DI UN NUOVO METODO GENERALE DI ESTRARRE LE RADICI NUMERICHE

MEMORIA

Del Signor Cav. Paolo Ruffini

Ricevuta li 30 *Settembre* 1812.

SEZIONE I

Esposizione pratica, e dimostrazione del sovraindicato metodo.

Nel (N.° 269) del mio corso d'Algebra elementare esposi un metodo generale di estrarre una qualunque radice da un numero dato. In seguito ho veduto potersi tal metodo rendere più semplice; ed è principalmente, onde indicare questa semplificazione, che io lo espongo di nuovo nella presente Memoria.

1. Cominciamo per maggiore chiarezza da qualche caso particolare, e vogliasi quindi in primo luogo la radice quarta del numero

19987173376

Poichè 4 è l'indice della radice domandata, comincio dal dividere qui sotto in (I) il proposto numero di quattro in quattro cifre principiando dalla destra, e cerco per mezzo di opportune tavole il massimo quadrato-quadrato, che si contiene nella prima parte a sinistra 199. Essendo questo 81 la cui radice quarta è 3, scrivo in (II) il 3 ottenuto, e alla sua destra separata con una lineetta verticale scrivo l'unità, tanti zeri, quanto è l'indice 4 diminuito di 1, cioè tre, e infine la prima parte 199 del dato numero (I). Ciò fatto, pongo in una seconda linea orizzontale, e nella colon-

na verticale seconda lo 1, moltiplico questo 1 per 3, sommo il prodotto, che ne viene col numero sovrapposto, che nel caso presente è zero, e colloco il risultato 3 alla destra dello 1. Moltiplico quindi il 3 ottenuto per 3, unisco il prodotto 9 col numero sovrapposto, che qui pure è zero, e scrivo il risultato 9 alla destra del 3. Moltiplicato in egual modo questo 9 per 3, e scritto alla sua destra il prodotto, che se ne ottiene, sommato col sovrapposto numero, che anche qui è zero, cioè il 27, moltiplico finalmente questo 27 pel solito 3, sottraggo il prodotto 81 dal sovrapposto 199, e pongo alla destra il residuo 118. Formata così la seconda riga, passo a formarne una terza, collocando in essa il solito 1 nella terza colonna, moltiplicando quindi lo stesso 1, e gli altri numeri 6, 27, che si ottengono successivamente, tutti pel medesimo 3, e sommando i successivi prodotti coi numeri della seconda riga corrispondenti: ottienesi così il 6 col moltiplicare lo 1 per 3, e sommare il prodotto 3 col 3 sovrapposto; risulta il 27 col moltiplicare il 6 per 3, e sommare il prodotto 18 col sovrapposto 9, e ricavasi in fine il 108 col moltiplicare per 3 il 27, e sommare il prodotto 81 col 27 sovrapposto. Operando in seguito nella stessa maniera, formo una quarta riga, avendo però l'avvertenza di porre in questa lo 1 nella quarta colonna; nel modo medesimo ne formo una riga quinta, portando lo 1 nella colonna quinta; e finalmente ne formo una sesta, nel caso presente ultima, col solo 1 collocato nella sesta, ed ultima colonna.

Determinati con questa operazione in (II) nell' ultima colonna a destra i numeri 1, 12, 54, 108, 118, aggiungo alla destra del secondo di essi uno zero, alla destra del terzo due zero, tre alla destra del quarto, e alla destra dell' ultimo aggiungo la seconda parte 8717 del dato numero (I). Scrivo quindi in (III) i numeri risultati; e poichè il numero, che deve ora determinarsi, deve essere non > 9, ed insieme non maggiore del quoto, che risulta, dividendo l'ultimo de' numeri (III) pel penultimo, cerco questo quoto; e siccome

nel caso presente esso è 11, lo trascuro, e tengo conto del 9: ma ancora questo 9 potrebbe essere troppo grande; per ciò riconoscere con qualche sollecitudine tolgo in (III) le ultime due cifre dagli ultimi tre numeri, scrivo i numeri, che ne risultano, 54, 1080, 11887, in (IV), collocando alla loro sinistra separato con una lineetta verticale il 9, e posto il 54 sotto del 1080, lo moltiplico per 9, e ne sommo il prodotto col 1080 sovrapposto; scrivo il 1566, che ne viene alla destra del 54, e lo moltiplico per 9, osservando, se il prodotto, che ne nasce, è, o non è maggiore del sovrapposto 11887: ora nel caso presente esso ne è realmente maggiore, essendo = 14094. Dunque dirò, che il 9 è un numero troppo grande, e passerò ad osservare, se sia opportuno lo 8. Operando perciò con lo 8, come ho fatto col 9, lo scrivo sotto del 9 stesso in (IV), moltiplico per esso il 54, sommo il prodotto, che ne viene, col sovrapposto 1080, e scrittone il risultato 1502 nella terza colonna, moltiplico questo per 8, e siccome il prodotto 12016, che ne nasce, è ancora maggiore del sovrapposto 11887, dirò, che anche 8 è troppo grande; passando quindi al 7, rinnovo con questo la medesima operazione, e siccome veggo, che l'ultimo risultato 10206 è $<$ 11887, dirò, che il 7 potrà essere opportuno. Scrittolo perciò in (III) alla sinistra del primo 1 separato con una lineetta verticale, opero quivi in una maniera affatto uguale a quella, con cui ho operato precedentemente in (II); formo cioè le successive linee orizzontali seconda terza quarta ec. con lo scrivere in primo luogo lo 1 rispettivamente nella seconda, nella terza, nella quarta ec. colonna, poscia col moltiplicare ciascun numero ottenuto per 7, sommare il prodotto, che ne nasce, col numero immediatamente sovrapposto, e porre alla destra del precedente il numero, che ne risulta, avvertendo però che il prodotto per 7 del penultimo numero della prima riga, cioè del 152023 deve non già sommarsi, ma sottrarsi dal sovrapposto 1188717, ed avvertendo, che se mai l'indicato prodotto fosse maggiore

del 1188717, onde la differenza ne risultasse negativa, allora anche il 7 sarebbe troppo grande, e converrebbe diminuirlo; ma siccome ciò non succede, esso sarà opportuno.

Scrivo ora in (V) i numeri 1, 148, 8214, 202612, 124556 dell' ultima colonna in (III), unendo alla destra del secondo uno zero, alla destra del terzo due zeri, tre alla destra del quarto, e a quella del quinto l' ultima parte 3376 del dato numero (I). Divido quindi, come precedentemente l' ultimo di questi numeri pel penultimo, e truovato il quoziente 6, non farò quivi le pruove esposte di sopra per iscuoprire se sia troppo grande, perchè esistendo nel numero antipenultimo 821400 tre cifre meno di quelle, che esistono nel penultimo 202612000, possiamo quasi essere certi, che esso non sarà tale. Posto pertanto il 6 alla sinistra dello 1, separato con la solita stanghetta verticale, eseguisco la solita operazione; e siccome in questo caso, nel sottrarre il prodotto del penultimo numero 207593896 della seconda linea per 6 dal sovrapposto 1245563376, ne viene il residuo zero; dirò che l' operazione è terminata, che il dato numero (I) è una quarta potenza esatta, e che congiunti i numeri ottenuti successivamente, il 376, che ne risulta è la radice corrispondente.

(I)

199, 8717, 3376

(II)

3| 1, 0, 0, 0, 199
1, 3, 9, 27, 118
1, 6, 27, 108
1, 9, 54
1, 12
1

(III)

7| 1, 120, 5400, 108000, 1188717
1, 127, 6289, 152023, 124556
1, 134, 7227, 202612
1, 141, 8214
1, 148
1

(IV)

9| 54, 1080, 11887
8| 54, 1566, 14094
7| 1512, 12096
1458, 10206

(V)

6| 1, 1480, 821400, 202612000, 1245563376,
1, 1486, 830316, 207593896, 000000000.

2. Vo-

2. Vogliasi in secondo luogo la radice quinta del numero 29866063714593754493.

Essendo in questo caso 5 l'indice della radice, divido il numero dato qui sotto in (VI) di cinque in cinque classi, cominciando dalla destra, e col mezzo della tavola delle potenze cerco la massima quinta potenza esatta, che si contiene nel primo membro a sinistra 29866: essendo questa 16807, la cui radice quinta è il 7, scrivo in (VII) tal radice, e alla sua destra separata con una lineetta verticale scrivo la unità, quindi tanti zeri, quanto è l'indice 5 della radice da estraersi diminuito di 1, cioè quattro, e in fine il numero 29866. Dopo ciò eseguisco quivi la stessa operazione, che si è effettuata precedentemente in (II), ed in (III), e determinati per tal modo nell'ultima colonna verticale i numeri 1, 390, 60840, 4745520, 185075280, 99432003, li scrivo nuovamente in (VIII), col porre alla destra del secondo uno zero, due zeri alla destra del terzo, tre alla destra del quarto, quattro alla destra del quinto, e a quella del sesto il secondo membro 06371 del numero (VI). Ciò fatto tolgo dagli ultimi tre di questi numeri le ultime quattro cifre, e posti in (IX) i risultati 343, 12005, 130590, operando come si è fatto nel numero precedente in (IV) cerco quel numero, che mi renda l'ultimo prodotto $<$ 130590, e tale truovando essere lo 8, giacchè l'ultimo prodotto, che da esso risulta, è 117992, pongo questo 8 in (VIII) alla sinistra dello 1, frapponendo la stanghetta verticale, eseguisco la solita operazione, e truovati così i numeri 1, 390, 60840, ec. dell'ultima colonna, li pongo in (X), coll'aggiugnere alla destra del secondo, del terzo, del quarto, e del quinto di essi gli zeri, come di sopra, e coll'unire alla destra dell'ultimo il terzo membro 45937 del numero dato. Divido in seguito l'ultimo di questi numeri (X) pel penultimo, e siccome le cifre componenti il numero antepenultimo sono tre di meno delle componenti il penultimo, siccome accadde nei numeri (V), dirò qui pure, come si disse nel numero precedente in corrispon-

denza ai suddetti (V), essere noi quasi certi, che il quoto 5 ottenuto è opportuno, perchè non troppo grande. Tralasciato perciò di fare i tentativi simili agli esposti in (IV), ed in (IX), colloco alla sinistra dello 1 in (X) esso 5, determino con la solita operazione i numeri 1, 3920, 6142650, ec. dell' ultima colonna, e scritti essi nuovamente in (XI), unendo come precedentemente gli zeri alla destra del secondo del terzo del quarto e del quinto, e alla destra del sesto il membro 54493, divido, come si è fatto in (X) l'ultimo di loro pel penultimo. Ancora qui il quoto 3, che ne risulta, potrò dire essere non troppo grande, e però atto all'intento, poichè il numero penultimo contiene quattro cifre più di quelle, che esistono nell'antepenultimo: posto pertanto senz'altro tentativo esso 3 alla sinistra dello 1, comincio ad effettuare la solita operazione; ma al fine della prima riga per ultimo risultato ottienesi lo zero. Dunque concluderò come sul fine del numero precedente, che l'operazione è terminata, che il dato numero (VI) è una potenza quinta esatta, e che 7853 ne è la sua quinta radice.

3. Venga domandata in terzo luogo la radice terza del numero 35.

Eseguisco ne' luoghi (XII), (XIII), ec. (XXI) la solita operazione; riflettendo, che ai numeri 8, 2232, 34217, ec., che si ottengono nelle ultime colonne, debbonsi unire, mentre si scrivono di nuovo ne' luoghi (XIII), (XV), (XVI), ec. tre zeri; perchè il dato numero 35 non essendo cubo perfetto, l'operazione non può aver fine, e in esso non esistendo cifre ulteriori, non si possono agl'indicati numeri 8, 2232, 34217, ec. aggiungere, che gli esposti zeri. Avvertasi di più, che in (XVII), siccome il numero 3209832300 non si contiene alcuna volta esatta nell'altro 2128489000; quindi si scrive per quoto lo zero, e aggiunti i soliti zeri, uno al numero 98130, due al 3209832300, e tre al 2128489000, ricavo con la consueta divisione il quoziente 6, lo pongo presso dello zero, e proseguo la operazione solita: un accidente si-

mile è accaduto eziandio in (XXI). Raccolti finalmente i numeri risultati dall'operazione coll'osservare, che a riserva del primo 3, gli altri tutti deggiono essere evidentemente tanti decimali, dirò essere prossimamente $\sqrt[3]{35}=3,2710663101$.

4. I. Giunti nella precedente operazione ai risultati (XVIII), potremo ottenere le ulteriori cifre 3, 1, 0, 1 della radice in una maniera assai semplice e breve, operando come segue. Osservando, che nel terzo numero dell'ultima colonna ivi esistente contengonsi sette cifre, tolgo le ultime sette dal primo, e scritti in (XXII) i risultati 320996, 995693, divido questo per quello: ottenuto così il quoziente 3, e l'avanzo 32705, taglio dal divisore 320996 l'ultima cifra 6, divido pel restante 32099 il 32705, pongo presso del 3 il quoto 1, e avuto il residuo 606, taglio dal divisore l'altra cifra 9, e proseguo a dividere il 606 pel numero, che risulta, 3209: poichè il quoziente, che ne viene, è 0, e l'avanzo corrispondente è lo stesso 606, pongo appresso dello zero già scritto il quoziente 1, ed avrò così ottenute con molta semplicità le indicate cifre 3, 1, 0, 1. Siccome poi il numero 286, che ha servito all'ultima divisione, è composto tuttavia di tre cifre, potrò anche per una volta eseguire l'operazione ora accennata, e tagliata quindi dal 320 l'ultima cifra 0, potrò dividere per 32 il residuo 286, ed il quoto 8 sarà la cifra, che nel valore della radice richiesta succede all'ultima 1. Ridotto così il dividendo a contenere nel 30 due sole cifre terminerò qui l'operazione.

Se oltrepassati i (XVIII) fossimo nella precedente estrazione della radice giunti ai risultati (XX); allora siccome il terzo numero dell'ultima colonna contiene nove cifre, tagliate le ultime dieci dal numero secondo, e le ultime nove dal numero primo, avrei potuto instituire l'operazione ora accennata tra i numeri 32099624, 6053659; ed ottenuto così siccome in (XXIII) il quoziente 018859, scrivendo esso dopo lo 1 quoziente della divisione in (XX), ne verrà il numero 3,2710663101 8859, distante dal vero valore di $\sqrt[3]{35}$ me-

no di $\frac{1}{10^{14}}$, e però distante, quanto meno si può con 14 cifre decimali.

II. Conviene nel metodo di abbreviamento ora esposto avere alcune riflessioni, se nell'eseguire le successive divisioni risulti uno dei residui formato di una sola cifra; allora in luogo delle cifre, che si troverebbero ulteriormente, e che supporrò di numero r, pongansi tanti zeri, e l'operazione è terminata: se per esempio in (XXII) nella divisione seconda invece di 606, si fosse ottenuto un residuo di una sola cifra, per esempio il 6, allora avendosi nel caso nostro $r = 3$, porrei presso l'ottenuto 31, tre zeri, e direi, che 31000 sarebbe il numero domandato. Che se qualcheduno dei residui fosse formato di due cifre: allora, se questo residuo fosse il primo, aggiungerei al numero già ricavato $r - 1$ zeri, e tagliate secondo la regola stabilita r cifre dal divisore, dividerei il residuo supposto per quanto fosse rimasto nel divisore. Se in (XXII) il residuo primo invece di 32705 fosse stato un numero di due sole cifre, fosse stato per esempio 75; poichè in questo caso abbiamo $r = 4$ al numero 3 ottenuto dalla prima divisione aggiungerei $r - 1 = 3$ zeri, quindi tagliate dal divisore 320996 le ultime $r = 4$ cifre, dividerei pel 32 che resta il supposto avanzo 75, ed essendo 2 il quoto, che ne viene, direi, che il numero richiesto sarebbe 30002. Che se il residuo avente due cifre sia, non già il primo, ma uno degli ulteriori: allora, aggiunti, come precedentemente, al numero prima ottenuto gli $r - 1$ zeri, non si deve poi, come precedentemente, determinare, e aggiungere dopo gli zeri alcun'altra cifra. Così in (XXII) se il secondo residuo invece di 606 fosse stato un numero di due cifre, per esempio 66; avendosi in questo caso $r = 3$ avrei all'ottenuto 31 uniti $r - 1 = 2$ zeri, e nulla aggiungendo di più, avrei detto, che nel caso ora supposto non può mediante il nostro metodo di abbreviamento, ricavarsi, che il numero 3100, il quale sia sicuramente fornito del dovuto gra-

Da inserirsi dopo la pagina 380.

(VI)

29866, 06371, 45937, 54493

(VII)

7| 1, 0, 0, 0, 0, 29866
1, 7, 49, 343, 2401, 13069
1, 14, 147, 1372, 12005
1, 21, 294, 3430
1, 28, 490
1, 35
1

(VIII)

8| 1, 350, 49000, 3430000, 120050000, 2360906371
1, 358, 51864, 3844912, 150809296, 9943800003
1, 366, 54792, 4483248, 185075280
1, 374, 57784, 5145600
1, 382, 60840
1, 390
1

(IX)

9| 343, 12005, 13590
8| 343, 15092, 135738
14749, 117992

(X)

5| 1, 3900, 6084000, 4745520000, 1850752880000000, 9943200345937
1, 3905, 6102525, 4776037625, 1874632928125, 5700354053125
1, 3910, 6120375, 4806653000, 1898666253125
1, 3915, 6140650, 4837366250
1, 3920, 6162250
1, 3925
1

(XI)

3| 1, 39250, 616225000, 4837366250000, 189866625312500000, 5700354053125644993
1, 39253, 616342769, 4839215278877, 190011280277084831, 000000000000000

(XII)

3| 1, 0, 0, 35
1, 3, 9, 8
1, 6, 27
1, 9
1

(XIII)

2| 1, 90, 2700, 8000
1, 92, 2884, 2232
1, 94, 3072
1, 96
1

(XIV)

2| 9, 270, 800
9, 288, 576

(XV)

7| 1, 960, 307200, 22320000
1, 967, 313969, 34217
1, 974, 320787
1, 981
1

(XVI)

1| 1, 9810, 3027800, 34217000
1, 9811, 3028611, 2128489
1, 9812, 3029423
1, 9813
1

(XVII)

06| 1, 98130, 3029830000, 212848900000
1, 98136, 3029911836, 212854929984
1, 98132, 3029900576
1, 98138
1

(XVIII)

6| 1, 981318, 302996005708000, 21285492998400
1, 981318, 302995994999716, 99569862845104
1, 981319, 302995183290168
1, 981318
1

(XIX)

3| 1, 9813180, 302996183290680000, 995698628450400
1, 9813183, 302996212730[illegible], 3270499125957753
1, 9813186, 302996241216987707
1, 9813189
1

(XX)

1| 1, 98131980, 302996241216987700, 327049912595753000
1, 98131981, 302996243151290191, 60536594445364109
1, 98131982, 302996244133310483
1, 98131983
1

(XXI)

01| 1, 981319830, 3029962441335104830000, 605365944453640900000

(XXII)

32|0|9|9|6|99863|31018
32005
606
286
30

(XXIII)

32|9|9|6|2|4|605365|018859
2843697
270729
18937
2892
12

do di approssimazione verso il valor vero della radice. Perciò in (XXIII) dopo la quinta divisione essendoci risultato un residuo di due sole cifre, cioè il 12, non abbiamo aggiunto al numero 018859 il quoziente 0, che sarebbesi ricavato dalla divisione di 12 per 320: perchè, siccome in questo caso abbiamo $r = 1$, per la regola stabilita non dobbiamo all'ottenuto 018859 che aggiugnere $r - 1 = 0$ zeri.

Volendosi estendere questo metodo alla determinazione di un numero di cifre > 10, bisogna avere delle riflessioni ulteriori, le quali esporrò in seguito, ove darò le opportune dimostrazioni, e che presentemente tralascio tanto per amore di brevità, come perchè mai, o quasi mai viene in pratica richiesta un'approssimazione tanto inoltrata.

Finalmente si rifletta, che in caso di approssimazione, mentre il valore, il quale ottienesi col mezzo de' metodi esposti ne' numeri 1, 2, 3, I. 4 è sempre minore del valor vero della radice domandata; il valore poi, che risulta da' metodi stessi, mentre abbian luogo i casi contemplati nel (prec. II), può essere tanto maggiore, come minore dell'indicato valor vero della radice. In tutti i casi però l'approssimazione è tanta, quanta può mai esigersi col trovato numero di decimali.

5. Le dimostrazioni di quanto è stato fin qui esposto praticamente dipendono in primo luogo dall'operazione, che è stata accennata nel N.° 12 della Memoria *Sopra la determinazione delle radici nelle Equazioni numeriche di qualunque grado*, che è stata da me presentata nel 1803 alla Società Italiana delle Scienze, e dalla Società medesima pubblicata nel 1804; operazione, per mezzo della quale una data Equazione numerica

(XXIV) $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2}$ ec. $+ Sx^2 + Tx + V = 0$,

nella ipotesi di $x = p + y$, ove p esprime un numero razionale qualunque, trasformasi speditamente nella corrispondente Equazione in y, che supporrò cominciando a scriverla dall'ultimo termine, essere la

(XXV) $v + uy + ty^2 + sy^3 + ry^4 +$ ec. $+ by^{m-1} + Ay^m = 0$.

Ho dimostrata la verità di tale operazione tanto nel citato N.° 12 della citata Memoria, come nei numeri 123, ec. 127 dell'Appendice alla mia Algebra Elementare; ma siccome colà suppongo noto il calcolo differenziale, e quivi note le serie algebriche; non sarà forse inconveniente, prima di procedere innanzi, l'esporre nuovamente simile dimostrazione, senza supporre le indicate nozioni, ed in un modo per conseguenza più elementare.

6. Suppongasi

$Ap + B = P_1$, $Ap^2 + Bp + C = P_2$, $Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = P_3$, ec., e in generale $Ap^n + Bp^{n-1} + Cp^{n-2} + \text{ec.} + Hp^{n-h} + \text{ec.} + Lp^2 + Mp + N = P_n$.

Moltiplichiamo nella P_n ciascun termine successivamente per l'esponente di p, si diminuisca l'esponente stesso di un' unità, e i successivi risultati, che ne derivano, s'indichino con la stessa P_n, a cui vengano successivamente sovrapposti uno, due, tre, ec. apici, cosicchè si abbia

$nAp^{n-1} + (n-1)Bp^{n-2} + (n-2)Cp^{n-3} + \text{ec.} + (n-h)Hp^{n-h-1} + 2Lp + M = P'_n$

$n(n-1)Ap^{n-2} + (n-1)(n-2)Bp^{n-3} + (n-2)(n-3)Cp^{n-4} + \text{ec.} + (n-h)(n-h-1)Hp^{n-h-2} + \text{ec.} + 2L = P''_n$,

$n(n-1)(n-2)Ap^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)Bp^{n-4} + (n-2)(n-3)(n-4)Cp^{n-5} + \text{ec.} + (n-h)(n-h-1)(n-h-2)Hp^{n-h-3} + \text{ec.} = P'''_n$, ec.

e in generale

(XXVI) $n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)Ap^{n-r} + (n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r)Bp^{n-r-1} + (n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r-1)Cp^{n-r-2} + \text{ec.} + (n-h)(n-h-1)(n-h-2)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} + \text{ec.} = P^{(r)}_n$.

In conseguenza di queste supposizioni avremo evidentemente

$P'_1 = A$, $P''_1 = 0$

$P'_2 = 2Ap + B$, $P''_2 = 2A$, $P'''_2 = 0$

$P'_3 = 3Ap^2 + 2Bp + C$, $P''_3 = 2.3Ap + 2B$, $P'''_3 = 2.3A$, $P''''_3 = 0$, ec.

avremo $P^{(n)}{}_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2.1A$, $P^{(n+1)}{}_n = 0$,
e fatto $n = m$, avremo

$$P_m = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + \text{ec.} + Sp^2 + Tp + V,$$
$$P'_m = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{ec.} + 2Sp + T,$$
$$P''_m = m(m-1)Ap^{m-2} + (m-1)(m-2)Bp^{m-3} + (m-2)(m-3)Cp^{m-4} + \text{ec.} + 2S,$$
$$P'''_m = m(m-1)(m-2)Ap^{m-3} + (m-1)(m-2)(m-3)Bp^{m-4} + (m-2)(m-3)(m-4)Cp^{m-5} + \text{ec.}$$

ec.

7. Qualunque siansi i due numeri interi, e positivi n, r, purchè abbiasi $r > 0$, e non $> n$, dovrà sempre essere

$$\text{(XXVII)} \quad P^{(r)}{}_n = rP^{(r-1)}{}_{n-1} + pP^{(r)}{}_{n-1}.$$

Posto nella (XXVI) $n-1$ invece di n, avremo

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r)Ap^{n-r-1} + (n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r-1)Bp^{n-r-2} +$$
$$(n-3)(n-4)(n-5)\ldots(n-r-2)Cp^{n-r-3} + \text{ec.} +$$
$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r-1} + \text{ec.} = P^{(r)}{}_{n-1},$$

e posto $n-1$ invece di n, ed $r-1$ invece di r risulterà

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r+1)Ap^{n-r} + (n-2)(n-3)(n-4)\ldots(n-r)Bp^{n-r-1} +$$
$$(n-3)(n-4)(n-5)\ldots(n-r-1)Cp^{n-r-2} + \text{ec.} +$$
$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} + \text{ec.} = P^{(r-1)}{}_{n-1}.$$

Prendansi i termini generali

$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r-1},$$
$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r}$$

di questi due risultati $P^{(r)}{}_{n-1}$, $P^{(r-1)}{}_{n-1}$, e moltiplicato il primo di essi per p, ed il secondo per r, si sommino insieme; ottenendosi da ciò

$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r} +$$
$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)rHp^{n-h-r} =$$
$$(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)(n-h-r+r)Hp^{n-h-r} =$$
$$(n-h)(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r},$$

si avrà l'Equazione identica

$$\text{(XXVIII)} \quad (n-h)(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} =$$
$$r(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r+1)Hp^{n-h-r} +$$
$$p(n-h-1)(n-h-2)(n-h-3)\ldots(n-h-r)Hp^{n-h-r-1}.$$

Ora il primo membro di questa Equazione non è che il termine generale della quantità $P^{(r)}{}_n$, il primo termine del suo secondo membro non è che il termine generale della

$P^{(r-1)}{}_{n-1}$ moltiplicato per r, ed il termine secondo dello stesso membro secondo non è che il termine generale della $P^{(r)}{}_{n-1}$ moltiplicato per p. Dunque, poichè col fare successivamente $h = 0, 1, 2, 3, 4$, ec., dal primo membro della (XXVIII) si ottengono tutti i successivi termini della $P^{(r)}{}_n$, e dai due termini del membro secondo si ottengono tutti i successivi termini delle $P^{(r-1)}{}_{n-1}$, $P^{(r)}{}_n$ moltiplicati i primi per r, ed i secondi per p; ne segue, che, essendo l'Equazione (XXVIII) identica, e però vera per tutti gli esposti valori di h, tutti i termini della $P^{(r)}{}_n$ uguaglieranno le somme dei rispettivi termini delle $rP^{(r-1)}{}_{n-1}$, $pP^{(r)}{}_{n-1}$, e però si verificherà l'Equazione (XXVII).

8. Supponghiamo

$P'_n = \alpha_n$, $P''_n = 2\beta_n$, $P'''_n = 2.3\gamma_n$, $P''''_n = 2.3.4\delta_n$
$P^v{}_n = 2.3.4.5\varepsilon_n$, ec. Ponendo quivi $n-1$ invece di n, otterremo

$P'_{n-1} = \alpha_{n-1}$, $P''_{n-1} = 2\beta_{n-1}$, $P'''_{n-1} = 2.3\gamma_{n-1}$, $P''''_{n-1} = 2.3.4\delta_{n-1}$.
$P^v{}_{n-1} = 2.3.4.5\varepsilon_{n-1}$ ec.

In conseguenza delle supposizioni ora fatte, e delle Equazioni truovate nel N.° 6, agevolmente vedremo, che col fare n successivamente $= 1, 2, 3, 4, 5$, ec., risulta $A = \alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = \delta_4 = \varepsilon_5 =$ ec.

Inoltre per le proprietà già note dei coefficienti della Equazione (XXV) considerata come trasformata della (XXIV) sotto l'ipotesi di $x = p + y$ (N.° 5), e per le Equazioni del citato N.° 6 avendosi

$$v = P_m,\ u = P'_m,\ t = \frac{P''_m}{2},\ s = \frac{P'''_m}{2.3},\ r = \frac{P''''_m}{2.3.4},\ q = \frac{P^v{}_m}{2.3.4.5},\ \text{ec.};$$

ne verrà

$$v = P_m,\ u = \alpha_m,\ t = \beta_m,\ s = \gamma_m,\ r = \delta_m,\ q = \varepsilon_m,\ \text{ec.}$$

9. Si collochi nella Equazione generale (XXVII) un apice in luogo di r: risultando da ciò $P'_n = pP'_{n-1} + P_{n-1}$, per le supposizioni del numero precedente si avrà

$$\alpha_n = p\alpha_{n-1} + P_{n-1}.$$

Sostituiti nella medesima (XXVII) due apici invece di r, ot-

r, ottiensi $P''_n = pP''_{n-1} + 2P'_{n-1}$. Dunque per le citate supposizioni del numero precedente sarà

$$\beta_n = p\beta_{n-1} + \alpha_{n-1}.$$

Pongansi nella solita (XXVII) tre apici in luogo di r; avendosi quindi $P'''_n = pP'''_{n-1} + 3P''_{n-1}$, risulterà

$$\gamma_n = p\gamma_{n-1} + \beta_{n-1}.$$

Nella stessa maniera proseguendo a sostituire quattro, cinque, ec. apici invece di r; poichè ricavasi in corrispondenza $P'^{v}_n = pP'^{v}_{n-1} + 4P'''_{n-1}$, $P^{v}_n = pP^{v}_{n-1} + 5P'^{v}_{n-1}$, ec., ne verrà

$$\delta_n = p\delta_{n-1} + \gamma_{n-1}$$
$$\varepsilon_n = p\varepsilon_{n-1} + \delta_{n-1}$$
ec.

Supponghiamo successivamente nelle Equazioni ora truovate $n = 2, 3, 4, 5, 6$, ec.; avremo quindi, e pel numero precedente

$\alpha_2 = pA + P_1, \alpha_3 = p\alpha_2 + P_2, \alpha_4 = p\alpha_3 + P_3, \alpha_5 = p\alpha_4 + P_4, \alpha_6 = p\alpha_5 + P_5$, ec.
$\beta_3 = pA + \alpha_2, \beta_4 = p\beta_3 + \alpha_3, \beta_5 = p\beta_4 + \alpha_4, \beta_6 = p\beta_5 + \alpha_5$, ec.
$\gamma_4 = pA + \beta_3, \gamma_5 = p\gamma_4 + \beta_4, \gamma_6 = p\gamma_5 + \beta_5$, ec.
$\delta_5 = pA + \gamma_4, \delta_6 = p\delta_5 + \gamma_5$, ec.
$\varepsilon_6 = pA + \delta_5$, ec.
ec.

10. Per eseguire il metodo di trasformazione indicato nel N.° 5 sappiamo dalla sovraindicata Memoria (N.° 5), e dalla Appendice alla mia algebra doversi scrivere, siccome in (XXIX) prima in una linea orizzontale i coefficienti A, B, C, ec. V della equazione data (XXIV), e sopra, o alla sinistra di questi, diviso con una stanghetta verticale, il numero p. Quindi si formano successivamente sotto della prima tante altre linee orizzontali seconda, terza, quarta, ec., e sappiamo formarsi queste col porre da prima, nel modo, che apparisce in (XXIX), in ciascuna di esse il primo coefficiente A, poscia col moltiplicare esso A, e così tutti gli altri termini successivi, che van risultando, per p, e col sommare ciascheduno dei prodotti, che ne nascono, col termine immediatamente sovrap-

posto, così proseguendo fino alla colonna verticale $m+2$ *esima*. Se nella (XXIV) mancassero dei termini, in luogo de' loro coefficienti sappiamo finalmente, che bisognerebbe scrivere tanti zeri.

Operando nella maniera ora accennata, è facile a vedersi dal N.° 6, e dalle formole determinate nel numero precedente, che i termini, i quali in (XXIX) costituiscono la fila seconda, altro infine non sono, che gli A, P_1, P_2, P_3, P_4, ec., che i termini della fila terza non sono, che gli A, α_2, α_3, α_4, ec., che quelli della quarta sono gli A, β_3, β_4 ec.; che sono A, γ_4, ec. i termini della quinta; e così di seguito. Dunque proseguendo queste operazioni fino alla colonna verticale $m+1$ *esima*, otterremo nella successiva $m+2$ *esima* i termini P_m, α_m, β_m, γ_m, δ_m, ε_m, ec. A; ma questi per quanto si è detto sul fine del N.° 8, costituiscono i valori de' coefficienti v, u, t, s, r, ec. A della Equazione trasformata (XXV). Dunque, sostituiti in loro vece, verrà così essa trasformata a determinarsi. Ed ecco per simile guisa dimostrato, indipendentemente dalla cognizione attuale del calcolo differenziale e delle serie il sovraesposto metodo di trasformazione

$$
\begin{array}{lllllllll}
(\text{XXIX}) & p\,| & \text{A}, & \text{B}, & \text{C}, & \text{D}, & \text{E}, & \text{F}, & \text{G}, \text{ ec. V} \\
 & & & \text{A}, & P_1, & P_2, & P_3, & P_4, & P_5, \text{ ec. } P_{m-1}, P_m \\
 & & & & \text{A}, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & \alpha_5, \text{ ec. } \alpha_{m-1}, \alpha_m \\
 & & & & & \text{A}, & \beta_3, & \beta_4, & \beta_5, \text{ ec. } \beta_{m-1}, \beta_m \\
 & & & & & & \text{A}, & \gamma_4, & \gamma_5, \text{ ec. } \gamma_{m-1}, \gamma_m \\
 & & & & & & & \text{A}, & \delta_5, \text{ ec. } \delta_{m-1}, \delta_m \\
 & & & & & & & & \text{A}, \text{ ec. } \varepsilon_{m-1}, \varepsilon_m \\
 & & & & & & & & \text{ec.} \\
 & & & & & & & & \text{A}
\end{array}
$$

Se l'Equazione data sia per esempio A la $x^5-4x^3-12x^2+9x+10=0$, e supposto $x=y+2$, se ne voglia la trasformata; operando qui sotto, come è stato insegnato, troveremo speditamente essere questa la

$$y^5+10y^4+36y^3+44y^2-7y-20=0$$

2	1	0,	−4,	−12,	9,	10
		1,	2,	0,	−12,	−15,	−20
			1,	4,	8,	4,	−7
				1,	6,	20,	44
					1,	8,	36
						1,	10
							1.

11. Osservando i numeri ottenuti in (XXIX), vedesi, che mentre quelli dell'ultima colonna sono i valori dei coefficienti della Equazione trasformata (XXV); i numeri della colonna penultima, cioè i numeri P_{m-1}, α_{m-1}, β_{m-1}, ec. altro non sono, che i coefficienti della trasformata, che, col porre $x=p+y$, ottienesi dalla $Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+$ ec. $+Sx+T=0$. Così i numeri della colonna antepenultima costituiscono i coefficienti della trasformata, che sotto la stessa supposizione di $x=p+y$, ricavasi dalla $Ax^{m-2}+Bx^{m-2}+Cx^{m-3}+$ ec. $+S=0$, e così di seguito.

Inoltre i numeri A, P_1, P_2, P_3, ec. della seconda linea orizzontale altro non sono, se non che i valori, i quali per la solita ipotesi di $x=p+y$ acquistano rispettivamente le quantità A, $Ax+B$, Ax^2+Bx+C, Ax^3+Bx^2+Cx+D, ec.: i numeri A, α_2, α_3, α_4, ec. della fila terza altro non sono, che le prime derivate dalle P_1, P_2, P_3, P_4, ec., considerando la p come variabile; i numeri A, β_3, β_4, ec. della fila quarta altro non sono, che le derivate seconde delle P_2, P_3, P_4, ec. divise per 2; gli altri A, γ_4 ec. della riga quinta costituiscono le derivate terze delle stesse P_3, P_4 ec. divise per 2 . 3: e così in progresso.

Finalmente i numeri delle linee, che scorrono obbliquamente dall'alto al basso, e da sinistra a destra costituiscono tante serie di numeri a differenze costanti. Così i numeri A, A, A, ec. della prima delle linee ora accennate sono tutti uguali fra loro; gli altri, B, P_1, α_2, β_3, γ_4, ec. della linea seconda formano una serie, in cui la differenza prima è costante, ed è questa $=Ap$; i numeri C, P_2, α_3, β_4, γ_5, ec.

costituiscono una serie, nella quale la differenza seconda è costante, ed $= Ap^2$; una serie, in cui la differenza terza è costante, ed $= Ap^3$ viene formata dai numeri D, P_3, α_4, β_5, ec. della fila quarta; e così di seguito.

12. Acciocchè il metodo sovraesposto di trasformare la Equazione (XXIV) nella (XXV) sia vantaggioso, e di abbreviamento; esigesi evidentemente, che la (XXIV) sia un' Equazione numerica, ove i coefficienti A, B, C, ec. siano tanti numeri interi, e si esige, che sia intero anche il numero p nella $x = p + y$. Che se i coefficienti della (XXIV) fossero o tutti, o in parte rotti; converrebbe prima ridurli allo stesso denominatore, operare in seguito giusta il N.° 10 con i soli numeratori, e in fine dividere il tutto pel denominator comune, mentre se ne voglia, o se ne debba tener conto. Che se sia fratto il numero p: allora supposto $p = \frac{h}{k}$, converrà in primo luogo scrivere in una linea orizzontale, siccome in (XXX), le successive potenze 1, k, k^2, k^3, ec. k^m, e sotto di esse rispettivamente in una seconda linea scrivere i coefficienti A, B, C, D, ec. V; moltiplicati quindi questi con quelle, e ottenuti i prodotti A, Bk, Ck^2, Dk^3, ec. Vk^m, converrà con essi, e col solo numeratore h eseguire l' indicata operazione del citato N.° 10; e finalmente moltiplicare l' ultimo termine della fila, che nella operazione risulta prima per $\frac{1}{k^m}$, moltiplicare il termine ultimo della fila seconda per $\frac{y}{k^{m-1}}$, l' ultimo della fila terza per $\frac{y^2}{k^{m-2}}$, l' ultimo della fila quarta per $\frac{y^3}{k^{m-3}}$, e così in progresso: la somma di tutti questi prodotti costituirà la trasformata richiesta.

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{(XXX)} & 1, & k, & k^2, & k^3, & \text{ec. } k^{m-1}, & k^m. \\
 & \underline{A,} & \underline{B,} & \underline{C,} & \underline{D,} & \underline{\text{ec. } T,} & \underline{V} \\
 & A, & Bk, & Ck^2, & Dk^3, & \text{ec. } Tk^{m-1}, & Vk^m
\end{array}
$$

Sia per esempio $x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x - \frac{8}{3} = 0$ l' Equazione

data, e vogliasi $x = y - 3$. Togliendo i rotti comincio dal ridurre essa Equazione alla $6x^4 + 10x^3 - 21x^2 + 24x - 16 = 0$; quindi operando qui sotto col metodo del N.° 10 ottengo la trasformata $6y^4 - 62y^3 + 213y^2 - 228y - 61 = 0$, ossia dividendo pel denominatore $6, y^4 - \frac{62}{6}y^3 + \frac{213}{6}y^2 - \frac{228}{6}y - \frac{61}{6} = 0$.

-3 |	6,	10,	-21,	24,	-16	
		6,	-8,	3,	15,	-61
			6,	-26,	81,	-228
				6,	-44,	213
					6,	-62
						6

Essendo $x^5 - 2x^4 + 10x^2 - 15 = 0$ l'Equazione data, vogliasi in secondo luogo la trasformata, che ottienesi dal porre $x = y + \frac{3}{4}$. Opero qui sotto, come è stato poc'anzi accennato, e la trasformata sarà $y^5 + \frac{7}{4}y^4 - \frac{6}{16}y^3 + \frac{478}{64}y^2 + \frac{3381}{256}y - \frac{10005}{1024} = 0$.

	1,	4,	16,	64,	256,	1024	
	1,	-2,	0,	10,	0,	-15	
3 |	1,	-8,	0,	640,	0,	-15360	
		1,	-5,	-15,	595,	1785,	-10005
			1,	-2,	-21,	532,	3381
				1,	1,	-18,	478
					1,	4,	-6
						1,	7
							1.

Per riconoscere il perchè il metodo ora esposto somministri nella ipotesi di $x = y + \frac{h}{k}$ la trasformata richiesta; si osservi, che posto $x = y + p$, i coefficienti della (XXV) (N.° 5) sono

$v = Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + \text{ec.} + Rp^3 + Sp^2 + Tp + V$,

$u = mAp^{m-1} + (m-1)Bp^{m-2} + (m-2)Cp^{m-3} + \text{ec.} + 3Rp^2 + 2Sp + T$,

$$t = \frac{m(m-1)}{2} Ap^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Bp^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} Cp^{m-4} + \text{ec.}$$
$$+ 3Rp + S.$$
$$s = \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3} Ap^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\ \ 3} Bp^{m-4} + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\ \ 3}$$
$$Cp^{m-5} + \text{ec.} + R,$$
ec. ec.

Dunque collocata la frazione $\frac{h}{k}$ invece di p, e ridotti in ciascuna fila tutti i termini allo stesso denominatore, poichè si ottiene

$$\text{(XXXI)}\ v = \frac{1}{k^m}(Ah^m + Bkh^{m-1} + Ck^2h^{m-2} + \text{ec. } Rk^{m-3}h^3 +$$
$$Sk^{m-2}h^2 + Tk^{m-1}h + Vk^m),$$
$$u = \frac{1}{k^{m-1}}[mAh^{m-1} + (m-1)Bkh^{m-2} + (m-2)Ck^2h^{m-3} + \text{ec.}$$
$$+ 3Rk^{m-3}h^2 + 2Sk^{m-2}h + Tk^{m-1}]$$
$$t = \frac{1}{k^{m-2}}\left(\frac{m(m-1)}{2}Ah^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}Bkh^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} \times\right.$$
$$\left. Ck^2h^{m-4} + \text{ec.} + 3Rk^{m-3}h + Sk^{m-2}\right),$$
$$s = \frac{1}{k^{m-3}}\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ \ 3}Ah^{m-3} + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\ \ 3}Bkh^{m-4} +\right.$$
$$\left.\frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{2\ \ 3}Ck^2h^{m-5} + \text{ec.} + Rk^{m-3}\right)$$
ec. ec.

saranno questi ultimi risultati (XXXI) i coefficienti della trasformata nella supposizione di $x = y + \frac{h}{k}$. Ma se poste le quantità A, Bk, Ck^2, ec. Rk^{m-3}, Sk^{m-2}, Tk^{m-1}, Vk^m, con queste, e col numero h si eseguiscono le operazioni del N.° 10, ottengonsi appunto le quantità, che nei risultati (XXXI) esistono tra le parentesi. Dunque moltiplicando la prima di queste quantità, come si è proposto di sopra, per $\frac{1}{k^m}$, la

seconda per $\frac{y}{k^{m-1}}$, la terza per $\frac{y^2}{k^{m-2}}$, e così di seguito, e sommando tutto insieme, dagli stessi risultati (XXXI) è chiaro, che verrà la trasformata, che si domandava.

13. Suppongasi $A=1$, $B=m$, $C=\frac{m(m-1)}{2}$, $D=\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}$, ec. $S=\frac{m(m-1)}{2}$, $T=m$, $V=1$.

Sostituendo questi valori nei risultati (XXXI); le quantità, che in essi esistono tra parentesi, divengono evidentemente

$$\left(h^m+mkh^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}k^2h^{m-2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}k^3h^{m-3}+\text{ec.}+\frac{m(m-1)}{2}k^{m-2}h^2+mk^{m-1}h+k^m\right)=(k+h)^m,$$

$$m\left(h^{m-1}+(m-1)kh^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}k^2h^{m-3}+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2\ 3}\times k^3h^{m-4}+\text{ec.}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}k^{m-3}h^2+(m-1)k^{m-2}h+k^{m-1}\right)=m(k+h)^{m-1},$$

$$\frac{m(m-1)}{2}\left(h^{m-2}+(m-2)kh^{m-3}+\frac{(m-2)(m-3)}{2}k^2h^{m-4}+\text{ec.}+(m-2)k^{m-3}h+k^{m-2}\right)=\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^{m-2},$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}\left(h^{m-3}+(m-3)kh^{m-4}+\frac{(m-3)(m-4)}{2}k^2h^{m-5}+\text{ec.}+(m-3)k^{m-4}h+k^{m-3}\right)=\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}(k+h)^{m-3}$$

ec.

Dunque se tra la serie

(XXXII) $1, mk, \frac{m(m-1)}{2}k^2, \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}k^3$, ec. $\frac{m(m-1)}{2}k^{m-2}$, mk^{m-1}, k^m, ed il numero h si praticherà la solita operazione del N.° 10, i risultati, che quindi si ottengono nell'ultima colonna a destra, cioè corrispondenti in (XXIX) ai P_m, α_m, β_m, γ_m, ec. (N.° 10), saranno pel numero precedente

$(k+h)^m, m(k+h)^{m-1}, \frac{m(m-1)}{2}(k+h)^{m-2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}(k+h)^{m-3}$, ec.

$\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^2, m(k+h), 1$, ossia scrivendoli al rovescio saranno

(XXXIII) $1, m(k+h), \frac{m(m-1)}{2}(k+h)^2$ ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}(k+h)^{m-3}$,

$\frac{m(m-1)}{2}(k+h)^{m-2}, m(k+h)^{m-1}, (k+h)^m$.

14. Suppongasi

1.° $k=0$, $h=a$; le quantità (XXXII) diverranno perciò

(XXXIV) $1, 0, 0, 0$, ec. $0, 0, 0$,

e le (XXXIII) diverranno

(XXXV) $1, ma, \frac{m(m-1)}{2}a^2$, ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}a^{m-3}, \frac{m(m-1)}{2}\times$

a^{m-2}, ma^{m-1}, a^m.

2.° Si faccia $k=10a$, $h=b$; avremo quindi dalle (XXXII)

(XXXVI) $1, m\times 10a, \frac{m(m-1)}{2}10^2a^2$, ec. $\frac{m(m-1)}{2}10^{m-2}a^{m-2}$,

$m\times 10^{m-1}a^{m-1}, 10^m\times a^m$,

e dalle (XXXIII) avremo

(XXXVII) $1, m(10a+b), \frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^2$, ec. $\frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3}\times$

$(10a+b)^{m-3}, \frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^{m-2}, m(10a+b)^{m-1}, (10a+b)^m$.

3.° Pongasi $k=(10^2a+10b)$, $h=c$; per questa supposizione le (XXXII) si cangeranno nelle

(XXXVIII) $1, m(10^2a+10b), \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b)^2$, ec.

$\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b)^{m-2}, m(10^2a+10b)^{m-1}, (10^2a+10b)^m$,

e le (XXXIII) nelle

(XXXIX) $1, m(10^2a+10b+c), \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)$, ec.

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\quad 3}(10^2a+10b+c)^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)^{m-2}$,

$m(10^2a+10b+c)^{m-1}$, $(10^2a+10b+c)^m$.

4.° Ponendo $k=(10^3a+10^2b+10c)$, $h=d$; le solite quantità (XXXII) diventeranno

(XL) $1, m(10^3a+10^2b+10c), \frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c)^2$, ec.

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\quad 3}(10^3a+10^2b+c)^{m-3}+\frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c)^{m-2}$,

$m(10^3a+10^2b+10c)^{m-1}$, $(10^3a+10^2b+10c)^m$; e le (XXXIII) diverranno

(XLI) $1, m(10^3a+10^2b+10c+d), \frac{m(m-1)}{2}(10^3a+10^2b+10c+d)^2$, ec.

$\frac{m(m-1)(m-2)}{2\quad 3}(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-3}$, $\frac{m(m-1)}{2}\times$

$(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-2}$, $m(10^3a+10^2b+10c+d)^{m-1}$,

$(10^3a+10^2b+10c+d)^m$.

Così di seguito.

Dunque sotto le supposizioni de' precedenti 1.°, 2.°, 3.°, ec. dalle (XXXII) deducendosi rispettivamente le (XXXIV), (XXXVI), (XXXVIII), ec., e dalle (XXXIII) le (XXXV), (XXXVII), (XXXIX), ec.; ne segue, che eseguendo con le quantità (XXXIV), (XXXVI), (XXXVIII), ec., e rispettivamente i numeri a, b, c, ec. la operazione del N.° 10; i risultati, che quindi verranno nelle ultime colonne verticali, saranno pel N.° 13 in corrispondenza le quantità (XXXV), (XXXVII), (XXXIX) ec.

15. Vogliasi in generale il metodo di estrarre le radici numeriche, che nei (numeri 1, 2, 3) è stato esposto in particolare.

Sia P il numero intero dato, e se ne voglia la radice *mesima*.

Diviso perciò esso P, partendo dalla destra di m in m cifre, e formati così tanti membri, che supporrò essere di numero n, e denominerò G, H, I, K, L, ec., cosicchè si abbia

(XLII) $P = 10^{(n-1)m} G + 10^{(n-2)m} H + 10^{(n-3)m} I + 10^{(n-4)m} K + 10^{(n-5)m} L + \text{ec.}$, comincio col mezzo della tavola delle potenze, o del metodo, che esporrò in seguito, dal determinare la massima potenza *mesima* esatta, che si contiene in G, potenza, la cui radice *mesima* sappiamo già essere sempre > 0, e < 10; chiamata essa a^m, formo con $m - 1$ zeri la serie

(XLIII) 1, 0, 0, 0, ec. 0, 0, G,

e con questa, ed il numero a eseguisco l'operazione del N.° 10, avvertendo giusta la regola stabilita nei numeri 1, 2, 3, di sottrarre dal sovrapposto G il termine, che nella prima linea orizzontale ottienesi dal penultimo, moltiplicandolo per a. Poichè la serie (XLIII) altro non è, che la (XXXIV), cangiato in questa l'ultimo zero in G; dal numero precedente apparisce, che l'indicata operazione produrrà nell'ultima colonna verticale in corrispondenza alla precedente (XXXV) la serie

(XLIV) $1, ma, \frac{m(m-1)}{2} a^2, \text{ec.} \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3} a^{m-3}, \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2},$

$ma^{m-1}, G - a^m.$

Moltiplico ora in questa (XLIV) il secondo termine per 10, il terzo per 10^2, il quarto per 10^3, ossia pongo $10a$, invece di a, e cambiato l'ultimo termine $G - a^m$ nell'altro $10^m(G - a^m)$, aggiungo ad esso il secondo membro H del dato numero (XLII); avuta così la serie

(XLV) $1, m \times 10a, \frac{m(m-1)}{2} 10^2 a^2, \text{ec.} \frac{m(m-1)(m-2)}{2\ 3} 10^{m-3} a^{m-3},$

$\frac{m(m-1)}{2} 10^{m-2} a^{m-2}, m \times 10^{m-1} a^{m-1}, 10^m(G - a^m) + H,$

divido l'ultimo termine $10(G - a^m) + H$ pel penultimo $m \times 10^{m-1} a^{m-1}$, e seguendo il metodo accennato nei numeri 1, 2, 3 determino un numero b, il quale sia uguale, o prossimamente minore del quoto $\frac{10^m(G - a^m) + H}{m \times 10^{m-1} a^{m-1}}$, e tale, che sotto l'operazione del N.° 10 praticata tra esso b, e la serie (XLV), somministri non $> 10^m(G - a^m) + H$ il prodotto, che

ottienesi moltiplicando per b il termine penultimo della prima linea orizzontale, che risulta dall'accennata operazione del N. 10. Ciò fatto compisco attualmente l'indicata operazione del N.° 10, con l'avvertenza, come precedentemente, di sottrarre dal sovrapposto $10^m(G-a^m)+H$ l'accennato prodotto risultante dalla moltiplicazione per b dell'esposto penultimo termine; ed essendo la serie (XLV) la stessa, che la (XXXVI) cambiato semplicemente il termine $10^m a^m$ nell'altro $10^m(G-a^m)+H$; vedesi che l'operazione accennata ci darà nell'ultima colonna la serie

$$\text{(XLVI)}\ 1, m(10a+b), \frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^2, \text{ec.} \frac{m(m-1)}{2}(10a+b)^{m-2},$$
$$m(10a+b)^{m-1},\ 10^m G+H-(10a+b)^m,$$

la quale moltiplicato il secondo termine per 10, il terzo per 10^2, il quarto per 10^3, ossia posto $10a$, $10b$ invece della quantità a, b, e aggiunto il terzo membro I del dato numero (XLII) all'ultimo termine cambiato nel $10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]$ diverrà

$$\text{(XLVII)}\ 1, (10^2a+10b), \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b)\ \text{ec.} \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+b)^{m-2},$$
$$m(10^2a+10b)^{m-1},\ 10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]+I.$$

Mediante ora la divisione dell'ultimo termine $10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]+I$ pel penultimo $m(10^2a+10b)^{m-1}$ truovo, come di sopra un quoto c opportuno, e con questo, e con la precedente serie (XLVII) eseguisco la solita operazione del N.° 10, osservando sempre di sottrarre dall'ultimo termine $10^m[10^m G+H-(10a+b)^m]+I$ quello che nasce dalla moltiplicazione per c del termine penultimo della prima linea orizzontale. Dal paragone delle (XXXVIII), (XLVII) vedesi pel numero precedente, che dall'esposta operazione, nell'ultima colonna verticale si otterrà la serie

$$\text{(XLVIII)}\ 1, m(10^2a+10b+c), \frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)^2, \text{ec.}$$
$$\frac{m(m-1)}{2}(10^2a+10b+c)^{m-2},\ m(10^2a+10b+c)^{m-1},$$

$10^{2m}G+10^{m}H+I-(10^{2}a+10b+c)^{m}$.

Proseguendo l'operazione moltiplico, come di sopra rispettivamente per 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, ec. i successivi termini secondo, terzo, quarto, ec.; aggiungo al termine ultimo divenuto $10^{m}[10^{2m}G+10^{m}H+I-(10^{2}a+10b+c)^{m}]$ il quarto membro K; quindi con la divisione di esso pel penultimo $m(10^{3}a+10^{2}b+10c)^{m-1}$ determino nella sovraesposta maniera, e con le sovraesposte condizioni un numero d opportuno all'intento; e ciò fatto, con questo d, e con la serie

(XLIX) $1, m(10^{3}a+10^{2}b+10c), \frac{m(m-1)}{2}(10^{3}a+10^{2}b+10c)^{2}$, ec.

$\frac{m(m-1)}{2}(10^{3}a+10^{2}b+10c)^{m-2}$, $m(10^{3}a+10^{2}b+10c)^{m-1}$,

$10^{m}[10^{2m}G+10^{m}H+I-(10^{2}a+10b+c)^{m}]+K$

pratico la solita operazione del N.° 10.

La serie, che quindi risulterà nella ultima colonna verticale pel numero precedente sarà la seguente

(L) $1, m(10^{3}a+10^{2}b+10c+d), \frac{m(m-1)}{2}(10^{3}a+10^{2}b+10c+d)^{2}$, ec.

$\frac{m(m-1)}{2}(10^{3}a+10^{2}b+10c+d)^{m-2}$, $m(10^{3}a+10^{2}b+10c+d)^{m-1}$,

$10^{3m}G+10^{2m}H+10^{m}I+K-(10^{3}a+10c+d)^{m}$.

Ottenuta questa, seguiterò innanzi operando sempre nella maniera medesima; e se il numero (XLII) è una potenza *mesima* esatta, vedesi dall'andamento delle serie (XLIV), (XLVI), (XLVIII), (L), ec., che la *nesima* di esse avrà per ultimo termine il risultato

(LI) $10^{(n-1)m}G+10^{(n-2)m}H+10^{(n-3)m}I+10^{(n-4)m}K+10^{(n-5)m}L+\text{ec.}-(10^{n-1}a+10^{n-2}b+10^{n-3}c+10^{n-4}d+10^{n-5}e+\text{ec.})^{m}=0$,

e che però essendo $10^{n-1}a+10^{n-2}b+10^{n-3}c+10^{n-4}d+10^{n-5}e+\text{ec.}$ la radice richiesta, l'operazione sarà terminata. Che se il numero (XLII) non è potenza *mesima* esatta, allora il risultato (LI) non sarà $=0$; e volendo proseguire l'operazione onde accostarsi al vero valore di $\sqrt[m]{P}$; nello stesso modo, come si sono precedentemente aggiunti i membri H, I, K, ec.

converrà per la determinazione di ciascuna cifra decimale aggiungere all'ultimo termine m zeri.

La semplice precedente esposizione del nostro metodo di estrarre le radici numeriche considerato in generale è sufficiente a dimostrarne la giustezza e la verità. Difatti i successivi numeri a, b, c, ec. componenti la radice richiesta vengono ivi infine a determinarsi nella maniera medesima, con cui essi si determinano col metodo di estrazione ordinario; e gli ultimi termini delle serie (XLIV), (XLVI), (XLVIII), (L), ec. altro evidentemente non sono, che i residui, i quali col metodo ordinario vanno successivamente ottenendosi. In conseguenza poi di ciò ciascuno dei numeri interi a, b, c, ec. dovrà essere non < 0, e < 10.

SEZIONE II.

Dimostrazione di Metodo di abbreviamento.

16. Per conoscere la ragione del metodo di abbreviamento, che è stato esposto ne' luoghi (IV), (IX), (XIV); si osservi, che le cifre ivi trascurate influiscono solamente nel valore delle cifre a destra del risultato, che preso esatto deve poscia sottraersi dal num.° 1188717 in (III), dal 1305906371 in (VIII), dall' 8000 in (XIII), e in generale dal $10^m(G-a^m)+H$ in (XLV); ma il numero, che si cerca ne' citati luoghi, e che in generale abbiam denominato b in (XLV), e che in (III) si è il 7, in (VIII) lo 8, ed in (XIII) il 2, deve uguagliare, od essere prossimamente minore del quoto $\frac{10^m(G-a^m)+H}{m\times 10^{m-1}a^{m-1}}$, ed essere tale, che sotto l'operazione del N.° 10 eseguita tra b, e la serie (XLV) somministri nella moltiplicazione per b del penultimo termine della prima riga orizzontale un prodotto non $> 10^m(G-a^m)+H$. Dunque per riconoscere, se si soddisfaccia a queste condizioni, bastando in generale la considerazione delle prime cifre a sinistra; ne segue, che per

l'indicata determinazione del numero b, si potranno in generale trascurare, come si è fatto ne' citati luoghi (III), (IX), (XIV) le cifre a destra, e più brevemente si otterrà così il numero b domandato.

Affine poi di riconoscere qual sia la ragione del metodo di abbreviamento del N.° 4, e quando esso abbia luogo, converrà eseguire le seguenti riflessioni.

17. Supposto in generale $10(10^h a + 10^{h-1} b + 10^{h-2} c + \text{ec.} + f)$ il polinomio, che elevato alle successive potenze 0^a, 1^a, 2^a, 3^a, ec. $m-1^a$, e moltiplicato rispettivamente pei coefficienti Newtoniani 1, m, $\frac{m(m-1)}{2}$, ec. m forma la *hesima* delle precedenti serie (XLV), (XLVII), (XLIX), ec.; il polinomio, che costituisce la successiva serie $h+1$ *esima* sarà $10(10^{h+1} a + 10^h b + 10^{h-1} c + \text{ec.} + 10f + g)$ (N.° 15), e chiamato quello per brevità 10A, sarà questo $= 10(10\text{A} + g)$. Supposto inoltre, che L, M esprimano i coefficienti Newtoniani de' due termini successivi k *esimo*, $k+1$ *esimo* delle esposte serie; tali termini nella serie *hesima* saranno 10^{k-1}LA^{k-1}, 10^kMA^k, e nella serie $h+1$ *esima*, saranno $10^{k-1}\text{L}(10\text{A}+g)^{k-1}$, $10^k\text{M}(10\text{A}+g)^k$.

18. Ciò posto, si sottragga la precedente quantità 10^{k-1}LA^{k-1} dall'altra 10^kMA^k. Per la natura de' coefficienti della formola Newtoniana essendo $\text{M} = \frac{m-k+1}{k}\text{L}$, ne verrà

$$10^k\text{MA}^k - 10^{k-1}\text{LA}^{k-1} = \frac{10^{k-1}\text{LA}^{k-1}}{k}[(m-k+1)\,10\text{A} - k].$$

Ora essendo A un numero non < 1, è facile a vedersi, che qualunque valore si attribuisca ad m, ogni qualvolta si faccia k non $> \frac{m}{2}$, quando m è pari, e non $> \frac{m+1}{2}$ quando m è dispari, sempre risulta $(m-k+1) \times 10\text{A} - k > 0$. Dunque nelle nostre serie (XLV), (XLVII), ec. i termini cominciando dal primo fino inclusivamente al termine di mezzo, quando m è pari e ai due di mezzo, quando m è dispari, sempre

anderanno successivamente crescendo di valore, qualunque sia m. Ma ogni qualvolta pongasi $k > \frac{m}{2}$, oppure $> \frac{m+1}{2}$, secondochè m è pari o dispari; potendo risultare $(m-k+1)\,10A-k<0$, e quindi la differenza de' termini corrispondenti essere negativa; ne segue, che oltrepassato il termine, o i due termini di mezzo, potrà benissimo accadere, che gli altri successivi vadano decrescendo di valore. Ora affine di determinare quando questo caso abbia luogo, pongo, che m, e k siano realmente tali, che risulti $(m-k+1)\,10A-k<0$; avremo da ciò $k > \frac{10(m+1)A}{10A+1}$, e però $k > m+1-\frac{m+1}{10A+1}$; ma considerando l'andamento dei termini delle nostre serie fino al penultimo, vedesi non poter essere $k > m-1$, e quindi dover essere $k < m$. Dunque in conseguenza di questi due rapporti $k > m+1-\frac{m+1}{10A+1}$, $k < m$, dovendo risultare $\frac{m+1}{10A+1}-1 > 1$, ne segue, che, affinchè abbia luogo l'indicato decremento di valori nei termini delle nostre serie, dovrà essere $m > 20A+1$.

19. Col supporre nella espressione $A=(10^h a+10^{h-1}b+10^{h-2}c+\text{ec.})$ (N.° 17) $h=0$, $a=1$, $b=0$, $c=0$, ec., si riduca $A=1$, e si faccia $m=21+n$, essendo n un intero >0: i precedenti rapporti $k > m+1-\frac{m+1}{10A+1}$, $k<m$ divenendo perciò $k > 20+n-\frac{n}{11}$, $k<21+n$, pongasi $k=21+n-p$; avendosi da ciò $21+n-p > 20+n-\frac{n}{11}$, ne verrà $p<1+\frac{n}{11}$, e per conseguenza nella serie, ove $A=1$, ed $m=21+n$, saranno decrescenti quei termini, ne' quali in $k=21+n-p$ il numero p ha dei valori interi compresi tra i valori zero, ed $1+\frac{n}{11}$.

1.° Sia $n < 12$. In questa supposizione non potendo p acquistare, che il valore 1; ne segue, che ogniqualvolta il numero m esprimente il grado della radice da estraersi sia uno dei seguenti 22, 23, ec. 32, e sia frattanto $A = 1$, si avrà decremento solamente, mentre si passa dal termine $m - 2$ *esimo* allo $m - 1$ *esimo*, cioè dall'antepenultimo al penultimo.

2.° Pongasi $n > 11$, e però $= 11 + n'$: risultando da questa ipotesi $m = 32 + n'$, $k = 32 + n' - p$, $p < 2 + \frac{n'}{11}$ vedesi, che, mentre sia $n' < 12$, non potrà p acquistare, che i valori 1, 2, e per conseguenza nella solita ipotesi di $A = 1$, e nell'altra di m uguale ad uno dei numeri 33, 34, ec. 43, la diminuzione di valore accaderà soltanto nei successivi termini $m - 3$ *esimo*, $m - 2$ *esimo*, $m - 1$ *esimo*; ossia mentre dal termine precedente all'antepenultimo si passa all'antepenultimo, e da questo al penultimo.

3.° Abbiasi $n > 22$, ossia $n' > 11$. Fatto quindi $n' = 11 + n''$, poichè si ha $m = 43 + n''$, $k = 43 + n'' - p$, $p < 3 + \frac{n''}{11}$, e però nella ipotesi di $n'' < 12$, acquistandosi dalla p solamente i valori 1, 2, 3; ne segue, che, mentre $A = 1$, ed m uguaglia uno dei numeri 44, 45, ec. 54, il decremento di valore avrà luogo nei successivi termini $m - 4$ *esimo*, $m - 3$ *esimo*, $m - 2$ *esimo*, $m - 1$ *esimo*.

4.° Sia in generale $n = 11r + n^{(r)}$, ove r rappresenti un intero qualunque non < 0, ed $n^{(r)}$ un intero > 0, e < 12. Questa supposizione somministrando $m = 21 + 11r + n^{(r)}$, $k = 21 + 11r + n^{(r)} - p$, e $p < 1 + r + \frac{n^{(r)}}{11}$; ne segue, che p potrà in conseguenza di essa acquistare i valori 1, 2, 3, ec., $r + 1$, e però che, mentre sia $A = 1$, ed $m =$ ad uno dei numeri $21 + 11r + 1$, $21 + 11r + 2$, ec. $21 + 11r + 11$, il decremento di valore comincerà dal termine $m - (r + 2)$ *esimo*, e proseguirà successivamente fino allo $m - 1$ *esimo* inclusive.

20. Ab-

20. Abbiamo di sopra osservato (N.° 18), che qualunque sia l'esponente m, i termini delle nostre serie vanno sempre crescendo fino inclusivamente al termine di mezzo, quando m è pari, e ai due di mezzo, quando m è dispari. Ora nelle ipotesi precedenti di $A=1$, e di $m=21+11r+n^{(r)}$, a quanti termini dopo quelli di mezzo potrà cominciare il decremento? cominci dopo x termini: avendosi quindi nel caso di m pari $\frac{m}{2}-x=r+2$ (4.° N.° prec.), e nel caso di m dispari $\frac{m-1}{2}-x=r+2$, sarà nel primo di questi casi $x=\frac{m-2r-4}{2}=\frac{17+9r+n^{(r)}}{2}$, e nel secondo $x=\frac{m-2r-5}{2}$ $=\frac{16+9r+n^{(r)}}{2}$. Ora il più piccolo valore, che possa attribuirsi ad r, si è lo zero, e contemporaneamente all'ipotesi di $r=0$ il valore più piccolo, che possa darsi ad $n^{(r)}$, si è 1, oppure 2, secondochè m è pari, o dispari (1.°, 4.°, N.° 19). Dunque risultando in amendue questi casi $x=9$, ed essendo i termini delle due espressioni $\frac{17+9r+n^{(r)}}{2}$, $\frac{16+9r+n^{(r)}}{2}$ tutti positivi; ne segue, che quando $A=1$ la diminuzione di valore nelle nostre serie (XLV), (XLVII), ec. non potrà giammai accadere, che a 9 termini per lo meno al di là di quelli di mezzo; e quanto più grande sarà il valore, che si attribuisce tanto ad r, come ad $n^{(r)}$, tanto più si allontanerà dal mezzo il termine, da cui comincia l'indicato decremento.

21. Sottraggasi dal termine $10^k M(10A+g)^k$ l'altro $10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}$ (N.° 17); avremo da ciò $10^k M(10A+g)^k$ $-10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}=\frac{10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}}{k}[(m-k+1)10(10A+g)$ $-k]$. Ma essendo g non <0, si ha questa quantità $\frac{10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}}{k}$ $[(m-k+1)10(10A+g)-k]$ molto maggiore dell'altra

$\frac{10^{k-1}LA^{k-1}}{k}[(m-k+1)10A-k)$ (N.° 18). Dunque il termine $10^kM(10A+g)^k$ supererà di valore il suo precedente $10^{k-1}L(10A+g)^{k-1}$, più di quello, che il termine 10^kMA^k superi il precedente $10^{k-1}LA^{k-1}$; e per conseguenza i termini ulteriori supereranno in valore i precedenti, più nella serie (XLVII), che nella (XLV), più nella (XLIX) che nella (XLVII), e così di seguito.

22. Da quanto si è detto nei precedenti (N. 17, ec. 21) apparisce, che, siccome 1 è il valor minimo, che possa attribuirsi ad A (N.° 19), quindi risulta, che

1.° Finatantochè il grado della radice da estraersi non supera il ventunesimo, i termini delle nostre serie (XLV) (XLVII), ec. dal primo fino inclusivamente al penultimo non potranno essere giammai decrescenti, anzi cresceranno sempre di valore, rimanendo soltanto l'antepenultimo uguale al penultimo, quando $m=21$, ed $A=1$ (N.° 19).

2.° Qualunque sia il grado della radice; il decremento di valore ne' termini della serie, mentre esista, non potrà mai cominciare, che dal nono al di là del termine, o dei due termini di mezzo (N.° 20), e da questo fino al penultimo inclusivamente proseguirà sempre (N.° 19).

3.° Se l'indicato decremento di valore manchi nelle prime delle nostre serie (XLV), (XLVII), ec., molto più pel (N.° 21) dovrà mancare nelle ulteriori: anzi, anche, allorquando in quelle esista, dovrà pel citato (N.° 21), progredendosi innanzi, scomparire in queste; onde avanzandosi il calcolo, quanto conviene, sempre giungeremo a delle serie crescenti in tutta la loro estensione, cioè dal primo fino inclusivamente al penultimo termine.

4.° Qualunque sia l'esponente m, supponghiamo di essere giunti a delle serie, le quali siano crescenti per tutta la loro estensione (precedente 3.°), e ritenuto, che $10A=10(10^ha+10^{h-1}b+10^{h-2}c+\text{ec.}+f)$ (N.° 17) sia il polinomio, che forma una di esse, supponghiamo, che in questa

il numero delle cifre, che formano il penultimo termine $10^{m-1} mA^{m-1}$ superi di un numero l il numero delle cifre componenti il termine antepenultimo $10^{m-2} \frac{m(m-1)}{2} A^{m-2}$. In questa supposizione un termine qualunque della nostra serie anteriore all' antepenultimo, in generale il termine $10^k MA^k$, in cui sia $k < m-1$, sarà tale, che il numero delle sue cifre supererà il numero delle cifre del precedente $10^{k-1} LA^{k-1}$ per lo meno di $l-1$. Difatti avendosi $10^{m-1} mA^{m-1} = 10^{m-2} \frac{m(m-1)}{2} A^{m-2} \times \frac{2}{m-1} 10A$, l'aumento delle cifre, che accade nel passare dal termine $10^{m-2} \frac{m(m-1)}{2} A^{m-2}$ al termine $10^{m-1} mA^{m-1}$, dovrà dipendere dal moltiplicar quello per $\frac{2}{m-1} 10A$, e per conseguenza sarà questo $\frac{2}{m-1} 10A$ un numero intero o fratto non $< 10^{l-1}$; ma a cagione di $k < m-1$ si ha $\frac{m-k+1}{k} 10A > \frac{2}{m-1} 10A$: dunque essendo ancora $\frac{m-k+1}{k} 10A > 10^{l-1}$, ed essendo $10^k MA^k = 10^{k-1} LA^{k-1} \times \frac{m-k+1}{k} 10A$; esso termine $10^k MA^k$ dovrà contenere sopra l'altro $10^{k-1} LA^{k-1}$ un numero di cifre certamente non $< l-1$. Dunque ec. Ciò difatti evidentemente apparisce negli esempj de' (num. 1, 2, 3).

5.° Moltiplicato il termine $10^{k-1} LA^{k-1}$ per un numero intero minore del 10, e positivo, che dirò q, si sommi il prodotto $10^{k-1} LA^{k-1} q$ col termine susseguente $10^k MA^k$. Siano di numero $i^{(k-1)}$ le cifre esistenti in $10^{k-1} LA^{k-1}$, di numero $i^{(k)}$ le contenute in $10^k MA^k$, si ritenga la supposizione del (prec. 4.°) onde si abbia $i^{(k)}$ non $< i^{(k-1)} + l - 1$, e sia $l > 2$, onde $i^{(k-1)} + l - 1 > i^{(k-1)} + 1$, ed $i^{(k)}$ non $< i^{(k-1)} + 2$. In queste supposizioni, poichè le cifre esistenti in $10^{k-1} LA^{k-1} q$ sono tutt'al più di numero $i^{k-1} + 1$, ne segue, che, mentre in $10^k MA^k$ la cifra $i^{(k)} - (i^{k-1} + 1)$ *esima* sia diversa dal 9, le prime $i^{(k)} - (i^{(k-1)} + 2)$ cifre della somma $10^{k-1} LA^{k-1} q$

$+10^k MA^k$ saranno perfettamente le stesse, che le prime $i^k-(i^{(k-1)}+2)$ del termine $10^k MA^k$.

Sia ora 9 la cifra $i^k-(i^{(k-1)}+1)$ *esima* del termine $10^k MA^k$ diversa dal 9 la $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$ *esima*, e siano di numero $i^{(k-1)}+1$ le cifre in $10^{k-1}LA^{k-1}q$. Nell'eseguire l'indicata somma, potendo risultare un'unità da portarsi ad unire alla cifra $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+1)$ *esima*; essa nel caso diverrebbe 10. Dunque, ciò accadendo, il luogo $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+1)$ *esimo* della somma $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^k MA^k$ verrà occupato dallo zero, si accrescerà di 1 la cifra $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$ *esima* e rimarranno le medesime, che quelle del termine $10^k MA^k$, le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+3)$ cifre. Che se sia 9 anche questa $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$ *esima* cifra, verrà ancora il luogo $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+2)$ *esimo* occupato dallo zero, e si aumenterà di 1 la cifra $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+3)$ *esima*, restando le stesse, che quelle del termine $10^k MA^k$, le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+4)$, e così di seguito. Pertanto se le prime $i^{(k)}-(i^{(k-1)}+1)$ *esime* cifre del termine $10^k MA^k$ siano tanti 9; esse nella somma $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^k MA^k$ potranno diventare tanti zeri, e ciò succedendo, la prima cifra di essa somma sarà allora 1. In quest'ultimo caso il numero totale delle cifre in $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^k MA^k$ sarà $i^{(k)}+1$, in tutti gli altri sarà $i^{(k)}$.

6.° Si moltiplichi la precedente somma $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^k MA^k$ di nuovo per q, e il risultato si sommi col susseguente termine $10^{k+1}NA^{k+1}$, il numero delle cui cifre supporrò essere espresso dalla lettera $i^{(k+1)}$. Poichè il numero delle cifre in $10^{k-1}LA^{k-1}q+10^k MA^k$ uguaglia $i^{(k)}$, oppure $i^{(k)}+1$, essendo in questo secondo caso 1 la prima sua cifra, zero la seconda (prec. 5.°); il numero delle cifre nel prodotto $10^{k-1}LA^{k-1}q^2+10^k MA^k q$ non potrà oltrepassare il numero $i^{(k)}+1$: ma pel (prec. 4.°) si ha $i^{(k+1)}$ non $< i^{(k)}+l-1$, e per l'ipotesi $l>2$ (prec. 5.°), onde $i^{(k+1)}$ non $< i^{(k)}+2$. Dunque ancora nella somma $10^{k-1}LA^{k-1}q^2+10^k MA^k q+10^{k+1}\times NA^{k+1}$ avendo luogo il discorso del (prec. 5.°) diremo, che eziandio in essa se la cifra $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+1)$ *esima* del termi-

ne $10^{k+1}NA^{k+1}$ sia diversa dal 9, le prime sue $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+2)$ cifre saranno affatto le medesime, che le prime $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+2)$ del termine $10^{k+1}NA^{k+1}$; se la $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+1)$ *esima* cifra di questo termine sia 9, essa nell'esposta somma potrà divenire zero, aumentandosi allora di 1 la cifra $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+2)$ *esima*, e rimanendo le medesime le altre $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+3)$; e così in progresso; e se le prime $i^{(k+1)}-(i^{(k)}+1)$ cifre di $10^{k+1}NA^{k+1}$ siano tanti 9, potranno nella somma trovata diventare tanti zeri preceduti tutti dalla cifra 1. Le cifre tutte dell'indicata somma in quest'ultimo caso saranno, come sopra, di numero $i^{(k+1)}+1$, in tutti gli altri casi di numero $i^{(k+1)}$.

7.° Chiamato $i^{(k+2)}$ il numero delle cifre esistenti nel termine $10^{k+2}PA^{k+2}$ susseguente all'altro $10^{k+1}NA^{k+1}$, con discorso affatto simile a quello de' (prec. 5.°, 6.°) troveremo anche nella somma $10^{k-1}LA^{k-1}q^3+10^kMA^kq^2+10^{k+1}NA^{k+1}q+10^{k+2}PA^{k+2}$ le prime $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+2)$ sono le stesse, che le prime $i^{(k+2)}-(i^{(k-1)}+2)$ di $10^{k+2}PA^{k+2}$, quando la cifra $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+1)$ *esima* di questo ultimo termine sia diversa dal 9; che ne sono le stesse le prime $i^{(k+2)}(i^{(k+1)}+3)$, quando sia diversa dal 9 la cifra $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+2)$ *esima*, e sia 9 la $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+1)$ *esima*, potendo questa in tal caso diventare zero, e aumentarsi quindi di 1 la cifra $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+2)$ *esima*, e così di seguito; che esse $i^{(k+2)}-(i^{(k+1)}+1)$ cifre possono diventare tanti zeri preceduti da 1, quando le corrispondenti in $10^{k+2}PA^{k+2}$ sono tanti 9; e che finalmente il numero delle cifre nell'esposta somma ne' primi de' casi ora accennati è $i^{(k+2)}$, nell'ultimo $i^{(k+2)}+1$.

Così in progresso.

8.° Rappresenti il numero g giusta il (N.° 17) la cifra, che nel valore di $\sqrt[m]{P}$ succede all'ottenuta f; ed eseguita con esso g, e la precedente serie

(LII) $1,\ 10mA,\ 10^2\frac{m(m-1)}{2}A^2,$ ec., $10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}A^{m-2},$ $10^{m-1}mA^{m-1}$, U, ove denomino U l'ultimo termine, l'ope-

razione de' numeri 10, 15, si denominino
(LIII) 1, B, C, ec. R, S, T, V
i termini, che quindi son risultati nella seconda riga; si dicano
(LIV) 1, B', C', ec. R', S', T'
i termini risultati nella riga terza; appellinsi
(LV) 1, B'', C'', ec. R'', S''
i risultati nella riga quarta;
(LVI) 1, B''', C''', ec. R'''
i risultati nella quinta; e così di seguito.

Ciò fatto, pongasi nelle quantità de' (prec. 5.°, 6.°, 7.°) successivamente $k = 1, 2, 3$, ec. $m-2$, $m-1$, si faccia $q = g$, e in luogo de' coefficienti L, M, N, ec. pongansi i rispettivi coefficienti della serie (LII). In conseguenza di ciò $i = 1, i', i''$, ec. $i^{(m-2)}, i^{(m-1)}$ esprimeranno i numeri delle cifre, che corrispondentemente esistono nei termini 1.°, 2.°, 3.°, ec. $(m-1)$ *esimo*, *mesimo* di essa serie, e pei citati (prec. 5.°, 6.°, 7.°) i' sarà il numero delle cifre contenute nel termine B della serie (LIII); i'', oppure $i''+1$ sarà il numero delle cifre esistenti in C; i''', oppure $i'''+1$ il numero delle esistenti in D, e così in progresso; onde il numero delle cifre contenute in T sarà $i^{(m-1)}$, oppure $i^{(m-1)}+1$; avvertendo riguardo a questo termine T, (e lo stesso dicendosi rapporto agli altri B, C, D, ec.) che quando $i^{(m-1)}+1$ è il numero delle sue cifre, la sua cifra prima è l'unità, e le $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ successive sono tanti zeri corrispondentemente ad altrettanti 9 costituenti le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre del termine $10^{m-1}mA^{m-1}$. Quando poi le cifre in T sono di numero $i^{(m-1)}$: allora se la cifra $[i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)]$ *esima* di $10^{m-1}mA^{m-1}$ sia diversa dal 9, le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ cifre di T saranno perfettamente le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ di $10^{m-1}mA^{m-1}$: se in questo termine sia 9 la cifra $[i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)]$ *esima*, e ne sia diversa la $[i^{(m-1)}(i^{(m-2)}+2)]$ *esima*; allora potrà in T il luogo $[i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)]$ *esimo* venire occu-

pato dallo zero, e le sue prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+3)$ cifre saranno le medesime, che le prime $i^{(m-1)}(i^{(m-2)}+3)$ di $10^{m-1}mA^{m-1}$; e così di seguito. Avvertasi in questo luogo, che a cagione di $i^{(m-1)}=i^{(m-2)}+l$ (prec. 4.°) avremo $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)=l-1$, $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)=l-2$, $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+3)=l-3$, ec.

Rapporto alle quantità (LIV) si osservi, che siccome 1 è la prima di esse, e di più abbiamo $B'=g+B$, $C'=B'g+C$, $D'=C'g+D$, ec. $T'=S'g+T$, e finalmente si ha la differenza $l>2$ (prec. 5.°); con discorsi simili a quelli de' (prec. 5.°, 6.°, ec.) troveremo, che le cifre esistenti in B' sono di numero i', ovvero $i'+1$, le esistenti in C' sono di numero i'', ovvero $i''+i$, ec. e finalmente le esistenti in T sono di numero $i^{(m-1)}$, oppure $i^{(m-1)}+1$; osservando ancora quivi, che quando in T le cifre sono di numero $i^{(m-1)}+1$, la prima di esse è sempre 1, e le successive $i^{(m-1}-(i^{(m-2)}+1)$ sono tanti zeri corrispondenti ad altrettanti 9 costituenti le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre del termine T; quando poi in T la cifra $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ sia diversa dal 9; allora le cifre in T sono di numero $i^{(m-1)}$, e le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ cifre sono le medesime tanto in T', come in T. Se l'indicata cifra $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ *esima* sia 9, e non sia 9 la $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ *esima*; allora in T le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+3)$ di T, ed $i^{(m-1)}$ ne sarà il numero totale. Così in progresso; dicendosi evidentemente lo stesso in corrispondenza sulle altre quantità B', C', D', ec.

Con maniera simile alla precedente vedremo, che riguardo alle quantità (LV) le cifre esistenti in S'' sono di numero $i^{(m-2)}$, oppure $i^{(m-2)}+1$, riguardo alle (LVI) le esistenti in R''' sono di numero $i^{(m-3)}$, ovvero $i^{(m-3)}+1$, e così di seguito; osservando qui ancora, che quando le cifre sono in numero $i^{(m-2)}+1$, $i^{(m-3)}+1$, ec., la prima di loro rispettivamente in S'', R''', ec. è l'unità, e le successive $i^{(m-2)}-(i^{(m-3)}+1)$, $i^{(m-3)}-(i^{(m-4)}+1)$, ec. sono tanti zeri.

9.° Pel (N.° 15) avendosi $U-gT>0$, $U(g+1)T<0$;

questo numero g esprimerà la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$. Inoltre pel citato (N.° 15) nelle serie del (prec. 8.°) abbiamo $V=U-gT=U-(10A+g)^m+10^mA^m$, $T'=m(10A+g)^{m-1}$, $S''=\frac{m(m-1)}{2}(10A+g)^{m-2}$ ec. Dunque supposto, che le cifre g, ec., le quali nella ricerca del valore $\sqrt[m]{P}$ si determinano attualmente, siano decimali; quella tra le serie (XLV), (XLVII), (XLIX), ec. (N.° 15), che risulta nel presente caso sarà

(LVII) $1, 10B^{(m-1)}, 10^2C^{(m-2)}, 10^3D^{(m-3)}$, ec. $10^{m-3}R''', 10^{m-2}S'', 10^{m-1}T', 10^mV$.

Si chiami g_1 la cifra da aggiungersi alla porzione di radice già determinata 10^2A+10g, si eseguisca con questa g_1 e la serie (LVII) la solita operazione de' numeri 10, 15, e siano

(LVIII)
$$\begin{array}{lll} 1, B_1, C_1, D_1, \text{ec.} & R_1, S_1, T_1, V_1, \\ 1, B'_1, C'_1, \text{ec.} & R'_1, S'_1, T'_1, \\ 1, B''_1, \text{ec.} & R''_1, S''_1, \\ 1, \text{ec.} & R'''_1, \\ \text{ec.} & \end{array}$$

i risultati, che si ottengono nelle successive righe 2.ª, 3.ª, 4.ª, 5.ª, ec. Ciò fatto, sarà g_1 la parte intera del quoto $\frac{10^mV}{T_1}$; sarà $V_1=10^mV-g_1$, $T_1=10^mV-(10^2A+10g+g_1)^m+10^m(10A+g)^m$ (N.° 15), $T'_1=m(10^2A+10g+g_1)^{m-1}$, $S''_1=\frac{m(m-1)}{2}(10^2A+10g+g_1)^{m-2}$, ec., e la serie tra le (XLV), (XLVII), (XLIX), ec., che corrisponde a questo caso, sarà

(LIX) $1, 10B_1^{(m-1)}, 10^2C_1^{(m-2)}, 10^3D_1^{(m-3)}$, ec. $10^{m-3}R'''_1, 10^{m-2}S''_1, 10^{m-1}T'_1, 10^mV_1$.

10.° Presi due termini successivi della serie (LVII), eccettuatone l'ultimo 10^mV, per esempio i due $10^{m-2}S''$, $10^{m-1}T'$ siano le cifre in S'' di numero $i^{(m-2)}$, ed in T' di numero $i^{(m-1)}$ (prec. 8.°): in questa ipotesi i numeri delle cifre nelle

le quantità $10^{m-2}S''$, $10^{m-1}T^{1}$, risulteranno rispettivamente $i^{(m-2)}+m-2$, $i^{(m-1)}+m-1$; ma sottraendo si ottiene $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}+1$, e lo stesso si dice di altri due qualisivogliono degli accennati termini. Dunque nella supposizione ora fatta uno qualunque de' supposti termini della serie (LVII) toltone l'ultimo $10^{m}V$, contiene sopra del termine prossimo a sinistra una cifra di più di quelle, che il termine corrispondente della serie (LII) contiene sopra del suo termine prossimo a sinistra. La medesima conseguenza ha luogo ancora, mentre le cifre siano in S'' di numero $i^{(m-2)}+1$, ed in T^{1} di numero $i^{(m-1)}+1$ (prec. 8.°): ma se quelle sono di numero $i^{(m-2)}+1$, e queste di numero $i^{(m-1)}$; allora tante cifre conterrà $10^{m-1}T^{1}$ sopra $10^{m-2}S''$, quante $m\times 10^{m-1}A^{m-1}$ ne contiene sopra $\frac{m(m-1)}{2}\times 10^{m-2}A^{m-2}$; ma in questo caso sarà 1 la prima cifra a sinistra di $10^{m-2}S''$, e le successive $i^{(m-2)}-(i^{(m-3)}+1)$ saranno tanti zeri (prec. 8.°).

11.° Poichè g_1 è un numero intero di una sola cifra, e poichè si ha $B_1=g_1+10B^{(m-1)}$, $C_1=B_1g_1+1^2C^{(m-2)}$, ec. $T_1=S_1g_1+10^{m-1}T_1$; con discorsi affatto simili a quelli de' (prec. 5.°, 6.°, ec.) truoveremo, che il numero delle cifre in T_1 deve essere $i^{(m-1)}+m-1$, oppure $i^{(m-1)}+m$, potendo il secondo di questi casi accadere solamente quando le prime $(i^{(m-1)}+m-1)-(i^{(m-2)}+m-1)=i^{(m-1)}-i^{(m-2)}$ cifre di $10^{m-1}T'$ a sinistra sono tanti 9; e divenendo allora essi 9 tanti zeri, a' quali precede l'unità. Quando poi le cifre di T_1 risultano di numero $i^{(m-1)}+m-1$: allora se la cifra $[(i^{(m-1)}+m-1)-(i^{(m-2)}+m-1)]$ *esima* $=(i^{(m-1)}-i^{(m-2)})$ *esima* di $10^{m-1}T'$, e però di T^{1} è diversa dal 9, le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre di T_1 saranno le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ di T^{1}; se sia 9 la $(i^{(m-1)}-i^{(m-2)})$ *esima* cifra di T^{1}, e ne sia diversa la $[i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)]$ *esima*, allora la $(i^{(m-1)}-i^{(m-2)})$ *esima* cifra in T_1 sarà zero, e le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+2)$ le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-(i^{m-2}+2)$ di T^{1}, e così di seguito.

Avendosi poi $B'_1 = g_1 + B_1$, $C'_1 = B'_1 g_1 + C_1$, ec., $T'_1 = S'_1 g_1 + T_1$; come precedentemente si troverà, che anche le cifre esistenti in T'_1 sono di numero $i^{(m-1)} + m - 1$, ovvero $i^{(m-1)} + m$; avendosi qui pure nel primo di questi casi le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)$ cifre, oppure le prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 2)$, ec. di T'_1 uguali in corrispondenza alle prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)$, od alle prime $i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 2)$, ec. di T_1 secondochè in T_1 è diversa dal 9 la cifra $(i^{(m-1)} - i^{(m-2)})$ *esima*, od essendo questa $= 9$, ne sia poi diversa la cifra $[i^{(m-1)} - (i^{(m-2)} + 1)]$ *esima*, ec.: nel caso secondo poi la prima cifra a sinistra di T'_1 sarà 1, e le susseguenti $i^{(m-1)} - i^{(m-2)}$ saranno tanti zeri corrispondenti ad altrettanti 9 esistenti tutti insieme alla sinistra di T_1.

12.° Come dalla considerazione della serie (LII), e delle quantità (LIII), ec. (LVI) siamo passati alla considerazione della serie (LVII), e delle quantità (LVIII) (prec. 8.°, 9.°, ec.), così potremo da queste passare alla considerazione della serie (LIX), e delle quantità, che ne provengono, le quali chiamata g_2 la cifra da unirsi nell'estrazione della radice al risultato già ottenuto $10^3A + 10^2g + 10g$, supporremo esprimersi per

$$\begin{array}{rrrl rrrr} 1, & B_2, & C_2, & \text{ec.} & R_2, & S_2, & T_2, & V_2 \\ & 1, & B'_2, & \text{ec.} & & R'_2, & S'_2, & T'_2 \\ & & 1, & \text{ec.} & & & R''_2, & S''_2 \\ & & & \text{ec.}, & & & & \end{array}$$

ed avremo $V_2 = 10^m V_1 - g_2 T_2 = 10^m V_1 - (10^3A + 10^2g + 10g_1 + g_2)^m + 10^m(10^2A + 10g + g_1)^m$, $T'_2 = m(10^3A + 10^2g + 10g_1 + g_2)^{m-1}$, ec.; e come nei (prec. 10.° 11.°) si troverà, che quando il numero delle cifre in S''_1 ed in T_1 sono rispettivamente $i^{(m-2)} + m - 2$, $i^{(m-1)} + m - 1$, oppure $i^{(m-2)} + m - 1$, $i^{(m-1)} + m$; allora risultando i numeri delle cifre nelle quantità $10^{m-2}S''_1$, $10^{m-1}T'_1$ rispettivamente $i^{(m-2)} + 2m - 4$, $i^{(m-1)} + 2m - 2$, ovvero $i^{(m-2)} + 2m - 3$, $i^{(m-1)} + 2m - 1$; il termine $10^{m-1}T'_1$ conterrà sopra l'altro $10^{m-2}S''_1$ un numero $i^{(m-1)} - i^{(m-2)} + 2$ di cifre, e però una cifra di più di quelle, che il termine

$10^{m-1}T'$ nella serie (LIX) contiene sopra $10^{m-2}S''$, e due cifre più di quelle, che il termine $10^{m-1}mA^{m-1}$ nella serie (LII) contiene in corrispondenza sopra $10^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}A^{m-2}$.

Allorchè poi il numero delle cifre in S''_1 sia $i^{(m-2)}+m-1$, ed $i^{(m-1)}+m-1$ sia questo numero in T_1; tante saranno le cifre di $10^{m-1}T'_1$ sopra di $10^{m-2}S''_1$, quante sono le cifre di $10^{m-1}T'$ sopra di $10^{m-2}S''$; ma la prima cifra a sinistra di $10^{m-2}S''_1$ sarà 1, e le successive $i^{(m-2)}-(i^{(m-3)}+1)$ tanti zeri.

Come nei (prec. 8.°, ec. 11.°) vedremo, che ancora nelle quantità T_2, T'_2 il numero delle cifre è $i^{(m-1)}+2m-2$, oppure $i^{(m-1)}+2m-1$, avendosi nel secondo di questi casi la prima cifra a sinistra $=1$, e le successive $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}+1$ tanti zeri corrispondenti ad altrettanti 9 esistenti, riguardo al termine T_2, sul principio del termine $10^{m-1}T'_1$, e rapporto al termine T'_2 sul principio di T_2. Nel caso primo poi quando la cifra $(i^{(m-1)}-i^{(m-2)}+1)$ *esima* di $10^{m-1}T'_1$, oppure di T_2 sia diversa dal 9; allora le prime $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}$ cifre rispettivamente di T_2, ovvero T'_2, saranno le stesse, che le prime $i^{(m-1)}-i^{(m-2)}$ di T'_1 o di T'_2. Se sia 9 questa $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ *esima* cifra; negli indicati termini saranno le medesime le prime $i^{(m-1)}-(i^{(m-2)}+1)$ cifre; così in progresso.

13.° Lo stesso dicesi evidentemente di tutte le ulteriori serie, che nel proseguir l'estrazione della radice ottengonsi successivamente; avvertendo, che, quanto più si progredisce, tanto più aumenta nel modo indicato nel (prec. 12.°) la differenza tra il numero delle cifre in un dato termine, e il numero delle cifre nel termine successivo.

23. Ritenute le supposizioni tutte dei (4.°, ec., 13.°, N.° 22), e posto per semplicità di scrivere i invece di $i^{(m-1)}$, abbiasi

(LX) $10^{m-1}mA^{m-1}=10^{i-1}\alpha+10^{i-2}\beta+\text{ec.}+10^{i-(l-3)}\varepsilon+10^{i-(l-2)}\zeta+10^{i(l-1)}\eta+10^{i-l}\iota+\text{ec.}$, e sia la cifra η diversa dal 9,

onde risulti T (8.° N.° 22) avente i cifre, e le sue prime $l-2$ uguali alle supposte α, β, ec. ε, ζ, e però avente la forma

(LXI) $T = 10^{i-1}\alpha + 10^{i-2}\beta + \text{ec.} + 10^{i-(l-3)}\varepsilon + 10^{i-(l-2)}\zeta + 10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.}$

Poichè g è un intero di una sola cifra esprimente la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$ (8.°, 9.°, N.° 22); la quantità U non potrà contenere più di $i+1$ cifre, e porrò quindi in generale

(LXII) $U = 10^{i}\lambda + 10^{i-1}\mu + 10^{i-2}\nu + \text{ec.} + 10^{i-(l-3)}\rho + 10^{i-(l-2)}\sigma + 10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi + \text{ec.}$

Ciò fatto vogliasi dividere attualmente U per T, e supponghiamo, che q esprima il massimo numero delle volte esatte, che α contienesi in $10\lambda + \mu$, ed insieme β contienesi nel corrispondente numero ν accresciuto dell'avanzo rimasto dalla divisione di $10\lambda + \mu$ per α, e così di seguito fino alla divisione del numero σ, aumentato dall'avanzo precedente, per ζ; e supponghiamo, che da quest'ultima divisione si abbia un residuo non $< q$. In questa ipotesi tutte le cifre ulteriori η', ι', ec. della T contenendosi nelle rispettive τ, ξ, ec. della U aumentate dei rispettivi avanzi più delle citata q volte, è chiaro, che q esprimerà la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$; e per conseguenza, essendo $q = g$ (9.° N.° 22) si otterrà nella supposizione presente questo numero g tanto dalla divisione dell'intero numero U per l'intero T, come dalla divisione della prima parte

(LXIII) $10^{l-2}\lambda + 10^{l-3}\mu + 10^{l-4}\nu + \text{ec.} + 10\rho + \sigma$

della quantità U per la prima

(LXIV) $10^{l-3}\alpha + 10^{l-4}\beta + \text{ec.} + 10\varepsilon + \zeta$

della T. Dunque potremo, trascurate tanto in questa, come in quella quantità le ultime parti

(LXV) $10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.}$, $10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\zeta + \text{ec.}$,

ricavare il numero g da aggiungersi nel chiesto valore $\sqrt[m]{P}$

(N.° 15) alla prima parte 10A (N.° 17) con la divisione delle sole prime esposte parti (LXIV), (LXIII).

24. Chiamiamo s, t queste quantità (LXIV), (LXIII), ed u, v le altre (LXV), cosicchè si abbia
$U = 10^{i(l-2)}t + v$, $T = 10^{i-(l-2)}s + u$; ne verrà
$V = U - gT$ (9.° N.° 22) $= 10^{i-(l-2)}(t - gs) + (v - gu)$;
ma contenendosi in s un numero $l - 2$ di cifre, per la natura della divisione, non può nel residuo $t - gs$ contenersene un numero maggiore: sarà dunque questo residuo $t - gs$ della forma
(LXVI) $10^{l-3}\mu' + 10^{l-4}\nu'$ ec. $+ 10\rho' + \sigma'$,
e nel caso di gu non $> v$ avendosi $v - gu$ della forma $10^{i-(l-1)}\tau' + 10^{i-l}\xi'$ + ec., sarà
(LXVII) $V = 10^{i-1}\mu' + 10^{i-2}\nu' +$ ec. $+ 10^{i-(l-3)}\rho' + 10^{i-(l-2)}\sigma' + 10^{i-(l-1)}\tau' + 10^{i-l}\xi' +$ ec.
Che se si abbia $gu > v$; allora, nell' unirsi della quantità $v - gu = -(gu - v)$ coll'altra $10^{i-(l-2)}(t - gs)$, onde ottenere il valore di V, rimarrà nel risultato (LXVII) cangiata per lo meno la cifra σ'. Siccome poi si ha $V = 10^{i-(l-2)}(t - gs) - (gu - v)$, e dalle (LXV) apparisce essere sempre $gu - v < 10^{i-(l-3)}$, ne segue, che sarà $V > 10^{i-(l-2)}(t - gs) - 10^{i-(l-3)}$.

25. Nel proseguire avanti l'operazione si osservi tosto, che la cifra g, (9.° N.° 22) da aggiugnersi all'ottenuta quantità $10^2A + 10g$ deve essere la parte intera del quoto $\frac{10^m V}{T}$ (LVII), (LVIII) (9.° N.° 22). Ora suppongasi, che nella quantità T=(LXI) la cifra $(l-1)$ *esima*, oppure la $(l-2)$ *esima*, cioè la η', ovvero la ζ sia diversa dal 9; in conseguenza di ciò le prime $l - 3$ cifre della T' (LIV) (8.° N.° 22) saranno le medesime, che le prime $l - 3$ della T, e potrà quindi porsi
$T' = 10^{i-1}\alpha + 10^{i-2}\beta +$ ec. $+ 10^{i-(l-3)}\varepsilon + 10^{i-(l-2)}\zeta'' + 10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}\iota'' +$ ec.,
e però avremo
$10^{m-1}T' = 10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta +$ ec. $10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}\zeta'' + 10^{i+m-l}\eta'' + 10^{i+m-(l+1)}\iota'' +$ ec.

Suppongasi inoltre, che in questo valore di $10^{m-1}T'$ la cifra *lesima*, o la $(l-1)$*esima*, o la $(l-2)$*esima*, cioè ι'', ovvero η'', oppure ζ'' sia diversa dal 9: per questa supposizione le prime $l-3$ cifre della T_1 (LVIII) per lo (11.° N.° 22) risulteranno le stesse, che le prime $l-3$ della T', e però che le prime $l-3$ della T, e quindi porremo

$$\text{(LXVIII)}\quad T' = 10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta + \text{ec.} + 10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' + \text{ec.}$$

Finalmente si supponga gu non $>v$ (N.° prec.), onde la (LXVII) esprima il valore di V e si ponga la quantità (LXVI) $= t'$, la parte $10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi^1 + \text{ec.}$ della (LXVII) moltiplicata per 10^m si ponga $= v'$, si faccia nella (LXIV) $10^{l-4}\alpha + 10^{l-5}\beta + \text{ec.} + \varepsilon = \frac{s-\zeta}{10} = s'$, e nella (LXVIII) facciasi $10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' + \text{ec.} = u'$. Risulterà da tutto ciò

$$\text{(LXIX)}\quad \begin{cases} 10^m V = 10^{i+m-(l-2)}t' + v', \\ T_1 = 10^{i+m-(l-2)}s' + u'. \end{cases}$$

Esprimasi con la lettera q_1 la parte intera del quoto $\frac{t'}{s'}$, e l'avanzo, che in ultimo risulta dall'attual divisione di t' per s', sia non $< q_1$. In conseguenza di queste supposizioni per una ragione affatto simile all'addotta nel (N.° 23), vedesi, che lo stesso numero q_1 costituirà ancora la parte intera del quoziente $\frac{10^m V}{T_1}$; e quindi, avendosi $q_1 = g_1$, (9.° N.° 22), la cifra g_1, che nel valore di $\sqrt[m]{P}$ si deve aggiungere alla quantità già ottenuta $10^2 A + 10g$, si ricaverà tanto col dividere $10^m V$ per T_1, come col dividere t' per s'; ma t' non è, che il residuo $t - gs$ della precedente divisione di t per s, ed s' non è che la quantità s, da cui si è tagliata l'ultima cifra ζ. Dunque mentre abbiano luogo le esposte condizioni, otterremo le successive cifre g, g_1 della radice, che si cerca, 1.° col trascurare nelle quantità U, T le ultime parti (LXV) (N.° 23), e dividere la prima parte $t =$ (LXIII)

per la prima $s=$(LXIV); 2.° col dividere il residuo $t-gs=t'$ della division precedente per la quantità s' risultante dal tagliare l'ultima cifra ζ dalla quantità s.

Siccome poi col sostituire in $V_1=10^m V-g_1 T_1$ (9.° N.° 22) i precedenti valori di $10^m V$, e di T_1 ottienesi $V_1=10^{i+m-(l-2)}(t'-g_1 s')+(v'-g_1 u')$; e questo risultato è di forma simile affatto a quella del valore di V (N.° 24); ne segue, che mentre si verifichino, anche riguardo a queste quantità, le precedenti condizioni si otterrà la cifra g_2, da aggiungersi nel valore di $\sqrt[m]{P}$ alla quantità $10^3 A+10^2 g+10 g_1$, tanto col dividere $10^m V_1$ per T_2, (12.° N.° 22), come col dividere il residuo, che si è ottenuto dalla divisione di t' per s', cioè la quantità $t'-g_1 s'$ per ciò, che diventa la quantità s', tagliandosi da essa l'ultima cifra ε. Così in progresso.

Ma le ora esposte successive divisioni altro evidentemente non sono, che le prescritte nel (N.° 4.). Dunque, ogni qualvolta abbiano luogo le condizioni sovraccennate, sotto l'abbreviamento di calcolo, che si è esposto nel citato (N.° 4), si otterranno realmente le cifre g, g^1, g^2, ec., che compongono la radice richiesta.

26. Manchino ora le condizioni supposte nei (N. 23, 25), e

1.° Cominciam dal supporre, che dividendo la quantità (LXIII) $=t$ (N.° 24) per l'altra (LXIV) $=s$, si abbia bensì, come nel (N.° 23), il quoziente q; ma il residuo, che ne risulta, e che dirò t', sia $<q$, e seguano per ora a verificarsi le altre condizioni de' cit. (N.i 23, 25). In questa ipotesi potendo la cifra η' del divisore T=(LXI), contenersi entro la cifra τ del dividendo U=(LXII) accresciuta dell' avanzo precedente $10r$, oppure la ι' entra la ξ aumentata del precedente residuo, oppure ec. meno di q volte; se mai ciò accada, dovrà essere la parte intera del quoto $\frac{U}{T}$, ossia $g<q$.

I. Suppongasi in primo luogo, che si abbia bensì $t'<q$, ma però che ciascuna delle cifre η', ι', ec. contengasi nella corrispondente τ, ξ, ec. accresciuta del rispettivo avanzo non

meno di q volte. In questa supposizione, essendo $g = q$, cerchiamo di determinare, quali siano i valori delle successive cifre g_1, g_2, g_3, ec. (9.°, 12.° N.° 22) della $\sqrt[m]{P}$. Poichè in conseguenza delle ipotesi fatte, e del (N.° 24) abbiamo $V = U - gT = 10^{i-(l-2)}(t - gs) + (v - gu) = 10^{i-(l-2)}(t - gs - t') + (10^{i-(l-2)}t' + v - gu) = 10^{i-(l-2)}t' + v - gu > 0$, ne verrà V quantità positiva, e della forma $10^{i-(l-2)}r'' + 10^{i-(l-1)}\tau'' + 10^{i-l}\xi'' +$ ec., in cui ciascuno dei numeri r'', τ'', ξ'', ec. sarà < 10: ma g_1 è la parte intiera del quoto $\frac{10^m V}{T_1}$ (9.° N.° 22); ed ogni qualvolta sia $l > 4$, la frazione $\frac{10^m V}{T_1}$

$$= \frac{10^{i+m-(l-2)}r'' + 10^{i+m-(l-1)}\tau'' + 10^{i+m-l}\xi'' + \text{ec.}}{10^{i+m-2}a + 10^{i+m-3}\beta + 10^{i+m-4}\gamma + \text{ec.}} \text{ (LXVIII, N.° 25)}$$

$$= \frac{r'' + 10^{-1}\tau'' + 10^{-2}\xi'' + \text{ec.}}{10^{l-4}a + 10^{l-5}\beta + 10^{l-6}\gamma + \text{ec.}},$$ a cagione di a non < 1 (N.° 23), è una frazione vera. Dunque, mentre abbiasi $l > 4$, risulterà $g_1 = 0$.

Poichè $V_1 = 10^m V - g_1 T_1$ (9.° N.° 22), nel caso di $l > 4$ avendosi $g_1 = 0$; otterremo $V_1 = 10^m V$; ma essendo $T'_1 = T_1 + g_1 s'_1 = \tau_1$ (9.° N.° 22) e $T_2 = 10^{m-1}\tau'_1 + g_2 s_2$ (12.° N.° 22) $= 10^{m-1}\tau_1 + g_2 s_2$, pel cit. (9.° N.° 22) sarà esso T_2 una quantità della forma $10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta +$ ec. Dunque risultando $\frac{10^m V_1}{T_2} = \frac{10^{i+2m-(l-2)}r'' + 10^{i+2m-(l-1)}\tau'' + \text{ec.}}{10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.}} = \frac{r'' + 10^{-1}\tau'' + \text{ec.}}{10^{l-5}\alpha + 10^{l-6}\beta + \text{ec.}}$, ne segue, che, mentre abbiasi $l > s$, sarà ancora la parte intiera del quoto $\frac{10^m V_1}{T_2}$, e però g_2 (12.° N.° 22) $= 0$.

Nella maniera medesima trovandosi

$$\frac{10^m V_2}{T^3} = \frac{10^{i+3m-(l-2)}r'' + 10^{i+3m-(l-1)}\tau'' + \text{ec.}}{10^{i+3m-4}\alpha + 10^{i+3m-5}\beta + \text{ec.}} = \frac{r'' + 10^{-1}\tau'' + \text{ec.}}{10^{l-6}\alpha + 10^{l-7}\beta + \text{ec.}}$$ eziandio g_3 sarà $= 0$, mentre si abbia $l > 6$; e così di seguito, fino ad essere $g_{l-4} = 0$.

II. Ritenuto il residuo $t - qs = t' < q$, supponghiamo in secondo luogo, che qualcheduna delle cifre η', ι', ec. del divi-

divisore T si contenga nella corrispondente τ, ξ, ec. del dividendo U accresciuta del dovuto avanzo meno delle esposte q volte. In questa ipotesi sarà $g<q$, e sarà $U-qT=10^{i-(l-2)}(t-qs)+(v-qu)=10^{i-(l-2)}(t-qs-t')+(10^{i-(l-2)}t'+v-qu)=10^{i-(l-2)}t'+v-qu<0$. Essendo q maggior del dovere, avremo $10A+q>\sqrt[m]{P}$ (8.°, 9.° N.° 22) e quindi la nuova cifra da aggiungersi alla quantità 10^2A+10q, onde accostarsi opportunamente al valore di $\sqrt[m]{P}$, dovrà essere negativa. Sia $-g_1$ questa nuova cifra; poichè il numero p (N.° 5), che si adopera ad eseguire le operazioni de' (N.i 10, ec. 15) può pei numeri citati essere egualmente positivo, e negativo, si collochi nel (9.° N.° 22) $-g_1$ invece di g_1, e per indicare i risultati, che ne vengono, serviamoci per brevità delle stesse lettere (LVIII); posto in oltre $U-qT=-V$, sarà evidentemente $-g_1$ la parte intera del quoto $\frac{-10^mV}{T_1}$; ma $V=-(U-qT)=qu-(10^{i-(l-2)}t'+v)$ è quantità nel presente caso positiva, e non può essere che della forma $10^{i-(l-2)}r'''+10^{i-(l-1)}\tau'''+10^{i-l}\xi'''+$ ec., in cui ciascuno dei numeri r''', τ''', ξ''', ec. è <10, e con discorsi simili a quelli dei (5°, 6.°, ec. N.° 22) in conseguenza delle ipotesi fatte truovasi risultare T_1 anche presentemente della forma $10^{i+m-2}\alpha+10^{i+m-3}\beta+10^{i+m-4}\gamma+$ ec. Dunque avendosi

$$\frac{-10^mV}{T_1}=-\left(\frac{10^{i+m-(l-2)}r'''+10^{i+m-(l-1)}\tau'''+10^{i+m-l}\xi'''+\text{ec.}}{10^{i+m-2}\alpha+10^{i+m-3}\beta+10^{i+m-4}\gamma+\text{ec.}}\right)=-\left(\frac{r'''+10^{-1}\tau'''+10^{-2}\xi'''+\text{ec.}}{10^{l-4}\alpha+10^{l-5}\beta+10^{l-6}\gamma+\text{ec.}}\right),$$

ne segue, che, ogni qualvolta sia $l>4$, dovrà risultare anche qui $g_1=0$.

Pongasi realmente $l>4$, onde sia $g_1=0$, converrà in questo caso determinare la successiva cifra g_2, la quale sottratta dalla quantità $10^3A+10^2q-10\times0=10^3A+10^2q+10\times0$ produca il risultato $10^3A+10^2q+10\times0-g_2$ prossimo al valore di $\sqrt[m]{P}$. Avendosi $V_1=-(10^mV-g_1T_1)=-10^mV$, e posto nel (12.° N.° 22) $-g_2$ invece di g_2, risultando

$T_2 = 10^{m-1}T'_1 - g_2S_2 = 10^{m-1}(T_1 - g_1S'_1) - g_2S_2 = 10^{m-1}T_1 - g_2S_2$, sarà $10^mV_1 = -(10^{i+2m-(l-2)}r''' + 10^{i+2m-(l-1)}\tau''' + \text{ec.})$, e sarà T_2 della forma $10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.}$; ma $-g_2$ non è che la parte intera del quoziente

$$\frac{10^mV_1}{T^2} = -\left(\frac{10^{i+2m-(l-2)}r''' + 10^{i+2m-(l-1)}\tau''' + \text{ec.}}{10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.}}\right) = -\frac{r''' + 10^{-1}\tau''' + \text{ec.}}{10^{l-5}\alpha + 10^{l-6}\beta + \text{ec.}}.$$

Dunque, allorchè si ha $l > s$, dovrà essere ancora $g_2 = 0$.

Nella stessa guisa la cifra g_3, la quale nella ipotesi di $l > s$ dovrebbe sottrarsi dalla quantità $10^4A + 10^3q + 10^2 \times 0 - 10 \times 0 = 10^4A + 10^3q + 10^2 \times 0 + 10 \times 0$, onde accostarsi opportunamente al valore di $\sqrt[m]{P}$, essendo, cangiatone il segno, la parte intera del quoto $\frac{10^mV_2}{T_3}$, ove V_2, T_3 esprimono le quantità, che succedono, e sono analoghe alle precedenti V_1, T_2, e trovandosi, come precedentemente $\frac{10^mV_2}{T_3} = -\left(\frac{10^{i+3m-(l-2)}r''' + 10^{i+3m-(l-1)}\tau''' + \text{ec.}}{10^{i+3m-4}\alpha + 10^{i+3m-5}\beta + \text{ec.}}\right) = -\left(\frac{r''' + 10^{-1}\tau''' + \text{ec.}}{10^{l-6}\alpha + 10^{l-7}\beta + \text{ec.}}\right)$, risulterà eziandio $g_3 = 0$, mentre si abbia $l > 6$.

Proseguendo nella medesima maniera, troveremo in generale, che dovrà ancora in questo secondo caso essere zero ciascuna delle cifre g_1, g_2, g_3, ec. g_{l-4}.

Dunque ogni qualvolta il residuo t', che nasce dalla divisione della quantità $t =$ (LXIII) per l'altra $s =$ (LXIV) (N.° 23), sia minore del quoto q, e lo stesso si dice se sia < 10; avremo tanto nel primo, come nel secondo dei casi ora considerati un risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4} + 10^{l-5} \times 0 + 10^{l-6} \times 0 + \text{ec.} + 10 \times 0 + 0 = 10^{l-3}A + 10^{l-4}q$, il quale, (supposto che q sia in esso la *nesima* cifra decimale) sarà nel primo caso inferiore, e nel secondo maggiore del vero valore di $\sqrt[m]{P}$ per una quantità più piccola di $\frac{1}{10^{n+l-4}}$, e avrà per conseguenza in amendue i casi tanto accostamento verso il valor vero di $\sqrt[m]{P}$, quanto può esigersi con un numero $n + l - 4$ di decimali. Dunque, allorquando si abbia il

residuo $t' < q$, ovvero < 10, determinato il quoziente q, non avremo che a moltiplicare la quantità $10A + q$ per 10^{l-4}, e il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$ avrà verso $\sqrt[m]{P}$ l'indicato accostamento, rimanendo però incognito, se ne sia maggiore, oppure minore.

Riconosciuto che sia $10^{l-3}A + 10^{l-4}q > \sqrt[m]{P}$, si determinerebbe assai facilmente il valore prossimamente $< \sqrt[m]{P}$, tale essendo il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q + 10^{l-3} \times 0 + 10^{l-2} \times 0 + \text{ec.} + 10 \times 0 + 10 - 1 = 10^{l-3}A + 10^{l-4}(q-1) + 10^{l-5} \times 9 + 10^{l-6} \times 9 + \text{ec.} + 10 \times 9 + 9$.

2.° I. Espressa sempre con la lettera q la parte intera del quoto $\frac{t}{s}$ (N.i 23, 24), e con la t' l'avanzo, cosicchè $t' = t - qs < s$, vogliasi, che nel valore di $U - qT = 10^{i-(l-2)}(t - qs) + (v - qu)$, che denominerò qui pure V, risulti $qu > v$ (N.i 24, 25). In questa supposizione poichè si ha $V = 10^{i-(l-2)}t' + v - qu$, osservo se sia $10^{i-(l-2)}t' + v - qu > 0$, o non lo sia: se lo sia, risultando positivo l'avanzo V della divisione di U per T, sarà $q = g$, e il supposto accidente di $v - qu < 0$ non apporta alcuna variazione nella determinazione della cifra g. Che se sia $10^{i-(l-2)}t' + v - qu < 0$; allora dovrà essere $qu > 10^{i-(l-2)}t' + v$. Ora essendo q numero di una sola cifra, il prodotto $qu = q(10^{(i-l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.})$ (N.i 23, 24) deve essere della forma $10^{i-(l-2)}p'' + 10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}\iota'' + \text{ec.}$, e in questa io dico dover essere la prima cifra $p'' < q$; perchè di fatti se si volesse $p'' = q$, ne verrebbe, dividendo per q, l'Equazione $10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.} = 10^{i-(l-2)} + \frac{10^{i-(l-1)}\eta'' + 10^{i-l}\upsilon'' + \text{ec.}}{q}$; ma questo secondo membro è $> 10^{i-(l-2)}$; dunque dovrebbe essere ancora $10^{i-(l-1)}\eta' + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.} < 10^{i-(l-2)}$; ma ciò a cagione di ciascheduno de' numeri η', ι', ec. < 10, è impossibile: dunque non potendo essere $p'' = q$, e quindi neppure $p'' > q$, ne segue che ec. Pertanto avendosi $10^{i-(l-2)}p'' + 10^{i-(l-1)}\eta'' + \text{ec.}$

$> 10^{i-(l-2)}t' + v$ e però $> 10^{i-(l-2)}t' + 10^{i-(l-1)}\tau + 10^{i-l}\xi +$ ec. (LXV) (N.° 23), ed avendosi $p'' < q$, dovrà essere ancora $t' < q$; ma se il valore di V è negativo, ed il residuo t' proveniente dalla divisione di t per s è minore del quoto; questo caso non è che il II. del (prec. 1.°). Dunque in questa supposizione, determinato il quoziente q, avremo immediatamente il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$, il quale sarà bensì $> \sqrt[m]{P}$, ma avrà al vero valore di questo radicale lo stesso grado di avvicinamento che è stato indicato nel citato (II. prec. 1.°).

II. Ritengasi $10^{i-(l-2)}t' + v - qu > 0$, cosicchè si abbia $q = g$ (prec. I.). Avendosi per la ipotesi $v - qu < 0$, ossia $v - gu < 0$, e però, ritenute le denominazioni del (N.° 25), avendosi $10^m(v - gu) = -v'$, sarà $10^m V = 10^{i+m-(l-2)}t' - v'$. Si divida come nel citato (N.° 25) la parte t' della quantità $10^m V$ per la parte s' della $T_1 = 10^{i+m-(l-2)}s' + u'$ (LXIX N.° 25), e chiamatane q_1 la parte intera del quoto, ne sia t'' l'avanzo, cosicchè $t'' < s'$, e $t'' = t' - q_1 s'$. Risultando da ciò $10^m V - q_1 T_1 = 10^{i+m-(l-2)}t'' - (v' + q_1 u')$, chiamato qui pure V_1 questo valore, o si ha $V_1 > 0$, oppure $V_1 < 0$: se si ha $V_1 > 0$, allora, essendo q_1 la parte intera del quoziente $\frac{10^m V}{T_1}$ si avrà $q_1 = g_1$. Che se sia $V_1 < 0$, e però $q_1 u' + v' > 10^{i+m-(l-2)}t''$ ossia $q_1 u' + 10^m gu > 10^{i+m-(l-2)}t'' + 10^m v$; risultando pel (N.° 25) $q_1 u' = q_1 (10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' +$ ec.), sarà questo prodotto della forma $10^{i+m-(l-2)}p'^v + 10^{i+m-(l-1)}\zeta'^v + 10^{i+m-l}\eta'^v +$ ec., in cui, come nel (prec. I.), ci dimostra $p'^v < q_1$. Si sommi ora con questo il valore $10^m gu$, che esprimerò come nel (prec. I.), per $10^{i+m-(l-2)}p'' + 10^{i+m-(l-1)}\eta'' + 10^{i+m-l}\iota'' +$ ec.: essendo ciascuna delle cifre, che compongono queste due quantità < 10, la somma $q_1 u' + 10^m gu$ dovrà acquistare la forma $10^{i+m-(l-3)}p^v + 10^{i+m-(l-2)}r^v + 10^{i+m-(l-1)}\zeta^v + 10^{i+m-l}\eta^v +$ ec., in cui p^v sarà solamente $= 1$, oppure $= 0$. Dunque avendosi $10^{i+m-(l-3)}p^v + 10^{i+m-(l-2)}r^v + 10^{i+m-(l-1)}\zeta^v +$ ec $> 10^{i+m-(l-2)}t'' + 10^{i+m-(l-1)}\tau + 10^{i+m-l}\zeta +$ ec., dovrà

essere t'' non $> 10 + r^v$, e quindi $t'' < 2 . 10$. Potendo pertanto in questo caso il residuo t'' essere formato di due cifre, il discorso del (II. prec. 1.°) avrà bensì luogo ancor quivi, ma lo avrà fino al valore $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}q_1$, il quale, conservate le supposizioni del citato (II. prec. 1.°), sarà più grande del vero valore di $\sqrt[m]{P}$ per una quantità soltanto $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$. Questo avvicinamento è realmente minore di quello, che hanno al vero valore di $\sqrt[m]{P}$ le quantità determinate nel (prec. I.°), e nel (prec. 1); ma ciò procede perchè nei citati (prec. I.°, prec. 1) il residuo era sempre < 10, e nel caso presente dovendo essere solamente il residuo $t'' < 2 . 10$, potrebbe esso risultare > 10.

III. Nel caso, in cui si ha $V_1 < 0$, e però $q_1 = g_1$ (prec. II), supposto $10^m(v' + g_1 u') = v''$, ne verrà $10^m V_1 = 10^{i+2m-(l-2)} t'' - v''$, e supposto $T_2 = 10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.} + 10^{i+2m-(l-2)}\gamma + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'} + \text{ec.}$, $10^{l-5}\alpha + 10^{l-6}\beta + \text{ec.} + \gamma = s''$, $10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'} + \text{ec.} = u''$ onde $T_2 = 10^{i+2m-(l-2)}s'' + u''$; si divida t'' per s'', e ne sia q_2 la parte intera del quoto, e $t''' = t'' - q_2 s''$ il residuo. Risultando da ciò $10^m V_1 - q_2 T_2 = 10^{i+2m-(l-2)}t''' - (v'' + q_2 u'')$; chiamata V_2 questa differenza, osservo se sia $V_2 > 0$, oppure $V_2 < 0$: nel primo di questi casi, come precedentemente, si trova dover essere $q_2 = g_2$. Nel caso secondo, avendosi $V_2 = 10^{i+2m-(l-2)}t''' - (10^m v' + 10^m g_1 u' + q_2 u'') = 10^{i+2m-(l-2)} t''' + 10^{2m} v - [10^m(10^m g u + g_1 u') + q_2 u'']$; essendo $q_2 u'' = q_2 (10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'} + \text{ec.})$ della forma $10^{i+2m-(l-2)} p^{v''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v''} + \text{ec.}$, in cui $p^{v''} < q_2$, e però avendosi la somma $10^m(10^m g u + g_1 u') + q_2 u'' = [10^{i+2m-(l-3)} p^v + 10^{i+2m-(l-2)} r^v + 10^{i+2m-(l-1)}\zeta^v + 10^{i+2m-l}\eta^v + \text{ec.}]$ (prec. II) $(+ 10^{i+2m-(l-2)}p^{v''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v''} + \text{ec.})$ della forma $10^{i+2m-(l-3)}p^{v'''} + 10^{i+2m-(l-2)} r^{v'''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'''} + \text{ec.}$, ove $p^{v'''}$ non può avere che uno dei valori 2, 1, 0; a cagione di $V_2 < 0$, ne verrà $10^{i+2m-(l-2)}t''' +$

$10^{i+2m-(l-1)}\tau + 10^{i+2m-l}\xi + \text{ec.} < 10^{i+2m-(l-3)}p^{v'''} + 10^{i+2m-(l-2)}r^{v'''} + 10^{i-2m-(l-1)}\varepsilon^{v'''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'''} + \text{ec.}$, e per conseguenza $t''' < 10p^{v'''} + r^{v'''}$, e quindi $t''' < 3 . 10$. Pertanto potendo il residuo $t''' < 30$ essere formato di due cifre, come nel (prec. II) vedremo ottenersi un risultato $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}q_2$, il quale supererà il valor vero di $\sqrt[m]{P}$ per una differenza $< \frac{1}{10^{m+l-5}}$.

IV. Sia $V_2 > 0$, onde $q_2 = g_2$. Seguendo nelle denominazioni ulteriori l'analogia delle precedenti e posto perciò $T_3 = 10^{i+3m-4}\alpha + 10^{i+3m-5}\beta + \text{ec.} + 10^{i+3m-(l-1)}\gamma'^x + 10^{i+3m-l}\varepsilon'^x + \text{ec.}$, $10^{l-6}\alpha + 10^{l-7}\beta + \text{ec.} = s'''$, $10^{i+3m-(l-1)}\gamma'^x + 10^{i+3m-l}\varepsilon'^x + \text{ec.} = u'''$, $10^m(v'' + g_2u'') = v'''$, ne verrà $10^mV_2 = 10^{i+3m-(l-2)}t''' - v'''$, $T_3 = 10^{i+3m-(l-2)}s''' + u'''$ e supposto q_3 parte intera del quoto $\frac{t'''}{s'''}$, e t'^v l'avanzo, avremo $V_3 = 10^mV_2 - q_3T_3 = 10^{i+3m-(l-2)}t'^v - (v''' + q_3u''')$; e però, se sia $V_3 > 0$, avremo ancora qui $q_3 = g_3$. Che se $V_3 < 0$; allora, come nei (prec. II, III), rifletto essere $V_3 = 10^{i+3m-(l-2)}t'^v + 10^{3m}v - [10^m(10^m[10^mgu + g_1u'] + g_2u'') + q_3u''']$, ed essere inoltre $q_3u''' = q_3(10^{i+3m-(l-1)}\gamma'^x + 10^{i+3m-l}\varepsilon'^x + \text{ec.})$ della forma $10^{i+3m-(l-2)}p^x + 10^{i+3m-(l-1)}\gamma^x + 10^{i+3m-l}\varepsilon^x + \text{ec.}$, ove $p^x < q_3$, per cui la somma $10^m[10^m(10^mgu + g_1u') + g_2u''] + q_3u''' = (10^{i+3m-(l-3)}p^{v'''} + 10^{i+3m-(l-2)}r^{v'''} + 10^{i+3m-(l-1)}\varepsilon^{v'''} + 10^{i+3m-l}\zeta^{v'''} + \text{ec.})(+10^{i+3m-(l-2)}p^x + 10^{i+3m-(l-1)}r^x + 10^{i+3m-l}\varepsilon^x + \text{ec.})$ (prec. III), acquista la forma $10^{i+3m-(l-3)}p^{x'} + 10^{i+3m-(l-2)}r^{x'} + 10^{i+3m-(l-1)}\gamma^{x'} + 10^{i+3m-l}\varepsilon^{x'} + \text{ec.}$ avendosi $p^{x'}$ uguale ad uno dei numeri 3, 2, 1, 0.

Dunque a cagione di $V_3 < 0$, risultando $10^{i+3m-(l-2)}t'^v + 10^{i+3m-(l-1)}\tau + 10^{i+3m-l}\xi + \text{ec.} < 10^{i+3m-(l-3)}p^{x'} + 10^{i+3m-(l-2)}r^{x'} + 10^{i+3m-(l-1)}\gamma^{x'} + 10^{i+3m-l}\varepsilon^{x'} + \text{ec.}$, si avrà $t'^v < 10p^{x'} + r^{x'}$, e però $t'^v < 4 . 10$. Dunque anche nel caso presente potendo il residuo $t'^v < 40$ essere composto di due cifre; come nei (prec. II, III) resterà determinata una quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5} + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}{}_2 + 10^{l-8}q_3 > \sqrt[m]{P}$ per un valore $< \frac{1}{10^{m+l-6}}$.

V. Supposto $V_3 > 0$, per cui $q_3 = g_3$ (prec. IV.), se proseguiremo innanzi: nel modo stesso si troverà, che quando il residuo susseguente $V_4 = 10^m V_3 - q_4 T_4$ sia > 0, allora sarà $q_4 = g_4$. Che se $V_4 < 0$; allora q_4 sarà maggiore del dovere, ma risultando in tale ipotesi il residuo $t^v = t'^v - q_4 s'^v < 5.10$, e potendo esso però contenere due cifre; verrà ad ottenersi una quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + \text{ec.} + 10^{l-8}g_3 + 10^{l-9}q_4$ superiore per un valore più piccolo di $\frac{1}{10^{n+l-5}}$ al valore vero di $\sqrt[m]{P}$.

Così in progresso fino al quoziente q_{10}, riguardo al quale se si abbia $V_{10} > 0$, si otterrà $q_{10} = g_{10}$; ma se $V_{10} < 0$, allora risultando il residuo $t^{x'} = 10^m t^x - q_{10} s^x < 11.10 = 110$, potrebbe esso $t^{x'}$ venir formato di tre cifre, e quindi il solito raziocinio condurrebbe ad ottenersi soltanto una quantità $10^{l-5}A + 10^{l-6}g + 10^{l-7}g_1 + \text{ec.} + 10^{l-16}q_{10} > \sqrt[m]{P}$ per un valore solamente $< \frac{1}{10^{n+l-6}}$. Così di seguito.

3.° I. Sia nella quantità (LX) $= 10^{m-1} m A^{m-1}$ (N.° 23) la cifra $\eta = 9$, e nel formarsi la somma $gS + 10^{m-1} m A^{m-1}$ (8.° N.° 22), onde ottenere il valore di T, si trasporti ad unire con la $\eta = 9$ un' unità: in questa ipotesi, poichè risulta $\eta + 1 = 10$, nella quantità (LXI) $= T$ dovrà essere $\eta' = 0$, e la cifra ζ dovrebbe essere accresciuta di 1. In conseguenza di ciò, ritenute tutte le denominazioni dei (N.i 23, 24; I, II, ec. prec. 2.°) avremo $T = 10^{i-(l-2)} s + 10^{i-(l-2)} + u$, e $V = 10^{i-(l-2)} t' + v - (10^{i-(l-2)} + u) q$. Ora o si ha $V > 0$, oppure $V < 0$: nel primo di questi casi si vedrà, come di sopra, essere $q = g$, e nel secondo $q > g$. In questo secondo poi a cagione di $\eta' = 0$ non potendo il prodotto $(10^{i-(l-2)} + u)$ $q = (10^{i-(l-2)} + 10^{i-l} \iota' + \text{ec.}) q$ che essere della forma $10^{i-(l-2)}$ $q + 10^{i-(l-1)} \eta'' + 10^{i-l} \iota'' + \text{ec.}$, ed essendo $10^{i-(l-2)} t' + v =$ $10^{i-(l-2)} t' + 10^{i-(l-1)} \tau + 10^{i-l} \xi + \text{ec.}$, ne verrà $10^{i-(l-2)}$ $t' + 10^{i-(l-1)} \tau + 10^{i-l} \xi + \text{ec.} < 10^{i-(l-2)} q + 10^{i-(l-1)} \eta'' + 10^{i-l}$ $\iota'' + \text{ec.}$; e però t' non $> q$, e quindi $t' < 10$. Dunque qui

ancora, siccome nei (II. prec. 1.°, I. prec. 2.°), concluderemo ottenersi tostamente la quantità $10^{l-3}A + 10^{l-4}q > \sqrt[m]{P}$ per un valore $< \frac{1}{10^{n+l-4}}$.

II. Sia $V > 0$, onde $q = g$ (prec. I.). Poichè nel caso presente si ha $T = 10^{i-1}\alpha + 10^{i-2}\beta + \text{ec.} + 10^{i-(l-3)}\varepsilon + 10^{i-(l-2)}(\zeta + 1) + 10^{i-l}\iota' + \text{ec.}$, otterremo per lo (8.° N.° 22) $10^{m-1}T' = 10^{m-1}(gS' + T)$ della forma $10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta + \text{ec.} + 10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}(\zeta + 1) + 10^{i+m-l}\eta'' + 10^{i+m-(l+1)}\iota'' + \text{ec.}$, in cui $\eta'' = 1$, oppure $= 0$; quindi per lo (11.° N.° 22) si ricaverà $T_1 = q_1S_1 + 10^{m-1}T'$ della forma $10^{i+m-2}\alpha + 10^{i+m-3}\beta + \text{ec.}\ 10^{i+m-(l-2)}\varepsilon + 10^{i+m-(l-1)}(\zeta + 1) + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' + \text{ec.}$, ove η''' uguaglia esso pure uno dei numeri 1, 0. Ritenute pertanto le solite denominazioni, e supposto $\zeta + 1 = \zeta'''$, sarà qui ancora come nel (N.° 25), $T_1 = 10^{i+m-(l-2)}s' + u'$, e fatto al solito $\frac{t'}{s'} = q_1 + \frac{t''}{s'}$, ove $t'' < s'$, avremo $V_1 = 10^mV - q_1T_1 = 10^{i+m-(l-2)}t'' + 10^mv - [10^m(10^{i-(l-2)}g + gu) + q_1u']$. Ora potendo nel caso presente essere $\zeta''' = 10$, il che accaderà quando $\zeta = 9$, il prodotto $q_1u' = q_1(10^{i+m-(l-1)}\zeta''' + 10^{i+m-l}\eta''' + 10^{i+m-(l+1)}\iota''' + \text{ec.})$ acquista la forma $10^{i+m-(l-2)}p'^v + 10^{i+m-(l-1)}\zeta'^v + 10^{i+m-l}\eta'^v + \text{ec.}$, in cui p'^v non $> q_1$. Dunque, sommando questo con la quantità $10^m(10^{i-(l-2)}g + gu) = 10^{i+m-(l-2)}g + 10^{i+m-(l-1)}\eta'' + 10^{i+m-l}\iota'' + \text{ec.}$ (prec. II.), poichè risulta un valore della forma $10^{i+m-(l-3)}p^v + 10^{i+m-(l-2)}r^v + 10^{i+m-(l-1)}\eta^v + 10^{i+m-l}\iota^v + \text{ec.}$; ove $p^v = 1$, ovvero $= 0$; ne segue, che quando si ha $V_1 < 0$, dovrà essere solamente $t'' < 2.10$; e però potendo t'' contenere due cifre, come nel (II. prec. 2.°) vedremo ottenersi in questo caso la quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}q_1$, la quale supererà $\sqrt[m]{P}$ di un valore $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$. Quando poi sia $V_1 > 0$, allora sarà anche quivi $q_1 = g_1$.

III. Pongasi $V_1 > 0$, per cui $q_1 = g_1$. Essendo in T_1 (prec. II.) il valore di η''' non > 1, in una maniera simile alla

alla praticata nel citato (prec. II), e in conseguenza degli (11.°, 12.°, N.° 22) vedremo, come nel (II. prec. 2.°), risultarci $T_2 = 10^{i+2m-3}\alpha + 10^{i+2m-4}\beta + \text{ec.} + 10^{i+2m-(l-2)}\gamma + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon + 10^{i+2m-l}(\zeta + 1) + 10^{i+2m-(l+1)}\eta^{v'} + 10^{i+2m-l}\iota^{v'} + \text{ec.}$, ossia, conservando sempre le solite denominazioni $T_2 = 10^{i+2m-(l-2)} s'' + u''$, ove, potendo tanto ζ, come ε essere $= 9$, sarà u'' della forma $10^{i+2m-(l-2)}p^{v''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v''} + \text{ec.}$, e in questa $p^{v''}$ non potrà avere che uno dei valori 1, 0, e quando $p^{v''} = 1$, si avrà $\varepsilon^{v''} = 0$. Ora avendosi giusta il solito $\frac{t''}{s''} = q_2 + \frac{t'''}{s''}$, e però $V_2 = (10^m V_1 - q_2 T_2) = 10^{i+2m-(l-2)} t''' + 10^{2m} v - [10^m(10^m[10^{i-(l-2)}g + gu] + g_1 u') + q_2 u'']$ ed essendo per quanto si è ora detto $q_2 u''$ della forma $10^{i+2m-(l-2)} p^{v'''} + 10^{i+2m-(l-1)}\varepsilon^{v'''} + 10^{i+2m-l}\zeta^{v'''} + \text{ec.}$ in cui $p^{v'''}$ non $> q_2$; col sommare questo valore con l'altro esprimente il valore di $10^m[10^m(10^{i-(l-2)}g + gu) + g_1 u'']$ (prec. II) ottiensi un risultato della forma $10^{i+2m-(l-3)}p'^x + 10^{i+2m-(l-2)}r'^x + 10^{i+2m-(l-1)} \varepsilon'^x + 10^{i+2m-l}\zeta'^x + \text{ec.}$, in cui p'^x deve uguagliare uno dei numeri 2, 1, 0. Dunque, ogni qualvolta sia $V_2 < 0$, risultando $t''' < 3.10$, si ricaverà il valore $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}q_2 > \sqrt[m]{P}$ per un valore $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$ come nel (prec. II). Nel caso poi di $V_2 > 0$, si avrà $q_2 = g_2$.

IV. Proseguendo avanti nella stessa guisa agevolmente vedremo, che come nei (prec. I, II, III) sonosi ottenute delle approssimazioni simili a quelle dei (I, II, III prec. 2.°), così in seguito ottengonsi in questo caso le altre successive simili anch'esse alle corrispondenti dei (IV, V prec. 2.°).

4.° I. Nelle considerazioni de' (prec. 1.°, 2.°, 3.°) ho poste sempre le quantità V, V_1, V_2, ec. maggiori, oppure minori, e non mai uguali allo zero; e ciò perchè presentemente si tratta di un'approssimazione, e non già di una determinazione di radice esatta, e se qualcuna delle accennate V, V_1, V_2, ec. fosse zero, allora la radice sarebbe esatta, e rimarrebbe pienamente determinata contro la supposizione.

II. Nei (I. prec. 2.°, I. prec. 3.°), anche allorquando si ha $V > 0$, purchè contemporaneamente risulti l'avanzo t' di una cifra sola, ossia < 10, avremo un valore $10^{l-3}A + 10^{l-4}g$, il quale differisce dal vero valore di $\sqrt[m]{P}$ per una quantità $< \frac{1}{10^{n+l-4}}$; e tutto ciò si dimostra come nel (I. prec. 1.°). Così nei (II. prec. 2.°, II. prec. 3.°) ancora mentre sia $V_1 > 0$, purchè t'' non sia formato che di due cifre, si otterrà una quantità $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1$ differente meno di $\frac{1}{10^{n+l-5}}$ dal valore vero di $\sqrt[m]{P}$. Nello stesso modo dei (III. prec. 2.°, III. prec. 3.°) quando sia t''' di due sole cifre, anche nel caso di $V_2 > 0$ si ricaverà il valore $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}g_2$ diverso meno di $\frac{1}{10^{n+l-5}}$ da $\sqrt[m]{P}$. Così di seguito come nei (IV, V prec. 2.°; IV, V prec. 3.°). Si rifletta però che in tutti questi casi le quantità risultanti $10^{l-3}A + 10^{l-4}g$, $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1$, $10^{l-4}A + 10^{l-5}g + 10^{l-6}g_1 + 10^{l-7}g_2$, ec. sono non già maggiori, come nei luoghi citati, ma minori del valor vero di $\sqrt[m]{P}$.

III. Le cifre, che si contengono nel dividendo (LXIII) $= t = 10^{l-2}\lambda + 10^{l-3}\mu +$ ec. (N.° 23) sono di numero $l - 1$, e quando han luogo le condizioni dei (N.i 23, 25), l'operazione di abbreviamento proseguesi giusta il (I. N.° 4), finchè rimangono nel dividendo due sole cifre. Dunque le g, g_1, g_2, ec. che vengono successivamente determinate, saranno di numero $l - 3$, e avremo il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}g + 10^{l-5}g_1 + 10^{l-6}g_2 +$ ec. $+ 10g_{l-3} + g_{l-4}$; ma ritenuto, che g sia la *nesima* cifra decimale (II. prec. 1.°), il risultato ora esposto sappiamo, che differisce dal valor vero di $\sqrt[m]{P}$ meno di $\frac{1}{10^{n+l-4}}$. Dunque, dallo stesso valor vero di $\sqrt[m]{P}$ differendo meno di $\frac{1}{10^{n+l-4}}$, anche il risultato $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$

dei (I, II prec. 1.°; I. prec. 2.°; I prec. 3.°) ne segue che quando hanno luogo i casi dei citati (I, II prec. 1.°; I. prec. 2.°; I. prec. 3.°) allora nella espressione semplicissima $10^{l-3}A + 10^{l-4}q$ avremo un accostamento verso $\sqrt[m]{P}$ uguale a quello, che si ha, mentre si verifichino le condizioni de' (N.i 23, 25), dall'operazione ivi accennata, e continuata, giusta il (I. N.° 4), finchè nel dividendo non rimangono, che due sole cifre. Che se hanno luogo i casi dei (II, III, ec. prec. 2.°; II, III, ec. prec. 3.°); allora i valori ivi ottenuti fino esclusivamente al valore, che ha per ultimo termine il quoto q_{10} (V. prec. 2.), accostandosi al valor vero di $\sqrt[m]{P}$ per una differenza soltanto $< \frac{1}{10^{n+l-5}}$, avremo un'approssimazione, la quale, avuto riguardo ai limiti, è 10 volte minore dell'approssimazione, che si ottiene, mentre verificandosi le condizioni de' citati (N.i 23, 25), si prolunghi l'operazione ivi esposta, fino a rimanere, come di sopra, due sole cifre nel dividendo. I valori poi, che risultarebbero aventi per ultimo termine uno de' quozienti q_{10}, q_{11}, q_{12}, ec. q_{99}, avendo per limite del loro accostamento verso il vero valore di $\sqrt[m]{P}$ il numero $\frac{1}{10^{n+l-6}}$ (V. prec. 2.°) avrebbero ad esso, rapporto ai limiti, un'approssimazione 100 volte minore; e così in progresso.

IV. Gli accidenti considerati ne' (prec. 1.°, 2.°, 3.°) relativamente alle quantità T, t, s, V, possono succedere ancora rapporto alle T_1, t', s', V_1, alle T_2, t'', s'', V_2 ec. (N.i 23, 25); ma siccome le conseguenze, che proverrebbero in questi ultimi casi, sono pienamente le stesse, che quelle le quali provengono nel caso primo, e che abbiamo nei citati (prec. 1.°, 2.°, 3.°, 4.°) già esposte; quindi tralascieremo di farne ulteriore parola, e rifletteremo soltanto, che per quanto si è detto nei (N.i 21., 10.° N.° 22, N.° 23, N.° 25), l'accidente del (prec. 3.°) è sempre più difficile a succedere, quanto più si procede avanti nella determinazione delle quantità T, T_1, T_2, T_3, ec.

27. Da quanto si è detto nel prec. (N.° 26) vedesi che la mancanza delle condizioni supposte nei (N.i 23, 25) altro in fine mai non produce, che rendere o il residuo della prima divisione, cioè t' di una sola cifra, od uno degli altri t'', t''', t^{iv}, ec. t^x di una oppure due cifre, o qualunque dei terzi $t^{x'}$, $t^{x''}$, $t^{x'''}$, ec. t^c di un numero di cifre non > 3; ec. (1.°, 2.°, 3.° N.° 26): ma in tutti questi casi, cioè tanto quando t' non è che di una cifra, come quando uno dei t'', t''', t^{iv}, ec. t^x è soltanto di una, o due cifre; come quando il numero delle cifre componenti uno dei $t^{x'}$, $t^{x''}$, $t^{x'''}$, ec. t^c non supera il 3, ec., abbiamo nel cit. (N.° 26) veduto, come debbasi regolare, onde accostarsi quanto è mai possibile, col numero de' decimali determinato, al vero valore di $\sqrt[m]{P}$. Dunque nell'eseguire attualmente il metodo di abbreviamento de' (N.i 4, 23, 25) non dovremo, che osservare il numero delle cifre, che forma ciascuno de' residui t', t'', t''', ec.; se questo numero fino esclusivamente all'avanzo $t^{x'}$ trovasi > 2, dovremo sempre seguire la regola dei (N.i 23, 25, I. 4); ma se il numero medesimo in t' si vede $= 1$, oppure in qualunque degli altri t'', t''', t^{iv}, ec. risulta $= 1$, oppure $= 2$; allora dovremo determinare il valore richiesto giusta le regole del (II. N.° 4) e ciò per quanto si è detto nei (1.°, I, II, ec. IV. 2.°; I, II, ec. IV. 3.°, N. 26). Che se progredendo la determinazione dei successivi quozienti q, q_1, q_2, ec. oltre il q_9, si truovi, che qualcuno dei corrispondenti residui $t^{x'}$, $t^{x''}$, $t^{x'''}$, ec. sia formato di tre cifre, allora conviene arrestarsi, e per la determinazione del richiesto valore approssimantesi al vero valore della radice, conviene seguire la regola del (V. 2.° N. 26), diventando allora il limite di approssimazione $= \frac{1}{10^{n+1-6}}$. Se poi si volesse proseguire avanti, determinando i quoti q_{99}, q_{100}, ec.; allora, mentre si trovasse uno dei residui t^c, $t^{c'}$, $t^{c''}$, ec. fornito di un numero di cifre non > 4, bisognerebbe fermarsi, e seguitando in-

nanzi le regole, e i raziocinj dei (2.°, 3.° N.° 26) troverebbesi nel caso del numero delle cifre $=4$ un risultato, il cui limite di approssimazione al valor vero della radice sarebbe $=\frac{1}{10^{n+l-1}}$; e così di seguito. Ma questi ultimi casi non sono che di pura speculazione, perchè mai estendesi in pratica l'approssimazione ad un grado così alto. Riflettasi però, in conseguenza di quanto si è ora detto, che quando la determinazione dei quozienti si prolunga oltre il q_9, allora non può più supporsi di estendere come nel (I. N.° 4) le divisioni, finchè nel dividendo non rimangono che due cifre; perchè la determinazione sicura de' successivi quoti q_{10}, q_{11}, q_{12}, ec. esige che nel dividendo esista un numero di cifre >2 (V. 2.° N.° 26).

---

*