SOPRA LE LINEE E LE SUPERFICIE PARALLELE

MEMORIA

Del Signor A. Bordoni.

Presentata li 14 *Novembre* 1811.

Dal Sig. Cav. Brunacci ed approvata dal Sig. Venturoli.

Leibnizio fu il primo a spiegare coll'ajuto del teorema del *Guldini*, che, la superficie compresa tra due curve parallele nello stesso piano, è sempre equivalente ad un rettangolo avente per base la parallela condotta a metà della distanza, e per altezza la distanza stessa. Dopo di lui li Signori *Kaestner*, *Cagnazzi*, ed il Professore *Lotteri* nel medesimo anno, cioè nel 1792 pubblicarono tre Memorie relative alle curve parallele sullo stesso piano, nelle quali insegnarono a trovare l'equazione della parallela ad una data, l'area compresa tra due linee parallele, e ciò fecero con principj diversi da quelli impiegati da *Leibnizio*, ed ottennero altri nuovi risultamenti.

Nella presente Memoria, oltre le dimostrazioni rigorose degli anzidetti risultamenti e di altri nuovi relativi pure alle linee nel medesimo piano, si troveranno delle proposizioni rispetto alle curve parallele a doppia curvatura, e tutte quelle proposizioni generali, che ho creduto le più importanti relativamente alle superficie parallele: proposizioni, se non m'inganno, che non furono sino ad ora conosciute.

Delle curve parallele situate nel medesimo piano.

Definizione. Una linea che abbraccia tutte le periferie, che hanno il medesimo raggio ed i centri sopra di una stessa linea

linea data, si dice parallela a questa data. Ecco la definizione di due linee parallele nello stesso piano data dal medesimo *Leibnizio*, e sulla quale io fonderò la prima proposizione della teorica delle curve parallele, che sono nel medesimo piano.

Proposizione I.

Data l'equazione finita ($y = \phi x$) *di una curva, trovare quella della sua parallela.*

È dimostrato nella teoria delle soluzioni particolari (§. 282) (*) che, se $F(t, u, x) = 0$ rappresenta l'equazione di una curva tra le sue coordinate t, u ed il parametro x, è dimostrato, dico, che fatto continuamente variare quel parametro, onde divenga x', x'', ec. le curve rappresentate dalle equazioni $F(t, u, x') = 0$, $F(t, u, x'') = 0$, ec. sono tutte abbracciate da un'altra, e l'equazione di quest'altra si ha, ponendo nell'equazione $F(t, u, x) = 0$ in vece della x il suo valore, che si cava dalla $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$.

In conseguenza pertanto della data definizione delle curve parallele sullo stesso piano, se QEQ'F (*Fig.* 1) è una di quelle periferie, le quali hanno tutte un medesimo raggio n, ed il centro sulla curva data DD, e debbono essere abbracciate dalla parallela CC; e se indichiamo colle $x, y = \phi x$ le coordinate OP, PM del centro M; e colle t, u le coordinate OR, RQ del punto Q nella parallela CC e corrispondente ad M nella data, l'equazione della periferìa QEQ'F, cioè $(t - x)^2 + (u - \phi x)^2 - n^2 = 0$; ci darà quella della parallela, quando vi si porrà in vece della x, quel valore che per x ci darà l'equazione differenziale $t - x + (u - \phi x)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0$.

(*) Le citazioni dei §§. si riferiscono al trattato del calcolo sublime del Prof. *Brunacci*.

Corollario 1. Cavando i valori delle coordinate t, u dalle due equazioni

$$(t-x)^2+(u-\varphi)^2-n^2=0,\ t-x+(u-\varphi)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)=0,$$

ossia dalle equivalenti

$$(t-x)^2+(u-y)^2-n^2=0,\ t-x+(u-y)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0,$$

si ottiene

$$t=x-n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)},\ \text{ed}\ u=y+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)},$$

i quali differenziati danno $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=1-n\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^3}$,

e $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{1-n\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^3}\right\}$; cioè

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, ossia $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$; ovvero $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$.

Vale a dire la tangente QT della linea CC è parallela alla tangente Mt della linea DD; ossia le tangenti condotte pei punti corrispondenti delle curve data e parallela sono esse pure parallele.

Corollario 2. Ponendo nell'equazione $s=y+x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-r:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ (§. 78) della normale MN alla curva DD in luogo delle coordinate r, s della stessa normale, i valori delle t, u trovati qui sopra, si ha

$$y+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}=y+x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)},$$

ossia $0=0$; cioè i valori delle coordinate t, u del punto Q soddisfanno all'equazione $s=y+x:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-r:\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ della normale suddetta; e perciò il punto Q sarà un punto del prolungamento della normale stessa NM, e la MQ una parte del medesimo prolungamento. Pertanto la retta MQ, essendo parte del prolungamento della normale NM, sarà perpendicolare alla tangente Mt, ed anche, pel Corollario antecedente, alla

tangente QT della curva parallela CC; cioè a dire, la retta MQ sarà perpendicolare tanto alla tangente Mt, quanto alla QT.

Di più la stessa retta MQ, essendo eguale a $\sqrt{((t-x)^2+(u-y)^2)}$, sarà pure, a motivo di $(t-x)^2+(u-y)^2-n^2=0$, eguale evidentemente alla n; vale a dire, le normali delle due linee parallele condotte ai punti a cui corrispondono le coordinate x, y, e t, u hanno là stessa posizione, ossia coincidono, e differiscono costantemente dalla quantità n: quindi due linee parallele esistenti sul medesimo piano, avendo le normali comuni, avranno comune anche la sviluppata ordinaria, cioè la sviluppata piana.

Corollario 3. Il doppio segno che può precedere il radicale $\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$ contenuto nelle espressioni delle t, u trovate nel Corollario primo, significa, che ad ogni valore delle coordinate x, y della data, corrispondono due di quelle della parallela; cioè che ciascun ramo DD della linea data, avrà alla medesima distanza $n=$ MQ $=$ MQ′ due archi CC, CC′ paralleli uno da una parte e l'altro dall'altra di esso.

Corollario 4. Se si porranno nei valori delle coordinate t, u i valori delle quantità y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ dati in x e cavati dall'equazione $y=\phi x$ della linea data, e si daranno alla x diversi valori particolari, si otterranno i corrispondenti delle coordinate t, u della parallela, coi quali si potrà essa descrivere per punti.

Corollario 5. Se si daranno dei successivi valori alla quantità n, che entra come parametro anche nell'equazione della parallela, ossia se essa si farà variare, non varierà sempre la specie o natura delle successive linee rappresentate dalle equazioni risultanti; e ciò pel principio su cui è fondata la divisione delle diverse specie delle curve del medesimo ordine: ma le linee rappresentate da queste successive

equazioni, essendo parallele alla data, sono parallele tra di loro; adunque non è escluso il parallelismo alle curve della medesima specie. Ciò che prova l'insussistenza del teorema. „ Nessuna curva, trattone la periferìa, ha per parallela un' „ altra curva della medesima specie „ stabilito da un celebre Analista, e commendato da altri.

Osservazione 1. Quantunque non sia escluso il parallelismo tra le curve della medesima specie, come si è dimostrato nell'ultimo Corollario, nulladimeno, non tutte le curve possono avere delle parallele della specie alla quale appartengono anch'esse; come se ne vedrà un esempio alla fine di questa osservazione.

Per iscoprire se una data linea possa avere una o più parallele della sua specie, o in generale di una data specie, il metodo diretto sarebbe di tentare la riduzione dell'equazione della parallela a quella della specie data; ma siccome questo metodo, che in sostanza riducesi evidentemente a scoprire, se la parallela abbia la proprietà della data, espressa algebraicamente dalla sua equazione, dà dei risultamenti generalmente complicati; così nei casi particolari sarà meglio scoprire coll'equazione stessa della data, qualche altra più semplice proprietà parimente ad essa caratteristica, ed indi osservare, se questa avrà luogo anche in una o più linee sue parallele.

Esempio. Si dimanda se la parabola espressa dall'equazione $y^2 - ax - b = 0$, abbia una o più parallele, che sieno anch'esse parabole della medesima specie, cioè apolloniane.

Dall'equazione data $y^2 - ax - b = 0$, si cava $y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{a}{2}$, cioè la sottonormale costante: proprietà caratteristica delle parabole di questa specie. Adunque se la parabola potrà avere una o più parallele della sua specie, dovrà essere costante per uno o più valori della n la sottonormale $u\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, ossia $u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$; ma sostituendo nella espressione $u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) : \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$

in vece delle u, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ i loro valori trovati nel Corollario primo, si ha $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{y+n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}\right\}$; e di nuovo sostituendo in quest' ultima in luogo delle y, $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ i loro valori $\sqrt{(ax+b)}$, $a:2\sqrt{(ax+b)}$, che dà l' equazione $y^2-ax-b=0$, si ottiene $\frac{a}{2}+an:2\sqrt{\left(ax+b+\frac{a^2}{4}\right)}$ per espressione della sottonormale di qualunque linea parallela alla parabola apolloniana; e questa espressione, qualunque valore abbia la n, ossia qualunque sia la linea parallela, varia, variando la x; quindi la parabola apolloniana non può avere un' altra parabola della sua specie ad essa parallela; cioè non vi possono essere due parabole apolloniane tra di loro parallele.

Osservazione 2. Volendo disporre i valori delle coordinate t, u per fissare i successivi punti di una delle due parallele allo stesso ramo della data, bisognerà prima di tutto osservare, per un valore particolare della x, quali saranno i segni che si dovranno dare ai termini $n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, $n:\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$ per ciascuna di quelle parallele; affinchè i valori delle t, u corrispondenti ai successivi della x sieno le successive coordinate di una delle due parallele, e non l' ascissa di una e l' ordinata dell' altra. Fatto questo, si terranno quei segni stabiliti sino ai punti corrispondenti a $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{1}{0}$, dopo i quali converrà ripetere la stessa osservazione, od avere tutti quei riguardi relativamente ai segni, che si hanno in casi simili, quando si vogliano trovare le tangenti trigonometriche degli angoli formati dalle tangenti di una curva coll' asse delle ascisse.

PROPOSIZIONE II.

Trovare l'equazione differenziale delle linee parallele alle date espresse dall'equazione differenziale $\phi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$.

Ritenendo le medesime indicazioni delle coordinate stabilite nella proposizione antecedente, avrassi dal Corollario primo della medesima proposizione $y = u - n : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, ed $x = t + n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$; di più atteso il parallelismo, dovranno le tangenti corrispondenti ai punti a cui competono le coordinate x, y, e t, u essere parallele tra di loro, cioè $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, come abbiamo dimostrato nello stesso Corollario; vale a dire, sussisteranno tra le coordinate delle due linee parallele le quattro equazioni $y = u - n : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, $x = t + n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, $\phi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$. Ora ponendo nell'ultima di queste quattro equazioni in luogo delle quantità $x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ i loro valori cavati dalle prime tre, si ha la sola

$$\phi\left\{t + n\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, u - n : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\} = 0$$

la quale rappresenterà l'equazione differenziale delle linee parallele a tutte quelle rappresentate dalla data $\phi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$, cioè a dire l'equazione cercata.

Integrando l'equazione differenziale ottenuta, si avrà l'equazione finita di tutte le linee parallele, e questa conterrà una costante arbitraria introdotta dalla integrazione, la

quale si potrà trovare opportunamente, acciò l'equazione integrale ottenuta rappresenti la parallela ad una tale delle curve date. Se si tratterà però di trovare l'equazione della linea parallela a quella rappresentata dalla soluzione particolare della data $\varphi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$, allora si potrà risparmiare la suddetta integrazione, trovando, o la soluzione particolare dell'equazione $\varphi\left(x, y, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right) = 0$, ed indi colla proposizione antecedente quella della parallela; ovvero si potrà immediatamente trovare la soluzione particolare dell'equazione generale a tutte le linee parallele, cioè della differenziale $\varphi\left\{t + n\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, u - n : \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)}, \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right\} = 0$; giacchè questa rappresenterà appunto l'equazione cercata; come facilmente si può dimostrare.

Definizione. Gli archi di due linee parallele compresi tra le stesse normali si diranno tra di loro corrispondenti: così HQ (*Fig.* 2) si dirà corrispondente dell'arco LM, e reciprocamente LM di HQ.

Proposizione III.

Data l'equazione di un arco, trovare l'espressione del suo corrispondente; cioè data l'equazione ($y = \varphi x$) *dell'arco* LM, *trovare l'espressione dell'arco* HQ.

Indicando colla S l'arco cercato HQ, e colla s l'arco LM di cui si conosce l'equazione, e colle t, u, ed x, y le loro coordinate, come nella Proposizione I, si avrà, per le applicazioni del calcolo differenziale alla rettificazione delle curve (§. 81), $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$: e ponendo nella seconda di queste espressioni per $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ il suo valore $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ trovato nel Corollario primo della proposi-

zione I, si avrà $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 = \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2$, ossia $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2$; cioè estraendo la radice quadrata, e sostituendo per $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$ il suo valore trovato nel Corollario stesso, avrassi $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) - n\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$. Quindi integrando, si otterrà l'espressione cercata dell'arco corrispondente, cioè $S = s - n \,.\, Ang.\, \text{tang.} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) + \text{cost.}$

Volendo ora trovare la costante introdotta dalla integrazione, indichiamo colla a la tangente trigonometrica dell'angolo LTx, fatto dalla tangente LT condotta alla prima estremità L dell'arco s coll'asse delle ascisse, ed avremo, pei dati della questione $S = 0$, $s = 0$, e $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = a$, i quali valori danno cost. $= n \,.\, Ang.\, \text{tang.}\, a$; cioè l'arco cercato S sarà eguale ad $s + n\left(Ang.\, \text{tang.}\, a - Ang.\, \text{tang.} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)$, ossia

$$S = s + n \,.\, Ang.\, \text{tang.}\, \frac{a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{1 + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}.$$

Da quest'ultima espressione ne risulta, che l'arco corrispondente S condotto dalla parte convessa del dato, è sempre equivalente all'arco s, che si conosce, perchè si conosce la sua equazione $y = \phi x$, più un arco circolare descritto col raggio eguale alla $n =$ MQ distanza degli archi paralleli, e corrispondente all'angolo formato dalle due normali HL, MQ condotte alle estremità degli archi S, s. Quest'angolo, ossia arco descritto con un raggio eguale alla unità, e corrispondente ad un angolo eguale a quello formato dalle due normali estreme degli archi paralleli, lo indicaremo sempre colla A.

Corollario 1. Indicando colla S_1 l'arco corrispondente allo stesso dato s, ma condotto dalla sua parte concava, si avrà $s = S_1 + nA$, ossia $S_1 = s - nA$.

Corollario 2. Se due archi s, s' saranno lunghi egualmente, e di più le normali condotte alle estremità di uno formeranno un angolo eguale a quello formato dalle due normali condotte alle estremità dell'altro, gli archi S, S' egualmente distanti da essi e loro corrispondenti dalla stessa parte, cioè ambedue dalla parte convessa, od ambedue dalla concava, saranno anch'essi tra di loro eguali. In fatti, indicando colla n la distanza tanto dei due paralleli S, s, quanto degli altri S', s', e colla A l'angolo formato dalle normali condotte alle loro estremità, si avrà, per le formole esposte qui sopra, $S = s \pm n . A$, ed $S' = s' \pm n . A$; cioè sarà $S = S'$, essendo per supposizione $s = s'$. Da questo ne risulta, che tutte le ovali isoperimetre, avranno linee corrispondenti pure isoperimetre tra di loro; di più queste linee corrispondenti, le quali saranno generalmente altre ovali, equivaleranno al contorno di una delle date, più o meno una periferìa descritta con un raggio eguale alla distanza di esse dalle date; come risulta dall'equazione $S = s \pm n . \text{Ang.} 360^\circ = s \pm 2\pi n$, π indicando la metà della periferìa, che ha per raggio la unità.

Corollario 3. Chiamando M l'arco ab parallelo ai due $LM = s$, $HQ = S$ ed equidistante da essi, si avrà $M = s + \frac{n}{2} A$, ed $S = M + \frac{n}{2} A$, ossia $M = S - \frac{n}{2} A$; e perciò $2M = s + S$, ovvero $M = \frac{s+S}{2}$; cioè a dire l'arco M parallelo ai due S, s ed equidistante da essi, equivale alla metà della loro somma.

Corollario 4. In ultimo risulta dall'equazione $S = s + nA$, che, conoscendo tre delle quattro quantità S, s, n, A, si potrà trovare, colla stessa equazione la quarta. Così, se si volesse trovare l'equazione di un arco eguale in lunghezza ad una data retta o linea qualunque b, supposto questo il corrispondente dalla parte convessa del dato s di una linea di cui si conosce l'equazione, avrebbesi $b = s + nA$, la quale

equazione dà immediatamente $n = \frac{b-s}{A}$. Ora conoscendo la distanza tra l'arco eguale alla linea b, ed il dato s di cui si conosce la equazione, facilmente colle cose esposte nella prima proposizione, si troverebbe l'equazione del corrispondente eguale in lunghezza alla linea b.

Osservazione. Se anche la linea data avesse dei flessi, avrebbesi sempre $S = s \pm nA$, avendo riguardo alla grandezza ed al segno dell'angolo A: così nella Lemniscata di *Giacomo Bernulli* si avrà per l'intera curva $S = s$, perchè $A = 0$. Ma se la linea data avrà dei regressi, allora o converrà modificare l'espressione esposta dell'arco S, o meglio considerare ciascun ramo della curva data separatamente. Ciò dicasi anche per la proposizione seguente.

Proposizione IV.

Trovare l'espressione dell'area compresa tra due linee parallele corrispondenti e le loro normali estreme, essendo data l'equazione di una di esse; cioè trovare l'area LMQH *compresa tra gli archi* LM $= s$, HQ $= S$, *e le normali estreme* HL, MQ, *conoscendosi l'equazione della* LM.

Pongasi RPMQ, ossia $\frac{n}{2}(u+y)\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} = P$,

BPML, ovvero (§. 90) $\int y \partial x = \phi x$,

HARQ, ossia (§. 90) $\int u \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) \partial x = \psi x$,

HLMQ $= fx$, ed ABLH $= Q$, e differenziando,

si avrà $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = \frac{n}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} + \frac{n}{2}(u+y)\left\{\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)} - \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}\right\}$,

$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = y$, $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = u\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, e $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 0$ essendo la quantità Q indipendente dalla x, ossia costante relativamente a que-

sta variabile. Ponendo ora in queste espressioni in vece delle quantità u, $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ i loro valori trovati nel Corollario primo della Proposizione I, si otterrà

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=n\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}+ny\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}-n^2\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2}+n^2\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^4},$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)=y-ny\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3}+\frac{n}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}-n^2\frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^4},\ \text{e}\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)=y,\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0,$$

come sopra.

Ora dall'ispezione della figura si comprende essere identica l'equazione $fx=\psi x+P-\phi x-Q$, la quale differenziata per rapporto alla variabile x dà $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$; e sostituendo in questa equazione i valori delle quantità $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$ trovati sopra, e riducendo, si ottiene l'equazione $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=n\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)-\frac{n^2}{2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$, la quale integrata dà l'area $fx=ns-\frac{n^2}{2}Ang.\ \text{tang.}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\text{cost.}$ Ma fatto $x=$OB si ha pei dati della proposizione, $fx=0$, ed $s=0$; adunque cost. $=\frac{n^2}{2}Ang.\ \text{tang.}\ a$; e quindi l'area fx, ossia

$$\text{HLMQ}=ns+\frac{n^2}{2}\left(Ang.\text{tang.}\,a-Ang.\ \text{tang.}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right)=ns+\frac{n^2}{2}\ \text{A}.$$

Vale a dire, l'area cercata HLMQ equivale ad un rettangolo avente l'arco $s=$LM per base, e la distanza $n=$MQ delle due linee parallele per altezza; più la superficie di un settore circolare avente per raggio la medesima distanza n, e corrispondente ad un angolo eguale a quello formato dalle normali condotte alle estremità degli archi corrispondenti S, s.

Corollario 1. Indicando colla f_1x l'area compresa tra la linea data s, e la sua corrispondente S_1 dalla parte concava,

si avrà $f_1 x = nS_1 + \frac{n^2}{2} A$; ovvero ponendo per S_1 il suo valore $s - nA$ trovato nel Corollario primo della proposizione antecedente, sarà $f_1 x = ns - \frac{n^2}{2} A$. Cioè l'area compresa tra l'arco s ed un suo corrispondente dalla parte concava equivale ad un rettangolo ec. ec.

Corollario 2. Se la linea data fosse un ovale, e che si cercasse la superficie della intera corona esterna, avrebbesi $fx = ns + \frac{n^2}{2} Ang. 360^\circ = ns + \pi n^2$; cioè la corona esterna equivale ad un rettangolo avente per base il perimetro dell' ovale data, e per altezza la distanza della parallela dalla medesima; più la superficie di un cerchio descritto colla distanza stessa, o larghezza della corona: come trovò *Fontana Gregorio* con ragionamenti geometrici. Se la f indicasse l'area compresa tra una curva di m giri, e la sua corrispondente dalla parte convessa, sarebbe $f = ns + m . \pi n^2$.

Corollario 3. Moltiplicando per n ciascun membro dell' equazione $M = s + \frac{n}{2} A$, esposta nel Corollario terzo della proposizione antecedente, si ha $Mn = ns + \frac{n^2}{2} A$; cioè $Mn = fx = HLMQ$. Vale a dire l'area HLMQ compresa tra le due linee parallele HQ, LM sullo stesso piano è eguale alla distanza $n = MQ$ moltiplicata per la linea parallela corrispondente $M = ab$ ed equidistante da esse; ossia equivale ad un rettangolo avente per base la parallela condotta a metà distanza, e per altezza la stessa distanza: risultamento che forma il teorema di *Leibnizio* accennato al principio di questa Memoria.

Corollario 4. Essendo $M = \frac{S+s}{2}$, come abbiamo veduto nel Corollario terzo della proposizione antecedente, si avrà ancora $3M = 2M + \frac{S+s}{2}$, ossia $Mn = \frac{n}{3}\left(2M + \frac{S+s}{2}\right)$, molti-

plicando ambedue i membri per $\frac{n}{3}$; ma, pel Corollario antecedente, Mn è eguale all'area compresa tra i due archi S, s; adunque l'area compresa tra due linee parallele è anche eguale ad un terzo della loro distanza, moltiplicata per la metà della somma delle due linee corrispondenti insieme col doppio della parallela condotta a metà distanza. Risultamento che ha tutta l'analogìa coll'utilissimo ed elegantissimo teorema di *Torricelli* esposto dal *Torelli* nelle aggiunte che egli fece alle sezioni coniche di *Guido Grandi*, ed ultimamente riprodotto dal Sig. *Rossi* in una sua elegantissima Memoria.

Corollario 5. Se le normali estreme di due archi s, s' equivalenti formeranno angoli eguali, le aree comprese tra di essi ed i loro corrispondenti S, S' dalla stessa parte ed egualmente distanti, saranno anch'esse equivalenti. In fatti, i valori di queste aree verranno date dalle espressioni $ns+\frac{n^2}{2}A$, $ns'+\frac{n^2}{2}A$, le quali sono eguali tra di loro, giacchè $s=s'$. Quindi nelle ovali isoperimetre, e generalmente parlando in tutte le curve rientranti isoperimetre, le corone che avranno la medesima larghezza, e che saranno dalla stessa parte delle ovali o curve date, cioè dalla parte esteriore o dalla interiore, saranno equivalenti: teorema utilissimo per gli Architetti.

Corollario 6. Finalmente coll'equazione $f=ns+\frac{n^2}{2}A$ si potrà trovare una delle quattro quantità f, n, s, A conoscendo le altre tre: di più combinando le due equazioni $f=ns+\frac{n^2}{2}A$, $S=s+nA$ si potranno delle cinque quantità f, S, s, n, A determinar due atte a soddisfarle, date essendo le altre tre. Per esempio. Se fosse data la lunghezza dell'arco s, l'angolo A formato dalle due normali condotte alle sue estremità, e si cercasse la distanza e l'equazione di un altro arco suo

corrispondente dalla parte convessa, il quale dovesse chiudere col dato s e le due normali estreme un'area equivalente alla superficie data a, l'equazione $f = ns + \frac{n^2}{2} A$ ci darebbe immediatamente $n = \frac{-s \pm \sqrt{(s^2 + 2aA)}}{A}$; cioè $n = \frac{-s + \sqrt{(s^2 + 2aA)}}{A}$, perchè l'altro valore non ha in questo caso nessuno significato. Quindi conoscendosi l'equazione dell'arco s, si avrà quella del parallelo cercato, facendo nella Proposizione I^a $n = \frac{-s + \sqrt{(s^2 + 2aA)}}{A}$.

Delle curve parallele a doppia curvatura.

DEFINIZIONE. Due linee a doppia curvatura si diranno parallele, quando saranno eguali tra di loro le rette tirate da tutti i punti di una perpendicolarmente all'altra, e di più parallele tra di loro le due tangenti di esse condotte alle estremità di ciascuna di queste rette. Questa definizione delle linee parallele a doppia curvatura, vale anche per quelle esistenti nel medesimo piano; anzi per queste ultime, si potrà ommettere la seconda parte, essendo essa, per le linee parallele esistenti nello stesso piano, una conseguenza della prima.

Potrei qui esporre e dimostrare relativamente alle curve a doppia curvatura delle proposizioni simili a quelle esposte e dimostrate per le linee parallele sul medesimo piano, e di più aggiungerne molte altre particolari alla doppia curvatura; ma ne esporrò solamente alcune, le quali oltre di essere le più importanti, saranno utili anche per dimostrarne delle altre nella teorica delle superficie parallele.

Proposizione V.

Due linee qualunque parallele tra di loro esistono sempre su di una stessa superficie sviluppabile; cioè sopra di una di quelle superficie, le quali supposte flessibili ed inestendibili, si possono svolgere con una semplice flessione in modo di poterle distendere interamente, senza nessuna piegatura nè rottura, sopra di un medesimo piano.

Abbassando da tutti i punti di una delle due linee parallele delle rette perpendicolari all'altra, queste rette risulteranno anche perpendicolari alla prima, essendo parallele le tangenti condotte alle loro estremità (definizione esposta); cioè le rette così condotte, saranno normali all'una ed all'altra, ossia normali comuni alle due linee a doppia curvatura parallele. Di più, per lo stesso parallelismo delle tangenti, tutte queste normali comuni, prolungate sufficientemente, s'incontreranno a due a due; cioè la prima incontrerà la seconda, la seconda la terza, questa la quarta, ec., per essere a due a due sul medesimo piano delle corrispondenti tangenti parallele: dimodochè esse formeranno colle loro successive intersezioni una linea, generalmente a doppia curvatura, la quale avrà per tangenti le normali stesse, ed in conseguenza essa sarà una sviluppata tanto di una quanto dell'altra; ossia sarà dessa la sviluppata comune delle due linee parallele.

Ora ella è una proprietà definitiva delle superficie sviluppabili, che esse si possono generare da una retta, la quale movendosi nello spazio, si conserva costantemente tangente ad una data curva (*Monge* feuille 19); e della quale superficie la curva alla quale mantiensi costantemente tangente la retta generatrice è lo spigolo di regresso, e le sue tangenti le così dette caratteristiche della stessa superficie sviluppabile. Pertanto, se una retta si moverà mantenendosi costantemente tangente alla comune sviluppata delle due curve

parallele, essa genererà una superficie sviluppabile, la quale avrà per ispigolo di regresso la stessa comune sviluppata, e per rette caratteristiche le tangenti della medesima sviluppata; ma tutte le rette caratteristiche della superficie sviluppabile, ossia le tangenti della comune sviluppata, passano per le due curve parallele, giacchè sono tutte normali ad ambedue queste curve; adunque ancora la superficie sviluppabile passerà per ambedue le curve parallele; e perciò le due curve saranno sopra, o meglio saranno nella superficie sviluppabile stessa. Vale a dire, due linee qualunque parallele tra di loro sono sempre sulla stessa superficie sviluppabile, che ha per ispigolo di regresso la loro comune sviluppata, e per caratteristiche le rette normali comuni alle medesime due linee parallele, ossia tangenti alla stessa comune sviluppata.

Proposizione VI.

Date le due equazioni ($y = fx$, $z = \phi x$) *di una linea qualunque, trovare l'arco corrispondente di una sua parallela.*

Immaginando interamente sviluppata, ossia distesa sul medesimo piano qOp (*Fig.* 3) la superficie sviluppabile sulla quale vi sono le due linee parallele (prop. ant.), ed indicando colla DD condotta sullo stesso piano qOp, quella nella quale si sarà cambiata, dopo l'immaginato sviluppo, la linea a doppia curvatura rappresentata nello spazio dalle equazioni $y = fx$, $z = \phi x$, e colla linea CC quella nella quale si sarà cambiata la sua parallela, saranno evidentemente queste due linee piane anch'esse parallele tra di loro; di più avranno una distanza MQ eguale a quella delle due parallele a doppia curvatura, e per comune sviluppata la linea piana IXH rappresentante la linea nella quale si sarà cambiata la comune sviluppata delle due linee a doppia curvatura, ossia lo spigolo di regresso della superficie sviluppabile.

Ora

Ora riferendo le due linee DD, CC agli assi ortogonali Oq, Op, cioè alla normale comune Oq, che passa per le prime estremità D, C delle due linee parallele, ed alla Op parallela alle tangenti DN, CL condotte alle stesse estremità (si terranno sempre questi assi), ed indicando colla p l'ascissa OP, colla q l'ordinata PM, colla s l'arco MD, colla S l'arco corrispondente CQ, colla n la distanza MQ, e finalmente indicando colla A, al solito, l'angolo DVM formato dalle due normali DV, MV condotte alle estremità D, M dell' arco s, avrassi colla Proposizione III $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)+n\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)$, ossia $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ prendendo la x per variabile principale, od anche $S=s+nA$; cioè si conoscerà sempre l'arco corrispondente S, quando si conosceranno le quantità s, ed A. Vediamo pertanto, come si possono trovare queste due quantità coll'ajuto delle due equazioni $y=fx$, $z=\varphi x$, le quali per ipotesi sono date.

Supponendo il punto M della linea piana DD quello al quale corrispondevano nello spazio le coordinate x, y, z, sarà l'arco s eguale anzi il medesimo arco della linea a doppia curvatura avente per equazioni $y=fx$, $z=\varphi x$, e corrispondente alle coordinate x,y,z; cioè sarà $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}$, e perciò s eguale all'integrale $\int \partial x \sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}$ preso tra i limiti, che si prescriveranno. Similmente, essendo in questo caso, per la particolare disposizione degli assi delle coordinate p, e q, l'angolo A eguale all'angolo MTp che fa la tangente MT coll'asse delle ascisse, sarà $A=Ang.$ tang. $\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)$; ossia differenziando $\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)=\frac{\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\right)}{1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2}$; ma indicando colla R il raggio osculatore MX della linea piana DD, si

sa, che R è eguale ad $\frac{\left(1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\right)}$; e perciò $\frac{\left(\frac{\partial^2 q}{\partial p^2}\right)}{1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2}=\frac{\left(1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2\right)}{R}$;

adunque $\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)=\frac{\left(1+\left(\frac{\partial q}{\partial p}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{R}=\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)}{R}$; ovvero supponendo x la variabile principale, sarà $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)=\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}{R}$. Vale a dire si conoscerà $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$, quando si conoscerà la quantità R.

Il punto M rappresentando sul piano qOp la nuova posizione di quel punto a cui corrispondevano nello spazio le coordinate x, y, z, e la sviluppata IXH rappresentando la linea nella quale si è cambiata la comune sviluppata delle due linee a doppia curvatura, il punto X di contatto della stessa IXH colla normale ME rappresenterà la posizione che avrà preso il punto di contatto della comune sviluppata delle due linee parallele a doppia curvatura colla normale comune, che passa pel punto corrispondente alle coordinate x, y, z; e perciò il raggio osculatore $MX = R$ della linea piana DD sarà eguale al raggio della linea espressa dalle equazioni $y=fx$, $z=\phi x$, il quale è anche tangente alla sviluppata comune delle parallele. Ma *Monge* c' insegna, nel decimo volume delle Memorie presentate alla Reale Accademia delle scienze di Parigi, come si possono trovare i raggi di una curva, tangenti ad una tale sviluppata, quando sieno date della curva stessa le equazioni e le coordinate di un punto per cui dee passare una sua normale tangente a quella tale sviluppata; adunque conosceremo la R, giacchè sono date le equazioni $y=fx$, $z=\phi x$ di una delle due linee parallele a doppia curvatura, e le coordinate di un punto, per lo meno, per cui deve passare l'altra, ossia le coordinate di un punto di una normale della curva data; e con ciò conosceremo tanto il numeratore $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}$, quan-

to il denominatore R del valore di $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$; quindi conosceremo ancora lo stesso angolo A, poichè esso sarà eguale all'integrale $\int \frac{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}}{R}\partial x$, presa tra i medesimi limiti, tra i quali si prenderà l'altro $\int \sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}\partial x$ per avere l'arco s.

Altro modo per avere l'angolo A, *od almeno una sua derivata prima.*

Essendo le normali comuni alle due linee parallele tangenti nel medesimo tempo alla comune loro sviluppata, gli angoli formati dalle stesse successive normali saranno i medesimi angoli formati dalle successive tangenti di questa sviluppata; e perciò la ricerca dell'angolo A è ridotta a quella dell'angolo generato da una tangente della comune sviluppata, la quale scorra lungo la medesima curva, senza cessare mai di essere sua tangente: ma l'angolo che genera questa tangente è eguale a quello che genererebbe una retta, la quale variasse di posizione nello spazio, senza cessare di passare per l'origine delle coordinate e di mantenersi parallela alla medesima tangente; e questa retta genererebbe evidentemente una superficie Conica, la quale avrebbe il vertice all'origine; adunque l'espressione dell'angolo A, sarà la stessa di quella della intersezione della suddetta superficie Conica con una superficie sferica avente il centro all'origine, e per raggio quello delle tavole trigonometriche. Passiamo pertanto a determinare l'espressione di questa intersezione.

Chiamate x, y, z le coordinate di un punto della comune sviluppata, o in generale di una linea qualunque, e p, q, r quelle di un punto di una retta, che passa per l'origine parallelamente alla tangente della stessa sviluppata condotta al punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z, si avranno

le equazioni $q=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)p$, $r=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)p$, le quali rappresenteranno la retta parallela alla tangente, se si considererà in esse la x come determinata, e rappresenteranno la superficie Conica di cui abbiamo parlato, se si considererà la stessa x come quantità da eliminarsi. Adunque le equazioni della intersezione della superficie Conica e della sfera, che ha il centro all'origine delle coordinate e per raggio l'unità trigonometrica, saranno $q=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)p$, $r=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)p$, $p^2+q^2+r^2-1=0$ (indicando p, q, r adesso le coordinate ortogonali della intersezione stessa); ovvero

$$p=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}=1:\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right),\ q=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right),$$

$r=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)$. Quindi considerando l'arco di questa intersezione e le sue coordinate p, q, r funzioni della x, si otterrà $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$,

$$\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2,$$

e $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$; cioè ponendo nell'espressione di $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$ i valori delle $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$, si avrà

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x^2}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right):\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right\}:$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2-2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\right\}:\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^3;$$ ovvero, osservando, che $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$, e perciò differenziando $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)$, si otterrà

$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 = \left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)^2\right\} : \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2$; cioè estraendo la radice quadrata, si avrà $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right) = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)\right\}}}{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}$.

Nelle considerazioni fatte per ottenere quest'ultima espressione abbiamo supposto la x variabile principale, se in vece si fosse supposta la stessa x, unitamente a tutte le altre quantità y, z, s, A funzioni di un'altra qualunque variabile t, sarebbesi ottenuto per la derivata $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)$ l'espressione, che si otterrà, sostituendo in quella trovata di $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ in vece delle quantità $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}\right)$ le loro equivalenti (§. 71) $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3$, ec.; cioè si sarebbe ottenuto $\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right) = \frac{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}\right)^2\right\}}}{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)}$.

Espressione affatto simile a quella che dà *Lagrange* nella sua Meccanica Analitica per l'espressione dell'angolo di contingenza di una linea qualunque, e che egli trova cogl'infinitesimi, seguendo un metodo tutto diverso dal nostro.

Trovato che avremo colle regole esposte, tanto l'arco s della linea avente per equazioni $y = fx$, $z = \phi x$, quanto l'angolo A, avrassi immediatamente coll'equazione $S = s + nA$, esposta sopra, l'arco corrispondente S. Vale a dire l'arco corrispondente dalla parte convessa di una linea qualunque, sia essa a semplice, o a doppia curvatura, sarà sempre eguale a quello della data, più un arco circolare avente per raggio la distanza delle due linee parallele, e corrispondente ad un angolo eguale all'integrale dell'angolo di contingenza della comune sviluppata, preso tra i limiti indicati dagli stessi archi corrispondenti; cioè all'angolo A.

COROLLARIO I. Ponendo nell' equazione, esposta sopra, $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ per $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ il suo valore $\left(\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}:R$, ossia l'equivalente $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right):R$, si avrà $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)+n\frac{\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}{R}$; cioè prendendo per variabile principale l'arco s, sarà $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=1+\frac{n}{R}$: formola, che servirà mirabilmente, come si vedrà, per dimostrare facilmente alcune proposizioni, che esporremo nella teorica delle superficie parallele.

PROPOSIZIONE VII.

Trovare la porzione della superficie sviluppabile compresa tra le due linee parallele e le normali estreme, conoscendosi, come nella proposizione antecedente, le equazioni di una di esse.

Supponghiamo, come nella proposizione antecedente, la superficie sviluppabile sulla quale vi sono le due linee tra di loro parallele, distesa sopra il piano qOp, e per quello che abbiamo detto nella medesima proposizione, sarà la superficie cercata equivalente alla superficie DCQM compresa tra le due linee parallele DD, CC condotte sullo stesso piano, e le loro normali estreme QM, DC. Quindi indicando colle s, n, ed A, ciò che abbiamo indicato nella proposizione antecedente, e colla fx la superficie cercata, si avrà, per la Proposizione IV, $fx=ns+\frac{n^2}{2}A$. Vale a dire, la superficie compresa tra la linea data e la sua corrispondente dalla parte convessa equivale sempre ad un rettangolo avente per base l'arco della data, e per altezza la distanza delle due linee parallele; più la superficie di un settore circolare avente per raggio la medesima distanza delle due linee parallele, e corrispondente all'angolo A, cioè all'integrale dell'angolo di contingenza della sviluppata comune, preso tra i limiti indicati dagli stessi archi corrispondenti.

Stante la grande simiglianza che hanno le formole $S = s + nA$, $fx = ns + \frac{n^2}{2} A$ e le quantità in esse rappresentate co' segni S, s, n, A, fx riferibili alle curve a doppia curvatura, colle analoghe equazioni e quantità rappresentate co' medesimi segni esposte nelle proposizioni III, IV, io tralascio qui di esporre le conseguenze, compatibili colla doppia curvatura, simili a quelle esposte estesamente in quelle proposizioni: di più veduta la semplicità sotto la quale si sono fortunatamente presentate le equazioni $S = s + nA$, $fx = ns + \frac{n^2}{2} A$ di queste due ultime proposizioni, e perciò la facilità colla quale si possono cavare da esse le conseguenze, tralascio anche di esporne delle nuove particolari alle linee parallele a doppia curvatura, e passo immediatamente a parlare delle superficie parallele.

Delle superficie parallele.

Relativamente alle superficie parallele esporrò delle proposizioni affatto simili a quelle esposte rispetto alle linee parallele sullo stesso piano; di più, senza nuocere alla successione delle idee seguirò anche il medesimo ordine, inserendo però di mano in mano quelle proposizioni particolari alla natura diversa di queste estensioni: anzi appoggierò qui pure la prima Proposizione alla

Definizione. Una superficie che abbraccia tutte le sfere, che hanno il medesimo raggio ed i loro centri tutti sopra di una superficie data, dicesi parallela a questa data.

Questa definizione è affatto simile a quella data per le linee parallele esistenti sullo stesso piano, e sopra della quale ho appoggiato la prima proposizione della loro teorica.

PROPOSIZIONE VIII.

Data l'equazione finita ($z = \varphi(x, y)$) *di una superficie qualunque, trovare quella di una sua parallela.*

È dimostrato nella teorica delle soluzioni particolari (§. 284), che, se $F(t, s, u, x, y) = 0$ rappresenta l'equazione di una superficie tra le sue coordinate t, s, u ed i parametri x, y, è dimostrato, dico, che fatto continuamente variare quei parametri, onde divengano x', y', x'', y'', ec. le superficie rappresentate dalle equazioni $F(t, s, u, x', y') = 0$, $F(t, s, u, x'', y'') = 0$, ec. sono tutte abbracciate da un'altra, e l'equazione di quest'altra si ha, ponendo nell'equazione $F(t, s, u, x, y) = 0$ in vece delle quantità x, y i loro valori cavati dalle equazioni $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$.

In conseguenza pertanto della definizione esposta delle superficie parallele, se colle t, s, u indichiamo le coordinate di una di quelle sfere, che hanno un medesimo raggio n, e tutte il centro sulla superficie data, e debbono essere abbracciate dalla superficie parallela; e se indichiamo colle x, y, $z = \psi(x, y)$ le coordinate del centro di questa sfera, la sua equazione, cioè $(t - x)^2 + (s - y)^2 + (u - z)^2 - n^2 = 0$, ci darà quella della superficie parallela, quando vi si porrà in luogo delle x, y quei valori che per x, y ci daranno le equazioni $t - x + (u - z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$, $s - y + (u - z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0$.

Nota. Nell'avvenire scriverò per brevità $u', u_{,}, z', z''$, $z_{,}, z_{,,}, z'_{,}$ in vece delle $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$.

COROLLARIO I. Considerate nell'equazione $(t - x)^2 + (s - y)^2 + (u - z)^2 - n^2 = 0$ le due quantità x, y siccome funzioni delle t, ed s, e quali vengono date dalle due equazioni

$t - x$

$t-x+(u-z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$, $s-y+(u-z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$, ossia $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_{,}=0$, e prese di quella le due prime differenziali rapporto alle stesse variabili t, ed s indipendenti tra di loro, si hanno le due equazioni differenziali

$$t-x+(u-z)u'-\left(t-x+(u-z)z'\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)-\left(s-y+(u-z)z_{,}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=0,$$

$$s-y+(u-z)u_{,}-\left(t-x+(u-z)z'\right)\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)-\left(s-y+(u-z)z_{,}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)=0,$$

le quali, per la sussistenza delle due $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_{,}=0$ si riducano evidentemente alle altre $t-x+(u-z)u'=0$, $s-y+(u-z)u_{,}=0$; dal che risulta che tra le coordinate delle due superficie parallele sussistono le quattro equazioni $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_{,}=0$, $t-x+(u-z)u'=0$, $s-y+(u-z)u_{,}=0$ le quali danno $\frac{x-t}{u-z}=z'$, $\frac{x-t}{u-z}=u'$, $\frac{y-s}{u-z}=z_{,}$, $\frac{y-s}{u-z}=u_{,}$; e perciò $z'=u'$, $z_{,}=u_{,}$. Vale a dire, i piani tangenti alle due superficie parallele ai punti corrispondenti alle coordinate x, y, z, e t, s, u sono anch'essi tra di loro paralleli.

Corollario 2. Cavando dalle tre equazioni $(t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$, $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_{,}=0$ i valori delle coordinate t, s, u si ottiene

$$t=x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ s=y-\frac{nz_{,}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ u=z+\frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},$$

i quali sostituiti nelle equazioni (§. 309) $a-x+(c-z)z'=0$ $b-y+(c-z)z_{,}=0$ in luogo delle a, b, c coordinate della normale rappresentata da queste due equazioni, danno

$$x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}}-x+\left(z+\frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}}-z\right)z'=0,$$

$$y-\frac{nz_{,}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}}-y+\left(z+\frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}}-z\right)z_{,}=0,$$

ossia $0=0$, $0=0$; adunque la normale della superficie data condotta al punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z

passa pel punto della superficie parallela a cui corrispondono le coordinate t, s, u. Ma abbiamo trovato nel Corollario antecedente, che, il piano tangente alla superficie data nel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z, e quello della parallela nel punto corrispondente alle altre t, s, u, sono paralleli tra di loro; quindi la normale alla superficie data, che passa pel punto corrispondente alle coordinate x, y, z sarà anche normale alla parallela al punto a cui corrispondono le t, s, u; cioè a dire sarà normale comune alle due superficie tra di loro parallele.

Similmente, essendo la distanza dei due punti corrispondenti alle coordinate x, y, z, e t, s, u eguale a $\sqrt{((t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2)}$, e questa quantità risultando per l'equazione $(t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$ eguale alla quantità n, la distanza tra questi due punti sarà anch'essa costantemente eguale alla n. Vale a dire, le normali delle due superficie parallele, condotte ai loro punti che corrispondono alle coordinate x, y, z, e t, s, u occupano nello spazio la stessa posizione, e differiscono costantemente della linea n.

Corollario 3. Il doppio segno che può precedere il radicale $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$ contenuto nelle espressioni trovate qui sopra delle coordinate t, s, u ci fa vedere, che ad ogni valore delle x, y, z corrispondono due di quelli delle coordinate t, s, u della parallela; cioè che a ciascuna foglia della superficie data corrispondono due foglie della parallela, una da una parte e l'altra dall'altra di essa, ed alla medesima distanza.

Osservazione 1. Volendo descrivere per punti una tale superficie parallela alla data, bisognerà primieramente fissare il segno al radicale contenuto nei valori delle medesime coordinate; ciò che si farà, come si fa generalmente per avere le coordinate di quelle sole porzioni di tutte le normali di una superficie, che cadono dalla stessa parte della superficie medesima. Fatto questo, si porranno nelle espressioni delle

t, s, u, così stabilite, i valori delle quantità $z, z', z_{,}$ cavati dall'equazione $z = \varphi(x, y)$ della superficie data; ed indi si daranno alle due quantità indipendenti x, y diversi valori particolari, e si otterranno i corrispondenti delle coordinate t, s, u, i quali disposti perpendicolarmente l'uno all'altro nel modo a tutti noto, daranno nello spazio i punti di quella tale superficie parallela.

Osservazione 2. Veduta l'uniformità della soluzione data della Proposizione presente con quella della Proposizione I, colla quale quest'ultima ha tutti i rapporti, stimo inutile la ripetizione della conseguenza esposta nel Corollario quinto della suddetta proposizione; giacchè essa si applica, senza il minimo cambiamento, ancora alle superficie.

Proposizione IX.

Trovare l'equazione differenziale delle superficie parallele a quelle rappresentate dall'equazione pure differenziale $\varphi(x, y, z, z', z_{,}) = 0$.

Siccome i rapporti delle coordinate delle due superficie parallele espressi dalle equazioni $(t-x)^2+(s-y)^2+(u-z)^2-n^2=0$ $t-x+(u-z)z'=0$, $s-y+(u-z)z_{,}=0$ ed il parallelismo dei piani tangenti, ossia le due equazioni $z'=u'$, $z_{,}=u_{,}$, sono affatto indipendenti dal modo che si presenta l'equazione conosciuta della data superficie, così si avranno, tra le coordinate delle due superficie di cui si parla, le seguenti equazioni

$$\varphi(x, y, z, z', z_{,}) = 0, (t-x)^2 + (s-y)^2 + (u-z)^2 - n^2 = 0$$
$$t-x+(u-z)z'=0,\ s-y+(u-z)z_{,}=0,\ z'=u',\ z_{,}=u_{,},$$

le quali combinate tutte in qualunque maniera, danno sempre delle equazioni, che rappresentano delle proprietà delle coordinate di una, o di ambedue le superficie parallele.

Ponendo nelle prime quattro di queste equazioni in luogo delle quantità $z', z_{,}$ le loro eguali $u', u_{,}$ dateci dalle ultime due, si avranno quattro equazioni, nella prima delle qua-

li ponendo di nuovo in vece delle x, y, z i loro valori

$$t + \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, \; s + \frac{nu_{,}}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, \; u - \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}$$

cavati dalle altre tre, si avrà la sola equazione

$$\phi\left(t + \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, s + \frac{nu_{,}}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, u - \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, u', u_{,}\right) = 0$$

la quale contenendo le sole coordinate della superficie parallela, ne rappresenta la sua equazione; cioè sarà questa l'equazione differenziale cercata.

Se si cercasse l'equazione finita della superficie parallela a quella rappresentata dalla soluzione particolare della data $\phi(x, y, z, z', z_{,}) = 0$, essa si otterrebbe, o trovando la soluzione particolare di questa equazione data, ed indi l'equazione della parallela colla proposizione antecedente; ovvero trovando immediatamente la soluzione particolare dell' equazione differenziale di tutte le superficie parallele, cioè a dire dell'equazione trovata sopra

$$\phi\left(t + \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, s + \frac{nu_{,}}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, u - \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}}, u', u_{,}\right) = 0;$$

giacchè questa soluzione particolare rappresenterà appunto la superficie cercata; cioè la parallela a quella rappresentata dalla soluzione particolare della equazione differenziale delle date. Tutto accade come nelle linee parallele esistenti nello stesso piano.

DEFINIZIONE. I punti ove una stessa retta incontra perpendicolarmente due superficie parallele, si chiameranno punti corrispondenti di queste superficie, o semplicemente corrispondenti. Similmente, se da tutti i punti di una linea condotta sopra di una superficie, si condurranno delle perpendicolari a questa superficie, e si prolungheranno sino all'incontro di un'altra superficie ad essa parallela, la linea che esse segneranno sopra di quest'altra superficie, si dirà linea corrispondente della prima; e reciprocamente la prima della seconda; cioè queste due linee si diranno tra di loro corrispondenti.

Proposizione X.

Conoscendo l' equazione di una delle projezioni di una linea condotta sopra di una superficie data, trovare le equazioni della linea sua corrispondente.

Chiamando x, y, z le tre coordinate di un punto della superficie data, il quale è anche comune alla linea condotta sopra di essa, e t, s, u le tre coordinate del punto corrispondente, ed n la distanza delle due superficie parallele, si otterrà come sopra

$$t=x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ s=y-\frac{nz_{,}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ u=z+\frac{n}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}};$$

dimodochè sostituendo in queste tre equazioni i valori delle due quantità y, z cavati dall' equazione data della superficie, e da quella pure data della projezione, otterransi i valori delle coordinate t, s, u espressi in funzione della sola x; ed eliminando la x da questi valori, si avranno due equazioni tra le sole coordinate t, s, u, le quali rappresenteranno la linea corrispondente alla data.

Proposizione XI.

Tra tutte le linee che si possono condurre sopra di una data superficie, trovare quelle che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse; cioè trovare tra tutte le linee corrispondenti, quelle parallele tra di loro.

Per la stessa definizione delle linee corrispondenti esse hanno tutte la prima proprietà che debbono avere due linee per essere tra di loro parallele, cioè che le rette tirate da tutti i punti di una perpendicolarmente all' altra sono eguali; e perciò la soluzione della proposizione si riduce a trovare quelle tra le linee corrispondenti, le quali godono anche della seconda proprietà che aver debbono due linee, in generale, per essere tra di loro parallele (veggasi la defini-

zione esposta delle linee parallele a doppia curvatura). Vale a dire, tutto riducesi a trovare quelle linee corrispondenti, che hanno le due tangenti condotte alle estremità di ciascuna delle suddette perpendicolari, cioè ai punti corrispondenti alle coordinate x, y, z, e t, s, u, anch'esse parallele tra di loro.

Essendo le tangenti delle linee corrispondenti, condotte pei punti a cui corrispondono le coordinate x, y, z, e t, s, u, sopra i piani condotti per gli stessi punti tangenzialmente alle superficie parallele, e questi piani, per quello che abbiamo già dimostrato nel primo corollario della proposizione VIII paralleli tra di loro, saranno le medesime tangenti anch'esse parallele, se avranno le loro projezioni su di un piano delle coordinate, per es. quelle sul piano delle coordinate x, z, o delle t, s, che è il medesimo, parallele pure tra di loro, ossia se formeranno angoli eguali coll'asse delle x; cioè tra le linee corrispondenti, quelle che saranno tra di loro parallele, avranno delle projezioni sul piano delle xy le cui equazioni soddisfaranno alla differenziale $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$, ossia alla equivalente $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$, prendendo la x, in ambedue i membri, per variabile principale.

Qualunque sieno le due linee corrispondenti, si ha sempre, come abbiamo veduto nella proposizione antecedente,

$$t=x-\frac{nz'}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},\ \text{ed}\ s=y-\frac{nz_{,}}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}},$$

ossia $t=x-\frac{nz'}{\omega}$, ed $s=y-\frac{nz_{,}}{\omega}$, ponendo $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}=\omega$; e perciò

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)=1-\frac{nz''}{\omega}+\frac{z'z''+z_{,}z'_{,}}{\omega^3}.nz'+\left(\frac{z_{,}z_{,,}+z'z'_{,}}{\omega^3}.nz'-\frac{nz'_{,}}{\omega}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ \text{e}$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\left(1-\frac{nz_{,,}}{\omega}+\frac{z_{,}z_{,,}+z'z'_{,}}{\omega^3}.nz_{,}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\frac{nz'_{,}}{\omega}+\frac{z'z''+z'z'_{,}}{\omega^3}.nz_{,},$$

i quali valori sostituiti nell'equazione $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right):\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)$,

danno $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\left(1-\frac{nz_{ii}}{\omega}+\frac{z_iz_{ii}+z'z'_i}{\omega^3}.nz_i\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\frac{nz'_i}{\omega}+\frac{z'z''+z_iz'_i}{\omega^3}.nz_i}{1-\frac{nz''}{\omega}+\frac{z'z''+z_iz'_i}{\omega^3}.nz'+\left(\frac{z_iz_{ii}+z'z'_i}{\omega^3}.nz'-\frac{nz'_i}{\omega}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}$;

ossia facendo sparire il grande denominatore, e sostituendo in vece dell' ω il suo valore $\sqrt{(1+z'^2+z_i^2)}$, e poi ordinando l' equazione risultante per rapporto alla quantità $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$, si ha

$$\left\{(1+z_i^2)z'_i-z'z_iz''\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\left\{(1+z'^2)z_{ii}-(1+z_i^2)z''\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-(1+z'^2)z'_i+z'z''z_i=0,$$

equazione, alla quale debbono soddisfare le equazioni delle projezioni sul piano delle xy di tutte le linee condotte sulla superficie data, che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse. Quindi sostituendo nella medesima equazione in vece delle quantità z', z_i, z'', z_{ii}, z'_i i loro valori cavati dall'equazione della superficie data, i quali saranno per la natura stessa della superficie funzioni delle x, y, ed integrando l' equazione risultante, se ne otterrà una finita, che conterrà una costante arbitraria, e rappresenterà un' infinità di curve, le quali saranno le projezioni delle linee condotte sulla superficie data, che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse.

Corollario 1. L' equazione

$$\left\{(1+z_i^2)z'_i-z'z_iz_{ii}\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\left\{(1+z'^2)z_{ii}-(1+z_i^2)z''\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-(1+z'^2)z'_i+z'z''z_i=0$$

essendo la stessa equazione delle sì celebri linee della massima e minima curvatura della superficie data, ne risulta, che le linee corrispondenti parallele tra di loro, sono le medesime linee di curvatura delle due superficie parallele; di più che le linee di curvatura delle due superficie parallele, sono le sole corrispondenti parallele tra di loro, ossia che, tanto il parallelismo delle linee corrispondenti, quanto la massima e minima curvatura di una superficie, definiscono le medesime linee: risultamento utile per la Stereotomìa.

Corollario 2. Indicando colle C, c gli archi delle due linee di curvatura della superficie data, che passano pel punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z, colle R, r i

raggi di curvatura della medesima superficie, e colle C', c' gli archi detti corrispondenti agli archi C, c e condotti sulla superficie parallela, si avrà, pel Corollario della Proposizione VI, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right) = 1 + \frac{n}{R}$, e $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right) = 1 + \frac{n}{r}$.

OSSERVAZIONE. Avendo dimostrato qui sopra l'identità tra le linee di curvatura di una superficie, e quelle linee che hanno le corrispondenti parallele a sè stesse, tralascio di dimostrare, che per lo stesso punto di una superficie, generalmente parlando, non possono passare che due linee sole, le quali abbiano le loro corrispondenti parallele a sè stesse; che queste si segano ad angolo retto, ed altre singolari proprietà di queste linee, le quali si trovano esposte e dimostrate nelle Opere di *Monge*, *Lagrange*, e *Brunacci* (§. 310) relativamente alle linee della massima e minima curvatura delle superficie.

DEFINIZIONE. Le porzioni di due superficie parallele, che saranno terminate da linee corrispondenti, diransi superficie tra di loro corrispondenti, o semplicemente corrispondenti.

PROPOSIZIONE XII.

Data l'equazione di una superficie, e quelle del suo contorno, trovare l'espressione della superficie sua corrispondente.

Ritenendo le indicazioni delle coordinate di ambedue le superficie, impiegate già più volte, ed indicando colla Q la superficie corrispondente cercata, si avrà, per le applicazioni del calcolo differenziale alla quadratura delle superficie (§. 320), $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial s}\right) = \sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)}$; cioè prendendo l'integrale doppio dell'espressione $\partial t \partial s \sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)}$ rapporto alle variabili t, s, che sono tra di loro indipendenti, ed estendendolo tanto alla fine della prima integrazione, quanto a quella della seconda, tra i limiti fissati dalle linee corrispondenti al contorno della superficie data, si otterrà la superficie

cie corrispondente cercata. Questo sarebbe il metodo a preferirsi, come il più diretto, per trovare la superficie corrispondente Q, ma siccome s'incontrano grandissime difficoltà nelle sue applicazioni; poichè richiede l'equazione della stessa superficie parallela, e quelle delle linee corrispondenti al contorno della data; e perciò espongo il seguente, col quale si può determinare la stessa superficie corrispondente, senza determinare nè l'equazione della superficie parallela, nè quelle delle linee corrispondenti al contorno della data.

Supponendo $t = f(x, y)$, ed $s = \phi(x, y)$, cioè a dire le variabili principali t, s contenute nell'equazione $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial s}\right) = \sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)}$ funzioni delle altre due x, y pure tra di loro indipendenti, le regole che si danno per trasformare interamente un differenziale secondo parziale di una qualunque quantità (§. 177), ossia per trovare il differenziale secondo parziale per rapporto a due variabili indipendenti, quando si conosca già il suo differenziale secondo parziale preso per rapporto a due altre variabili pure tra di loro indipendenti e funzioni delle altre due, danno

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right) = \left\{\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\} \sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)};$$

" Quando farà bisogno, si prenderà il secondo membro col segno contrario ,, ma abbiamo trovato t, nel Corollario secondo della Proposizione VIII, ossia

$$f(x, y) = x - \frac{nz'}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}} = x - \frac{nz'}{\omega}, \text{ ed } s \text{ ovvero}$$

$$\phi(x, y) = y - \frac{nz_{,}}{\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}} = y - \frac{nz_{,}}{\omega}, \text{ da cui cavasi}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 1 - \frac{nz''}{\omega} + \frac{nz'}{\omega^3}(z'z'' + z_{,}z_{,}'), \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \frac{nz_{,}}{\omega^3}(z'z'' + z_{,}z_{,}') - \frac{nz_{,}'}{\omega},$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 1 - \frac{nz_{,,}}{\omega} + \frac{nz_{,}}{\omega^3}(z_{,}z_{,,} + z'z_{,}'), \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{nz'}{\omega^3}(z_{,}z_{,,} + z'z_{,}') - \frac{nz_{,}'}{\omega};$$

e di più pel Corollario primo della medesima Proposizione VIII, si ha $u' = z'$, $u_{,} = z_{,}$, per cui $\sqrt{(1 + u'^2 + u_{,}^2)} = \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)} = \omega$;

adunque ponendo nell'espressione esposta di $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$ in vece delle quantità $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\sqrt{(1+u'^2+u_{,}^2)}$ questi loro valori, si avrà

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)=\left\{\left(1-\frac{nz''}{\omega}+\frac{nz'}{\omega^3}(z'z''+z_{,}z_{,}')\right)\left(1-\frac{nz_{,,}}{\omega}+\frac{nz_{,}}{\omega^3}(z_{,}z_{,,}+z_{,}z_{,}')\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{nz_{,}}{\omega^3}(z'z''+z_{,}z_{,}')-\frac{nz_{,}'}{\omega}\right)\left(\frac{nz'}{\omega^3}(z_{,}z_{,,}+z'z_{,}')-\frac{nz_{,}'}{\omega}\right)\right\}\omega;$$

ovvero facendo le moltiplicazioni indicate, e sostituendo in luogo della ω il suo valore $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$, si otterrà $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$ eguale all'espressione

$$(i)\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}},$$

la quale dipende, come si vede, dalla sola equazione della superficie data; dimodochè sostituendo nell'espressione

$$\left\{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}}\right\}\partial x \partial y$$

in luogo delle quantità z', $z_{,}$, $z_{,}'$, z'', $z_{,,}$ i loro valori cavati dall'equazione della superficie data, si avrà una funzione delle sole variabili indipendenti x, y il di cui integrale doppio preso relativamente a queste due variabili, ed esteso tra gli stessi limiti, tra i quali converrà estendere quello dell'altra espressione $\partial x \partial y \sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$ per avere la superficie data, ci darà la superficie corrispondente cercata Q. Con questo metodo la difficoltà è ridotta alla sola integrazione doppia, cioè ad una difficoltà appartenente alla natura medesima della questione.

Corollario 1. Se la superficie data sarà quella della minima estensione, ossia quella la cui equazione soddisfa alla differenziale $2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}=0$, come dimostrasi nel calcolo delle variazioni " *Lagrange*. Funzioni. Lezione vigesimaterza ,, allora sparirà il termine $\frac{n[2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}$, e si avrà semplicemente $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$

$=\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}}$; cioè basterà integrare l'espressione $\left\{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n^2(z''z_{,,}-z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}}\right\}\partial x\partial y$ per avere la superficie corrispondente a quella della minima estensione.

Corollario 2. Similmente, se la superficie data sarà sviluppabile, si avrà solamente $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$ $+\frac{n[2z'z_{,}z'_{,}-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}$, essendo per le superficie sviluppabili $z''z_{,,}-z_{,}'^2=0$, come dimostrasi nella loro analisi; ed integrando l'espressione $\left\{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}+\frac{n[2z'z_{,}z'_{,}-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}\right\}\partial x\partial y$, si avrà la superficie corrispondente alla data superficie sviluppabile.

Esempio. Sia $z=\sqrt{(a^2x^2-y^2)}$, cioè la superficie data sia quella di un cono retto, che ha il vertice all'origine delle coordinate, e per asse quello delle x, e di cui la tangente trigonometrica dell'angolo che fa un suo lato collo stesso asse è a; e cerchiamo la superficie corrispondente alla quarta parte di essa compresa tra i piani delle coordinate positive.

L'equazione $z=\sqrt{(a^2x^2-y^2)}$ ci dà $z'=\frac{a^2x}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$, $z_{,}=\frac{-y}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$, $z''=\frac{-a^2y^2}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)^3}}$, $z_{,,}=\frac{-a^2x^2}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)^3}}$, e $z'_{,}=\frac{a^2xy}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)^3}}$; cioè $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}=\frac{ax\sqrt{(1+a^2)}}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$, $\frac{n[2z'z_{,}z'_{,}-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2}=\frac{n}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$; e perciò in questo caso sarà $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\left(n+ax\sqrt{(1+a^2)}\right)\frac{1}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$. Integrando l'espressione $\left(n+ax\sqrt{(a^2+1)}\right)\frac{\partial x\partial y}{\sqrt{(a^2x^2-y^2)}}$ rela-

tivamente alla y, ed estendendo l'integrale tra i limiti di $y=0$, ed $y=ax$ fissati, si otterrà $\frac{\pi}{2}\left(n+ax\sqrt{(1+a^2)}\right)\partial x$; e di nuovo integrando questa espressione relativamente alla x, e trovando l'arbitraria colla condizione, che spariscono unitamente le coordinate e la superficie, si avrà la superficie cercata $Q=\frac{1}{2}\pi nx+\frac{1}{4}\pi ax^2\sqrt{(1+a^2)}$.

Altro modo generale per avere l'espressione della superficie corrispondente, od almeno una sua derivata seconda parziale.

Supponendo fissate sulla superficie parallela due linee qualunque, da cui partire e da considerarsi quali assi per misurare gli archi di curvatura della stessa superficie, e chiamando C', c' le lunghezze degli stessi archi compresi tra il punto del loro incontro e le due linee fissate, si avrà * $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c'\partial C'}\right)=1$. Ma indicando colle C, c i due archi di curvatura della superficie data e corrispondenti ai due C', c' già nominati, e colle R, r i suoi raggi di curvatura che corrispondono ai medesimi archi C, c, si ha, per quello che abbiamo esposto nel Corollario secondo della proposizione antecedente, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1+\frac{n}{R}$, e $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)=1+\frac{n}{r}$; adunque colla medesima regola accennata ed impiegata sopra per trasformare i differenziali secondi parziali, si avrà $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=\left(1+\frac{n}{R}\right)\left(1+\frac{n}{r}\right)$; ovvero (k) $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c\partial C}\right)=1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}$. Quindi considerando l'espressione $\left(1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}\right)\partial c\partial C$, che dipen-

* Benchè la formola $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c'\partial C'}\right)=1$ non siasi sino ad ora nè dimostrata nè esposta da nessuno ch'io sappia, nulladimeno, qui l'assumo senza dimostrarla per la grandissima facilità colla quale si può dimostrare co' principj Leibniziani.

de dalla sola superficie data, come funzione degli archi C, c di curvatura della stessa superficie, e prendendo il suo integrale doppio rapporto alle variabili C, c esteso tra gli stessi limiti, tra i quali bisognerà estendere quello dell'espressione $\partial c \partial C$ per avere la medesima superficie data, sarà questo integrale doppio dell'espressione $\left(1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}\right) \partial c \partial C$ la superficie cercata Q.

Corollario 1. Supponendo la superficie data quella della minima estensione, sarà $R = -r$, cioè i due raggi di curvatura eguali e di segno contrario, come dimostra *Monge* nell'applicazione dell'analisi alla generazione delle superficie curve; così per questa superficie si avrà semplicemente $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 - \frac{n^2}{rR}$.

Corollario 2. Similmente, supponendo sviluppabile la superficie data, sarà uno dei raggi R, r, come si sa, eguale all'infinito; e supposto questo R, si avrà $\frac{1}{R} = 0$, e perciò $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 + \frac{n}{r}$: dimanierachè, prendendo l'integrale doppio dell'espressione $\left(1 + \frac{n}{r}\right) \partial c \partial C$ relativamente alle variabili C, c, ed estendendolo tanto alla fine della prima integrazione quanto alla fine della seconda tra quei limiti, che si prescriveranno, si otterrà la superficie corrispondente ad una data sviluppabile.

Esempio. Sia BVC (*Fig.* 4) la quarta parte della superficie di un cono retto, che ha il vertice al punto V, per asse VA, e di cui un lato qualunque fa coll'asse VA un angolo BVA, che ha per tangente a; e cerchiamo, come nell'esempio antecedente, la superficie corrispondente alla porzione PVR compresa tra i lati PV, RV, e l'arco circolare PMR, che ha tutti i punti equidistanti dal vertice V.

Le linee di curvatura di questa superficie conica corri-

spondenti al punto M saranno una la retta OMV, e l'altra l'arco circolare RMP, dimodochè ritenendo l'ipotesi del corollario, cioè che R sia il raggio eguale all'infinito, sarà C una parte della retta OMV, cioè sarà $C = MV$, supponendo lo stesso vertice V l'origine di questi archi; e l'altro arco c sarà una parte dell'arco circolare PMR, cioè sarà eguale ad MP, supponendo la retta BV l'asse, o l'origine da cui partire per misurare questi archi; e perciò il raggio di curvatura della medesima superficie conica corrispondente all'arco c, cioè l'r sarà eguale alla normale MN; vale a dire, sarà $C = MV$, $c =$ arco circolare MP, $R = \frac{1}{0}$, $r = MV$ tang. $MVN = aC$, $PQ = \frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$, e $PMR = \frac{1}{2}\pi . \frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$.

Ora considerando l'arco C costante, sarà costante pure il raggio r; e perciò l'integrale dell'espressione $\left(1 + \frac{n}{r}\right) \partial c$ rapporto alla c, sarà $\left(1 + \frac{n}{r}\right) c +$ arbitr.; cioè $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = \left(1 + \frac{n}{r}\right) c +$ arbitr.; ed esteso tra i limiti di $c = 0$, e $c = PMR = \frac{1}{2}\pi . \frac{aC}{\sqrt{(1+a^2)}}$ si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = \frac{1}{2} \frac{a\pi}{\sqrt{(1+a^2)}} . C + \frac{1}{2} \frac{\pi n}{\sqrt{(1+a^2)}}$; ed integrando di nuovo relativamente alla C, ed osservando che sparisce la superficie Q insieme all'arco C, si otterrà $Q = \frac{1}{4} . \frac{a\pi}{\sqrt{(1+a^2)}} . C^2 + \frac{\pi n}{\sqrt{(1+a^2)}} . C$. Ponendo in quest'ultima espressione in luogo della C il suo valore $x\sqrt{(1+a^2)}$, si ricava, come sopra, $Q = \frac{1}{4} a \pi x^2 \sqrt{(1+a^2)} + \frac{1}{2} \pi n x$.

Quantunque lo scopo ch'io mi sono prefisso in questa memoria di analisi geometrica, sia di esporre e dimostrare le sole regole o formole generali, che possono essere utili tanto al pratico quanto al teorico, e di farne qualche semplice applicazione per insegnare l'uso delle formole stesse, nulladimeno, siccome s'incontrano spesse volte le superficie di rivoluzione sì nella pratica che nella teorica, così prima

di lasciare questa proposizione farò vedere a qual semplicità si possono ridurre le formole (i), (k) per qualunque superficie di rivoluzione; di più farò vedere, per queste superficie, come si possa cavare d'ambedue il medesimo risultamento. Ciò che servirà per conoscere maggiormente le formole stesse, e particolarmente la seconda.

Prendendo per asse delle x quello di rivoluzione, ed indicando colla $u=\phi x$ l'equazione tra le coordinate ortogonali x, u della intersezione della medesima superficie con un piano ux, che passa per l'asse di rivoluzione, sarà $z^2+y^2=u^2$, ossia $z=\sqrt{(u^2-y^2)}$ l'equazione della stessa superficie; e perciò scrivendo u', u'', in vece di $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$, si avrà

$$z'=\frac{uu'}{\sqrt{(u^2-y^2)}},\ z''=\frac{uu''}{\sqrt{(u^2-y^2)}}-\frac{y^2u'^2}{\sqrt{(u^2-y^2)^3}},\ z_{,}=\frac{-y}{\sqrt{(u^2-y^2)}},$$

$z_{,}'=\frac{yuu'}{\sqrt{(u^2-y^2)^3}}$, e $z_{,,}=\frac{-u^2}{\sqrt{(u^2-y^2)^3}}$; e quindi $\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)}$

$$=\frac{u\sqrt{(1+u'^2)}}{\sqrt{(u^2-y^2)}},\ \frac{2z'z_{,}z_{,}'-(1+z_{,}^2)z''-(1+z'^2)z_{,,}}{1+z'^2+z_{,}^2}=\frac{1+u'^2-uu''}{(1+u'^2)\sqrt{(u^2-y^2)}},$$

e finalmente $\frac{z''z_{,,}-z_{,}'^2}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}}=\frac{-u''}{\sqrt{(u^2-y^2)}\sqrt{(1+u'^2)^3}}$. Vale a dire, sarà per qualunque superficie di rivoluzione

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\frac{u\sqrt{(1+u'^2)}}{\sqrt{(u^2-y^2)}}+n\frac{1+u'^2-uu''}{(1+u'^2)\sqrt{(u^2-y^2)}}-n^2\frac{u''}{\sqrt{(u^2-y^2)}\sqrt{(1+u'^2)^3}},$$

ossia $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)=\left\{u\sqrt{(1+u'^2)}+n\frac{1+u'^2-uu''}{1+u'^2}-n^2\frac{u''}{\sqrt{(1+u'^2)^3}}\right\}\frac{1}{\sqrt{(u^2-y^2)}}$: equazione che integrata relativamente alla y, ed esteso l'integrale tra i limiti di $y=0$, ed $y=u$, cioè tra i piani delle coordinate positive, qualunque sia la superficie di rivoluzione dà $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\left\{u\sqrt{(1+u'^2)}+n\frac{1+u'^2-uu''}{1+u'^2}-n^2\frac{u''}{\sqrt{(1+u'^2)^3}}\right\}\frac{\pi}{2}$; e per l'intera superficie

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=2\pi\left\{u\sqrt{(1+u'^2)}+n\frac{1+u'^2-uu''}{1+u'^2}-n^2\frac{u''}{\sqrt{(1+u'^2)^3}}\right\}.$$

Individuata pertanto che sarà la superficie di rivoluzione, e

perciò conosciuta l'equazione $u = \phi x$ porransi nell'espressione $2\pi \left\{ u\sqrt{(1+u'^2)} + n\frac{1+u'^2-uu''}{1+u'^2} - n^2\frac{u''}{\sqrt{(1+u'^2)^3}} \right\} \delta x$, o nella equivalente $2\pi \left(u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}\right)\left(\sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2}\right)\delta x$ in vece delle quantità u, u', u'' i loro valori cavati dall'equazione $u = \phi x$, e si avrà un'espressione, la quale integrata relativamente alla x, ed esteso l'integrale tra i limiti, che si prescriveranno, ci darà la superficie cercata Q.

Ora indicando colla p l'ordinata di una linea parallela a quella rappresentata dall'equazione $u = \phi x$, e supponendola sul piano delle xy unitamente a quest'altra, e colla S l'arco della medesima parallela, si avrà, pel Corollario primo della Proposizione I, $p = u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, e per la Proposizione III $\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right) = \sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2}$; e perciò ponendo nell'espressione trovata $2\pi\left(u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}\right)\left(\sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2}\right)\delta x$ in vece dei fattori $u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, $\sqrt{(1+u'^2)} - \frac{nu''}{1+u'^2}$ le quantità p, $\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)$ ad essi eguali, si avrà $2\pi p\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)\delta x$, cioè $\left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right) = 2\pi p\left(\frac{\delta S}{\delta x}\right)$: come otterrebbesi, osservando, che la superficie Q è anch'essa di rivoluzione, e che l'intersezione di essa col piano ux è una linea avente per ascissa $x - \frac{nu'}{\sqrt{(1+u'^2)}}$, e per ordinata $p = u + \frac{n}{\sqrt{(1+u'^2)}}$.

Similmente per la formola (k), supponendo che le due linee da cui partire e da considerarsi quali assi per misurare gli archi C, c sieno per gli archi c l'intersezione del piano delle nz colla superficie di rivoluzione, e per gli archi C la periferia che è l'intersezione della medesima superficie col

piano

piano condotto pel suo principio perpendicolarmente all'asse di rivoluzione, e considerando l'arco C come costante, ed indi integrando relativamente all'arco c, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = \left(1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}\right)c +$ arbitraria; integrale che esteso tra i limiti di $c = 0$, e di $c = 2\pi u$ dà $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = 2\pi u\left(1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}\right)$, ossia $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = 2\pi\left(u + n\frac{u}{r}\right)\left(1 + \frac{n}{R}\right)$. Quindi ponendo nell'espressione $2\pi u\left(1 + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}\right)\partial C$ in luogo delle r, R i loro valori espressi per l'arco C, ed integrando l'espressione che ne risulta relativamente alla C, ed indi determinando convenientemente l'arbitraria, si avrà la superficie Q.

Finalmente, essendo i raggi r, R di curvatura di una superficie di rivoluzione, uno la normale e l'altro il raggio osculatore della linea avente per equazione $u = \phi x$, in questo caso sarà primieramente $r = u\sqrt{(1 + u'^2)}$, e perciò $u + n\frac{u}{r} = u + \frac{n}{\sqrt{(1 + u'^2)}}$, ossia eguale alla p; ed in secondo luogo pel Corollario della Proposizione VI, $1 + \frac{n}{R} = \left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)$; quindi $\left(\frac{\partial Q}{\partial C}\right) = 2\pi p\left(\frac{\partial S}{\partial C}\right)$, ovvero prendendo la x per variabile principale, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 2\pi p\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$: come abbiamo trovato sopra per la formola (i).

Proposizione XIII.

Data l'equazione di una superficie, e quelle del suo contorno, trovare l'espressione del volume o solido compreso tra essa ed una sua corrispondente.

Rappresentando colla funzione $Q(x, y, n)$ la superficie

corrispondente alla data e distante da essa della n, saranno

$$Q(x+\alpha,y+\beta,n)-Q(x,y+\beta,n)-Q(x+\alpha,y,n)+Q(x,y,n),$$
$$Q(x+\alpha,y+\beta,n+\theta)-Q(x,y+\beta,n+\theta)-Q(x+\alpha,y,n+\theta)$$
$$+Q(x,y,n+\theta),\text{ ovvero}$$

$$A=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec., e } B=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.}\qquad\qquad +\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 Q}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.}$$

due superficie corrispondenti a quella porzione della data, la quale ha per projezione sul piano delle xy il rettangolo di cui i lati sono gli aumenti α, β; e distanti dalla stessa data, la prima per l'intervallo n e la seconda per $n+\theta$. Similmente rappresentando colla funzione $V(x,y,n)$ il volume compreso tra la data superficie e la corrispondente $Q(x,y,n)$, saranno

$$V(x+\alpha,y+\beta,n)-V(x,y+\beta,n)-V(x+\alpha,y,n)+V(x,y,n),$$
$$V(x+\alpha,y+\beta,n+\theta)-V(x,y+\beta,n+\theta)-V(x+\alpha,y,n+\theta)$$
$$+V(x,y,n+\theta),\text{ ossia}$$

$$M=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec., ed } N=\alpha\beta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\alpha^2\beta}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}\right)+\text{ec.}$$
$$+\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.}\qquad\qquad +\frac{\alpha\beta^2}{2}\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y^2}\right)+\text{ec.}$$
$$+\alpha\beta\theta\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial n}\right)+\text{ec.}$$

i due volumi compresi tra le superficie A, B e la porzione suddetta della data; e perciò $N-M$, ovvero $\alpha\beta\theta\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x\partial y\partial n}\right)+\text{ec.}$ esprimerà il volume compreso tra le due superficie A, B fra di loro corrispondenti.

Ora evidentemente questo sarà maggiore di $A\theta$ e minore di $B\theta$, o minore di $A\theta$ e maggiore di $B\theta$; adunque col primo dei due principj dai quali dipende la soluzione di qualunque Problema fondamentale di Geometria (*) o di Mecca-

(*) Per questi principj si vegga una Memoria dal Cav. *Brunacci* inserita nel primo tomo dell'Istituto Italiano.

nica sublime, si otterrà $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial n}\right) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$; quindi $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) = Q$. Trovata pertanto l'espressione della superficie Q colla proposizione antecedente, basterà integrare l'espressione $Q\partial n$ relativamente alla sola variabile n, e trovare l'arbitraria introdotta dall'integrazione colla condizione che spariscono insieme V, ed n; e l'espressione risultante, sarà quella del volume V compreso tra la data superficie e la sua corrispondente $Q(x, y, n)$; cioè a dire sarà l'espressione cercata.

Corollario. Differenziando l'equazione trovata sopra $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right) = Q$ relativamente alle variabili c, C, si ha $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial n \partial c \partial C}\right) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$, cioè si hanno tra le quantità V, Q le due equazioni $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial n}\right) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^3 V}{\partial n \partial c \partial C}\right) = \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$; nelle quali ponendo in vece delle quantità $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$ i loro valori trovati nella proposizione precedente, si otterranno le equazioni

$$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial x \partial y \partial n}\right) \sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)} + \frac{n[2z'z_{,}z_{,}' - (1+z_{,}^2)z'' - (1+z'^2)z_{,,}]}{1+z'^2+z_{,}^2} + \frac{n^2(z''z_{,,} - z_{,}'^2)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}},$$

$\left(\frac{\partial^3 V}{\partial n \partial c \partial C}\right) = n + \frac{n}{r} + \frac{n}{R} + \frac{n^2}{rR}$, le quali integrate relativamente alla n ed ommesse le arbitrarie, giacchè determinate risultano eguali a zero, danno

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = n\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)} + \frac{\frac{n^2}{2}\left(2z'z_{,}z_{,}' - (1+z_{,}^2)z'' - (1+z'^2)z_{,,}\right)}{1+z'^2+z_{,}^2} + \frac{\frac{n^3}{3}\left(z''z_{,,} - z_{,}'^2\right)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}},$$

e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right) = n + \frac{n^2}{2r} + \frac{n^2}{2R} + \frac{n^3}{3rR}$. Da queste due ultime equazioni si cava che, il volume cercato, sarà anche eguale all'integrale doppio dell'espressione

$$\left\{ n\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)} + \frac{\frac{n^2}{2}\left(2z'z_{,}z_{,}' - (1+z_{,}^2)z'' - (1+z'^2)z_{,,}\right)}{1+z'^2+z_{,}^2} + \frac{\frac{n^3}{3}\left(z''z_{,,} - z_{,}'^2\right)}{\sqrt{(1+z'^2+z_{,}^2)^3}} \right\} \partial x \partial y$$

preso per rapporto alle variabili x, y; ovvero a quello dell' altra $\left\{ n + \frac{n^2}{2r} + \frac{n^2}{2R} + \frac{n^3}{3rR} \right\} \partial c \partial C$ preso per rapporto alle c, C, ed estesi ambedue tra i limiti medesimi, tra i quali bisognerà estendere quello dell' espressione $\partial x \partial y \sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}$ per avere la superficie data.

OSSERVAZIONE. Nelle proposizioni esposte relativamente alle linee a doppia curvatura, ed alle superficie abbiamo supposto tacitamente gli archi c', C' dalla parte convessa dei loro corrispondenti; e da questa supposizione risultarono i valori delle quantità $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)$, e quelli delle altre $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right)$ da esse dipendenti composti di termini tutti positivi. Questa supposizione, quantunque non abbia luogo in generale, giacchè per molte superficie uno degli archi C', c' trovasi dalla parte convessa del suo corrispondente, e l'altro all' opposto dalla parte concava, e per altre trovansi ambedue dalla parte concava dei loro corrispondenti, nulladimeno non limita la generalità delle formole esposte. Imperciocchè, se l'arco C' si trovasse dalla parte convessa del suo corrispondente C, e l'altro c' dalla parte concava del suo corrispondente c, si avrebbe colla Proposizione III, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right) = 1 + \frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right) = 1 - \frac{n}{r}$, i quali darebbero $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 - \frac{n}{r} + \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}$, e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right) = n - \frac{n^2}{2r} + \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}$; e se all' opposto C' si trovasse dalla parte concava e c' dalla convessa, o se ambedue si trovassero dalla parte concava dei loro corrispondenti, si avrebbe coll' accennata proposizione, nel primo caso, $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right) = 1 - \frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right) = 1 + \frac{n}{r}$, $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right) = n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}$, e nel secondo $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right) = 1 - \frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right) = 1 - \frac{n}{r}$, $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 - \frac{n}{r}$

$-\frac{n^2}{R}+\frac{n^2}{rR}$, $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right)=n-\frac{n^2}{2r}-\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}$. Vale a dire ammessi i principj esposti, sarà generalmente $\left(\frac{\partial C'}{\partial C}\right)=1+\frac{n}{R}$, $\left(\frac{\partial c'}{\partial c}\right)$ $=1+\frac{n}{r}$, e perciò $\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right)=1+\frac{n}{r}+\frac{n}{R}+\frac{n^2}{rR}$, e $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right)=n$ $+\frac{n^2}{2r}+\frac{n^2}{2R}+\frac{n^3}{3rR}$; come abbiamo sempre supposto, prendendo però positivamente i raggi r, R, quando gli archi c', C' saranno dalla parte convessa dei loro corrispondenti c, C, e negativamente nel caso opposto.

Esempio. Supponghiamo, che l'arco circolare HBG (*Fig.* 5) unito invariabilmente alla AE faccia unitamente a questa retta un'intera rivoluzione intorno alla retta OO, e cerchiamo la superficie generata dall'arco LCM parallelo al dato GH, ed il solido compreso tra questa superficie e quella generata dall'arco stesso HBG; cioè cerchiamo la superficie corrispondente di quella generata dall'arco HBG quarta parte della periferia, che ha il centro al punto A distante dall'asse OO di AE$=b$, e per raggio AG$=a$; e cerchiamo il solido compreso tra essa e la generata dal quadrante circolare HBG.

Supponendo che le due linee da cui partire e da considerarsi quali assi per misurare la lunghezza degli archi c, C sieno l'arco circolare HBG nella sua posizione primitiva e quello generato dal punto G colla rotazione; e considerando un punto della superficie data pel quale passa il punto B rotando, si avrà $r=$AB, R$=$BQ, $c=$BG, e C eguale alla parte dell'arco circolare descritto dal punto B per arrivare al punto della superficie, che si considera; cioè sarà $r=a$, $R=\frac{b}{\cos.\frac{c}{a}}-a$, $c=$BG, C$=$ alla parte suddetta della periferia $2\pi\left(b-a\cos.\frac{c}{a}\right)$, e BD$=b-a\cos.\frac{c}{a}$.

Nel caso presente i due archi C, C' avendo i loro centri ambedue al punto Q, ed essendo per ipotesi BQ$<$CQ,

converrà prendere R negativamente; e reciprocamente per essere AC > AB, ed avendo i due archi c, c' i loro centri al medesimo punto della periferia generata dal punto A, bisognerà prendere r positivamente; cioè sarà

$$\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial c \partial C}\right) = 1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}, \text{ e } \left(\frac{\partial^2 V}{\partial c \partial C}\right) = n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}.$$

Ora l'arco C è evidentemente indipendente dalle altre quantità, c, r, n, R; e perciò integrando le espressioni $\left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}\right)\partial C$, $\left(n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}\right)\partial C$ relativamente alla stessa C, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right) = \left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}\right) C + arb$, e $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = \left(n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}\right) C + arb$; ovvero estendendo gl'integrali tra i limiti di $C = 0$, e di $C = 2\pi . BD$, si avrà $\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right) = 2\pi\left(1 + \frac{n}{r} - \frac{n}{R} - \frac{n^2}{rR}\right) BD$, e $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right) = 2\pi\left(n + \frac{n^2}{2r} - \frac{n^2}{2R} - \frac{n^3}{3rR}\right) BD$. Quindi ponendo in queste ultime espressioni di $\left(\frac{\partial Q}{\partial c}\right)$, $\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)$ per le quantità r, BD, R i loro valori, ed integrando relativamente alla c, ed indi estendendo gl'integrali tra i limiti fissati di $c = 0$, e di $c = \frac{\pi a}{2}$, si otterrà la superficie corrispondente $Q = b\,(a + n)\,\pi^2 + 2\,(a + n)^2\pi$, ed il solido $V = abn\pi^2 + \frac{1}{2}bn^2\pi^2 - 2a^2\pi n - 2an^2\pi - \frac{2}{3}\pi n^3$.

A compimento di quanto ideai di esporre in questa Memoria sino dal momento che incominciai a scriverla mi rimane solo ad avvertire il lettore, che, quando la distanza n tra la curva data e la parallela sia maggiore del minimo raggio della curva data, il quale è anche tangente alla comune sviluppata, e per le superficie maggiore del minimo raggio di curvatura della superficie data, e che la linea, o la superficie cercata sia dalla parte concava della conosciuta, la troppo generalità inseparabile dai metodi analitici introduce nei risultamenti esposti alcune incongruenze, l'esclusione delle

quali è assolutamente impossibile; e che lo sviluppo, e l'esposizione di queste ed altre incongruenze le pubblicherò, all'uopo pubblicando un altro lavoro, che è una continuazione del presente.

A compimento del quale aggiungo il presente Problema.

Quali sono le proprietà che debbe avere una curva, ossia le condizioni a cui debbono soddisfare le sue coordinate, acciò essa sia parallela a quelle curve, le quali sono incontrate da tutte le normali della medesima nelle quali si trovano i suoi raggi osculatori, e nel medesimo tempo le porzioni di queste normali comprese tra essa e la curva che incontrano abbiano per tutto la stessa lunghezza.

Sieno x, y, z le coordinate della curva di cui cerchiamo le proprietà, ed a, b, c quelle della sua normale nella quale si trova il raggio osculatore, che compete al punto a cui corrispondono le coordinate x, y, z; e saranno allora

$$x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$x-a+(y-b)m+(z-c)n=0,$$

le equazioni della stessa normale, nelle quali m, n sono date dalle altre due equazioni

$$1+m\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+n\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=0.$$

I valori delle quantità a, b, c cavati dalle tre equazioni

$$(a)\ldots\ldots x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b)\ldots\ldots x-a+(y-b)m+(z-c)n=0,$$

$$(c)\ldots\ldots (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2,$$

supponendo che il d non muti valore, sia cioè invariabile, rappresenteranno i valori delle coordinate di una di quelle curve, le quali sono incontrate dalle normali anzidette in maniera, che riescano sempre eguali le porzioni di queste

normali, comprese tra ciascuna delle stesse curve e quella di cui cerchiamo le proprietà, ossia le condizioni a cui debbono soddisfare le sue coordinate, acciò essa sia parallela a ciascuna di quelle.

Due sono le proprietà che debbono avere due curve onde essere parallele, cioè essere eguali tra di loro le rette tirate da tutti i punti di una perpendicolarmente all'altra, e parallele tra di loro le due tangenti condotte a quelle curve nelle estremità di queste rette perpendicolari.

Chiaramente si scorge che la prima di queste due proprietà regna tra la curva di cui le coordinate sono x, y, z e quella espressa dalle tre equazioni (a), (b), (c), essendo essa proprietà una legittima conseguenza, di ciò che esprime l'equazione (c). Vi sarà anco la seconda di quelle due proprietà, se le due equazioni $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial b}{\partial a}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)$, ossia le loro equivalenti $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$ saranno rese identiche dai valori delle quantità a, b, c, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, che ci sono dati dalle equazioni (a), (b), (c), unite ai loro differenziali prese per rapporto alla x, i quali sono

$$(a')\ldots 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b')\ldots 1+m\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-m\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-n\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$(c')\ldots(x-a)\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)+(y-b)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0;$$

vale a dire, la curva le cui coordinate sono x, y, z sarà parallela all'altra, se sussisteranno insieme tutte le otto equazioni seguenti

$$(a)\ldots x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b)\ldots x-a+(y-b)m+(z-c)n=0,$$

(c)

$$(c)\ldots(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=d^2,$$

$$(a')\ldots 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b')\ldots(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)-m\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)-n\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$(c')\ldots(x-a)\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)+(y-b)\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=0,$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Eliminando adunque da esse le sei quantità a, b, c, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, le equazioni che rimarranno, se non saranno da sè stesse identiche, rappresenteranno le condizioni dimandate.

Ma ponendo nelle tre (a'), (b'), (c') in vece delle quantità $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$ i loro valori cavati dalle ultime due equazioni, cioè eliminando le due quantità $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, si hanno le sei equazioni (a), (b), (c)

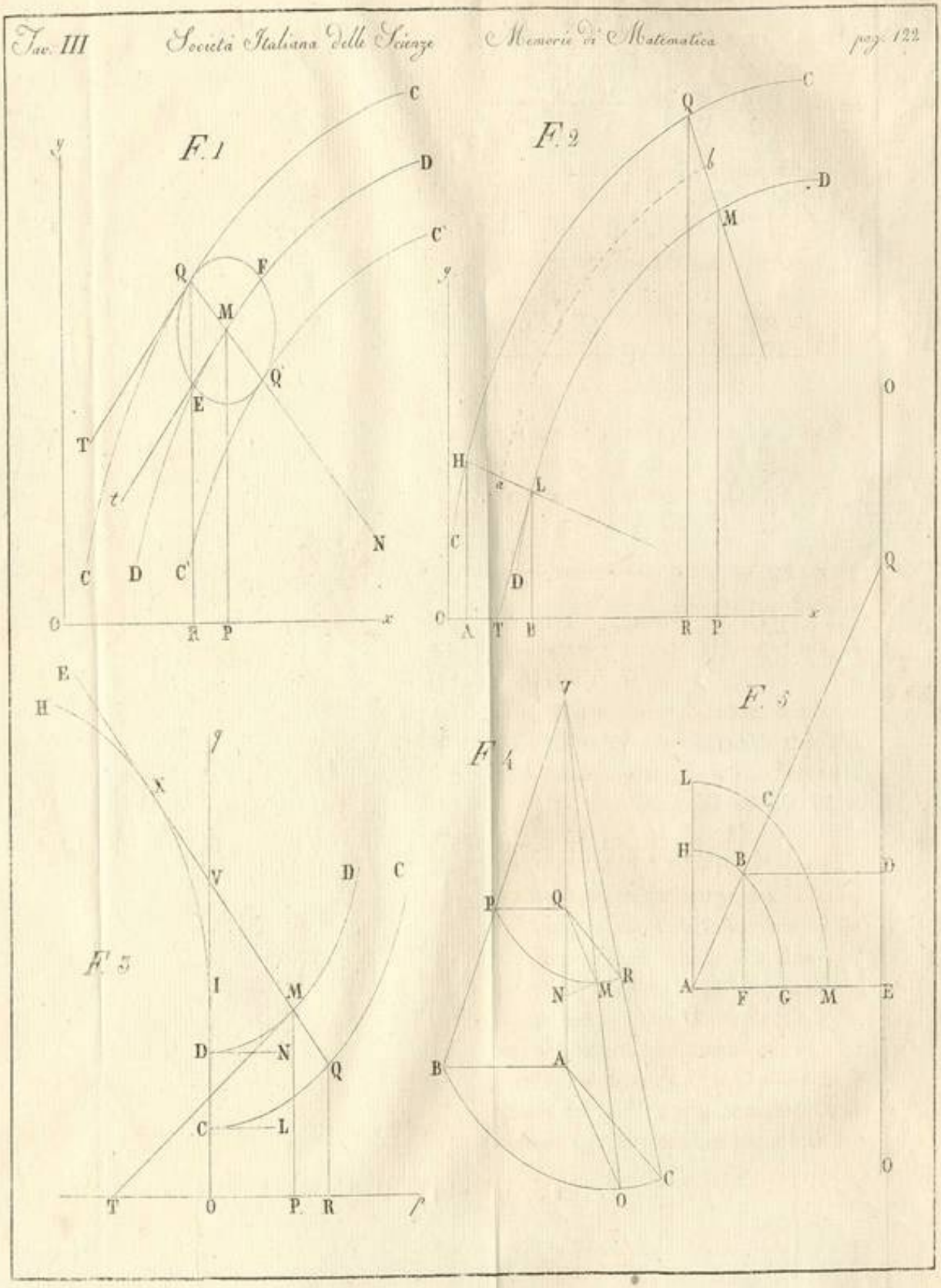
$$(a'')\ldots\left\{x-a+(y-b)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)=0,$$

$$(b'')\ldots 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+(y-b)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)-\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)=0,$$

$$(c'')\ldots(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)=0,$$

le quali si riducono alle sole cinque (a), (b), (c), (b''), (c''), essendo la (a'') identica colla (a). Cavando ora dalle quattro (a), (b), (c), (b'') i valori delle quantità a, b, c, $\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, si ottiene

$$a=x-\frac{\left\{n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)-m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}d}{R},\ b=y+\frac{\left\{n-\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}d}{R},$$


F. 1
F. 2
F. 3
F. 4
F. 5
F. 6

$$c = z - \frac{\left\{m - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\} d}{R} \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) = 1 + \frac{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2 + \left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}^2 d}{R\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}},$$

supponendo però

$$\sqrt{\left[\left\{n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) - m\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}^2 + \left\{n - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\}^2 + \left\{m + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}^2\right]} = R.$$

Questi valori sostituiti nell' ultima equazione (c''), la riducono alla

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\right\} d}{R\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}^2} = 0,$$

la quale non contenendo alcuna delle quantità $a, b, c, \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial b}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)$, e non essendo da sè stessa identica, rappresenterà la condizione cercata.

Quantunque quest' ultima equazione sia composta di molti fattori

$$d, \frac{1}{R}, 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \frac{1}{\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\right\}}, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right),$$

nulladimeno nessuno di questi, se si eccettua quest' ultimo, può essere uguagliato a zero per soddisfarla, senza una evidente contradizione; adunque la condizione cercata sarà espressa dall' equazione differenziale

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right) - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) = 0,$$

ossia dal suo integrale completo $z = Ay + Bx + C$. Vale a dire, la curva rappresentata dalle tre equazioni (a), (b), (c), sarà parallela a quella le di cui coordinate sono x, y, z, purchè sia quest' ultima una curva piana.

Il Sig. *Tramontini* nella sua Opera sulle costruzioni grafiche pubblicata questo anno, ammette la curva espressa dalle tre equazioni (a), (b), (c) parallela all' altra; quindi, in forza del risultamento esposto, bisognerà circoscrivere ciò che egli dice al solo caso che quest' altra sia una curva piana.

Se nella equazione $(c'')\ldots(y-b)\left(\frac{\partial m}{\partial x}\right)+(z-c)\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)=0$,

o nell'equivalente

$$\frac{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)\right\}d}{R\left\{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\}^2}=0,$$

la quale esprime la condizione che si cercava, in vece di supporre che d sia la distanza costante delle due curve suddette, supporremo che esso sia il raggio di curvatura della curva di cui le coordinate sono x, y, z, essa rappresenterà, come dimostra *Lagrange* nella sua teorìa delle funzioni Analitiche, la condizione, acciò la curva dei suoi centri di curvatura sia anche una sua sviluppata; e perciò cogli stessi ragionamenti fatti superiormente, si concluderà, che il luogo geometrico dei centri di curvatura di una data curva sarà una sua sviluppata, nel solo caso che questa sia una curva piana: come dimostrò, in altro modo, *Monge*, nel decimo volume delle Memorie di Matematica presentate alla Reale Accademia delle scienze di Parigi.