde integrando nascerà $t = \frac{b^2}{c^2} \int \frac{d\phi}{(1 + e \cos.(\beta + \phi))^2}$. Per ritrovare il valore di questa espressione integrale io assumo questa equazione $\int \frac{d\phi}{(1 + e \cos.(\beta+\phi))^2} = \frac{M \operatorname{sen}(\beta + \phi)}{1 + e \cos.(\beta + \phi)} + N \int \frac{d\phi}{1 + e \cos.(\beta + \phi)}$, dalla quale mediante la differenziazione ritraggo

$$\frac{Md\phi \cos.(\beta + \phi)(1 + e \cos.(\beta + \phi)) + Med\phi \operatorname{sen}.(\beta + \phi)^2}{1 + e \cos.(\beta + \phi)} + \frac{Nd\phi}{1 + e \cos.(\beta + \phi)} =$$

(riducendo allo stesso denominatore)

$$\frac{Md\phi \cos.(\beta + \phi) + Nd\phi + Ned\phi \cos.(\beta + \phi) + Med\phi}{(1 + e \cos.(\beta + \phi))^2}.$$

Laonde sarà

$$Md\phi \cos.(\beta + \phi) + Md\phi + Ncd\phi \cos.(\beta + \phi) + Nd\phi - d\phi = 0.$$

Di qui si raccoglie $M = -Ne$, $N - Ne^2 = 1$, $N = \frac{1}{1 - e^2}$, $M = \frac{-e}{1 - e^2}$. Con ciò diventa

$$t = -\frac{b^2 e \operatorname{sen}.(\beta + \phi)}{c^2(1 - e^2)(1 + e \cos.(\beta + \phi))} + \frac{b^2}{c^2(1 - e^2)} \int \frac{d\phi}{1 + e \cos.(\beta + \phi)}.$$

Ridotta per tal modo l'integrazione a non dipendere se non dalla formola $\int \frac{d\phi}{1 + e \cos(\beta + \phi)}$,

per conseguire il valore di questa pongo cos. $(\beta+\phi)$ $= \frac{1-x^2}{1+x^2}$; e però sen. $(\beta+\phi) = \frac{2x}{1+x^2}$, $d\phi$ cos. $(\beta+\phi)$ $= \frac{2dx(1-xx)}{(1+xx)^2}$, $d\phi = \frac{2dx}{1+xx}$. Sicchè si avrà $1+e$ cos. $(\beta+\phi) = \frac{1+e+(1-e)xx}{1+xx}$; e quindi

$$\int \frac{d\phi}{1+e\cos.(\beta+\phi)} = \int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}.$$ Ora quest' ultima espressione $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$ soggiace alle note regole d' integrazione delle frazioni razionali, e tre sono i casi che possono occorrere.

CASO I.

$e < 1$

82. In questo caso diventa $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2}{1+e}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{1-e}{1+e}\right)xx} = \frac{2}{1+e}\sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} \times$$

$$\int \frac{dx\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}}{1+\left(\frac{1-e}{1+e}\right)xx} = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}}.\ \text{arc. tang.}\left(\frac{x\sqrt{(1-e)}}{\sqrt{(1+e)}}\right)$$

$= \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)}}$. arc. tang. $\left(\frac{(1-e)x}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$. Ma si trova

$$x = \sqrt{\left(\frac{1-\cos.(\beta+\phi)}{1+\cos.(\beta+\phi)}\right)} = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(\beta+\phi) = \frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{1+\cos.(\beta+\phi)},$$

ed inoltre 2. arc. tang. $\left(\frac{(1-e)x}{\sqrt{(1-e^2)}}\right)$

$$= \text{arc. tang.}\left(\frac{2(1-e)x : \sqrt{(1-e^2)}}{1-\frac{(1-e)^2xx}{1-e^2}}\right)$$

$$= \text{arc. tang.}\left(\frac{2(1-e)x\sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2-(1-e^2)xx}\right) = \text{arc. tang.}\frac{2x\sqrt{(1-e^2)}}{1+e-(1-e)xx}$$

$$= \text{arc. tang.}\left(\frac{2\,\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{(1+e)(1+\text{cos.}(\beta+\phi))-(1-e)(1-\text{cos.}(\beta+\phi))}\right)$$

$= \text{arc. tang.}\left(\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}(\beta+\phi)}\right)$. Dunque si avrà

$$\frac{b^2}{c^2(1-e^2)}\int\frac{d\phi}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)} = \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\times$$

$\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}(\beta+\phi)}\right)$ e per conseguenza

$$t = -\frac{b^2e\,\text{sen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)\right)} + \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\times$$

$\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}(\beta+\phi)}\right) + \text{cost.}$ Sicchè supposto, che nel punto $\mathfrak{Q}$, da cui si vuol cominciare a contare il tempo, sia $\phi = g$, si avrà per fine $t = \frac{b^2e\,\text{sen.}(\beta+g)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{cos.}(\beta+g)\right)}$

$$-\frac{b^2e\,\text{sen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)\right)} - \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\times$$

$$\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{sen.}(\beta+g)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}(\beta+g)}\right)$$

$$+\frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}.\,\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(1-e^2)}}{e+\text{cos.}(\beta+\phi)}\right)$$

CASO II.

$e > 1$

83. In questo secondo caso si scrive $\frac{2dx}{1+e+(1-e)xx}$

$$= \frac{2dx}{1+e-(e-1)xx} = \frac{2dx:(1+e)}{1-\frac{(e-1)xx}{e+1}}$$

$$= \frac{2dx:(1+e)}{\left(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)\left(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)} = \frac{dx:(1+e)}{1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$$

$+ \frac{dx:(1+e)}{1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}}$. Dunque integrando si avrà

$$\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} = \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log.\left(1+x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log.\left(1-x\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right)$$

$= \frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log.\left(\frac{\sqrt{(e+1)}+x\sqrt{(e-1)}}{\sqrt{(e+1)}-x\sqrt{(e-1)}}\right)$, e sostituito per x il suo valore $\sqrt{\frac{1-\text{cos.}(\beta+\phi)}{1+\text{cos.}(\beta+\phi)}}$, nasce $\int \frac{2dx}{1+e+(1-e)xx} =$

$$\frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} . \log. \frac{\sqrt{(e+1)}\sqrt{\left(1+\text{cos.}(\beta+\phi)\right)}+\sqrt{(e-1)}\sqrt{\left(1-\text{cos.}(\beta+\phi)\right)}}{\sqrt{(e+1)}\sqrt{\left(1+\text{cos.}(\beta+\phi)\right)}-\sqrt{(e-1)}\sqrt{\left(1-\text{cos.}(\beta+\phi)\right)}} =$$

(moltiplicando sopra e sotto pel numeratore)

$\frac{1}{\sqrt{(e^2-1)}} \log. \frac{e+\text{cos.}(\beta+\phi)+\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)}$. Perlochè nasce $t = -\frac{b^2 e\,\text{sen.}(\beta+\phi)}{c^2(1-e^2)(1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi))}$

$$+ \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \log. \frac{e+\text{cos.}(\beta+\phi)+\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)} + \text{cost.}$$

Siccome poi svanisce t allorchè $\phi = g$, perciò ne deriva

$$\text{cost.} = \frac{b^2 e\,\text{sen.}(\beta+g)}{c^2(1-e^2)\left(1+e\,\text{cos.}(\beta+g)\right)}$$

$$- \frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}} \log. \frac{e+\text{cos.}(\beta+g)+\text{sen.}(\beta+g)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+g)}.$$

Dunque surrogato questo valore nell' espressione di t, nasce finalmente $t = \frac{b^2 e}{c^2(1-e^2)}\left(\frac{\text{sen.}(\beta+g)}{1+e\,\text{cos.}(\beta+g)} - \frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)}\right)$

$$+\frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\log.\frac{e+\text{cos.}(\beta+\phi)+\text{sen.}(\beta+\phi)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+\phi)}.$$

$$-\frac{b^2}{c^2(1-e^2)^{3:2}}\log.\frac{e+\text{cos.}(\beta+g)+\text{sen.}(\beta+g)\sqrt{(e^2-1)}}{1+e\,\text{cos.}(\beta+g)}$$

CASO III.

$$e = 1$$

84. Quest' ultimo caso non può trattarsi col metodo precedente, come apparisce dal valore infinito che acquistano i coefficienti indeterminati M, N. Siccome però $1+\text{cos.}(\beta+\phi) = 2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2$, così sarà $t = \frac{b^2}{c^2}\int\frac{d\phi}{4\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^4}$. Facendo pertanto $\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\phi = \omega$, e perciò $d\phi = 2d\omega$, nasce $t = \frac{b^2}{2c^2}\int\frac{d\omega}{\text{cos.}\,\omega^4}$. Ma per le note regole d' integrazione de' monomj trigonometrici si ha

$$\int\frac{d\omega}{\text{cos.}\,\omega^4} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\omega^3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{cos.}\,\omega} = \frac{\text{sen.}\,\omega(1+2\,\text{cos.}\,\omega^2)}{3\,\text{cos.}\,\omega^3}.$$

Dunque sostituendo ne verrà

$t = \frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}+\text{cost.}$ La costante si determina, come dianzi, con osservare che t diventa zero allorchè ϕ si cangia in g; il che dà cost. $= \frac{-b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\beta+g)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+g)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+g)^3}$. Perlochè risulta $t = \frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}$

$$-\frac{b^2}{2c^2}\cdot\frac{\text{sen.}\frac{2}{3}(\beta+g)\left(1+2\,\text{cos.}\frac{1}{3}(\beta+g)^2\right)}{\text{cos.}\frac{1}{3}(\beta+g)^3}.$$

85. Si può altrimenti ritrovare il valore di t in questo caso con far uso della già praticata sostituzione di $\text{cos.}(\beta+\phi)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$; poichè si avrà $d\phi=\frac{2dx}{1+xx}$, ed $1+\text{cos.}(\beta+\phi)=\frac{2}{1+xx}$, e perciò $\frac{d\phi}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}$ $=\frac{1}{2}dx(1+xx)$. Laonde $\int\frac{d\phi}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}=\frac{1}{2}x$ $+\frac{1}{6}x^3=\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{2(1+\text{cos.}(\beta+\phi))}+\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)^3}{6(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^3}+\text{cost.}$

$$=\frac{\text{sen.}(\phi+\beta)}{2(1+\text{cos.}(\beta+\phi))}+\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(1-\text{cos.}(\beta+\phi)^2)}{6(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^3}+\text{cost.}$$

$$=\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)}{2(1+\text{cos.}(\beta+\phi))}+\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(1-\text{cos.}(\beta+\phi))}{6(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}+\text{cost.}$$

$=\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(2+\text{cos.}(\beta+\phi))}{3(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}+\text{cost.}$ Da ciò si ricava

$$t=\frac{b^2}{c^2}\int\frac{d\phi}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}$$

$=\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(2+\text{cos.}(\beta+\phi))}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}+\text{cost.}$; ed essendo

$\text{cost.}=-\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+g)(2+\text{cos.}(\beta+g))}{(1+\text{cos.}(\beta+g))^2}$, se ne deduce finalmente $t=\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+\phi)(2+\text{cos.}(\beta+\phi))}{(1+\text{cos.}(\beta+\phi))^2}$

$-\frac{b^2}{3c^2}\cdot\frac{\text{sen.}(\beta+g)(2+\text{cos.}(\beta+g))}{(1+\text{cos.}(\beta+g))^2}$, la qual espressione, per essere $1+\text{cos.}(\beta+\phi)=2\,\text{cos.}\frac{1}{2}(\beta+\phi)^2$, e $\text{sen.}(\beta+\phi)$

$= 2 \text{ sen.} \frac{1}{2}(\beta+\phi) \text{ cos.} \frac{1}{2}(\beta+\phi)$, equivale manifestamente alla precedente $\frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{sen.} \frac{1}{2}(\beta+\phi)(1+2 \text{ cos.} \frac{1}{2}(\beta+\phi)^2)}{\text{cos.} \frac{1}{2}(\beta+\phi)^3}$

$$- \frac{b^2}{2c^2} \cdot \frac{\text{sen.} \frac{1}{2}(\beta+g)(1+2 \text{ cos.} \frac{1}{2}(\beta+g)^2)}{\text{cos.} \frac{1}{2}(\beta+g)^3}.$$

SCOLIO.

Da aggiungersi dopo il §. 53 della Memoria precedente.

Ne' seguenti Corollarj vengono dimostrati i Teoremi da me proposti nel I. Volume degli Atti della nostra Società sopra la *discesa de' Corpi per la convessità delle Curve*. Il celebre Sig. Abb. *Frisi* nel secondo tomo delle sue Opere stampate in Milano esponendo alcuni di questi miei Teoremi fa avvertire pag. 115. una discrepanza notabile fra le formole, che egli ottiene col suo metodo di dimostrare, ed i miei risultati. Ma una tal discrepanza deriva dal principio da esso quivi adottato, che la misura assoluta della forza centrifuga sia una lineetta terza proporzionale al diametro del cerchio osculatore, e all' archetto della curva descritto in un dato istante; laddove all' opposto egli è incontrastabile, che per conseguire la vera misura della forza centrifuga convien sempre pigliare una terza proporzionale, non al diametro del cerchio osculatore, ma al semidiametro, e poi all' archetto della curva, che è quanto dire una lineetta doppia di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Frisi* viene proposta. In fatti o vuolsi concepire la curva come poligona infinitilatera, e però l' azione della forza centrifuga non rigorosamente continua, ma interrotta da un istante all' altro; o si vuole immaginare la curva come rigorosa, e quindi continua l' azione della forza centrifuga senza alcuna interruzione neppure istantanea. Nel primo supposto la misura della forza centrifuga è l' impulso istantaneo, che fa percorrere al corpo la lineetta compresa fra l' estremità del latercolo prolungato della curva e l' estremità del latercolo contiguo, e questa lineetta nel presente supposto è visibilmente terza proporzionale al semidia-

metro

metro del cerchio osculatore, e all' archetto. Nella seconda ipotesi della curva rigorosa, e dell' azione continua della forza centrifuga, la quale in conseguenza non opera per impulsi istantanei, ma con matematica continuità, la lineetta compresa fra le estremità della tangente della curva e dell' archetto è bensì terza proporzionale al diametro del cerchio osculatore, e all' archetto; ma tal lineetta non può più prendersi per misura totale della forza centrifuga. Imperciocchè essa viene descritta in virtù della forza centrifuga, e della sua azione continua e invariata pel dato istante con moto equabilmente accelerato, e perciò non essa linea semplicemente, ma il doppio di lei dee rappresentare l'effetto intero della forza centrifuga in quell' istante, cioè la velocità generata dalla forza nella durata dell' istante. Conseguentemente anche nel secondo supposto la misura totale e assoluta della forza centrifuga è indubitatamente il doppio di quella, che dal Ch. Sig. Abb. *Frisi* viene assegnata.

Dopo ciò sarebbe inutile, che io qui annoverassi a questo illustre Geometra i molti e grandi assurdi, che derivano dal suo principio, essendo persuaso, che una passeggera riflessione sull' argomento controverso basterà per fargli comprendere gl' inconvenienti del suo assunto.