SUPPLEMENTO ALLA DOTTRINA TORRICELLIANA SOPRA LE COCLEE

MEMORIA

Del Sig. Pietro Ferroni

Ricevuta li 29 del 1810.

Torricelli il primo di tutti sino dall'anno M.DC.XLIV adoperando gli *indivisibili* curvi estese con elegantissima sintesi l'applicazione della Geometria alla ricerca della misura dei solidi *cocleari*, ch'ei mostrò essere eguali a' solidi *annulari* rotondi, i quali poi si riducono facilmente a solidi *pieni*, come le *armille* a circoli *interi* (1)*. I fili o elementi delle *coclee*, cioè l'*elici* ossiano *spirali cilindriche*, meritarono la considerazione geometrica nelle prime età della Scienza delle grandezze *continue*, come può riscontrarsi nel *commentario* di Proclo Diadoco dove egli nomina specialmente tra gli Autori, che ne fecer parola, Gemino di Rodi ed Apollonio Pergéo (2). E ben a ragione, perchè diversamente dalla spirale *piana* o *voluta* di Conone (3), dalla *sferica* rammentata da Pappo (4), dalle *spiriche* di Perseo (5), dall'*elica* d'Archita (6), o altre curve così dagli antichi appellate, la *cilindrica* è tale, che quantunque dotata di *doppia curvatura*, ha la proprietà d'essere uniforme in ogni sua parte, si-

(*) La moltiplicità delle Note ha indotto il Signor Cavalier Presidente a senso dall' Art. XIII dello Statuto a sopprimerle, di concerto anco coll'egregio Autore: siccome però questo ha mostrato desiderio di averle nelle 50 copie, che la Società distribuisce ai Socj attuali, così si lasciano sussistere li numeri che le chiamano.

Il Vice-Segretario.

mile per questo lato alla *retta* ed alla *periferìa circolare*, dalla combinazione o mescolanza delle quali due linee resulta. Fuori però di quest'unica prerogativa, che collocandola nella terna delle linee dette *similari* la fece da tutte l'altre distinguere (7), i Geometri Greci non attesero a contemplare siffatta *spira* sennonchè a riguardo della meccanica com' elemento della *vite* (8), annoverata la quinta tra le macchine semplici (9) quantunque volte alla *coclea* maschia o in rilievo s'univa la femmina scalpita in incavo congenere, o quando il *verme* della maschia *perpetua* s'incastrava nei *denti* tagliati in iscorcio d'una ruota *dentata* nei così detti *pancrazj* (10). I monumenti dell'antichità manifestano che Archimede (forse dietro alle tracce degli Egiziani) adattasse la stessa *coclea*, ma *tubulata*, anco all'elevazione dell'acqua (11), destando meraviglia grandissima in tutti coloro, che n'osservavano l'andamento, nè sapean mai concepire come l'acqua, sempre scendendo per archi *idrofori*, disgiunti o isolati, di giro in giro salisse difatto dalla bocca inferiore alla superiore, che a guisa di fontana intermittente la versava alla fine nel ricettacolo destinatole (12). Nè malgrado i suoi inconvenienti lasciò di sorprendere i Fisici sperimentatori l'istessa *elice* tubiforme avvolta nell'età nostra attorno al *tamburo* o timpano d'una ruota, qual'è quella della macchina ingegnosissima di Veltman o Wirtz, che chiamata in soccorso anco la forza *centrifuga* alza parimente l'acqua da un serbatojo o canale (forse più del recentissimo *Ariete idraulico*), e la porta dentro d'una conserva a *riprese* (13).

Ma ommettendo di trattenermi su tutto quanto appartiene alla *coclea* dipendentemente dalla Dinamica e Idrodinamica, nè tampoco fermandomi a rilevare la falsità della statica della *vite*, che si legge nel libro VIII.° ossia ultimo delle *collezioni* di Pappo (14), e la mancata o smarrita teoria della *vite* idraulica, che dopo l'opera postuma di Guidubaldo Del Monte venuta alla luce nel M.DC.XV a vicenda illustrarono durante il secolo scorso superiormente agli altri

Parent (15), Pitot (16), Euler (17), e Daniello Bernoulli (18), fa specie che alcuni dei molti encomiatori del Torricelli, la più parte de' di lui biografi (19), e segnatamente gli enciclopedisti e lo Storico universal delle matematiche Montucla (20) [per non dire la breve *Cronica* di Bossut (21)], malgrado la lode fattane amplissima da Roberval (22), o abbiano affatto taciuta, o mal enunciata la maniera facile e nuova di conseguire la dimensione della solidità delle *coclee*. Quel Toscano geometra ingegnosissimo e sommo pe' tempi suoi, nato ne' monti dell' Emilia, istruitosi in Faenza ed in Roma, e morto assai giovine cinque anni dopo di Galileo, col quale a commendazion del Castelli avea convivuto familiarmente i tre mesi estremi nella suburbana villa d' Arcetri (23), espose con tutta chiarezza e semplicità il suo ritrovato insiem con altre bellissime proposizioni geometriche, e verso il M.DC.XL, o in quel torno, per mezzo dei Minimi Niceron e Mersenno, con cui era in carteggio, partecipollo ai più insigni matematici della Francia (24), d' onde presto pervenne alla Gran Brettagna (25). Lo arricchì poscia di poche, ma pregevoli giunte, che per la morte immatura del Cavalieri (26), la noncuranza del Ricci (27), e quinci la gelosia del Viviani (28), ad onta delle premure incessanti di Ferdinando II.° e Leopoldo de' Medici rimasero sempre inedite nel MS.° Codice originale, che dalla Libreria Palatina passò a quella dell' Imperial Museo di Firenze, ove tuttavia si conserva (29). Nulla però in questo Codice vi s' incontra, che risguardi o affezioni particolari dell' *elici* avvolte attorno un Cilindro, o misura dell' aree di Zone *elicoidi*, o delle superficie *spiralmente* contorte terminanti le *Coclee*. Havvi solo spiegato il modo di rintracciare il valor della superficie, che circoscriva un anello (*chiuso* od *aperto*), le cui sezioni sono le *spiriche* antiche, e perciò sia generato dalla rotazione d' un circolo intorno a un asse posto nel medesimo piano (30); dal che si rileva che Torricelli prevenne su tal proposito il Tacquet, cui Pascal sembra dare il primato della scoperta (31),

pubblicata nel libro o parte IV.ª e V.ª *Cylindricorum et Annularium* del M.DC.LI e LIX (32), vale a dire almeno quattr'anni in circa dopo mancato il primo di vita (33). Dietro all'autorità di quel Codice (noterò di passaggio), e dei MSS.ⁱ del Lorenzini, parte esistenti nella Fiorentina Biblioteca pubblica Magliabecana (34), e parte tra gli altri del Grandi in quella dello Studio di Pisa (35), sarebbe agevole impresa rivendicare ai Geometri della Toscana parecchie sintetiche invenzioni sublimi sopra le Curve, e loro varie attenenze; invenzioni finissime, che si credono esotiche, ma doverebbero ad ogni buon dritto servir d'appendice alla corta *Lettera* di Timauro Antiate, ossia Carlo Dati, concernente soltanto il Barometro, e la Cicloide (36), non meno che alla manchevole *Storia letteraria d'Italia* del Tiraboschi (37).

Procedendo il secolo XVII.°, ad eccezione dei *piani* allora detti *flessuosi*, mentovati altresì da Pappo (38), poco o niente fu aggiunto dal Gesuata De-Angelis al già discoperto dal Torricelli in materia della *cubatura* o solidità delle *Coclee*, e delle qualificazioni *centrobariche* alle medesime competenti (39); nè altro Italiano, ch'io sappia, prese a trattare di siffatto argomento. Pascal tra i Francesi presso al M. DC.LIX considerando meno generalmente del Torricelli i Triangoli *cilindrici* (40), assai più semplici delli *sferici*, perchè svolgibili in piano, e se terminati dall'*Elica* rettilinei, immaginò e *ricubò* un Solido nuovo da lui chiamato *Escalier* (41) o *solidum scalare* da Wallis (42), colla base però circolare, colle altezze progressive in eguaglianza cogli archi sottoposti, e solamente colla superior superficie in qualche sorte analogo al *Cocleare*: il prenominato Wallis (43) e Wren (44) si distinsero quasi contemporaneamente nell'Inghilterra o ripetendo o di poco avanzando gl' insegnamenti Torricelliani; sennonchè l'ultimo, noto eziandio nella Storia delle Belle Arti per essere stato l'Architetto e Ornatista del Tempio di S. Paolo di Londra emulo della Basilica Vaticana (45), spinse le sue ricerche geometriche (presone quasi dalla coclea,

κοχλία (46), *limaçon* del laberinto dell'orecchio umano il modello) anco sopr'una *Coclide* piramidata, e *spiralmente* ritorta intorno ad un Cono (47). In questa foggia la Geometria s'accostava semprepiù alla Natura, come quella che, osservandolo tra i primi speculatori *ex professo* Sulzer (48), e Hogarth (49), nelle immense specie e varietà delle chiocciole, testacei, conchiglie, sì viventi che fossili, e massimamente dei *corni d'ammone*, de'quali è stata cotanto prodiga quanto dei grani d'arena, sino al segno di mostrarne all'occhio degli Orittografi in un pugno di terra millioni di microscopici (50), e nelle vaghissime *strie* o scannellature polistrofe delle lor valve affetta soprattutto *spirali* rastremate o affusate (51), come gli antichi copiarono nelle colonne degli ordini più delicati (52) e Dante nello spartimento fantastico dell' Inferno, ed a differenza delle vitalbe e trachée delle piante perfino le affaccia nei vortici acquei o turbinosi atmosferici, nel moto apparente del Sole, nel serpeggiar delle folgori, nel tipo istesso della bellezza delle forme animali, ed in somma nell'universalità dei tre regni del Mondo fisico tende più al tortuoso che al retto, nè manca d'esservi disgraziatamente proclive eziandio nel morale. Comunque però inoltrata si fosse la considerazione dei corpi geometrici *cocleiformi*, niun matematico di detta età mai cimentossi ad assegnarne le superficie. Aveva l'Huygens di già compianati, senza comunicarne la prova, i contorni o perimetri dei Conoidi e Sferoidi (53), alla qual misura non era giunto colla mirabile sua perspicacia il gran Geometra di Siracusa (54); e deesi poscia a Barrow (55), Fermat (56), e Parent (57) il perfezionamento non solo, ma oltracciò il metodo generale per conseguire la dimension delle superficie di tutti i solidi generati dalla circonvoluzione di qualunque linea di *semplice curvatura* attorno una retta (58). Anzi, siccome Archimede, oltre a non aver fatto parola del Solido Iperbolico-acuto Torricelliano (59), lasciò parimente d'attendere tra i corpi rotondi nati dal girar delle Coniche al Cilindroide, o Timpano iper-

iperbolico così nominato, e malgrado l'autorità di Fontenelle (60) avanti di Wallis descritto dal Cavalieri (61), e taciuto nulladimeno dall'Huygens, la superficie di quest'ultimo Solido misuratasi da Parent (62) aprì in virtù d'un sottile ritrovamento di Wren (63) la nuova strada, che conduceva a sottoporre alla Sintesi perlomen le più semplici tra le superficie formate in guisa di tele, o in altri termini assomigliantisi ad un tessuto di rette linee. Tali eran forse, standosi all'etimologìa del lor nome, le *Plectotides* dei Geometri Greci, rammentate da Pappo dietro all' opere ora perdute di Filone da Tyane e Demetrio Alessandrino (64); nè son tampoco dissimili la superficie ideata per descrivere la *Quadratrice* (65), quella del *Prismale* immaginato dal Grandi (66), l'altra della nuova *Trattoria*, e sua generatrice insieme, considerate nel Tomo V degli Atti antichi dell' Accademia R. di Berlino (67), le superficie che proverrebbero conducendosi dal perimetro delle sezioni-coniche de' Cilindri, Coni, e Conoidi le normali agli assi di siffatti corpi rotondi (68), e tutte in generale dei corpi *gauches* ed *amorfi*, rispetto ai quali, e definitivamente alle superficie loro, appellate *sviluppabili*, o con isvolgerle compianabili, sul declinare del secolo scorso Euler (69), Tinseau (70), Monge (71), Bossut (72), ec. si diedero ad applicarvi l'Analisi degli Infiniti.

Ben è vero che con i mezzi possenti somministrati per avventura dal Calcolo Infinitesimale, o sivvero delle *funzioni* analitiche *derivate* e *primitive* (che concesso lo sviluppo d'ogni qualunquesiasi *funzione* in *serie* procede immediatamente dalla regola del *binomio* di Newton), data in genere l'*equazione* alla superficie se ne deduce immantinente il valore, sciogliendola in elementi di secondo ordine, e doppiamente integrandoli. Così operaron difatto sin dalla nascita della nuova Analisi Leibnitz (73) e i due Bernoulli seniori (74) quando appigliaronsi a decifrare l'Enimma Fiorentino della Volta-a-vela *quadrabile*; così in processo di tempo l'A-

nonimo nei Supplementi agli *Atti* degli Eruditi di Lipsia (75) e Bezout nel suo *Corso* (76), con tutti quelli che poi seguirono, o Elementografi o Trattatisti moderni, i precetti dettati dall'Euler tostochè prese a generalizzare il Problema di Firenze usando del doppio *segno* d'integrazione (77). Conseguenza di queste formule universali sarebbe subito il caso particolare della dimension delle superficie di tutte le *Cocliti*, e infra i moderni il primo a specificarle è stato il Frisi nel suo *Trattato* d'Algebra e Geometria-analitica (78); conciossiachè Caraccioli avanti di lui nel M.DCC.LV (79) null' altro avea fatto se non se inutilmente ed erroneamente saggiare il Calcolo per investigarne la sola di loro solidità, ormai dopo più d'un secolo conosciuta. Racconta l'istesso Frisi nel precitato volume (80), e più diffusamente in una lettera posteriore diretta a Fabroni (81), che tra le speculazioni inedite del Perelli eravi ancora quella d'essersi applicato a cercare per via sintetica, com'avea in uso, alcune delle più ovvie tra le superficie *elicoidi*, ricavandone preziosissimi resultati.

Io dunque, che largo estimatore di Torricelli e Perelli, sagacissimi entrambi nel magistero della più forbita e recondita Geometria (il primo de' quali proverbiavasi ancora vivente colla versione di *Evangelista Torricellius* nell'anagramma *En virescit Galilœus alter*, il secondo ammiravasi come raro e valente ingegno per ricondurre l'antica semplicità ed eleganza delle geometriche dimostrazioni nelle più difficili e astruse teorie), non ho altro divisamento fuori di quello di compiere una dottrina cominciata con sì favorevoli auspicj in Toscana, passo adesso a satisfare all'assunto propostomi con indicarne i sommi-capi soltanto, e tacerne, mentre sian facili e pronte, le prove. Già dal mio Opuscolo intitolato *Ocia Perelliana* (82) dietro alle indicazioni del Frisi e alle proprie ho trascritte e pubblicate in diversi tempi parecchie Proposizioni di Perelli, uniformandomi al di lui gusto nel dimostrarle. Giova citare tra l'altre la vera indole della *Logi-*

stica (83) od *Emiperbola* (84), onde ricavasi la spiegazione d'un *paradosso* di Boscovich (85), la specie di *Lemniscata* non avvertita come terza projezione ortografica del perimetro della *vela* celebre del Viviani (86), l'*Ipociloide* non ravvisata dal Radicati (87), le singolari prerogative d'un'elegantissima varietà delle *Spiriche* (88), lo scompartimento o riunione di due o più movimenti *rotatorj* simile a quella de' *progressivi* (89), la vera curva in cui si piegano gli archi del ponte di Firenze disegnato dall'Ammannati (90), e nella soggetta materia la *spirale iperbolica* projezion stereografica della *cilindrica* (91), come stereografia della *conica* l'*elice* sempre analoga all'Apolloniana Iperbola referita agli *asintoti*, ed icnografia la *spirale* aritmetica o Archimedéa, che dovrebb'essere per avventura, in cambio d'un complesso *discontinuo* d'archi circolari a più centri, la *voluta* grande del Capitello Jonico insieme coll'altre piccole imitanti i *viticcj* de' vegetabili, le quali adornano i Corintj e Compositi nell' Architettura Greco-Romana (92). Intendo parlare d'*elici coniche* e *cilindriche* regolari, in cui cioè si verifichi in genere uniformità o *equabilità* di moto nel generarle sì circolare che rettilineo, o si combinino i due movimenti sempre *accelerati* o *ritardati* insieme colla medesima legge; il che non s'avvererebbe se l'*elici* sopraccennate, per esempio, prendesser norma dalla geometrica o *conchiliforme* di Wren (93), che per icnografia n'avrebbe una simil di nome altrimenti detta Torricelliana (94), che piacque poi di chiamare *Spiral logaritmica*, ed Halley mostrò (95) essere ancora la projezion stereografica sul piano dell'Equatore della *Loxodromia* nautica sopra la sfera, traguardandola dal polo opposto. Nè importa, facendo parola di quelle Coclee, distinguere se sian *monostrofe*, *distrofe*, *tristrofe*, *tetrastrofe*, *pentastrofe*, ec. imperocchè, attesa la *similarità* loro, un sol giro o porzione di giro, senz'anche sciogliere in *lineole* o *trapezioli* o *prismetti*, conduce alle dimensioni intere che vogliansi, o a sembianze del *Canone* Guldiniano, per vaghezza d'analogia

qualche volta velate sott'altro aspetto o larvate, come avverrebbe di chi dicesse esser il contorno della Cicloide *primaria* alla base nella ragione stessa dell'area d'un quadrato a quella del suo circolo iscritto.

SEZIONE I

Degli Elementi o Indivisibili delle Coclee.

Son questi l'*Eliche*, ovvero *spirali cilindriche*, delle quali, oltre ad essere le più brevi o *minime* di lunghezza tra due punti estremi segnati sulla superficie del Cilindro, verificansi i seguenti principali attributi.

1.° Ciascheduna di loro è una vera *Loxodromia* sul Cilindro, analoga alla *sferica* di Nunez (96), o recentissima *sferoidale*, ed in piano alla *spiral logaritmica*. Oltre di ciò dessa ha per projezione ortografica sul rettangolo, che passa per l'asse del suo Cilindro, la curva anguiforme de'*seni*, cioè il contorno dell'*Ellissi*, od *Ungula espansa*, ossia la *compagna della Cicloide* nella sua integrità [non come piacque di mutilarla a Montucla (97)], e questa *comune*, *contratta*, o *protratta* secondochè l'angolo della *spirale* colla periferìa della base sia semiretto, minore, o maggiore. Dunque l'*Elica* prenominata è una linea, che non solo si può tracciare anche sulla superficie d'un Cono retto a base di *spirale iperbolica*, ma di più sopra quella d'altro Cilindro retto a base d'*Ungula espansa*, che son due casi tra innumerevoli rimanenti di superficie men semplici.

2.° Cresce e si fa più stretto il rapporto colla Cicloide *primaria e secondarie* aggiungendo che mentre le tangenti dell'Ungula o dell'Ellissi incontrano il pian della base segnandovi una retta infinita due volte calcata, cioè diretta e retrograda, quelle per il contrario d'ogni *Elica* segnano nel piano del cerchio, base del loro Cilindro, la *spirale evoluta* del circolo, o comune o allungata o scorciata, (di cui,

perchè diversissima dalla *Lumaca* Robervalliana (98), Varignon e Diderot specialmente (99) rilevarono le particolarità più distinte), come avviene nei medesimi casi degl' incontri delle tangenti della Cicloide e Circolo-genitore, a seconda di ciò che avanti di tutti discoperse in Italia il Viviani (100). Queste relazioni patenti tra la *Cicloide* e la *Coclea* fecero forse equivocare Fabroni allorchè rendendo di ragion pubblica ed *illustrando* alcune *lettere inedite d' Uomini illustri* prese l' una per l' altra (101); mancamento di maggior conto di quello del Traduttore Italiano della *Storia Ecclesiastica* di Racine, il quale parlando di Pascal, deluso dal nome Francese *roulette*, convertì la *Ciclode* in troclea o *girella* (102).

3.° I *fili* del *verme* d' una *Coclea* (come sarebbero quei del guscio spirale di *Bernardo-l'-eremita* e della *Conchiglia-vite* ossia *Turbo duplicatus* del *Systema Naturae* di Linnéo), a proporzione che restano più o meno distanti dall' asse del loro Cilindro, sono *spirali dissimili*, perchè diversamente inclinate rispetto al pian della base. Difatti se s' inclinasse il Cilindro sull' orizzonte, i punti più bassi degli archi *idrofori* di ciascun *filo* del *verme* verrebbero ad esser disposti non sopra una retta orizzontale, ma piuttosto sopr' una curva. Quindi è che la *Vite* non può nè dee dai Meccanici considerarsi come profilo d' un solo piano inclinato, ma più presto come l' unione d' innumerevoli profili di piani differentemente declivi. Se una *Coclea* suppongasi traforata da una retta, la quale si parta dall' asse del suo Cilindro e gli sia perpendicolare, le inclinazioni dei *fili* scemano sempre quanto più si discostan dall' asse medesimo; di modo che i due limiti estremi, quando la *Coclea* fosse *piena*, o si stringesse sull' asse, e la base del Cilindro diventasse infinita, sarebbero l' angolo retto ed il nullo. La legge, che unisce insieme le varie inclinazioni dei *fili*, si è che le *tangenti* dei predetti diversi angoli d' inclinazione stanno tra loro in ragion *reciproca* delle distanze dall' asse, o come appunto *graficamente* dimostra la I.ma Figura, postochè ad una data distanza

BC dall' asse (o sua proporzionale) corrisponda l' angolo d' inclinazione ACB; dalla qual Figura o *Scala*, indefinita dalla parte di D, e segnata in guisa che AB denoti la distanza o *raggio* dove il cammino di *rotazione* agguaglisi al *progressivo*, si ricavano ancora gli angoli *complementari* dei *fili* coi lati del Cilindro, cui danno regola le *cotangenti* dei primi e respettive *tangenti* degli ultimi in ragion *diretta* delle distanze. Di quì sorge un' altra analogia vistosissima colla *spirale iperbolica*, i cui angoli al centro o *foco*, formati dai raggi *polari* colla paralella all' *asintoto*, son parimente in ragione *inversa* dei raggi stessi o distanze centrali (103). Una cognazione men ovvia affacciasi ancora colla *catenaria* o *funicularia* semplice o volgata, nella quale si sa che le *tangenti* segnate sulla medesima *scala*, correspettive alle inclinazioni degli elementi di quella linea *trascendente* sopra la base (e viceversa le *cotangenti*) riesconvi *direttamente* proporzionali alle distanze contate sugli archi di quella curva, dall' imo suo punto venendo verso del sommo (104).

4.° Malgrado che tutte quell' *Elici* innumerabili e variamente inclinate non sian *paralelle* tra loro, perchè poste in diversi piani considerandone eziandio gli elementi infilati da due medesime rette normali all' asse del loro Cilindro, sono contuttociò *equidistanti*, e *perpendicolari* ciascuna alle frapposte rette suddivisate. *Paralellismo*, *equidistanza*, *normalità* duplice delle interposte rette non istanno perciò sempre insieme, nè costituiscono una perfetta ed universale geometrica *sinonimia*. Passando difatti dalla generalità delle vere *paralelle*, che nelle linee di curvatura *scempia*, oltre delle rette illustrate da Legendre (105) e delle concentriche periferie circolari, prendon origine dall' *evoluzione* d' una medesima curva, come avvisò Leibnitz il primo (106), seguitato da Gio: Bernoulli (107) e Varignon (108), ed in ultimo da Cagnazzi (109) e Lottèri (110), a ragionar sulle linee di *doppia* curvatura, e generalizzando la dottrina Leibnitziana per

mezzo della bella teoria delle infinite *Evolute* data da Monge nel M.DCC.LXXI (111), d'onde nascono le superficie *delle tangenti* o così dette *sviluppabili*, s'incontra subito il caso di linee *equidistanti* ad un tempo e *non paralelle*.

5.° Le *spirali cilindriche* semiortogonie (Num.° 3.°), in cui cioè il viaggio *rotatorio* del punto, che le descriva, precisamente pareggi il cammin *progressivo*, sviluppate che sieno, come le curve in piano, generano egualmente che la sviluppata circonferenza della base del Cilindro, sulla superficie del quale son disegnate, la stessa *evoluta del circolo*. Quelle stesse *spirali* (a forma del Num.° 1.°) appellano all' *ungula cilindrica* parimente semiretta, cioè alla *sferocilindrica primaria* di Roberval (112) o *circolo* così detto *cilindrico*, da cui deriva la *spirale sferica* Vivianéa (113); cosicchè le rammentate tre curve di *doppia* curvatura, mediante il contorno dell'*ungula* di curvatura *semplice*, sono in tale strettissima corrispondenza tra loro, non meno che le *secondarie* delle *specie* prenominate, che somministrano la vera chiave per risolvere colla massima semplicità geometrica ed evidenza tutti i Problemi più ardui concernenti il ritrovamento delle porzioni *quadrabili* di superficie sopra una sfera; chiave, di cui, se v'è luogo a criticamente congetturarlo, erasi forse servito Perelli (114).

6.° Dipende dalla *similarità* dell'*elica* del Cilindro la dimostrazione [non soluzione, come scriveva Fabroni (115)] del Teorema insigne lasciatoci senza prova da Gemino (116), e vale a dire che da un punto qualunque condotte all'*elica* stessa due rette d'egual lunghezza fanno sempre colla medesima angoli eguali, come accade nella linea retta e nel circolo, altre due *similari*. E difatto, se il punto si prenda nella retta normale all'asse, dentro o fuor del Cilindro, su cui è la *spirale*, stando quella ad angolo retto su questa, e pigliandone pari porzioni dell'ultima a destra e sinistra, si vede chiaro che rivoltando un Triangolo sovra l'altro, come ho suggerito il primo in proposito dei Triangoli sferici (117),

perfettamente combacianti. Ora la medesima coincidenza e per conseguente le stesse attribuzioni de' Triangoli isosceli o equicruri si verifican parimente tenendo ferma la *perpendicolarità* della retta intermedia, e supponendola più o meno allungata o abbreviata nel rivolgersi della Figura per una completa revoluzione.

7.° Ha un giro intero della *spirale cilindrica* il suo *centro di gravità* ossia *delle medie distanze* nel punto, che biseca la porzione dell'asse del suo retto Cilindro, la quale determina il viaggio *progressivo* dall'imo al sommo, e corrisponde all'altezza del medesimo giro. Il *centro di gravità* d'una parte d'*elica* minore del giro intero è poi collocato nel punto medio dell'altezza, normale alla base del Cilindro, la quale si parta dal *centro di gravità* del correspettivo arco di circolo, su cui riposa. Manifestissimo è ciò in virtù della *similarità* della curva; nè può tampoco arrecare veruna difficoltà la determinazione del *centro di gravità* d'un corso d'*elice* più che *monostrofa*, conoscendosi ormai i *centri* de' giri interi e delle lor parti, non meno che le relazioni delle lunghezze di queste parti col tutto.

8.° Nella terna delle *similari* manca di *curvatura* la sola *retta*, e la *curvatura* di tutte le *linee*, che giacciono in piano, misurasi dai Geometri mediante quella della seconda *similare*, o sivvero della circonferenza del *circolo osculatore*. Non sarebb'egli perciò convenevole misurare altresì le *curvature* delle *linee* non giacenti nel medesimo piano per mezzo dei *contatti* di vario *grado* dei diversi piani *osculanti* ed *elici cilindriche osculatrici* di questa o quella inclinazione e apertura (118), essendo l'ultime le semplicissime di tutte le curve di cotal genere, e tra le immense famiglie di queste l'uniche *similari?*

SE-

SEZIONE II

Delle Armille o Zone Cocleari o a Lumaca (119).

Hanno tre differenti maniere d'essere siffatte *Armille*, o fasce piegate e contorte che dir si vogliano, l'*ordito* delle quali è composto d'*elici* cilindriche, e la *trama* o ripieno di linee rette d'egual lunghezza. Difatti 1.° o son nastri acconciamente avvolti sulla superficie convessa d'un Cilindro retto, *accartocciati* tai quali sarebbero intorno il suo maschio, anima, o forma le laminette o liste d'acciaro, onde si fabbricano canne da schioppi nelle officine di Spagna; 2.° o sono zone *spiralmente* condotte sul modello dell'*Escalier* di Pascal, cioè in rassomiglianza all'andamento o *sdrajo* d'una *rampa* continua *non cordonata* e senza *gradini*, o volta o piano inclinato ritorto *a chiocciola*, la cui pianta sia o una circolare armilla o un circolo intero, come per esempio la scala *a lumaca* (tranne i gradini) della Farnesina rurale o palazzo di Capraròla nei dintorni di Ronciglione o di Castro, l'altra del palazzo Barberini nella piazza Grimana di Roma, e quella del palazzo Cavalieri al Quirinale ossia Monte Cavallo; 3.° o finalmente sono corone *a sdrucciolo* più o meno declivi in foggia di zone o corolle coniche, ma stirate di modo da collocarsi in linea *spirale* lungo una retta, fuso, asse, ec., o come dicesi *a pozzo* attorno il vacuo conformato a cilindro.

Rispetto all'ultime, la dimensione della cui superficie immantinente apre il campo a rintracciar la misura di quelle, che circoscrivono i solidi *cocleari*, non diversamente dall'area degli anelli *conici* conducenti ad assegnare la superficie di tutti i corpi *rotondi*, mi riservo a parlarne nella Sezione che segue. Ed in proposito delle prime, che convengono appieno cogli *indivisibili curvi* introdotti da Torricelli, e copiati dipoi da Pascal (120), la misura dell'aree de' quali è

conseguenza immediata di *Triangoli cilindrici* in generale, eguali sempre e simili a un tempo (e come ho già detto, se contornati dall'*elica*, rettilinei), che sovrapposti coincidono senza niuna diversità dalla Proposizione XXV del Libro I degli *Elementi* d'Euclide, gioverà d'aggiunger soltanto che i *Triangoli conici* insistenti sopra due simili archi, superiore e inferiore, d'un'*armilla* conica retta, compresi tra due lati del Cono, ed aventi per terzo lato due archi simili di simili curve coniche, i cui piani perciò sian paralelli tra loro, o sivvero egualmente inclinati rispetto a quei delle basi, non appresentano *zone* come sul Cilindro tessute di rette eguali, ma pel contrario decrescenti sempre dal basso all'alto, non altrimenti che scemano in proporzione scambievole gli archi conici e circolari, e scemano l'aree triangolari, che stan come quelle dei loro *arbèli* icnografici (121).

Restano dunque unicamente le seconde delle tre specie d'*armille* per argomento di questa parte del mio discorso, cioè quelle appunto conformate in guisa di *montata* andante di *scala elicoide*, di cui fa menzione recente anco il *Giornal Politecnico* (122), e sono o *chiuse*, perchè senza vuoto interno nè solido appoggio centrale, ch'io chiamo *circoli cocleari*, od *aperte*, perchè *a pozzo* o nucleo concentrico che lo riempia, rapporto alle quali conservando l'analogia nominale non sarà improprio appellarle *armille cocleari*, siccom' è uso anco invalso presso il comune degli Architetti d'individuar qualche volta le *rette* col titolo d'*Archipiani* (123). Essendo porzioni l'ultime delle prime, le superficie loro misuransi scambievolmente, come avviene dei circoli ed armille ordinarie, nè fa di mestieri perciò di ricorrere a differenti principj.

PROPOSIZIONE FONDAMENTALE.

La superficie, concava sopra, e sotto convessa, d'un *circolo cocleare* di qualunque raggio stà nel tutto e nelle

parti all'area intera e porzioni omologhe del *circolo piano*, sua pianta o projezione ortografica, come la superficie del *complemento* o quadrilineo d'un'iperbole equilatera Apolloniana referita al suo asse secondario sta all'area e porzioni corrispondenti del sottoposto triangolo equicrure-rettangolo-asintotale.

Tutte le iperbole equilatere sono *simili;* laonde di qualunque grandezza si scelga una infra loro, la relazione dei due *spazj* indicati riman sempre l'istessa. Oltrediciò attesa la *similarità* di composizione d'ogni *spicchio* o settore contato dall'asse o *centro* del *circolo cocleare*, e la *similarità* di ciascuna altresì delle parti d'un'*armilla* o zona *cocleare*, il rapporto cercato, che valga per una porzione (o commensurabile o incommensurabile rispetto all'intero) del giro totale, varrà egualmente per questo, e a vicenda. Or supponendo che l'*elici* sieno fuor d'ogni *limite* assegnabile una all'altra vicine, e si decomponga così il *circolo cocleare* o suo settore in *zonule* intere o parziali concentriche, vien ad essere ognuno di questi elementi superficiarj eguale al rettangolo dell'*elice* o sua porzione nell'elemento del raggio o distanza dall'asse o centro (*Sez.ᵉ I.ᵐᵃ N.ᵒ* 4), e l'elemento correspettivo della sua *icnografia* eguale al rettangolo del sottoposto arco di circolo nell'istesso elemento del raggio, cioè come l'*elice* all'*arco* suddetto. Ma l'*Elici* di giro intero o parte di giro (*Sez.ᵉ cit.ᵉ N.ᵒ* 3) stanno alle *Circonferenze* sottoposte o loro porzioni *icnografiche* come AC a BC, AM a MB, ec. della 1.ᵐᵃ figura. Dunque ripetendola come *scala* e colle medesime lettere e *modulo* AB e spartimento nella 2.ᵈᵃ, e d'altronde sapendosi che nell'*Iperbola* equilatera ogni ordinata CE, MP, ec. normale all'asse secondario o *conjugato* BD s'agguaglia ad AC, AM, ec., come CF, MT, ec. tagliate dall'*asintoto* semiortogonale BG pareggiano respettivamente BC, BM, ec., si conclude che la *somma* dei primi elementi stia a quella de' secondi nella proporzionalità accennata dall'enunciato.

COROLLARIO I

Supposta perciò la *quadratura* del *Circolo piano* e delle sue parti, dipende la dimensione *assoluta* dell'area del *Circolo cocleare* e sue porzioni omologhe dalla *quadratura* dell' *Iperbola* d'Apollonio, e vale a dire dai *logaritmi*, o piuttosto dalla rettificazione della *Parabola* ordinaria, o sivvero della *Spirale* aritmetica (124), non diversamente dal modo di costruire la *Catenaria* (*Sez.ᵉ I.ᵃ l. c.*) (125), e di descriver col mezzo della teoria di Wright e Percks (126) ossia delle *latitudini crescenti* o *somme delle secanti* le *Carte ridotte* o *loxodromiche* (ivi N.° 1) per la determinazione del lato *mecodinamico* ad uso della Marina: nuova e riguardevole affinità tra le nominate Curve e la Coclea.

II

La misura poi *relativa* o *compianazione* del *Circolo cocleare* e di lui porzioni si conseguisce mediante la sola dottrina dei *Logaritmi*; di tal maniera che se sulla medesima *scala* o *modulo* sia BH il *raggio* estremo del *Circolo cocleare* e sua *Pianta*, ed assegnisi il Quadrato eguale al doppio del *Quadrilineo* ABHI, sarà il lato di quel Quadrato eguale al *raggio* di quel *Circolo piano*, che agguagli il *Circolo cocleare*. Si dica l'istesso dei *settori* o altre parti respettivamente *simili* de' due *Circoli*; e riguardo alla specialità delle armille omologhe o loro porzioni *simili*, la riduzione d'una *cocleare*, per esempio, della larghezza LM, ad una circolare *eguale* (o per gli *Elementi* ad un Circolo *pieno*) nasce dall'assegnar due Quadrati, eguali ciascuno al doppio de' Quadrilinei ABMP, ABLN, i lati de' quali saranno i *raggi* de' circoli *piani* concentrici, che racchiudono l'*armilla* cercata, la lor differenza ne darà la larghezza, ed il lato del Quadrato d'area eguale alla differenza degli altri due somministrerebbe il *raggio* dell'egual Circolo *intero*.

III

Mentre lo spazio triangolare BHK fa vedere palpabilmente con qual proporzione vadano a grado crescendo l'aree dei Circoli *icnografici*, e lo spazio iperbolico ABHI rappresenta il progredimento di quelle dei Circoli *cocleari*, cominciando da AB ossia da B centro comune l'uno e l'altro procedere, manifestissimo ancora si è che le differenze di questi rapporti, comunque crescendo *aritmeticamente* i raggi sempre diminuiscano, pur tuttavia accumulandosi abbian per *limite* una differenza totale *infinita*; che tal è appunto lo spazio intero *asintotale* iperbolico. Ma questo spazio AIGKB richiama a quella specie singolar d'*Infinito*, che appellasi *logaritmico* (inferiore di grado a paragone dell'*aritmetico* stando ai termini della controversia famosa dei *più che Infiniti*); laonde i due *limiti* di relazione sono 1.° all'origine o centro l'Infinito *assoluto*, che passa tra la retta AB ed il suo punto estremo B; 2.° l'eguaglianza o quasi-eguaglianza quando arrivassero le due grandezze ad ingolfarsi nell'Infinito. E quel primo rapporto d'una linea finita ad un punto farebbe rivivere il *paradosso*, che si legge nei *Dialoghi* di Galileo, e che non appropriasi solamente all'orlo d'una *scodella* scavata nell'emisfero, ma si verifica di tutti gli orli o tagli consimili de'*ciati* o scodelle scavate nei Conoidi o Sferoidi, come avvertì *Torricelli* (127).

IV

Per dividere mediante una o più *Elici* concentriche in qualunque *date* ragioni, o in parti *eguali*, o comunque *proporzionali* il *Circolo cocleare* (che pel digià detto può esser *Volta* ad un tempo e *Montata* di scala) o un di lui Settore, basterebbe saper tagliare nelle ragioni medesime, o in parti *simili* il precitato *Quadrilineo* Iperbolico. Nè per avventura

s' incontrerebbe difficoltà ognivoltachè passar si volesse dal *Circolo cocleare* monostrofo a più d'un giro o rivoluzione di *Coclea*; conciossiachè i *multipli* respettivi della trovata misura insiem colla giunta delle parti *aliquote* od *aliquante* della medesima soddisfarebbero tosto a siffatto Quesito.

V

In cambio di determinare il confronto d'un Settor di *Circolo cocleare* con quello della sua *Icnografia*, non meno che la comparazione delle lor parti omologhe, potrebbe fors' esser gradevole paragonarlo all'area del Rettangolo (che per comodo dirò *verticale* in contrapposto alla *pianta*) formato dal raggio, o sua parte, come *base*, e dalla porzione corrispondente dell'asse del Cilindro, che ne costituisce l'*altezza*. Ma le aree di questi rettangoli disegnati nella 2.da figura tengono la proporzione istessa dei raggi, e lor parti, ed in quei tali punti, ne' quali il movimento *rotatorio* pareggi il *progressivo* lungo dell'asse predetto, l'aree dei divisati rettangoli son doppie de' respettivi settori del *Circolo piano*. Se dunque dal vertice A della già descritta equilatera Iperbola conducasi la tangente indefinita AR, l'area del *Circolo cocleare*, o suo settore, sarà a quella del rettangolo corrispondente come, per esempio nella distanza dal centro BQ, l'area del solito *Quadrilineo* iperbolico ABQO a quella del sottoposto rettangolo ABQS; ragione, che non varia perciò il suo carattere *trascendente*, ed è collegata coi digià fissati principj e rilievi.

VI

Posto che il *Prismale* Grandiano (*Fig.a* 3) (128) sia retto, e retto l'angolo MΩY, affaccia allora nel suo primo elemento contiguo al taglio supremo, e lungo quanto il medesimo, l'immagine schietta dell'elemento-settore d'un *Circolo*

cocleare. Imperciocchè comparando il detto elemento, segnato colle medesime lettere, al settor *cocleare* della Fig.ª 2.ᵈᵃ, non ha dubbio che questi due non siano esattamente gl' istessi. Sono difatti tessuti per un verso, come gli elementi delle superficie di tutti i *Corps gauches*, di rette B*b*, C*c*, L*l*, M*m*, ec. eguali ad una ad una e similmente disposte; nè lo sarebbero meno tutte l'altre innumerevoli, che tagliassero sempre proporzionalmente le *direttrici* BM, *bm*, e quelle eziandio per il verso opposto, che incrociasser le prime congiungendo i punti di proporzional divisione di B*b*, C*c*, L*l*, M*m*, ec. nominate di sopra. Ma appunto perchè queste ultime rette sono nella 2.ᵈᵃ Figura elementi dell' *Elici* ossia delle loro tangenti, dopo di MB*bm* il *Circolo cocleare* non combina più ne' suoi seguenti settori col rimanente della Superficie (*Plain gauche*) del *Prismale* MΩYXB, che col piano-tangente MΩY staccasi dal Cilindro. Egli è però qui da notarsi che anco tagliando l'elemento-settore MB*bm* come il *Prismale* trasversalmente per via di piani secanti s'ingenererebbero sulla di lui superficie elementi di Parabole *convesse* e *concave* e d'Iperbole Apolloniane. Nè sarà discaro sapere che per quanto sia curva la superficie MBXY del *Prismale*, pur tuttavolta il di lui volume agguaglisi alla metà di quello del *Prisma* triangolare, da cui è stato reciso; poichè gli elementi *prismatici* di prim'ordine, nei quali risolverebbesi mediante i triangoli LΠΓ, CΘΣ, ec., paralelli e non simili alla base MΩY, avendo l'altezza comune BX, procedono come le distanze XΠ, XΘ, ec., e perciò la lor *somma* equivale all'area d'un triangolo mentre l'altra del *Prisma* verrebbe ad essere rappresentata dall'area del paralellogrammo, suo doppio.

VII

D'un intero *Circolo cocleare* (supposto omogeneo), o *zona* intera, apertamente si vede essere collocato il *centro* di *gravità* nel punto di mezzo della porzione dell'asse del

Cilindro distesa dall' imo punto al supremo della completa rivoluzione *spirale*. Manifestissima cosa ella è parimente che il *centro di gravità* d' un *Settor cocleare* prende regola da quello del Quadrilineo *iperbolico* della Figura 2.da, cosicchè se il *raggio* di questo Settore fosse BL sul citato modulo o *scala* quel *centro* sarebbe a tanta distanza dall' asse AB del Cilindro quant' è la distanza nota del *centro di gravità* del *Quadrilineo* o area ABLN dall' asse medesimo, e perciò nel *raggio* medio del Settore tagliata questa distanza dall' asse, il suo termine estremo vi determinerebbe quel punto o *centro*, che si ricerca. Chiedendosi poi il *centro di gravità* d' una sola parte di *zona* o settore bisogna notare sul modulo stesso i due *raggi* estremi, per esempio BQ, BM, tra i quali la *zona* è compresa; quindi assegnare il conosciuto *centro di gravità* del *Quadrilineo* parziario OQMP; e diportarsi nel resto come per l' intero Settore. Determinato il *centro di gravità* d' un sol *giro* e d' una parte quantunque di *giro*, non ha più veruna difficoltà determinarlo di due, tre, ec. *giri*, o interi, o colla giunta d' altra porzione di *giro*. Giova riflettere contuttociò che rispetto al *Circolo cocleare* e sue parti non ha luogo l' applicazione della Dottrina *centrobarica* delle Figure rotonde [*Amphismata* (129)] motivata da Pappo nella *Prefazione* al VII.° Libro, amplificata dopo Kepler nella *Stereometrìa* (130) dal Guldino (131), e dimostrata prima di tutti dal Cavalieri insieme e dal Roccha (132). Imperocchè stando ai termini di questa Teorica, anco renduta più generale, col mutarsi i centri o assi di rotazione, da Varignon sul principio del Secolo scorso (133), la superficie d' un *Circolo cocleare*, o d' un suo Settore (e l' istesso dicasi delle *zone*) generata, per esempio, (*Fig.*^{a} 2.da) dal moto *rotatorio* e *progressivo* insieme della retta BL verrebbe ad esser eguale all' area del Rettangolo, che avesse per base la medesima retta, e per altezza quell' *Elice* sempre ad essa normale, che fosse descritta dal punto medio Δ, la quale in virtù della 1.ª e 2.da Figura e dei Num.^{i} 3.° e 4.° della 1.ma *Sezione* ha il saputo rapporto di AΔ a ΔB comparandola all' icnografica Periferìa

circolare

circolare del *raggio* BΔ; il che torna a dire eguale alla superficie convessa o concava d'un Cilindro retto, la cui base fosse il Circolo del *raggio* AΔ e l'altezza BΔ, o ad una parte di lei proporzionale al Settore, o sivvero eguale all'area d'un Circolo (o suo Settore) di *raggio* pari alla *media* proporzionale geometrica tra BΔ e 2AΔ, siccome abbiamo dagli *Elementi*. Ora, quanto ciò s'allontani dalla vera misura (che in questa ipotesi supporrebbe la sola *quadratura* del Cerchio) riguardo all'area del Circolo costa dalla *Proposizione* premessa, e rispetto alla Superficie cilindrica si farà chiaro dalla seguente. Frattanto sarà permesso dedurre come con tutta ragione secondando il titolo istesso dell'Opuscolo inedito del Torricelli concernente l'abuso, che della Teoria degli Indivisibili o *atomica* potrebbe farsi nelle cose geometriche (134), non sarebbe scevro d'utilità compilare anco un breve Trattato, arricchito d'esempli scelti a proposito, intitolandolo *De Doctrina centrobaryca temere non usurpanda*.

Proposizione derivata.

Dato qualunque *Circolo cocleare* v'ha sempre (sul medesimo *modulo*) un *Emicilindroide Iperbolico*, la cui concava superficie rotonda non solamente è *analoga* e *proporzionale* in genere, come in altri *Emicilindroidi*, nelle parti e nel tutto alla superficie del primo, ma gli è ancora *eguale*, o, conforme con più chiara espressione i moderni Geometri dicono, *equivalente*.

Mercè l'ispezione della 4.ª Figura cesserà tosto la meraviglia dell'*analogia* tra due Superficie, che al primo aspetto rassembrano tanto difformi, quanto sono difatti una rivolta in *elice*, l'altra in sembianza di *timpano* affusato e rotondo, o sivvero in foggia di *capitello*, o vaso di Callimaco, della colonna Corintia. Ed il vero, la superficie dell'*Emicilindroide*, generato dalla rivoluzion del perimetro del ramo d'Iperbola Apolloniana AOTG' intorno all'asse suo secondario o *conju-*

gato BD, può considerarsi ancor dessa come tessuta di linee rette indefinite, fuori di piano una l'altra, non paralelle tra loro, e collegate per mezzo di circolari Circonferenze, che o intere o nelle respettive porzioni ed elementi *simili* procedono colla medesima legge dell'*Elici*, le quali legano i raggi del *Circolo cocleare*. Imperciocchè tutti i Geometri sanno che cominciando da segnar sull'*Emicilindroide* quella linea retta, la quale sovrasta a un *asintoto* BF'T'K', e si confonde in pianta con esso, e gli è paralella e distante quanto importa il semiasse *conjugato* della Curva *generatrice*, se si taglino quindi per la medesima direzione archi *simili* sulle circonferenze de' Circoli, che hanno i lor raggi eguali alle *ordinate* BA, CE', LN', QO', MP', HI', ec., come chiaro apparisce dalla Figura, i punti estremi di detti archi vengono ad essere distribuiti o collocati sempre sopra una retta. Queste rette innumerevoli, disposte sulla superficie concava dell'*Emicilindroide*, e non mai situate nell'istesso piano, nè paralelle tra loro, potrebbero ancora disegnarsi per altro verso della superficie medesima andando a seconda dell'altr'*asintoto*; cosicchè in ogni *Emicilindroide* vi son sempre due *serie* d'infinite rette giacenti sulla di lui superficie, d'onde n'ha tratto il suo nome, armonizzate con identifica simetria, e due a due nello stesso piano e paralelle ai due *asintoti* e facienti un angolo all'*asintotico* eguale. Di qui è che mentre si ponga sulle punte d'un *tornio* B, D una massa corporea capace di ricevere e mantenere forma rotonda girandola e consumandola a poco a poco per via di ferro tagliente, ogni volta che il *taglio* sia situato e si tenga ben fermo in iscorcio o in direzione obliqua rispetto all'asse di rotazione BD, sotto qualunque angolo DBG', purchè il detto *taglio* conservi il paralellismo a BG', n'escirà sempre *tornito* un *Emicilindroide iperbolico*, concavo nel senso della *generatrice*, convesso in quello della rotondità procacciatagli in virtù dell'asse immobile di rotazione, che congiunge i due centri, su cui resta stabilmente *imperniato*. Così d'agevol maniera operan-

do venivano a fabbricarsi in addietro le *forme* metalliche (*moules*) delle *lenti* oggettive *iperboliche* di vetro o cristallo, quando cioè riputavansi da Descartes ed altri Fisici egregi acconce e valevoli a correggere l'*aberrazion di figura* nei Telescopj poco dopo del nascimento della Diottrica (135). E quel *Cilindroide* (giacchè vale del doppio l'istesso discorso che del suo mezzo) si fa più o meno aperto, meno o più concavo a proporzione che scemi o cresca l'obliquità del *taglio* per rapporto all'asse BD; di tal maniera che diventato nullo quest'angolo, il *Cilindroide* convertesi in *Cilindro retto*, che rimane intermedio ai due *tagli* simetrici opposti, perde la sua *concavità*, e la di lui superficie resta tessuta d'una *serie* sola di linee rette, ma tutte paralelle tra loro ed all'asse. Ora tornando alla considerazione delle *rette* eguali, che sono i lati dell'*Emicilindroide*, ognuno di questi in totalità e nelle parti finite ed elementari è proporzionale al *raggio* e sua omologa parte finita ed elementare, che si contasse sopra BD nel *Circolo cocleare*, e come in esso, gli archi od archetti *simili* (qui *circolari*, là *elicoidi* proporzionali) frapposti ai lati seguono la proporzione dei *raggi* delle circolari *Circonferenze*, cioè quella delle *normali-ordinate* del *Quadrilineo* Iperbolico, proporzionali *in genere* non *in ispecie* all'altre *ordinate* consimili d'un'Iperbola *equilatera*, che avesse il semiasse medesimo AB, conforme si sa dalla Teorìa delle *Coniche*. Dunque supposta la superficie dell'*Emicilindroide* divisa in *liste* finite od elementari, ciascuna di queste *liste*, o sua parte, è contesta per lungo e per largo come un *settore* o parte omologa del *Circolo cocleare*; ogni *zona* o parte di *zona* tra quelle *liste* è formata nella medesima guisa d'una *zona* o parte omologa di *zona* del *Circolo cocleare*; ed ognuna di dette *liste* nel tutto e nelle parti venendo ad essere di superficie eguale a quella tal *lista* d'*Emicilindroide*, che comprenda gli stessi archi *simili* circolari, e sia terminata dagli archi dell'Iperbola *generatrice* (perchè o dividendo nelle prime o nelle seconde *liste* la superficie dell'*Emicilindroide* costa del medesimo

numero di parti eguali o respettivamente proporzionali) restan concluse l'*analogìa* e *proporzionalità* in genere, ch'erano prima da dimostrarsi a' termini dell'enunciato. Se poi conservando, come sopra, il medesimo *modulo* o *scala* l'*Emicilindroide* nascesse dalla circonvoluzione di tale Iperbola, il cui semiasse *trasverso* essendo AB avesse per *semi-parametro* principale una retta di tanta lunghezza quanta occorresse perchè divisa in *estrema e media ragione* ossia *proporzione divina* contasse l'istessa AB come sua *parte maggiore*, la superficie del detto *Emicilindroide*, oltre all'*analogìa* più eminente e *proporzionalità* in specie, pareggerebbe dipiù nel tutto e nelle parti quella del *Circolo cocleare*, conforme restava a concludere. Conciossiachè tutte le normali alla Curva *generatrice* distese sino all'asse *secondario* BD, e quinci poste nella direzione delle *ordinate* terminerebbonsi a quella stessa *equilatera* Iperbola AENOPIG, ch'è la *compianatrice* del *Circolo cocleare* (Coroll.° II.° della *Proposizion* precedente), ed ór la sarebbe dell'*Emicilindroide* Iperbolico, siccome ho con facilissima *sintesi* dimostrato in una corta *Appendice* a questo *Scritto* geometrico, onde provare i già citati *Teoremi Ugeniani* del M. DC. LVII e LVIII, prodotti a notizia del pubblico nel M. DC. LXXIII mancanti di prova (136) egualmente che gli altri sulla *Logistica* e sulle *Forze centrali* (137).

COROLLARIO I

D'ogni *lista* o *spicchio* tra due rette, o di lui porzione, concernente l'*Emicilindroide* essendo l'*equivalente* in superficie un altro *spicchio* dell'istesso Solido colle due medesime basi *ab*, *mn*, *cd*, *op*, ciò ha risparmiata l'investigazion delle altezze de' minimi *trapezioli abcd* di quelle *liste*, nei quali bisognava d'altronde risolverla secondo il metodo comunemente adottato anco dalla sublime *Analisi*, che a tal effetto si serve del doppio segno d'*integrazione*. Somministrerebbe poi quelle altezze minime, sebbene inutili all'uopo, la sola Fi-

gura senz'altro ragionamento o apparato, perchè sono appunto gli archetti *mo* ovvero *np*; e per le porzioni finite di queste *liste* gli archi finiti dell'Iperbola *generatrice* rappresentan le *somme* di tutte l'altezze degli elementi, in cui si sciogliessero.

Corollario II

Ricavasi altresì apertamente che il *centro di gravità* d'un *Circolo cocleare*, e sue porzioni, dipende dalla notizia di quello della Superficie d'un Solido di rivoluzione, qual è l'*Emicilindroide* Iperbolico, e delle sue omologhe parti. Parve nell'epoca della prima scoperta ai Matematici transalpini ammirabile che un Solido *spirale* s'agguagliasse a un *rotondo* (138). Or quantopiù Torricelli sarebbe cresciuto di fama se avesse potuto nell'età sua dimostrare che una Superficie girata in *Elice* e pel suo valore e per le proprietà *centrobariche* fosse la stessa cosa d'un'altra girata in *Cerchio*?

Corollario III

Anzi la Superficie d'un *Circolo cocleare* nel tutto e nelle parti, *zona* per *zona*, *settor* per *settore*, ec., riesce eguale eziandio a quella d'una metà di Sferoide o *Ellissoide* oblata o compressa, cioè dell'iscritta dentro un concentrico *Cilindroide* iperbolico, godente dell'istess'*asse trasverso* e dei due medesimi *vertici* principali, e coi *conjugati* talmente diversi che ne derivi la stessa Iperbola *compianatrice*. Fu questo sino dal M.DC.XCVIII il ritrovato perspicacissimo di Parent (139), la cui prova ho renduta ancora più semplice combinandola colla dottrina Ugeniana nella prenunciata *Appendice*; ed è da stimarsi tantopiù commendevole quel ritrovato geometrico quantochè desso contiene come caso particolarissimo ed unico l'eguaglianza di superficie del *Cilindro* circoscritto alla *Sfera* iscritta, quando cioè il *Cilindroide* si converta nel primo,

fattosi l'*asse conjugato* infinito, e l'*Ellissoide* nella seconda venendo a farsi eguali i due *assi*, e la *compianatrice* comune diventando allora una *retta* paralella all'*asse* di rotazione. In conseguenza di che con molto maggior ragione sulla tomba del Francese Geometra si sarebbe dovuto incidere quel *Cilindroide* speciale coll'*Ellissoide* iscrittavi, come dei Siracusani antichi raccontasi che sul monumento d'Archimede incidessero il *Cilindro* e la *Sfera*, e dei moderni Elvetici sul sepolcro eretto a perpetua memoria di Giacomo Bernoulli di Basilèa la *Spiral Logaritmica* coll'epigrafe enfaticamente presa dalla favola della Fenice — *Eadem mutata resurgo* — (140).

SEZIONE III

Delle Armille o Corone elico-coniche.

Mentre la *retta*, che già descrisse un *Circolo cocleare*, mantenuto l'istesso *modulo*, in cambio d'essere paralella alla *base* o normale all'*asse* del Cilindro, vi fosse stata sotto qualunque angolo e sempre egualmente inclinata in tutto il giro *uniforme* spirale, o come i Pratici dicono *a lavatojo*, sorgerebbe allora un *Cono cocleare*, o sua *corona* od *armilla*. Vediamo in qual modo possa misurarsene la Superficie, e se abbia relazione ancor essa con altra d'un Corpo geometrico tra i conosciuti, dietro all'esempio procuratoci dalla passata *Sezione*, in cui sortì rintracciarla nel *Cilindroide*; Solido più dovizioso del *Cono*, poichè, oltre a generarsi sulla superficie del primo per mezzo di piani secanti tutte le specie di *Curve* coniche, e le *Rette* disposte in angolo, vi si generan anco le *Paralelle*.

Proposizione unica.

Determinare la relazione tra la Superficie d'un *Cono cocleare* di qualunque lato ed inclinazione all'asse, non meno

che de' di lei *spicchj* o settori, *zone*, ed altrettali porzioni, e la Superficie intera e parti omologhe del *Cono retto* (sua *projezione* spuria in figura di *nappa* conica), che abbia l'istesso asse e lato sotto l'inclinazione medesima, il qual *Cono* verrebbe descritto se mancando il moto *progressivo* vi fosse stato sol luogo a quello di *rotazione*.

Atteso il solito movimento supposto *equabile* sì *rotatorio* che *progressivo* la composizione d'una *zona* concentrica e d'un *settore* è *similare* in tutte le parti o grandi o piccole di detta *zona*, e respettivamente *simile* alla tessitura di quella d'ogni altro *settore* nelle sue porzioni correlative. Basta adunque considerare uno *spicchio* di *Cono cocleare* contenuto tra lati, che si discostino menomamente uno dall'altro, e paragonarlo al sottoposto corrispondente nel *Cono retto*, ove per conseguenza i lati formino un angolo d'inassegnabile piccolezza. La superficie del primo è *per traverso* tessuta d'elementi o lineole di *Spirali* cilindriche, mentre l'altra è parimente tessuta d'archetti minimi *circolari*, che hanno tutti il centrale comune nel vertice o sommità dello *spicchio* o *settore*. Ma nel tempo che questi archetti son perpendicolari ai lati del *Cono retto*, non lo son già pel contrario le particelle d'*Elici* ai lati del *cocleare*. In ciò unicamente consiste, se pur meriti dirsi tale, la difficoltà dell'assunto. Affine di convertire la *trama* degli ultimi elementi *obliqui* in altra di lineette *normali* ai lati del *settor conico-cocleare*, come fa di mestieri per indagare il valore della superficie cercata, ho espresso il caso nella 5.ª Figura con quella maggior chiarezza, che comportano i *segni* o delineamenti di Prospettiva.

Sia dunque lo *spicchio* o *settore* ABDO di *Cono cocleare*; EF il viaggio *rotatorio*; GO = *go* = ec. = BA il *progressivo* contemporaneo; DO, *do*, ec., ed altre innumerevoli, le lineole *oblique* (rispetto al lato AO), interposte tra AO e BD, o le particelle delle *Spirali* cilindriche, le quali vanno a terminare nell'ultima *obliqua* BA, elemento dell'*asse* comune ai due Coni *retto* e *cocleare*, non men che ai Cilindri concen-

trici, su cui parimente riposano le dette *Spirali*. Manifestissimo essendo che DG, *dg*, ec., ed altri *simili* archetti o paralelle lineole son tutte perpendicolari al pian del romboide AOFH, se si conducano da' loro *piedi* G, *g*, ec., B le normali GC, *gc*, ec., BI al lato *generatore* AO (prolungandolo quant' occorra) e tirinsi le rette minime DC, *dc*, ec., saran queste, in virtù degli *Elementi*, perpendicolarmente disposte ciascuna sul lato AO, conforme aveasi in veduta, avvengachè collocate in piani diversi come nei *Prismali* (Coroll. VI della Prop.ne fond.le) o consimili. Ora egli è chiaro che siccome i triangoli ortogonj GCO, *gco*, ec., BIA hanno eguali le *ipotenuse*, ed eguali altresì gli angoli in O, *o*, ec., A per le paralelle, avranno anco i lati CG, *cg*, ec., IB, ed insieme CO, *co*, ec., AI eguali o *costanti*; e perciò l'area della *zona* o *zonula conica-cocleare*, o suo elemento o porzione, starà alla sottoposta *conica-retta* compresa tra i medesimi ed egualmente lunghi lati *o*O, *d*D, e *m*F, *n*E, o loro interi, porzioni, od elementi eguali (l'istesso dicasi dei *settori* omologhi e loro parti finite od elementari) come la *somma* delle *ipotenuse* DC, *dc*, ec. (che finiscono in BI) de' triangoli parimente rettangoli DGC, *dgc*, ec., aventi il lato eguale CG, *cg*, ec., a quella degli archetti DG, *dg*, ec., o sivvero EF, *mn*, ec. proporzionali ai lati HE, H*n*, ovvero BD, B*d* ec., e così non diversamente degli altri. Ciò torna a dire come la *somma loxodromica* delle *secanti* alla *somma* delle *tangenti* in una *scala di proporzione* segnata a foggia della 1.a o 2.da Figura, dove sopra BD, cominciando da B, stian le parti *proporzionali* ai lati *crescenti* del Cono contati dal *vertice* od *asse* ABK sul *modulo* della costante A*o*, o sivvero B*d*, H*m* porzione del *lato* del Cono, rispetto a cui si verifichi l'archetto di *rotazione gd* eguale a *gc* = BI, ossia l'angolo *cdg* *semiretto* (ved.si il Corol.° IV.°); il che richiama alla ragione dell'area solita d'un *Quadrilineo* d'Iperbola *equilatera* a quella del sottoposto *Triangolo isoscele-asintotale*, e sue omologhe parti.

COROL-

Corollario I

Il rapporto è adunque l'istesso tra la superficie del Cono formato *a chiocciola*, o delle sue parti, e quella della *projezione spuria ortogonale* sul Cono *retto*, o delle sue parti omologhe, come tra il Circolo *cocleare* e porzioni, ed il Circolo *piano* e respettive porzioni. Nè dee ciò far meraviglia; imperocchè ho in altro luogo mostrato (141), parlando nominatamente delle misure del *Cuore Ellittico* contemplato da Varignon (142) e dei *Solidi-Iperbolici-acuti* Torricelliani nati dalla circonvoluzione d'Iperbole *scalene* (143), che le *simili* superficie coniche-rette, tenendo conto delle minori *spessezze* tra siffatti *indivisibili curvi* di Corpi rotondi, possono surrogarsi a quelle dei Circoli basi loro, rispetto alle quali stanno in una *data* ragione, che quella si è del *lato* al *raggio* della lor base.

Corollario II

E bramandosi di sapere la relazione tra la superficie medesima del *Cono cocleare*, o sue parti, e quella della sua *vera* e natural *projezione*, o sue parti omologhe, cioè del *Circolo piano* e parti correspettive, basterebbe tagliare sul *modulo* stesso della Figura 5.ta il lato, per esempio, HK dell'equicrure Triangolo rettangolo indefinito nel punto V di maniera che HK a HV fosse come HF a FK nella or ora citata 5.a Figura, ossia nella ragione del *lato* al *raggio* della base del Cono di *projezione spuria*, ch'è la ragione appunto *sempre costante* [in sequela della scoperta di Parent (144) e Giovanni Bernoulli (145)] della superficie del Cono *retto* e porzioni a quella della base sua circolare e porzioni omologhe di *projezione* ortografica. Sostituito allora al Triangolo BHK indefinito l'altro ortogonio *scaleno* BHV, non meno che le sue parti, verrebbero queste e quello ad essere pel detto Circolo

il *termine* di paragone, o sivvero il *conseguente* dei ridetti Spazj *Iperbolici*.

COROLLARIO III

Quindi avviene che affine di convertire la superficie intera o parziaria d'un *Cono cocleare*, come sarebbero *corone* o *armilie* o *settori* interi o troncati, in quella d'un *Circolo piano* alla medesima eguale, o delle respettive sue parti, bisogna prima tagliar sulla *scala* della 5.ª Fig.ª, per esempio, BQ rappresentante il *lato* del Cono, e poscia ridurre il Quadrilineo Iperbolico ABQΓ in un Rettangolo d'area eguale BQZY. Fatto ciò, la *media continua* geometrica proporzionale QΦ tra 2QZ eguale a QΔ e QU in forza del Coroll.° II.° scioglierebbe il Problema; perchè 2ABQ = 2QZ.BQ sta a 2BQU = QU.BQ come 2QZ a QU, ossia come il Quadrato della *media* a quello di QU, che rappresenta il *raggio* del *Circolo piano*.

COROLLARIO IV

Del rimanente il Corollario I.°, l'ultima parte del II.°, il IV.°, ed il VI.° (mutato il *Prismale* retto in obliquo) della *Proposizione fondamentale* si verifican anche nel caso delle *superficie* di Coni *cocleari*, e segnatamente le stesse *analogie* colle nominatevi Curve *trascendenti*, e la dipendenza medesima dall'Iperbola e Parabola Apolloniane. Non ha però luogo il Corollario III.°, che verte intorno all'Infinito *logaritmico*, se non quando si parla del *Cono cocleare* paragonato al *Cono retto*; poichè in vece dell'ultimo ponendo, come nel Corollario II.°, il *Circolo piano*, non si prende più regola dall'*asintoto* BKG, ma dalla retta BVX, la quale da lui e dall'Iperbola sempre maggiormente discostasi dopo passato il punto della *tangente* paralella a BX, facilissimo a rintracciarsi dietro la teorìa delle *Coniche*. E finalmente in proposito del Corollario VII.°, oltre della disapplicazione anche al

Cono, come al *Circolo cocleare*, dell'ordinaria Regola *centrobarica* per indagarne la dimension della Superficie, vale precisamente l'istessa dottrina conducente alla ricerca de' *Centri di gravità* del *Cono cocleare* intero e sue parti, giacchè quelli della Superficie del *Cono retto* e porzioni seguono la stessa legge e si determinano nella maniera medesima delle *Icnografie* circolari. Gioverà nullameno notare alcune leggieri disparità tra il *Cono* ed il *Circolo cocleare*. Primieramente la *projezione*, che per comodo dirò *verticale* (Coroll.° V.°), era nell'ultimo un *rettangolo*, ma diventa nel primo *romboidale* *GgoO*, eguale d'area all'altro *rettangolo* *GgcC*. In secondo luogo, quantunque ancor qui i lati della *Nappa* conica sovrapposta sien due a due paralelli a quei della sottoposta (come BD a HE, AO a HF, ec. in infinito), tuttavia gli elementi DC, *dc*, ec. non appartengono più a *Spirali* cilindriche, ma piuttosto a Linee di *doppia curvatura* ancor esse, che si succedono a *stacchi* od *ammorsature* in guisa di Prismi circoscritti ed iscritti col metodo *d'esaustion* degli Antichi (146) attorno e dentro l'*Escalier* celebre di Pascal (147). Gli angoli CDO, *cdo*, ec. dei detti elementi con quei dell'*Elici* sul Cilindro procedono colla medesima legge come ODG, *odg*, ec., ovvero CDG, *cdg*, ec.; havvi un punto facilmente determinabile, in cui uno degli ultimi angoli si fa semiretto, cioè rispetto a cui si combina il viaggio *assoluto* di rotazione eguale al *progressivo* perpendicolare alla retta *generatrice* del Cono *elicoide*. Quest'angolo singolare corrisponde mirabilmente a quella parte del *lato generatore* contata dal *vertice*, che sia eguale al *raggio* AB della Fig.ª 1.ª considerato nel Num.° 3.° della I.ma *Sezione*: imperocchè dovendo esser $dg = gc = GC$ nel *Cono cocleare*, e $DG = GO$ nel *Circolo cocleare*, sarà il *raggio* nel primo caso al *raggio* nel secondo, cioè *bg* a *f*G come CG a GO, ovvero KF a FH, ossia *bg* a gB, d'onde nasce appunto $fG = gB = AB$ d'amendue le *Scale* della 1.ª e 2.ª Figura. Qualora poi il *lato* o la retta *generatrice* medesima viapiù s'avvicini al *paralellismo* rispetto all'

asse AK, diminuendosi a proporzione gli angoli BAI, *goc*, GOC, ec., *cdg*, CDG, ec., dessi divengono alfine nulli tostochè il *Cono cocleare* prende l'aspetto d'una *Fascia spirale*, e fa sì che confondendosi allora CD con DG, *cd* con *dg*, ec., e questi diventando tutti eguali infra loro, la misura della di lei *superficie* unicamente dipenda dalla *rettificazione* o *quadratura* del Circolo. Si conferma ciò riflettendo al sottoposto *Cono* HFEK, che si converte allora in *Cilindro*, ed al *lato* BD, il quale sul *modulo* o *scala* dee prendersi di lunghezza *infinita*, ed a motivo dell'*Infinito logaritmico* (Coroll.° III.° della *Prop.ne fond.le*) fa conoscere la *ragione d'egualità* tra l'area della *Fascia spirale* di qualunque larghezza, e la *circolar* sottoposta, entrambe descritte sulla superficie dell'istesso Cilindro.

COROLLARIO V

Ma qual sarà mai il rapporto di *superficie* tra il *Cono cocleare* ed un'altra di lui *Projezione*, che parrebbe appropriarsegli meglio, come della sua stessa *specie*, qual è la *varietà* già chiamata *Circolo cocleare*? Bisogna ripigliare la cosa un poco più da lontano. *Costante* si è la ragione di D*d* a D*k*, perchè uguale all'altra *invariabile* di FH a FK; non così quella di DC a DO, cioè del *lato* all'*ipotenusa* d'un Triangolo ortogonio, che ha CO secondo *lato* sempre *costante* per tutti i punti di AO. Non può dunque esser *costante* la ragion *composta* delle due soprespresse, ch'è quella degli *elementi* (o *corone* intere) delle Superficie del *Cono* e *Circolo cocleari* DO*od*, DO*lk*; laonde viapiù s'avvalora il principio oramai stabilito da tutti i Geometri che le pochissime Superficie curve, le cui *projezioni* nella totalità e nelle parti abbiano sempre alle *projettate*, o viceversa, un rapporto *dato*, e segnatamente quello, diretto, od inverso, del *coseno* dell'angolo d'inclinazione al *seno-tutto*, sieno del genere delle sole *svolgibili* o *distendibili* in piano (*développables*), cioè

tessute di linee-rette che vicinissime incontrinsi, o sian paralelle; il che non si verifica nè del *Cono* nè del *Circolo cocleare* per le premesse. E le *distendibili* sopraddette e ad un tempo dotate della singolarità divisata non sono altro in sostanza se non che le distribuzioni degli *elementi* triangolari d'una Superficie *conica* più o meno allungati, e disposti coi loro *vertici* su d'un' *Elice cilindrica* tra le infinite considerate nella I.ª *Sezione*; di tal maniera che questa proprietà singolare sia originaria del *Cono retto*, e si trasfonda e comunichi unicamente al primo e natural suo *derivato*. Ed a quest' ultimo difatti, come al *Cono*, competerebbe quella stessa prerogativa, che quasi un secolo dopo parve nuova a Tinseau ed all'Estrattista della sua *Memoria* citata (148), di circoscriver cioè sulla di lui superficie degli *spazj* geometricamente *quadrabili* in guisa dei *Tabernacoli Camaldolensi*, o per dire anco meglio *Tende* o *Padiglioni* a finestre, motivati sotto il primo nome speciale dal *Monaco* Grandi (149). Come poi deggia esprimersi quel rapporto dimostrato *variabile*, agevolmente si conseguisce osservando che *mercè* del *Corollario* antecedente essendo precisamente della grandezza medesima le Iperbole equilatere *modulari* delle Fig.ᵉ 2.ª e 5.ª, ed essendo perciò il *semiasse* Ao della seconda eguale ad AB della prima, se BQ rappresenti BD, e BΠ rappresenti D*f*, cioè si divida sempre nella ragione *data* di HF a FK, staranno tra loro i due *elementi* considerati, o piuttosto le *zonule* intere, di cui son parti *simili*, come la retta o *raggio tangenziale* AQ all'altro *raggio* AΠ, e vale a dire come le due *ordinate* all'Iperbola QΓ, ΠΘ, e le parti *finite* o gl'interi nella ragione dei Spazj *quadrilineari* iperbolici BQΓA, BΠΘA, sempre *variabile* l'una e l'altra variando *ascissa*.

Corollario VI

Insegnasi dal Coroll.° III.° la *compianazione* facile della Superficie d'un *Cono cocleare*, qualunque esso sia purchè de-

scritto con movimento *uniforme*, o sivvero la riduzione ad un *Circolo equivalente*, cioè d'area eguale; e l'istesso si dica delle respettive lor parti, come *corone*, *armille*, *settori* interi o troncati. Ma ricorrendo dietro alla traccia medesima del Corollario III.° della *Proposizione derivata* la Geometria non può suggerire anco il modo d'assegnare un *Emicilindroide* iperbolico o un *Emisferoide* ellittico *oblato*, la cui Superficie nel tutto e nelle parti a quella d'un *dato Cono cocleare* s'agguagli. Per ottener quest'intento necessario in primo luogo sarebbe che la Superficie del *Cono cocleare* stasse a quella dell'*Emicilindroide* affacciato dalla 4.ª Figura nella *ragione data* del *lato* del *Cono* al *raggio* della sua *base*, e vale a dire come (*Fig.ª* 5.ª) BQ a QU, BH a HV, ec. Se dunque le *ordinate* BA, ΠΘ, QΓ, HΛ, ec. dell'Iperbola *equilatera* si prolungassero in quella *data* ragione, proverrebbe allora un' altra Iperbola ma *scalena*, che sarebbe la *compianatrice* dell' *Emicilindroide* cercato; cosicchè l'Iperbola *generatrice* di questo dovrebb'avere [in virtù del Teorema noto di Barrow (150)] le sue *normali*, condotte dal di lei *perimetro* sino all'asse *secondario*, eguali a ciascuna delle già protratte *ordinate*.

SEZIONE IV

Della Superficie dei Solidi cocleari.

Tutte le *Superficie curve* delle *Coclee uniformi* risolvonsi in *corone* d'inassegnabilmente piccola altezza di Superficie di *Coni cocleari* parimente *uniformi*, come quelle dei *Corpi rotondi* in *corone* minime di Superficie di *Coni retti*. Si è dunque fatto nella *Sezione* precorsa il passo più grande per giungere adesso alla determinazione *sintetica* del valor della Superficie di qualunque *Coclea* generata dall'*equabile* rivoluzione *spirale* d'ogni Linea *algebrica* o *trascendente*. Spetta ora soltanto alla *Geometrìa delle Curve* rintracciare le *Quadratrici* di siffatte Superficie *elicoidi* com'ella adopera per quelle dei

Corpi rotondi, subitochè il principio, da cui derivarle, è segnatamente l'istesso, delle due *corone* cioè di relazione conosciuta tra loro. Egli è questo il pregio maggiore in proposito della presente ricerca, che non ammetterebbe ridursi ai medesimi termini semplici casochè in generale il movimento si fosse supposto *difforme* ed espresso da una *funzione variabile*; imperocchè non potrebbesi allora a meno di non isciogliere ogni *corona* in *trapezioli* distinti, tali che DO*od* della 5.ª Fig.ª e chiamar poscia in soccorso il *Calcolo sommatorio*. Sennonchè anco nei casi del moto *difforme* sopra una *Spirale cilindrica* variamente inclinata s'è assai guadagnato per la Teorìa universale, che ne dipende, colla notizia *geometrica* del rapporto di quel *trapeziolo* al conico EF*mn*, ed al *circolare icnografico* EF*is*, che son gli *elementi primi* delle respettive *corone*, e *secondi* delle *Superficie curve* e *piane*, alle quali separatamente appartengono.

L'argomento della *Sezione* attuale essendosi dunque *in genere* quasi appieno esaurito nella passata, gioverà solo additarne *in ispecie* l'applicazione ad alcuni *Esempj* particolari. Escludo da questi quella tal *Coclea*, che prenda origine dalla *rotazione* e *progressione* allo stesso tempo d'un *Paralellogrammo* rettangolo od obliquangolo. Imperciocchè nell'un caso e nell'altro le Superficie in un sol *giro* descritte (*interna* ed *esterna*) dai due *lati*, ch'io dirò *verticali*, son quelle d'un *Cilindro vuoto* ossia *Tubo cilindrico* d'eguale altezza (*Coroll.º* IV.º precedente verso la fine), e stanno tra loro come le distanze dall'*asse* comune; laddovecchè le descritte dai rimanenti due *lati* son della classe di quelle misurate nella II.ª e III.ª *Sezione*, essendo per avventura superficie eguali di *Coni* o *Circoli cocleari*. Quando il *Rettangolo* generator della *Coclea* fosse specialmente un *Quadrato*, la superficie *esterna* insiem coll'*interna* delle due *fasce spirali* agguaglierebbonsi alle due *armille circolari icnografiche*; e perciò ciascheduno dei due *Circoli cocleari* (o basi eguali della *Coclea*) starebbe alla *semi-somma* di quelle due Superficie come l'area

del *Quadrilineo* iperbolico (*Fig.ª* 2.ª) OQMP all' altra del *Trapezio* rettilineo VQMT (*Sez.ᵉ II.ª Propos. fond.*) postochè le distanze dall' *asse* si rappresentassero da BQ, e BM sulla *scala di proporzione*. Quesiti simili ed anche più complicati risolverebbersi di leggieri dietro alle dottrine premesse, e quello nominatamente tra gli altri, in cui si cercasse per riguardo a una *Coclea* generata dalla revoluzion d' un *Rettangolo* la *ragione dei lati* rispetto ad una *data* distanza dall' *asse*, onde la *Superficie interna* od *esterna* riescisse eguale a quella della sua *base* o *Circolo cocleare*.

ESEMPIO I.°

Determinare il valore della Superficie d' una *Coclea* prodotta dal rivolgersi di qualunque *Triangolo rettilineo* spiralmente attorno a un Cilindro.

Sia ABC nella Fig.ª 6.ª il *Triangolo* generatore; CDEF il Cilindro d' indefinita lunghezza; G, I, H i tre punti d' incontro dei tre lati del Triangolo stesso, prolungati quanto bisogna, e dell' *asse* del detto Cilindro, su cui si rivolge; ON finalmente la distanza dall' *asse* di quel punto N, che riguardo alla *Coclea* supposta moverebbesi con una velocità *progressiva* eguale all' altra di *rotazione*.

Intendo qui sempre, come negli *Esempj* seguenti, di parlare d' un *giro* solo del *verme*, o sue parti, poichè non sarebbe che replica della misura medesima l' estensione della ricerca oltre a un *giro*, nelle ripetizioni dei quali *giri* i lati *generatori* corrispondenti si mantengono *paralelli*.

Or tutto è disposto nella precedente *Sezione* all' effetto di confrontare la Superficie di questa *Vite* triangolare, sì nell' intero che nelle parti, a quella d' un Solido *rotondo*, e nominatamente d' un *tronco annulare* di Cono *retto*. E quando (ammesse sempre secondo l' uso le *quadrature*) sia trovata la relazione delle Superficie dei Solidi *cocleari* a quelle dei Corpi *rotondi*, il Problema dee dirsi sciolto, perocchè gli

ultimi

ultimi hanno le lor Superficie determinate da regole classiche e formule generali.

Col *modulo* o *semiasse* proporzionale ON descrivasi dunque l'indefinita *equilatera* Iperbola Apolloniana OPQ unitamente al suo *asintoto*. Prendansi quinci sull'*asse* secondario le *ascisse* NR, NS respettivamente eguali a GA, GB, ed alzate le perpendicolari RTP, SVX, la Superficie della *corona* di Cono *elicoide* descritta da AB starà a quella della *corona* di Cono *retto* generata dalla medesima AB come l'area del *Quadrilineo* iperbolico PRSX alla corrispondente del rettilineo *Trapezio* TRSV; e così coll'istesso metodo *grafico* troverebbesi la ragione delle parti *proporzionali*, nè giova perciò replicarlo in appresso.

Parimente tagliate l'*ascisse* NR', NS' eguali ad IC, IB, ed elevatesi le *ordinate* dai loro estremi, il *Quadrilineo* iperbolico P'R'S'X' starà al rettilineo T'R'S'V' nella ragione della Superficie della *corona* di Cono *cocleare* generata da CB alla *corona* conica *retta* nata dalla circolare revoluzione della medesima linea.

Nè diverso è il discorso relativamente alla *corona* inversa prodotta dal moto *spirale* della rimanente retta AC, terzo lato dell'istesso Triangolo. Imperciocchè segnate del pari sull'*asse* conjugato le *ascisse* NR", NS" eguali a H'C, H'A, ed innalzate le respettive normali, la relazione che passa tra la *corona elicoide* prodotta da CA e la conica *retta*, ch'abbia il medesimo lato, è determinata da quella dell'aree dei due *Quadrilinei* P"R"S"X", T"R"S"V" *iperbolico* e *rettilineo*.

Che se piacesse piuttosto referir le misure di tutte tre le ridette *cocleari corone* coniche alle circolari *armille* icnografiche delle larghezze BM, BK, AL, ovvero MK (e vale a dire anco ai di loro eguali Circoli interi) satisfarebbesi a ciò con altre rette che si staccassero dal centro N dell'Iperbola, a senso del *Corollario* II.° della *Proposizione unica* della III.ª *Sezione*, la quale, oltre a contenere il fondamento di tutto, parimente provvede nel *Corollario* IV.° al caso che il

lato CA si posasse sul lato del Cilindro, o AB gli fosse paralello, mentre la *Sezione* II.ª risolve l'altro, in cui il lato CB si disponesse ad angolo retto sopra l'*asse* di *rotazione*.

ESEMPIO II.°

Venga adesso generata la *Coclea* da una *Semi-parabola* d'Apollonio ABC (o semi-segmento contato dal *vertice* principale), e si cerchi la dimensione della di lei *Superficie* senza la *base*.

Avvertasi che se più fossero i *giri*, e la *Semi-parabola* si prolungasse a piacere, i *perimetri*, ch'io direi verticali, della Curva *generatrice* non s'incontrerebber giammai, perchè tra loro *asintotici*.

Suppongo pel comodo della Figura fisso il *modulo* ON, non dando ansa a difficoltà nuova il cambiarlo come più piaccia.

Si sa che la *Superficie* dell'*Anello Parabolico* nata dalla circonvoluzione del *perimetro* APB della *Semi-parabola data* è uguale all'area del Rettangolo, le cui due dimensioni in generale siano il *perimetro* stesso e la circolare *circonferenza*, che abbia per *raggio* la perpendicolare condotta dal *centro di gravità* di detto *perimetro* sull'*asse* del *Cilindro*, intorno al quale s'avvolge la *Vite*.

Ciò presupposto, è sempre agevol cosa conoscere partitamente il rapporto *di superficie* tra un'intera *corona* minima *parabolica cocleare* e la *parabolica tonda*, o la *circolare armilla*, ch'è projezione *ortografica* d'ambedue. Condotta difatti la *tangente* PR della Parabola sino all'incontro coll'*asse*, e riportata sulla *Scala* solita *modulare* da N in T'''', quelle due *corone* staranno tra loro come OT'''' a T''''N, e la prima all'*armilla* ortografica, che ha il centro in S e l'inassegnabil larghezza PV, come OT'''' a PS, dalla cognizione de' quali *elementari* rapporti, per mezzo delle *Quadrature delle Curve* ricavasi tosto la relazione delle lor *somme*. Accaderebbe il medesimo adoperando le *tangenti* rovesce in proposito dell'

altro *semi-segmento* della Parabola, la *superficie* curva del di cui *Anello* sta a quella del primo nella ragione delle due distanze dello stesso *centro di gravità* del diretto ed inverso *perimetro* dal citato *asse* di rotazione. Se l'arco AB della *Parabola generatrice* facesse parte di UB, ed U fosse il principal *vertice* della Curva, sappiamo dai Teoremi *Ugeniani* (151) e da' più generali inediti del Lorenzini (152) che la *Superficie* dell' *Annulo Parabolico* ridurrebbesi allora a quella d'un Circolo, e perciò vi si ridurrebbe egualmente, previe le solite *Quadrature*, la *Superficie* dell'*Annulo cocleare*. Nè può a meno di non comparire meraviglioso che in tutte le possibili posizioni e diversità delle *Linee generatrici* la *Scala Iperbolica* si mantenga sempre *invariabile*, come la *Logistica* conducente alla costruzione *armonica* de' Tubi *fonici* nel *Gamma* musicale usitato (153), in virtù della quale *Scala* si venga a determinar sempre il rapporto delle *flussioni* per passar quindi a quel de' *fluenti*. Uno dei casi più semplici sarebbe per avventura quando l'*Anello* si convertisse in *Conoide parabolico*, di *superficie* eguale ad un Circolo facilmente determinabile (154), e la *Coclea*, in cambio d'essere *aperta*, si tenesse *stretta* sull' *asse*. Allora l' *equazione* diventa $y^2 = 2px$; la *sottangente* $2x = \frac{y^2}{p}$; la relazione tra i due elementi *annulari* delle Superficie, *cocleare* e *rotonda*, eguale a quella tra le semplicissime due *funzioni* $\sqrt{y^4 + r^2p^2}$ e y^2 (posto r il *raggio-modulo*); e la *Superficie* della *Coclea chiusa*, sì nel tutto che nelle parti, ha per *Quadratrice* la *Linea* di quarto grado, facilissima a costruirsi per punti, $y^4 - p^2x^2 + r^2p^2 = 0$, e vale a dire (contata y qualunque sulla Semi-parabola *genitrice*) agguagliasi a ϖ moltiplicato per l'*area* della medesima *Linea* referita all' *asse* delle y, dove ϖ rappresenta il *numero trascendente*, cognito e fisso, della circolare *Circonferenza*, che abbia 1 per *raggio*. Dalla *Quadratrice* o *Compianatrice* oror divisata si conseguisce eziandìo la collocazione del *centro di gravità* o d' *equilibrio* della Superficie *paraboloido-cocleare* descritta, co-

me analoga all'area della medesima, e nel tutto e nelle parti proporzionale.

ESEMPIO III.

Chiedasi finalmente il valore della Superficie d'una *Coclea serrata*, la quale proceda dalla *rotazione* e *progressione* d'un Semicircolo A'B'H, il cui *raggio* C'B' eguaglisi al *modulo*, e dia perciò la *velocità massima rotatoria*, ch'è quella del punto B', eguale alla *progressiva uniforme* lungo dell'*asse*.

Trovata che sia la *Superficie cocleare* generata dal solo Quadrante superiore A'B'C', raddoppiandola s'ottiene l'intera generata dalla Semi-circonferenza, a motivo dell'eguaglianza e similitudine dei due Quadranti.

Tanto nell'ipotesi scelta della *Vite chiusa*, quanto nell'altra della *Vite aperta* che si scegliesse, anco prodotta dalla circonvoluzione *spirale* d'un *Circolo* intero, si verifica il caso della *tangente* infinita nel punto di congiunzione dei due Quadranti B', B'', B'''; ma tuttavia la dottrina proposta (come l'Infinito *logaritmico* venne a proposito nelle *Sezioni* anteriori) non abbandona il Geometra, che faccia uso della medesima solita *Scala*, il punto T'''' andando allora a distanza infinita dal centro N, e le due rette OT'''', T''''N facendosi eguali per dimostrare che la *fascia* minima *a chiocciola* s'uguaglia alla *sferica* od *annulare*, che in tutti quei punti si confonde colla *cilindrica*.

Avendo nominata per incidenza la *Coclea aperta* si torna a dire che le due distanze de' *centri di gravità* delle Semi-periferie circolari dall'*asse* del Cilindro stabiliscono la ragione, che passa tra la *Superficie annulare* esterna ed interna, ma che questa *regola* diventa fallace nella comparazion delle *cocleari*, come quella che già s'è dimostrata non sussistente parlando dei loro *elementi* (Coroll.° VIII.° Sez.e II.a e Coroll.° IV.° Sez.e III.a), che sono le minime *superficie* de' tronchi *conici cocleari*.

Condotta adesso da qualunquesiasi punto X del Quadrante *generatore* la tangente XZ, ed insiememente la normale XY sopra l'*asse*, ed il raggio C'X, e sapendosi esser C'Z a ZX come C'X a XY, cioè come C'X per l'archetto *minimo* a XY pel medesimo archetto, cioè come ϖ per C'B' per l'archetto a ϖ per XY per l'archetto, o alla *corona minima* della *Superficie emisferica*, l'elemento della *cocleare* corrispondente resulta eguale a ϖ pel raggio C'B' per l'archetto, e così la *cocleare emisferica* eguale a ϖ pel rettangolo del Quadrante A'XB' nel raggio C'B', laddove la *rotonda emisferica* eguagliasi a ϖ pel quadrato del raggio C'B' suddescritto.

Mentr'adunque la *Superficie* del Cilindro *cocleare* circoscritto conservasi eguale a quella del Cilindro circoscritto alla Sfera (Sez.ª III.ª Coroll.° IV.° in calce), all'incontro la *Superficie* della *Vite* generata dal *Semicircolo* sta a quella della Sfera dal medesimo nata come un Quadrante di Periferìa circolare al suo Raggio, o come la Semi-circonferenza al Diametro, che è quanto dire dipende a pari della seconda la prima dalla sola *rettificazione* o *quadratura* del Cerchio; imperocchè bisogna moltiplicare per $\frac{\varpi}{4}$, coefficiente costante, la *Superficie sferica* affine di conseguire la misura o compianazion della *cocleare*; e l'istesso ha luogo dall'*emisferica* passar volendo a conoscere la dimensione dell'ultima configurata in guisa di *Volta spirale rampante* sul cattivo gusto Borrominesco della *lanterna* della Cupola della *Sapienza* di Roma (155). E se in virtù del Teorema bellissimo d'Archimede la *Superficie* di tutta la *Sfera* sta a quella d'una sua *zona* o *callotta* qualunque, e queste *zone* o *callotte* stanno tra loro a vicenda, come l'*asse* intero all'altezza corrispondente, o come le respettive altezze; e se per dividere in parti eguali o in qualunque *data* ragione la *Superficie* sferica, o una delle parti sunnominate, basta dividere in questa ragione o in parti eguali tutto l'*asse* od altezza; non comparirà meno bello che la *Superficie* sferica *cocleare chiusa* (di *passo* disteso quant'impor-

ta la circonferenza del Cerchio massimo), o sua porzione generata dal rivolgersi di un arco qualunque, dividasi in parti eguali o in una *data* ragione dividendone così l'arco che le porzioni stiano tra loro come gli archi di Cerchio massimo *generatori* delle medesime; e che finalmente una *callotta cocleare* stia in superficie ad una *sferica* corrispondente come l'*arco* alla sua *freccia* (*sagitta*) ossia *seno-verso*, ed il *centro di gravità* della prima si determini (vedasi per analogìa l'*Articolo* III.° della *Sezione* seguente) nel modo stesso notissimo di quello dell'*arco* circolare *generatore*.

O fu perciò mal espresso da Frisi nella sua *Lettera* del M.DCC.LXXXIV (156) quello ch'ei scrisse al Fabroni dopo d'aver due anni prima pubblicate le *Formule analitiche* di second'*ordine* sopra le *Coclee* (157) — „ tra le varie applica- „ zioni della formula generale mi ricordo di avere inteso (da „ Perelli) che quando la figura piana è un semicircolo, e la „ maggiore velocità della rotazione si uguaglia alla velocità „ uniforme secondo l'asse, la *superficie* del Solido cocleare „ dev'essere *otto volte* maggiore della *superficie* della Sfera „ —, o la sua memoria durante il lasso di circa ventisett'anni erasi molto debilitata in vecchiezza. Di siffatte difettose espressioni n'incontro per avventura altri esempj nella medesima *Lettera* (158), la quale men che all'elogio dell'elogiato mira a quello dell'elogista (159), e massimamente dov'egli annunzia tra i ritrovati del Perelli „ la soluzione sintetica ch'esso „ ha dato [nel *Giornale de' Letterati di Firenze*] (160) di „ quel problema (delle *tazioni di Pappo*), in cui si cerca „ il raggio d'un Circolo, che passi per tre punti dati „. Potrebbe fors'essere che Perelli pronunciasse così a mezza voce quell'*otto volte la Superficie sferica* per il caso d'una vera *Vite* polistrofa o *Coclea stretta*; poichè cinque *giri* e un decimo incirca, o pochissimo meno, della suddescritta *Coclea chiusa* averebbero tutti insieme la coacervata lor *Superficie* eguale a $5\frac{1}{10}\cdot\frac{\pi}{4}$ di *Superficie sferica* $=\frac{51}{10}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{51}{10}\cdot\frac{6,2831853\text{ ec.}}{4}$

$= \frac{51}{10} \cdot \frac{3,1415926 \text{ ec.}}{2} = \frac{51}{10} \cdot 1,5707963 \text{ ec.} = 8,01 \text{ ec.} = 8$ prossimamente. Si dedurrebbe l'istesso usando ancora dei numeri men esatti d'Archimede [a paragone di quei di Nicole derivati da un poligono regolare di 393216 lati] (161), Metio (3,1415929 ec.), o sivvero 3,1416 proveniente dai due termini di rapporto 3927 : 1250, cioè da un poligono regolare di lati 768, come sino da remotissime età aveano scritto nel Libro sacro *Ayeen Akbery* i Bramini dell'Indie Orientali (162).

SEZIONE V ED ULTIMA.

Osservazioni sulla solidita' delle Coclee.

Poche aggiunte e compendiosissime è mio divisamento finale riunire in diversi *Articoli* per illustrazione della dottrina data a questo solo proposito magistralmente da Torricelli. Alcune di lui Proposizioni inedite, e lasciate nei suoi MSS.i mancanti di prova meritano, specialmente avuto riguardo alla lor singolarità, d'essere qui raccolte e provate. Diverse maniere nuove, e tutte concordi nei resultati, onde giungere alla misura di tali Solidi *cocleari*, servono a confermarne ed avvalorarne ad un tempo la conosciuta teorìa. Come deggia considerarsi rispetto ai Solidi stessi la familiar *Regola centrobarica*, può anch'essere oggetto di particolar discussione. Trattandosi del volume o *solidità* delle *Coclee* non ha luogo distinzione nessuna tra il moto *progressivo* ossia *passo di vite* uniforme o difforme, equabile o comunque variabile: in ogni supposizione che facciasi (anco d'una linea di *semplice curvatura*, qual sarebbe un'*Ellissi*), a differenza delle *superficie*, si sa oramai che il volume del Corpo *cocleare* non cambia, ma resta sempre dell'istesso valore. Oltrediciò nella soggetta materia, sin ad ora pochissimo diffusa tra i dotti, e promossa, limitandosi ad un sol *giro* di *Coclea*, s'affacciano tali vaghezze ed eleganze geometriche, che crescono onore alla

chiarezza e fecondità della *Sintesi*, in cui segnalaronsi con tanto lustro i Viviani, i Grandi, i Lorenzini, i Boscovich, i Torelli, e non ha guari altri pregevolissimi Matematici dell' Italia.

ARTICOLO I.° Senza bisogno di sciogliere in fasce *indivisibili* ossian *specie curve* il Volume d'un Solido conformato a *verme* di *Vite*, onde mostrarlo eguale nel tutto e nelle parti a quello del Solido *tondo*, o pieno o annulare, procedente dalla rivoluzione della stessa Figura *genitrice* intorno all'*asse* medesimo, come adoperò già il Torricelli [sommamente laudato in ciò dal suo emulo Roberval (163)], e lo copiarono i Sintetisti che vennero dopo di lui (164), se ne può parimente concludere l'eguaglianza paragonando due Settori corrispondenti, o loro tronchi, finiti od infinitesimi, e pel principio di *coincidenza* od *identità* seguendo il metodo classico in Geometria, osservato riguardo ai Paralellepipedi *retto* ed *obliquo* nelle Proposizioni XXIX e XXX del Libro XI.° degli *Elementi d'Euclide*. Difatto richiamando a memoria quei *Prismali*, o *mezzi-Prismi* in solidità, di cui s'occupa, specialmente in sul fine, il *Corollario* VI.° della I.ª *Sezione*, si rende manifestissimo dalla Fig.ª 7.ª che mentre due *ordinate* infinitamente prossime dell'area *genitrice* ABC, e perpendicolari all'*asse* di rotazione, come IO, *io*, tra loro eguali nel *limite* estremo, si muovano di moto *rotatorio* pei circolari archi eguali OS, *os*, e descrivan così un Settore intero o troncato di Corpo *rotondo* OIS*ois*, aggiuntosi quindi il moto *progressivo* paralello all'*asse* ed eguale SM, *sm*, ovvero IN, *in*, onde i due moti compongano il *resultante* eguale OM, *om*, e diano nascita all' intero o troncato Settor della *Coclea*, vengono a formarsi due specie di *Prismali* triangolari, e lor tronchi (*Fig.ª* 3.ª), *simili*, *similmente* disposti, ed in tutto *identici* OSINM, *osinm* posanti sui Settori eguali OIS, *ois*, aventi lo spigolo eguale (*arrêt*) IN, *in*, limitati dagli eguali rettangoli MSIN, *msin*, dai triangoli cilindrici eguali OMS, *oms*, e superiormente dai settori di Circoli *cocleari* ONM, *onm* ancor essi *identici*, di

tal

tal maniera che defalcando ciò, che han di comune, i resti per conseguente s'agguagliano, e sono i Settori corrispondenti (solidi) *cocleare* e *rotondo*. Procede siffatta eguaglianza dal principio d'egualità *assoluta* in virtù di vera *soprapposizione*, nè incontra per avventura la difficoltà rilevata in correzione d'Euclide da Roberto Simson dei Poliedri *simetrici*, così nominati da Legendre (165), ai quali Ampère non ha guari di tempo, e prima di tutti, potè conciliare la pienezza ed integrità d'una perfetta e rigorosa dimostrazione (166). Ed è qui da notarsi che l'eguaglianza istessa sussiste qualunque siasi la *legge* uniforme o difforme, continua o discontinua, del movimento *progressivo*, e di qualunque natura perciò sian le Linee direttrici del moto *composto* descritte sulla *cilindrica* Superficie; lo che più di tutto sorprese verso la metà del Secolo XVII.° i Matematici oltramontani allora viventi (167).

Articolo II.° Giungesi in altra maniera alla medesima conclusione considerando gli *strati* o elementi *spirali* del Solido *cocleare* posti, dirò, *per piano* piuttostochè *per ritto* come piacquero a Torricelli. A quest'effetto immaginiamo le due *ordinate*, come sopra, dell'area *generatrice* EF, *ef*, segnate in prospettiva ma perpendicolari difatto all'*asse* di rotazione, e paragoniamo il tubo *cilindrico* dell'altezza infinitesima E*e*, che abbia per base la circolare *armilla* della larghezza G*g* parimente infinitesima al tubo *cocleare* sovrapposto, ed avente per base l'*armilla* di *Circolo cocleare* della larghezza medesima. Si fa chiaro dalla Fig.ª 2.ª che l'ultima superficie *armillare* sta alla prima (e l'istesso vale qui ed in appresso delle lor parti *omologhe*, comunque difforme ed irregolare sia il movimento *progressivo*) (Art.° 1.°) come il *seno-tutto* al *seno-retto* dell'angolo d'inclinazion della *spira* (o sua parte finita od infinitesima) rispetto al lato del Cilindro, la cui base sia il Circolo del raggio ET. Dall'altra banda le due basi *armillari* del tubo *cocleare* sono più strette o vicine tra loro di quello che sian le due *armille* del tubo *cilindrico*, distanti appunto quant'importa E*e*, e la minor di-

stanza delle prime [*in linea transituum* giusta la frase del Torricelli (168)] sta alla maggiore delle seconde nella ragione del *seno-retto* del detto angolo d'inclinazione al *seno-tutto*, cioè in ragione *inversa* o *reciproca* della prima. Quindi è che s'agguagliano i *volumi* dei due tubetti paragonati, e perciò ancora le *somme*, o sivvero i due Solidi *cocleare* e *rotondo* descritti col rivolgersi *spiralmente* o *circolarmente* dell'istessa piana Figura.

ARTICOLO III.° Se dunque riescono sempre uguali i *volumi* del Solido *cocleare* e *rotondo* (o delle lor parti omologhe) ogni volta che abbiano una medesima *generatrice*, la determinazione del *centro di gravità* della *Vite* si conseguirà tosto per mezzo delle notissime regole generali e particolari, che conducono a stabilirlo nei Corpi *rotondi*. Mentre sia stretta al proprio *asse* la *Vite*, il suo *centro di gravità*, concernente un intero *giro*, trovasi come quello del Solido pieno, prodotto dalla rivoluzione della Figura *generatrice*. Quando poi la *Vite* monostrofa fosse (ed il caso n'è più frequente) *aperta* o addossata a un Cilindro, in tal supposto dipende la ricerca del suo *centro di gravità* dalla nozione di quello del Solido *vuoto* o *annulare* sopraddescritto, o del *Frusto Capitellare rotondo* e parimente *pieno* (169), al cui volume s'uguaglia nella totalità e nelle parti. Avendo luogo o l'una o l'altra supposizione, dee trasportarsi, come con qualche oscurità l'avvisò Torricelli (170), il punto supremo o *vertice* A dell'altezza AC della *genitrice* al punto di mezzo del vero *passo* di *Vite*, cosicchè il primo combini con esso, e dividersi poscia l'altezza medesima collocata sull'*asse* com'ella resta divisa dal noto *centro di gravità* del Solido *tondo*. Modificato quanto conviene alla specialità del soggetto torna qui in campo il Teorema celebratissimo *centrobarico*. Imperciocchè il *centro di gravità* della *genitrice* nella prima rivoluzione *spirale* fa (è vero) un viaggio *assoluto* eguale alla Curva *elicoide* da lui descritta, ma viaggio *obliquo* rispetto al piano della *generatrice* medesima. Ridotta dunque, come fa di mestieri

ben concependo ed interpretando a senso di Kepler e Varignon (171) lo spirito della dottrina di Pappo, alla perpendicolarità di viaggio quella Curva *elicoide*, si cambia allora il viaggio *utile* o *relativo* nella Periferìa circolare descritta dal *centro di gravità* generandosi il Solido *tondo*, ed è altresì per siffatto motivo che il *cocleare* ad esso s'agguagli. Così risolvonsi nelle direzioni *relative*, utili e convenevoli all'uopo, tutte le *potenze* di varia tendenza o direzione nella Dinamica; nè diversamente s'ottiene l'*Equazione* cattolica *delle forze* dietro al principio delle *velocità virtuali*, che, come l'altro della *minima Azione* introdotto da Maupertuis (172) e ristretto nei suoi veri termini da Lagrange (173), più che principio è un teorema *peripatetico* (174), o a sentimento di Lacroix (175) dee risguardarsi sempre dai Matematici *comme un résultat analytique des lois générales de la Mécanique*.

Articolo IV.° Prendono adesso il carattere di tutte verità elementari e lucidissime di lor natura quelle, che vado brevemente a soggiungere.

1.° La *Vite chiusa* triangolare, generata cioè da un Triangolo rettangolo HTU, ha lo stesso volume del *Cono retto* generato dal ridetto Triangolo. Ma quando sia *aperta* diventa eguale al volume d'un *Conoide Iperbolico* della medesima altezza, e della *specie* agevolmente determinabile e già determinata da Torricelli (176). Nè dee ciò recar meraviglia essendo le Linee rette sulla superficie d'un Cono i *limiti* de' perimetri delle Iperbole, ed anzi prendendo origine e norma da quelle gli *asintoti*, e d'altronde sapendosi che assorbite nell'*infinito* tutte le Curve *coniche* s'assomigliano nelle loro prerogative, e la Parabola, per esempio (*Fig.*ª 8.ᵛᵃ), il cui *foco* sia O, imita la proprietà dell'Ellissi colla *somma costante* dei *raggi polari* e delle paralelle all'*asse* limitate da qualunque *ordinata* (177), che nell'Ellissi sarebbe col centro nell'altro *foco* un arco di Cerchio. Non seppe capire il De Angelis [ed anzi parve dubitativo sull'incidente che vado a narrare] (178) ciò che Torricelli soggiunse alla collocazione del

centro di gravità nella *Vite triangolare aperta* pari al sito di quello competente al precitato *Conoide Iperbolico*, e, se *stretta*, ad un *Cono limite* dei *Conoidi* [come dopo accennò di passaggio e più semplicemente di Luca Valerio (179) lo Slusio (180)], e vale a dire che il suddetto *centro di gravità* combinasse con altro *centro* consimile d'un *Berrettino Sferico* ossia *Segmento di Sfera*. Riporto le parole precise dell'uno e dell'altro Testo, per non cadere in equivoco com'è avvenuto di chi dietro al medesimo nome suppose che il *Prismale* preaccennato del Grandi fosse l'istesso del considerato da Torricelli (181), che poi non er'altro se non se un *Prisma* troncato mediante un piano non paralello alla base: — *Centrum enim gravitatis in axe est, dividitque portiunculam quandam ipsius axis* (cioè EB) (Fig.ª del Lemma V.°) *veluti Conoidis cujusdam hyperbolici centrum secat proprium diametrum; sive prædictæ portiunculæ semissem ita dividit, uti eandem secaret centrum gravitatis cujusdam Segmenti sphærici duplam habentis altitudinem basimque dato cuidam Circulo æqualem* — (182). Il Gesuata repetente nel 1.° c.° confessa — *Nescimus de quo Sphæræ segmento verificetur* — : e qui torna bene e in acconcio, avendone Torricelli co'*puntini* interposti al discorso finale fatta reticenza o segreto, nè incontrandosi più parola su questo particolare nei superstiti suoi MSS[i]. Ma non potea mai in buona Geometria sostenersi la giunta — *forsitan de aliquo, quod erit proportionaliter analogum cum Conoide hyperbolico* — ; imperocchè non vi sono *Corpi rotondi* „ proporzionalmente analoghi a un *Conoide iperbolico* „ se non che altri *Conoidi* generati da *Iperbole simili*, o, in altezza eguale, da Iperbole dotate dello stess'*asse trasverso*, come segue delli *Sferoidi* in riguardo alle *Sfere*. Ecco dunque a seconda della laconica descrizione di Torricelli indovinato il suo metodo. Sia nella 9.ª Figura ADEB il semi-segmento Iperbolico *generator* del *Conoide*; dividasi l'altezza EB nel punto C per metà, e si conduca la *semi-ordinata* CD; quindi sul prolungamento di lei prendasi il punto S tale che CS sia terza

continua geometrica proporzionale dopo CD ed AB; finalmente nel prolungamento di EB presa BI eguale a BC, pei tre punti I, A, S si faccia passare un Arco di *Circolo*: il Semisegmento *circolare* SAIC genererà rivolgendosi intorno ad IC il *Segmento Sferico* suddivisato. Di fatto il *centro di gravità* O del *Conoide* [in virtù della *Regola* generale concernente tutti i *Frusti* e *Segmenti* di Solidi *tondi* nati da Curve *coniche* (183)] divide talmente l'*asse* EB che $EO : OB :: AB^2 + 2DC^2 : 2DC^2$, ed il *centro di gravità* O' del *Berrettino sferico* divide l'*asse* IC di maniera che $IO' : O'C :: SC^2 + 2AB^2 : 2AB^2$; ragione patentemente *identica* alla prima subitochè in vece di AB^2 vi si sostituisca SC . DC, che l'agguaglia per costruzione. In conseguenza $OB = O'C$, e vale a dire la *mezza-altezza* CB resta divisa da O *come* da O'. Ed è notabile oltrediciò che quando il *Conoide* trasformisi in *Cono* AVEB, onde CD divenga $CV = \frac{AB}{2}$, e $CT = 2AB$, i tre punti I, A, T si dispongono allora nella medesima linea retta IAT, che determina $CT = 4CV$, e perciò il *Segmento sferico* corrispondente si converte in un altro *Cono*, ma inverso, CTAI egualmente alto; dimodochè i due *centri di gravità* O, O', i quali sempre procedono *di conserva* infra loro, e son sempre nelle varie posizioni l'un l'altro equidistanti dai due estremi della mezza-altezza C, B, confondansi in un sol punto Q, che divide CB per metà, nell'ultimo *limite* delle innumerevoli *coppie* così combinate, e taglia tanto EB quanto IC come 3 : 1, ossia come d'altronde sappiamo che tagliar devesi l'*asse* d'un *Cono* dal suo *centro di gravità* o *delle medie distanze*.

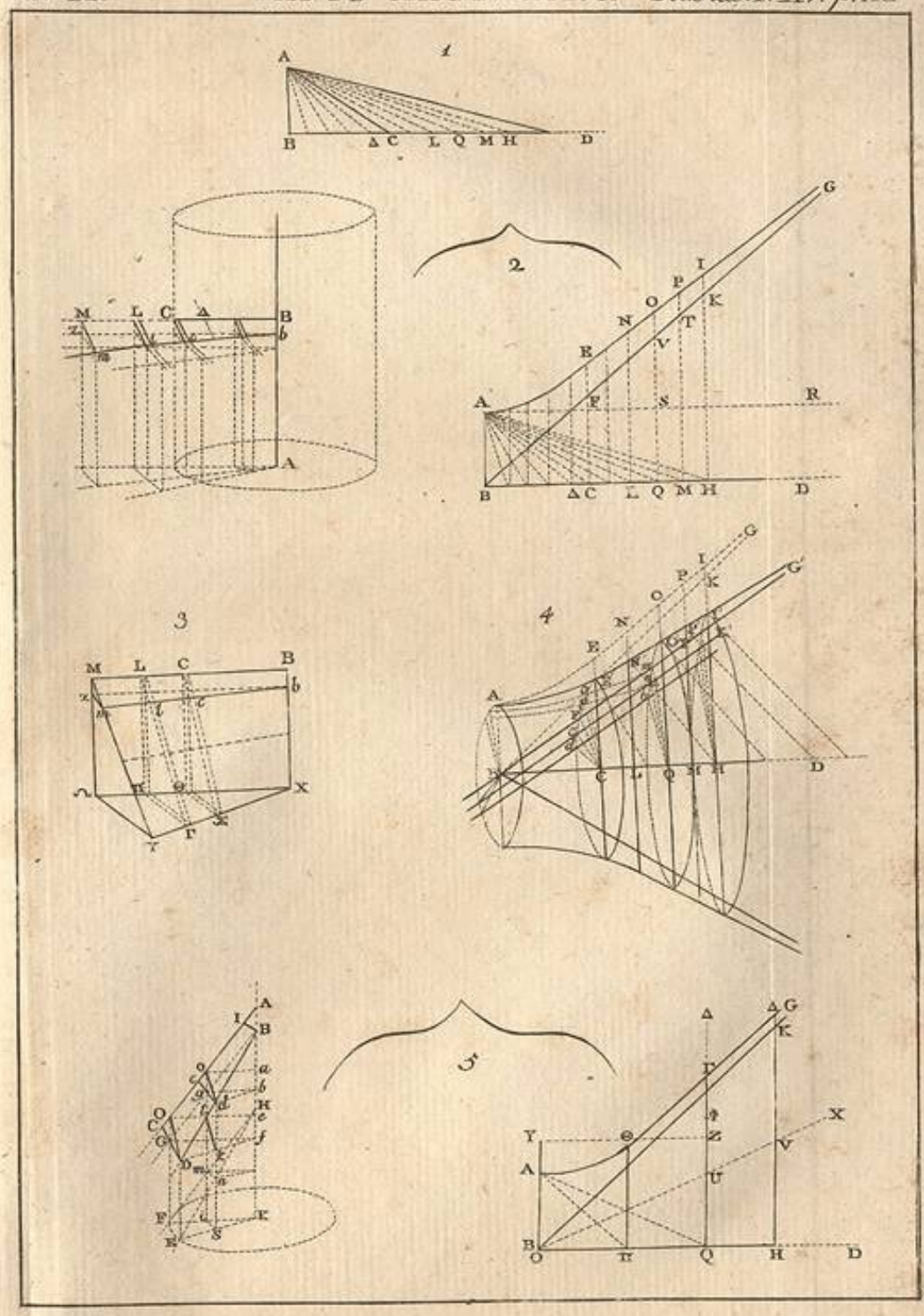
2.° Doppio del Triangolo il Rettangolo genera la *Vite stretta* rettangolare tripla dell'altra, perchè di volume pari al Cilindro, che verrebbe prodotto dalla rotazione dell'istesso Rettangolo; e la sua *Vite larga* od *aperta* ha parimente il volume medesimo d'un altro Cilindro retto d'eguale altezza, ma la cui base sia un Circolo di *raggio* pari a TK (*Fig.ª* 7.ª), che portando l'apertura del *compasso* LH da L in K sul lato TV si determina *graficamente*.

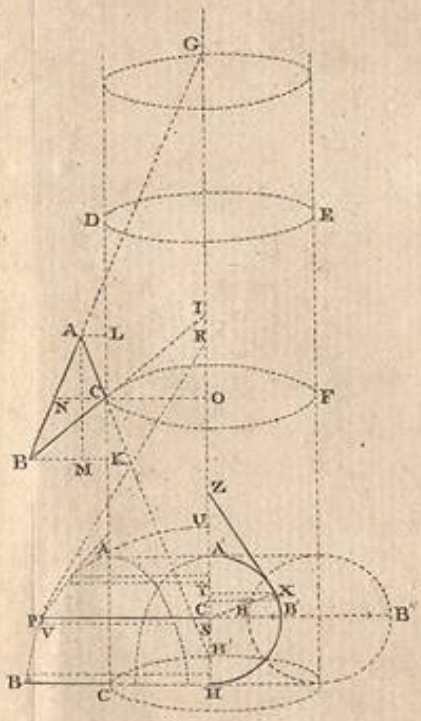
3.° Dei due Triangoli tagliati dalla *diagonale* HU del Rettangolo il secondo a sinistra genererebbe una *Vite stretta* egual di volume al *Bicchiere cilindrico*, che rimarrebbe vuotandolo del *Cono* iscritto: la *Vite aperta* agguaglierebbesi all'eccesso dell'ultimo *Cilindro* mentovato nel Num.° 2.° precedente sopra il *Conoide* del Num. 1.°; eccesso che si conosce in sequela dei ritrovamenti d'Archimede generalizzati da Cavalieri, Torricelli, Slusio, ec. (184), valendo l'istesso se si tagliasse il Rettangolo coll'altra delle sue *diagonali*, che collocherebbe la *Vite* medesima in ordine inverso.

4.° Oltre alla *Coclea chiusa* di volume eguale a una *Sfera* quando venisse descritta da un Semicircolo, lo sarebbe parimente l'*aperta* tutte le volte che il circolar Segmento *generatore* ZXQ avesse il proprio *centro* situato nell'*asse* del Cilindro, intorno a cui s'avvolgon le *spire*, e quella *Sfera* averebbe ZY per suo *raggio*. Ed i volumi delle due *Viti aperte* procedenti dai due Semicircoli eguali, esterno ed interno, il cui comune diametro posi sul lato TV, stanno tra loro nella ragione del *raggio* LT della base del Cilindro più due terzi di quello del Semicircolo *genitore* a LT men due terzi dell'ultimo *raggio*, siccome costa dal *Canone* Guldiniano. Dall'istessa *Regola* s'attinge la prova dell'altro Teorema Torricelliano, cioè „ mentre un Circolo fosse il *generator* della *Vite*, „ questa *Coclea* sarebbe eguale ad un *Solido*, che avesse al„ la *Sfera*, di cui sarebbe gran Circolo il *genitore*, l'istesso „ rapporto della periferìa circolare del *raggio* LT a $\frac{2}{3}$ del *dia*„ *metro* del Circolo suddivisato (185) „. Aggiungo che la *Vite aperta* prodotta dalla rotazione d'un Semicircolo sarebbe eguale al volume del Corpo *rotondo*, il quale nascesse dal rivolgersi di quella *Spirica*, che provenisse dalla sezion dell'*Anello* generato dalla circonvoluzione del Semicircolo stesso attorno ad EL, tagliando l'*Anello* per mezzo d'un piano, che passasse pel diametro del Semicircolo, e fosse a questo normale. E dalle sezioni degli altri *Anelli* in una direzione qualunque deriverebbero l'altre *Spiriche* più o meno intrecciate, annodate,

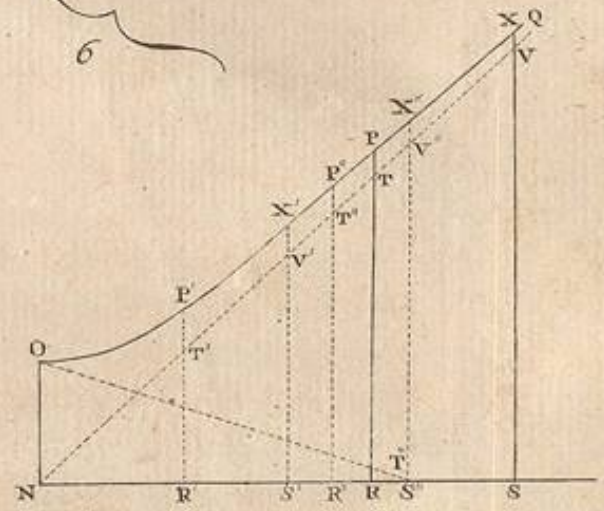
clipeiformi, ec., ma rientranti sempre in sè stesse, e *trascendenti* allor quando, come in tutte le *Coclee*, il piano segante o tagliasse difatto o incontrar potesse le infinite di numero rivoluzioni o *giri* d'una *Vite*, che di sua indole non ha fine (186).

5.° Dato che il Semisegmento P *generator* della *Coclea* appartenesse ad una Parabola d'Apollonio referita all'*asse* suo o diametro principale, e che avesse il proprio *vertice* tanto distante quanto lo è per appunto dalla medesima parte l'*asse* EL del Cilindro, il volume della *Vite* farebbesi eguale a quel d'un *Paraboloide* dell'istessa altezza di P, e dello stesso *parametro* (187). Rendesi più generale il Teorema osservando che poste le medesime condizioni, qualora il Semisegmento fosse d'Ellissi od Iperbola, la Spira o *Vite* di prima revoluzione sarebbe, per la teoria delle *Coniche* eguale sempre al volume d'uno *Sferoide* o *Conoide*. Nel caso poi che P, R fossero i due Semi-segmenti d'una stessa Parabola situati a destra e sinistra del comune *primario* lor *vertice*, la *Vite* nata dalla circonvoluzione di P a quella prodotta da R starebbe, per riguardo ai volumi, in una ragione assegnabile anco indipendentemente dalla ricerca del *centro di gravità* dell'uno o dell'altro Semi-segmento. Torricelli la dà senza prova, e la deduce da un principio più universale, parimente non dimostrato da lui, ma suscettibile d'elegantissima e non difficile dimostrazione (188). Qualunquesiasi Figura piana (egli scrisse) divisa da un *asse* AD in due parti simili e uguali (*Fig.*ª 10.ª) P, R, che colla rotazione intorno a BF descriva un *Anello*, darà sempre il volume di quella parte generata dalla mezza-figura P al volume dell'altra generata dalla restante mezza-figura R come due Rettangoli per l'*asse* DACE più tutta l'area della Figura *generatrice* ai due stessi Rettangoli meno la *genitrice* medesima; e l'istessa proporzione varrà in conseguenza rispetto alle due parti di *Coclea*. Difatti il Solido P si risolve in tubetti cilindrici aventi per basi *armille* circolari rappresentate dai rettangoli di OI in IS, mentre quelle

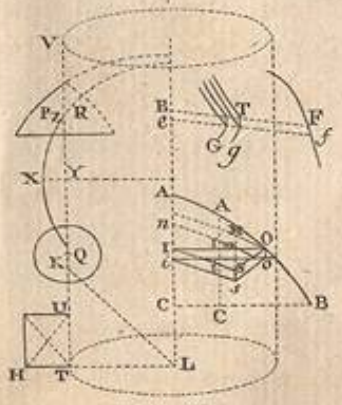

1
2
3
4
5



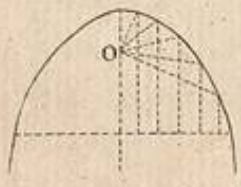
6



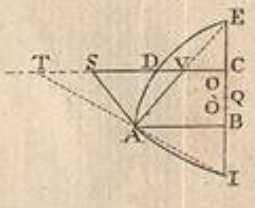
7



8



9



10

del Solido R si rappresentano da' rettangoli di IQ in QN ovvero OI in QN, e stanno i primi ai secondi come IS a QN, o come IN + NS a IN — NS, o sivvero come 2IN + 2NS a 2IN — 2NS, ch'è la ragione appunto indicata. Applicandola adesso al singolar caso della Parabola, in cui l'area della Figura s'uguaglia al rettangolo di due terzi della retta LM nella medesima altezza AD, o BF, la *general* ragione suddetta diventa *particolare*, e si cambia in quella di 2ED + $\frac{2}{3}$ LM a 2ED — $\frac{2}{3}$ LM, cioè di 4FD + $\frac{2}{3}$ LM a 4FD — $\frac{2}{3}$ LM, ossia 4FD + $\frac{4}{3}$ DL a 4FD — $\frac{4}{3}$ DL, cioè 2FD + FD + DL a 2FD + FD — DL, ovvero 2FD + FL a 2FD + FM, nella qual semplicissima proporzione saranno perciò i due Solidi *annulari* e *cocleari*, respettivamente *esteriore* e *interiore* (189). Annuncia oltrediciò Torricelli (190) che se P s'invertesse in maniera che LD stando ferma prendesse D il posto di L, e viceversa, ed il Semi-segmento si ripetesse capovoltato col vertice in Y, e DL si tagliasse egualmente in X, V nella posizione R', il volume dell'*Anello* parabolico o *Vite* P a quel dell'*Anello* o *Vite* R' starebbe nella ragione di FX a FV; poichè coll'istesso discorso delle *armille* si proverebbe che il primo al secondo *Anello* (e così delle *Coclee*) sta come 2FD + $\frac{2}{3}$ DL a 2FD + $\frac{4}{3}$ DL, cioè, prendendone le metà respettive, nella ragione predetta; laonde, per avere i due *Solidi* eguali, converrebbe disporre l'inferiore Semiparabola facendo scorrere in avanti il punto L sino a V, e situandola quale apparisce dalla Figura.

SCOLIO GENERALE.

Ciò che non fece e dovea fare il Viviani circa un secolo e mezzo indietro a perpetuo decoro della gran mente del Torricelli (191), non sarà discaro che siasi oggi intrapreso in Toscana per aggiunta e corredo (*pendant*) delle Opere edite da questo valente Geometra ed a molti titoli irrefragabili veramente immortale. Non è già retrocedere, ma progredire

in

in applicando la pura Geometria elementare a Problemi, ch' essa non avea tentato risolvere, e massimamente sulla misura di *Superficie*, la cui *equazion* generale non può mai essere *algebrica*. Di quanta sublimità, sottigliezza, e nitore ad un tempo sia capace la *Sintesi figurata* o *lineare* che debba dirsi (*et quod palmarium est*, come s'espressero gli Eruditi di Lipsia (192), *ad Veterum methodum*), oltre alle più delle superbe dimostrazioni, che sono sparse nei *Principj* di Newton, havvene una luminosa conferma nelle *ricerche* ammirabili di Maclaurin (193), commendate a ragione da Lagrange (194) e Lacroix (195), sull'attrazione delle Sferoidi. Platone e Teon d'Alessandria, volgarizzati dal nostro Marsilio Ficino (196), nel contrapporre alla *Sintesi* l'*Analisi lineare*, sì ben circoscritta da Pappo (197), non ebbero altra mira che quella d'aprire coll'ultima una via men diretta per arrivare alla *Verità*, casochè questa nelle più spinose quistioni si rifiutasse di cedere all'ordin solito e naturale del raziocinio geometrico.