NUOVO RAPPORTO TRA LA TEORIA DEL CENTRO DI GRAVITÁ E QUELLA DELLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

MEMORIA

Del Sig. Antonio Bordoni.

Presentata li 2 Aprile 1810 dal Sig. Cav. Brunacci ed esaminata dal Sig. Paolo Delanges.

Se si rappresentino colle rette AA', BB', CC', ... le direzioni e grandezze delle forze F, F', F'', ... applicate ai punti A, B, C, ... invariabilmente uniti ossia formanti un sistema rigido, e che si unisca il centro di gravità G delle prime loro estremità A, B, C, ... (supponendo in tutte queste estremità collocati pesi eguali) coll' altro *g* delle seconde A', B', C' ..., la direzione e la lunghezza della retta Gg (*Fig.* 1) hanno alcuni rapporti utili ed eleganti colla direzione e grandezza della risultante di tutte le forze. L'esposizione di questi rapporti con alcune conseguenze, che si ricavano naturalmente da essi, tra le quali è rimarcabile l'elegante Teorema sulla composizione del moto di *Leibnizio*, formeranno il soggetto di questa piccola Memoria.

Quantunque si potrebbero esporre immediatamente i rapporti suddetti per un sistema rigido qualunque, sollecitato da forze dirette nello spazio, e poscia dedurli per un sistema disposto unitamente alle forze sullo stesso piano, come caso particolare, non ostante, per maggior chiarezza incominciaremo dall' esporli e dimostrarli per questo caso particolare, indi passeremo ad abbracciare tutta la generalità del soggetto, cioè esponendoli e dimostrandoli per un sistema rigido qualunque, sollecitato da forze dirette nello spazio, ossia in diversi piani.

OSSERVAZIONE I

Per evitare un dubbio che potrebbe nascere intorno all' esattezza dei rapporti, che si esporranno, atteso il modo usato nella Meccanica di rappresentare indifferentemente colla stessa retta AA' (*Fig.* 1) la forza F sia essa positiva o negativa, si previene, che chiameremo A prima estremità e A' seconda della forza AA', quando agirà da A verso A', e all' opposto A' prima e A seconda, quando agirà da A' verso A; cioè il punto M (*Fig.* 2) di applicazione della forza MM' si chiamerà prima estremità della stessa forza, quando sarà tirato da M verso M', e seconda quando sarà spinto da M' verso M. Così, se tutte le forze AA', BB', CC', ... (*Fig.* 1) ossia F, F', F'', ... agiranno da A, B, C, ... verso A', B', C', ... come abbiamo supposto nell' enunciato antecedente, le prime estremità saranno A, B, C, ... e le seconde A', B', C', ...; e viceversa A', B', C', ... le prime, e A, B, C, ... le seconde, se agiranno in senso contrario: che se la forza F' agirà da B' verso B, e le altre dai punti A, C, ... verso gli altri A', C', ... le prime estremità saranno A, B', C, ... e le seconde A', B, C', ...

PROPOSIZIONE I. TEOREMA.

Trovato il centro di gravità G delle prime estremità delle forze F, F', F'', ... applicate ai punti di un sistema rigido, e quello delle seconde g, ed indicata colla δ la distanza di questi due centri, colla R la grandezza della risultante, e colla n il numero delle forze, si avrà $R = n\delta$; cioè la risultante di un numero qualunque di forze applicate ai punti di un sistema rigido, ossia invariabile, è sempre eguale alla distanza tra il centro di gravità delle prime estremità, e quello delle seconde, ma ripetuta questa distanza tante volte, quante sono le forze.

Dimostrazione.

Indicando colle $a, a', a'', \ldots$ le ascisse, e colle $b, b', b'' \ldots$ le ordinate delle prime estremità delle forze, supposte riferite a due assi ortogonali, ed indicato il peso collocato in ciascuno di queste estremità colla m, saranno $am, a'm, a''m, \ldots$ i momenti degli stessi punti riportati all'asse delle ordinate; e perciò la distanza A' da questo asse al centro di gravità G delle prime estremità delle forze, ossia l'ascissa, sarà eguale alla somma dei momenti $am + a'm + a''m +$ ec., divisa per quella dei pesi $m+m+m+$ ec.; cioè $A' = (am+a'm+a''m+\text{ec.}) : (m+m+m+\text{ec.}) = m(a+a'+a''+\text{ec.}) : m(1+1+1+\text{ec.})$; ovvero $A' = (a+a'+a''+\text{ec.}) : n$. Similmente saranno bm, $b'm, b''m, \ldots$ i momenti delle stesse estremità, riferite all'asse delle ascisse, per cui la distanza B' tra il centro suddetto e l'asse delle ascisse, ovvero l'ordinata, sarà eguale alla somma $bm+b'm+b''m+$ec., divisa per l'altra $m+m+m+$ec.; cioè a dire $B' = (bm+b'm+b''m+\text{ec.}) : (m+m'+m''+\text{ec.})$; ossia $B' = (b+b'+b''+\text{ec.}) : n$.

Facendo dei simili ragionamenti per le seconde estremità delle forze, e chiamando $x, x', x'', \ldots$ le ascisse, ed $y, y', y'', \ldots$ le ordinate di queste estremità riferite ai medesimi assi a cui si sono riferite le prime, si troveranno le coordinate X', Y' del centro g di gravità delle seconde estremità eguali ad $(mx+mx'+mx''+\text{ec.}) : (m+m+m+\text{ec.})$, $(my+my'+my''+\text{ec.}) : (m+m+m+\text{ec.})$; cioè $X' = (x+x'+x''+\text{ec.}) : n$, ed $Y' = (y+y'+y''+\text{ec.}) : n$.

Ora la distanza δ dei due centri G, g di gravità essendo l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è la differenza delle ascisse A', X', e l'altro la differenza delle ordinate B', Y', per essere A', X', B', Y' le coordinate delle sue estremità, sarà $\delta = \sqrt{\{(A'-X')^2 + (B'-Y')^2\}}$; vale a dire

$$\delta = \sqrt{\left\{\left(\frac{a+a'+a''+\text{ec.}}{n} - \frac{x+x'+x''+\text{ec.}}{n}\right)^2 + \left(\frac{b+b'+b''+\text{ec.}}{n} - \frac{y+y'+y''+\text{ec.}}{n}\right)^2\right\}};$$

ossia eguale ad $\frac{1}{n}\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2\}}$, supposto $a+a'+a''+\text{ec.}=A$, $b+b'+b''+\text{ec.}=B$, $x+x'+x''+\text{ec.}=X$, $y+y'+y''+\text{ec.}=Y$.

Supponendo $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ gli angoli che fanno coll'asse delle ascisse le forze $F, F', F'', \ldots$, e decomponendo ciascuna di esse in due parallele ai due assi ortogonali, saranno $F\cos.\alpha$, $F'\cos.\alpha'$, $F''\cos.\alpha''\ldots$ le componenti parallele all'asse delle ascisse, e $F\,\text{sen.}\,\alpha$, $F'\,\text{sen.}\,\alpha'$, $F''\,\text{sen.}\,\alpha''$, ... quelle parallele all'asse delle ordinate; cioè la risultante di tutte le componenti parallele all'asse delle ascisse sarà eguale ad $F\cos.\alpha+F'\cos.\alpha'+F''\cos.\alpha''+\text{ec.}$, e quella delle parallele all'asse delle ordinate eguale ad $F\,\text{sen.}\,\alpha+F'\,\text{sen.}\,\alpha'+F''\,\text{sen.}\,\alpha''+\text{ec.}$; e perciò la risultante R di tutte le forze applicate al sistema, sarà eguale a

$$\sqrt{\{(F\cos.\alpha+F'\cos.\alpha'+F''\cos.\alpha''+\text{ec.})^2+(F\,\text{sen.}\,\alpha+F'\,\text{sen.}\,\alpha'+F''\,\text{sen.}\,\alpha''+\text{ec.})^2\}};$$

perchè le due forze $F\cos.\alpha+F'\cos.\alpha'+F''\cos.\alpha''+\text{ec.}$, $F\,\text{sen.}\,\alpha+F'\,\text{sen.}\,\alpha'+F''\,\text{sen.}\,\alpha''+\text{ec.}$ ad esse equivalenti si tagliano ad angolo retto, essendo parallele ai due assi ortogonali.

Ma le componenti $F\cos.\alpha$, $F\,\text{sen.}\,\alpha$, $F'\cos.\alpha'$, $F'\,\text{sen.}\,\alpha'$, $F''\cos.\alpha''$, $F''\,\text{sen.}\,\alpha''$, ... parallele ai due assi ortogonali sono eguali alle projezioni $a-x$, $b-y$, $a'-x'$, $b'-y'$, $a''-x''$, $b''-y''$, ... delle forze $F\,F'\,F''\ldots$ sugli assi stessi; cioè $F\cos.\alpha=a-x$, $F\,\text{sen.}\,\alpha=b-y$, $F'\cos.\alpha'=a'-x'$, $F'\,\text{sen.}\,\alpha'=b'-y'$, $F''\cos.\alpha''=a''-x''$, $F''\,\text{sen.}\,\alpha''=b''-y''$, ...; sarà adunque $F\cos.\alpha+F'\cos.\alpha'+F''\cos.\alpha''+\text{ec.}=a-x+a'-x'+a''-x''+\text{ec.}$, ed $F\,\text{sen.}\,\alpha+F'\,\text{sen.}\,\alpha+F'\,\text{sen.}\,\alpha'+F''\,\text{sen.}\,\alpha''+\text{ec.}=b-y+b'-y'+b''-y''+\text{ec.}$ ossia $F\cos.\alpha+F'\cos.\alpha'+F''\cos.\alpha''+\text{ec.}=A-X$, ed $F\,\text{sen.}\,\alpha+F'\,\text{sen.}\,\alpha'+F''\,\text{sen.}\,\alpha''+\text{ec.}=B-Y$; e perciò la risultante $R=\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2\}}$. Quindi sostituendo questo valore dal radicale $\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2\}}$ nella equazione superiormente trovata, avrassi $\delta=\frac{1}{n}R$, ovvero $R=n\delta$. Ciò che ec.

PRO-

Proposizione II Teorema.

La linea δ che unisce i due centri di gravità G, g delle estremità delle forze applicate ad un sistema rigido è parallela alla loro risultante R.

Dimostrazione.

Per dimostrare questo Teorema e nello stesso tempo preparare dei risultati ai seguenti onde facilitarne le loro dimostrazioni, troveremo le equazioni delle rette di cui le δ, R ne sono porzioni; cioè ricercheremo la equazione della linea, che passa pei centri G, g di gravità, e di quella sulla quale trovasi la risultante.

Dell' equazione della retta che passa pei centri G, g.

Riferita la linea che passa pei due centri g, G ai medesimi assi ortogonali fissati nella soluzione del teorema antecedente, ed indicato colla $u = Tt + D$ la sua equazione; cioè colle u, t le sue coordinate, e colle T, D le quantità da cui ne dipende la posizione, la difficoltà è ridotta a trovare i valori di queste due ultime quantità.

Per le condizioni a cui dee soddisfare la posizione di questa linea, cioè di passare pei due centri di gravità, ai quali corrispondono le coordinate $A' = \frac{1}{n}A$, $B' = \frac{1}{n}B$, $X' = \frac{1}{n}X$, $Y' = \frac{1}{n}Y$, dovrà essere la sua equazione $u = Tt + D$ soddisfatta tanto dai valori $u = \frac{1}{n}B$, $t = \frac{1}{n}A$, quanto dagli altri $u = \frac{1}{n}Y$, $t = \frac{1}{n}X$; vale a dire si avranno le due equazioni $\frac{1}{n}B = \frac{1}{n}TA + D$, $\frac{1}{n}Y = \frac{1}{n}TX + D$, le quali daranno $T = \frac{B-Y}{A-X}$,

$D = \frac{1}{n} \cdot \frac{AY - BX}{A - X}$ valori cercati delle T, D; perchè le due equazioni $B = TA + nD$, $Y = TX + nD$ sono soddisfatte, quando si pongono per le T, D i veri loro valori, o li danno, quando siano incogniti. Quindi sostituendo i valori trovati delle T, D nella equazione supposta della retta, che passa per i centri G, g, si avrà la sua equazione tutta conosciuta $u = t \cdot \frac{B - Y}{A - X} + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY - BX}{A - X}$.

Dell' equazione della retta sulla quale trovasi la risultante delle forze.

Riferita anch'essa agli stessi assi ortogonali ed indicata colla $u' = T't' + D'$ la sua equazione, cioè colle u', t' le coordinate, e colle T', D' i coefficenti da cui ne dipende la sua posizione, la difficoltà è ridotta, come nel caso antecedente, a trovare i valori delle quantità T', D'. Sebbene si potrebbero determinare i valori delle quantità T', D' trovando prima le coordinate di due punti per cui dee passare la retta, e poscia procedere come nel caso antecedente, nondimeno, le determineremo colle condizioni, che la retta passi per un solo di quei punti, e che facci un dato angolo coll' asse delle ascisse, giacchè coll'ajuto delle cose esposte, più facilmente si può determinare la tangente di questo angolo, che le coordinate di un altro suo punto.

Essendo le componenti F cos. α, F' cos. α', F'' cos. α'', ... parallele all'asse delle ascisse, e di più applicate ai punti corrispondenti alle coordinate $a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots$, sarà la loro risultante sopra di una retta parallela allo stesso asse delle ascisse, e distante da questo asse dell'ordinata eguale a $(bF \cos. \alpha + b'F' \cos. \alpha' + b''F'' \cos. \alpha'' + \text{ec.}) : (F \cos. \alpha + F' \cos. \alpha' + F'' \cos. \alpha'' + \text{ec.})$; ossia a $\big(b(a-x) + b'(a'-x') + b''(a''-x'') + \text{ec.}\big) : (a - x + a' - x' + a'' - x'' + \text{ec.})$

$= (ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} - bx - b'x' - b''x'' - \text{ec.}) :$
$(a + a' + a'' + \text{ec.} - x - x' - x'' - \text{ec.})$; cioè supponendo $ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} = \text{M}$, e $bx + b'x' + b''x'' + \text{ec.} = \text{N}$, sarà la distanza suddetta eguale ad $\frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}}$. Similmente la risultante delle componenti F sen. α, F' sen. α', F'' sen. α'', ... si troverà sopra di una retta parallela all'asse delle ordinate e distante da quello delle ascisse di
$(a\text{F sen. } \alpha + a'\text{F' sen. } \alpha' + a''\text{F'' sen. } \alpha'' + \text{ec.}) :$
$(\text{F sen. } \alpha + \text{F' sen. } \alpha' + \text{F'' sen. } \alpha'' + \text{ec.})$; ovvero di
$\left(a(b-y) + a'(b'-y') + a''(b''-y'') + \text{ec.}\right) :$
$(b - y + b' - y' + b'' - y'' + \text{ec.}) =$
$(ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} - ay - a'y' - a''y'' - \text{ec.}) :$
$(b + b' + b'' + \text{ec.} - y - y' - y'' - \text{ec.})$; cioè sopra di una retta parallela all'asse delle ordinate a cui corrisponderà l'ascissa eguale ad $\frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$, supposto $ay + a'y' + a''y'' + \text{ec.} = \text{P}$.

Ma la risultante di tutte le forze F, F', F'', ... non è che la risultante delle due F cos. α + F' cos. α' + F'' cos. α'' + ec., F sen. α + F' sen. α' + F'' sen. α'' + ec. delle quali qui sopra abbiamo determinate le posizioni; e la risultante di queste due passa pel punto di loro intersezione, al quale corrispondono le coordinate $\frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}}$, $\frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$ trovate dianzi; dunque la retta di cui cercasi la equazione, passerà per il punto corrispondente ai valori $u' = \frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}}$, $t' = \frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$; cioè avrassi la equazione $\frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}} = \text{T}' \cdot \frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}} + \text{D}'$; ossia $\text{D}' = \frac{\text{M}-\text{N}}{\text{A}-\text{X}} - \text{T}' \frac{\text{M}-\text{P}}{\text{B}-\text{Y}}$. Di più la stessa risultante è la diagonale di un rettangolo, i di cui lati adiacenti e paralleli agli assi ortogonali sono F cos. α + F' cos. α' + F'' cos. α'' + ec. $= a - x + a' - x' + a'' - x'' + \text{ec.} = \text{A} - \text{X}$, ed F sen. α + F' sen. α' + F'' sen. α'' + ec. $= \text{B} - \text{Y}$, per cui fa col lato di questo rettangolo parallelo all'asse delle ascisse, ossia collo stesso asse un angolo, la cui tangente

è eguale al lato opposto $B - Y$, diviso per l'altro $A - X$; e perciò sarà $T' = \frac{B-Y}{A-X}$, e $D' = \frac{P-N}{A-X}$, giacchè T' esprime la tangente di questo angolo. Vale a dire, la equazione della retta sulla quale si trova la risultante, sarà $u' = \frac{B-Y}{A-X} . t' + \frac{P-N}{A-X}$.

Paragonando ora le due equazioni $u = \frac{B-Y}{A-X} t + \frac{1}{n} . \frac{AY-BX}{A-X}$, $u' = \frac{B-Y}{A-X} t' + \frac{P-N}{A-X}$ trovate, si comprende, che esprimono due linee parallele, perchè sono eguali i coefficenti delle ascisse t, t', i quali rappresentano le tangenti trigonometriche degli angoli, che le due linee fanno dalla medesima parte coll'asse delle ascisse; cioè la linea che passa pei due centri di gravità G, g, e quella sulla quale trovasi la risultante, sono parallele; e perciò anche le δ, R loro porzioni. Ciò ec.

Dalle due Proposizioni dimostrate, ricavasi questo elegantissimo ed utile Teorema " La risultante R di un numero qualsiasi di forze disposte sullo stesso piano ed applicate ai punti di un sistema rigido, è sempre eguale a tante volte quante sono le forze la distanza δ dei centri di gravità G, g delle prime e seconde estremità di esse; e di più parallela a questa distanza ".

Le relazioni dimostrate, naturalmente ci ispirano il desiderio di scoprire in quali casi la risultante R coinciderà colla linea δ di unione dei centri g, G, e quali saranno le condizioni a cui dovranno soddisfare le grandezze e direzioni delle forze $F, F', F'', \ldots$ affinchè ciò accada; ossia, acciocchè la risultante passi pei due centri di gravità suddetti.

Proposizione III Problema.

Quali sono le condizioni alle quali dovranno soddisfare le forze, acciocchè coincidano le posizioni delle due linee R, δ, ossia affinchè la risultante passi pei due centri di gravità delle prime e seconde estremità?

Soluzione.

È noto a tutti, che due linee riferite allo stesso modo ai medesimi assi si confondano, allora che hanno la stessa equazione; per tanto le condizioni cercate saranno quelle, le quali ridurranno alla stessa, le equazioni delle rette di cui le δ, R ne sono porzioni; cioè le equazioni $u = \frac{B-Y}{A-X} t + \frac{1}{n} \times \frac{AY-BX}{A-X}$, $u' = \frac{B-Y}{A-X} t' + \frac{P-N}{A-X}$ trovate superiormente. Ma queste equazioni si riducono alla medesima, purchè sia il termine $\frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$ della prima eguale al termine $\frac{P-N}{A-X}$ della seconda, giacchè gli altri sono sempre eguali; dunque la equazione $\frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X} = \frac{P-N}{A-X}$, ovvero $AY - BX = n(P-N)$ esprimerà la condizione a cui dovranno soddisfare le forze, affinchè le rette δ, R coincidano.

La equazione $AY - BX = n(P-N)$, la quale indicherà la coincidenza delle δ, R tutte le volte, che sarà soddisfatta, servirà pure a determinare opportunamente qualcheduna delle quantità da cui ne dipenderà la grandezza o direzione delle forze, quando non saranno tutte determinate, acciocchè abbia luogo la suddetta sopraposizione. C. D. F.

Nelle Proposizioni dimostrate abbiamo supposto tutte le forze nello stesso piano, cioè su quello delle coordinate x, y, passiamo adesso a dimostrarne delle simili per delle forze ap-

plicate ai punti di un sistema rigido comunque posto nello spazio, ma talmente dirette che abbiano una sola risultante.

PROPOSIZIONE IV TEOREMA.

Se più forze applicate ai punti di un sistema rigido qualunque avranno una sola risultante, questa sarà eguale a tante volte la distanza tra il centro di gravità delle prime estremità e quello delle seconde, quante sono le forze stesse; cioè chiamando R la risultante, δ la distanza suddetta, ed n il numero delle forze, si avrà $R = n\delta$.

DIMOSTRAZIONE.

Riferite tanto le prime estremità quanto le seconde agli stessi tre piani ortogonali, e chiamate $a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots$ le coordinate delle prime estremità, ed $x, x', x'', \ldots y, y', y'', \ldots z, z', z'', \ldots$ quelle delle seconde, avrassi la distanza A' del centro di gravità G delle prime estremità dal piano delle b, c, dividendo la somma dei momenti $am + a'm + a''m +$ ec. delle stesse estremità riferite al medesimo piano bc (si suppone collocato il peso m a tutte l' estremità) per quella dei pesi $m + m + m +$ ec.; cioè sarà $A' = \frac{A}{n}$, posto $a + a' + a'' +$ ec. $= A$. Così si avranno le altre due distanze B', C' del centro stesso agli altri due piani ab, ac, cioè $B' = \frac{B}{n}$, e $C' = \frac{C}{n}$, supposto qui pure per brevità $b + b' + b'' +$ ec. $= B$, e $c + c' + c'' +$ ec. $= C$.

Similmente otterransi le tre coordinate X', Y', Z' del centro g di gravità delle seconde estremità eguali ad $(x + x' + x'' +$ ec.$) : n$, $(y + y' + y'' +$ ec.$) : n$, $(z + z' + z'' +$ ec.$) : n$, ossia $X' = \frac{X}{n}$, $Y' = \frac{Y}{n}$, $Z' = \frac{Z}{n}$, supposto $x + x' + x'' +$ ec. $= X$, $y + y' + y'' +$ ec. $= Y$, $z + z' + z'' +$ ec. $= Z$.

Ora, essendo la distanza δ dei due centri C, g, la diagonale di un parallelepipedo rettangolo i cui tre spigoli concorrenti a formare lo stesso angolo sono le differenze delle coordinate A'X', B'Y', C'Z' corrispondenti ai due centri, ossia alle stesse estremità della δ, sarà essa eguale a $\sqrt{\{(A'-X')^2+(B'-Y')^2+(C'-Z')^2\}}$; ovvero $\delta=\sqrt{\left\{(A-X)^2:n^2+(B-Y)^2:n^2+(C-Z)^2:n^2\right\}}=\frac{1}{n}\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2+(C-Z)^2\}}$ ponendo per le coordinate A', B', C', X', Y', Z' i loro valori $\frac{A}{n}$, $\frac{B}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{X}{n}$, $\frac{Y}{n}$, $\frac{Z}{n}$. Ma decomposte tutte le forze F, F', F'', ... in tre parallele alle tre intersezioni dei tre piani ortogonali, ossia agli assi delle coordinate, risultano le tre somme delle componenti parallele ai tre assi eguali alle differenze delle AX, BY, CZ, come è facile a comprendere, ragionando come nella Proposizione prima; cioè tutte le forze F, F', F'', ... equivalenti alle sole tre A — X, B — Y, C — Z, la prima delle quali è parallela alle x, la seconda alle y, e la terza alle z, e di cui una è perpendicolare alle altre due al punto della loro intersezione; dunque la risultante di tutte le F, F', F'', ... sarà la diagonale di un parallelepipedo rettangolo di cui i tre lati paralleli agli assi ortogonali sono le tre forze suddette; e perciò $R=\sqrt{\{(A-X)^2+(B-Y)^2+(C-Z)^2\}}$: per tanto sostituendo questo valore del radicale nella equazione $\delta=\frac{1}{n}\sqrt{\left\{(A-X)^2+(B-Y)^2+(C-Z)^2\right\}}$ trovata sopra, si otterrà $\delta=\frac{1}{n}R$, od $R=n\delta$. Ciò ec.

Proposizione V Teorema.

La risultante di un numero qualunque di forze (che abbiano una sola risultante) applicate ai punti di un siste-

ma rigido qualunque, è parallela alla linea, la quale unisce i due centri di gravità G, g; cioè la R è parallela alla δ.

Dimostrazione.

Il modo più facile onde paragonare le posizioni delle due rette di cui si parla, è quello di determinare le loro equazioni, come abbiamo fatto nella dimostrazione della seconda Proposizione, indi paragonarle, dal qual paragone deducesi il parallelismo suddetto, ossia la dimostrazione del Teorema. Per procedere collo stesso ordine tenuto nella dimostrazione della suddetta Proposizione, colla quale la seguente ha tutti i rapporti, incominciaremo a trovare le due equazioni della retta di cui δ ne è porzione, la quale passa pei due centri G, g; e poi passeremo a trovare quelle della quale ne è porzione la risultante R.

Dell' equazioni della retta che passa pei centri G, g.

Projettata la linea, che passa pei due centri di gravità sui piani ortogonali xy, xz, ed indicate le equazioni di queste projezioni colle $y = Tx + D$, $z = lx + H$, si avranno i valori delle quattro quantità T, D, l, H da cui dipendono le posizioni delle due projezioni, osservando, che la prima passa per due punti a cui corrispondono le ordinate $\frac{B}{n}$, $\frac{Y}{n}$, e le ascisse $\frac{A}{n}$, $\frac{X}{n}$, e che la seconda passa pure per due altri sul piano delle z, x corrispondenti alle coordinate $\frac{C}{n}$, $\frac{Z}{n}$, $\frac{A}{n}$, $\frac{X}{n}$; per cui le quattro quantità T, D, l, H dovranno soddisfare alle equazioni $\frac{B}{n} = T\,\frac{A}{n} + D$, $\frac{Y}{n} = T\,\frac{X}{n} + D$, $\frac{C}{n} = l\,\frac{A}{n} + H$, $\frac{Z}{n} = l\,\frac{X}{n} + H$, cioè le T, D alle due prime, e le

l, H

l, H alle due ultime; vale a dire sarà $T = \frac{B-Y}{A-X}$, $D = \frac{1}{n} \times \frac{AY-BX}{A-X}$, $l = \frac{C-Z}{A-X}$, $H = \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$; e perciò le due equazioni della retta, che passa per i due centri suddetti, saranno $y = \frac{B-Y}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $z = \frac{C-Z}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$.

Dell' equazioni della retta sulla quale trovasi la risultante R.

Decomposta ciascuna delle forze F, F', F'', ... in tre parallele ai tre assi ortogonali, saranno le somme o risultanti di queste componenti parallele ai tre assi, $a - x + a' - x' + a'' - x'' + \text{ec.} = A - X$, $b - y + b' - y' + b'' - y'' + \text{ec.} = B - Y$, $c - z + c' - z' + c'' - z'' + \text{ec.} = C - Z$; cioè tutte le forze F, F', F'', ... equivaleranno alle sole tre rappresentate dalle differenze A — X, B — Y, C — Z, e dirette parallelamente ai tre assi delle coordinate. Di più la A — X incontrerà il piano yz in un punto corrispondente alle coordinate $y = \{b(a-x)+b'(a'-x')+b''(a''-x'')+\text{ec.}\} : (a-x+a'-x'+a''-x''+\text{ec.})$, $z = \{c(a-x)+c'(a'-x')+c''(a''-x'')+\text{ec.}\} : (a-x+a'-x'+a''-x''+\text{ec.})$, le quali saranno anche le coordinate della retta sulla quale trovasi la stessa forza A — X. Similmente le coordinate delle rette sulle quali si trovano le forze B — Y, C — Z saranno

$x = \{a(b-y)+a'(b'-y')+a''(b''-y'')+\text{ec.}\} : (b-y+b'-y'+b''-y''+\text{ec.})$

$z = \{c(b-y)+c'(b'-y')+c''(b''-y'')+\text{ec.}\} : (b-y+b'-y'+b''-y''+\text{ec.})$, e

$y = \{b(c-z)+b'(c'-z')+b''(c''-z'')+\text{ec.}\} : (c-z+c'-z'+c''-z''+\text{ec.})$

$x = \{a(c-z)+a'(c'-z')+a''(c''-z'')+\text{ec.}\} : (c-z+c'-z'+c''-z''+\text{ec.})$.

Vale a dire, alle tre rette sulle quali trovansi le forze A — X, B — Y, C — Z corrispondono le coordinate

$y = \frac{M-N}{A-X}, z = \frac{P-Q}{A-X}, x = \frac{M-V}{B-Y}, z = \frac{R-S}{B-Y}, y = \frac{R-T}{C-Z}, x = \frac{P-U}{C-Z}$,

supposto $bx + b'x' + b''x'' + \text{ec.} = N$,

$ab + a'b' + a''b'' + \text{ec.} = M$, $ac + a'c' + a''c'' + \text{ec.} = P$,
$cx + c'x' + c''x'' + \text{ec.} = Q$, $bc + b'c' + b''c'' + \text{ec.} = R$,
$cy + c'y' + c''y'' + \text{ec.} = S$, $bz + b'z' + b''z'' + \text{ec.} = T$,
$az + a'z' + a''z'' + \text{ec.} = U$, $ay + a'y' + a''y'' + \text{ec.} = V$.

Ma la risultante dee passare pel punto d'incontro delle tre forze suddette, passerà adunque pel punto corrispondente alle coordinate $y = \frac{M-N}{A-X} = \frac{R-T}{C-Z}$, $x = \frac{M-V}{B-Y} = \frac{P-U}{C-Z}$, $z = \frac{P-Q}{A-X} = \frac{R-S}{B-Y}$ (si possono prendere tanto i primi quanto i secondi di questi valori delle coordinate, perchè le forze hanno una sola risultante); cioè rappresentate colle equazioni $y' = T'x' + D'$, $z' = l'x'' + H'$ le projezioni sui piani xy, xz della retta di cui si parla, avrassi $\frac{M-N}{A-X} = T'\frac{M-V}{B-Y} + D'$, $\frac{P-Q}{A-X} = l'\frac{P-U}{C-Z} + H'$, ossia $D' = \frac{M-N}{A-X} - T'\frac{M-V}{B-Y}$, $H' = \frac{P-Q}{A-X} - l'\frac{P-U}{C-Z}$: di più la sua projezione sul piano xy, cioè la retta avente per equazione $y' = T'x' + D'$ fa coll'asse delle x un angolo eguale a quello che fa la diagonale del rettangolo, che serve di base al parallelepipedo rettangolo (*Prop. IV*); cioè un angolo avente per tangente trigonometrica $\frac{B-Y}{A-X}$; sarà pertanto T' che rappresenta questa tangente eguale a $\frac{B-Y}{A-X}$, e per la stessa ragione $l' = \frac{C-Z}{A-X}$. Vale a dire $T' = \frac{B-Y}{A-X}$, $l' = \frac{C-Z}{A-X}$, $D' = \frac{V-N}{A-X}$, $H' = \frac{U-Q}{A-X}$; e perciò le due equazioni cercate saranno $y' = \frac{B-Y}{A-X} \cdot x' + \frac{V-N}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X}x' + \frac{U-Q}{A-X}$.

Essendo nelle due equazioni $y = \frac{B-Y}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $y' = \frac{B-Y}{A-X}x' + \frac{V-N}{A-X}$ i coefficenti delle x, x' eguali, e rap-

presentando essi le tangenti degli angoli, che le due projezioni sul piano xy fanno coll'asse delle x, saranno queste projezioni parallele; per cui le due linee δ, R porzioni di quelle rette, si troveranno sopra due piani perpendicolari a quello delle x, y, e tra loro paralleli. Per la medesima ragione le stesse rette troveransi su di due piani che saranno similmente paralleli, e perpendicolari al piano ortogonale xz; giacchè i coefficenti delle x, x' nelle equazioni $z = \frac{C-Z}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X}x' + \frac{U-Q}{A-X}$ delle loro projezioni sullo stesso piano sono pure eguali. Ma l'intersezione dei piani espressi dalle equazioni $y = \frac{B-Y}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $z = \frac{C-Z}{A-X}x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$ è la retta che passa pei due centri g, G, e quella degli espressi dalle due altre $y' = \frac{B-Y}{A-X}x' + \frac{V-N}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X}x' + \frac{U-Q}{A-X}$ è la retta sulla quale trovasi la risultante delle forze; saranno adunque queste due linee parallele; quindi ancora le loro porzioni δ, R. Ciò ec.

Adunque, la risultante unica di un numero qualsiasi di forze applicate ai punti di un sistema rigido qualunque è sempre parallela alla retta, che passa pel centro di gravità delle prime estremità di esse e per quello delle seconde, ed è eguale a tante volte la distanza di questi due centri, quante sono le forze stesse.

Proposizione VI Problema.

In quali casi la R risultante si troverà sulla retta δ, che unisce i due centri g, G?

SOLUZIONE.

Sappiamo, che due rette coincidono nello spazio, quando abbiano le stesse equazioni; dunque la R coinciderà colla δ semprecchè le grandezze, le direzioni, ed il numero delle forze ridurranno alla stessa equazione, tanto le due $y = \frac{B-Y}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, $y' = \frac{B-Y}{A-X} x' + \frac{V-N}{A-X}$, quanto le due altre $z = \frac{C-Z}{A-X} x + \frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$, $z' = \frac{C-Z}{A-X} x' + \frac{U-Q}{A-X}$; cioè accadrà la suddetta coincidenza tutte le volte, che saranno soddisfatte le due equazioni $n(V-N) = AY-BX$, $n(U-Q) = AZ-CX$ risultanti dall'uguagliare tra loro i termini $\frac{V-N}{A-X}$, $\frac{1}{n} \cdot \frac{AY-BX}{A-X}$, e $\frac{U-Q}{A-X}$, $\frac{1}{n} \cdot \frac{AZ-CX}{A-X}$, i quali sono i soli nelle equazioni delle projezioni in generale disuguali. Eliminando la n dalle equazioni trovate, si avrà la $(U-Q)(AY-BX) = (V-N)(AZ-CX)$ esplicitamente indipendente dal numero delle forze, la quale potrà rimpiazzare una delle stesse equazioni.

OSSERVAZIONE II

Senza alterare l'ordine tenuto nelle Proposizioni espresse, si poteva supporre a ciascun dei punti A B C... del sistema applicato un numero qualunque di forze, e poi ricavare dalle loro dimostrazioni quelle delle Proposizioni dimostrate, come casi particolari; ma con ciò si sarebbe sacrificata la semplicità ed in parte ancora la chiarezza delle dimostrazioni, e nulla sarebbesi acquistato rapporto alla generalità; giacchè si possono ricavare quelle Proposizioni dalle dimostrate, egualmente come corollari. Infatti, se al punto A del sistema vi fossero applicate tutte le forze $F, F', F'', \ldots F^{(s)}$,

basterebbe supporre nelle dimostrazioni date $a=a'=a''=\ldots a^{(s)}$. $b=b'=b''=\ldots b^{(s)}$, $c=c'=c''=\ldots c^{(s)}$; ciò che per nulla le altererebbe, perchè esse si sono fatte indipendentemente da tutte le relazioni delle coordinate $a, a', a'', \ldots b, b', b'', \ldots c, c', c'', \ldots$. Vale a dire, se al punto A del sistema vi saranno applicate tutte le forze $F, F', F'', \ldots F^{(s)}$, le dimostrazioni date delle Proposizioni abbraccieranno il caso di cui si parla, senza nessuna alterazione, nominando questo punto, A per la forza F, B per la F', e così delle altre.

OSSERVAZIONE III

Quantunque le supposizioni di $a=a'=\ldots a^{(s)}, b=b'=\ldots b^{(s)}$, $c=c'=\ldots c^{(s)}$ non alterino le Proposizioni sciolte, nulladimeno in forza di esse si potranno sostituire alle quantità $am+a'm+\ldots a^{(s)}m$, $a+a'+\ldots a^{(s)}$, $bm+b'm+\ldots b^{(s)}m$, $b+b'+\ldots b^{(s)}$, $cm+c'm+c''m+\ldots c^{(s)}m$, $c+c'+\ldots c^{(s)}$ le altre $a.sm$, sa, $b.sm$, sb, $c.sm$, sc; cioè si potranno abbreviare le dimostrazioni, supponendo collocato il peso sm al punto A al quale sono applicate s forze; vale a dire, basterà supporre in generale le estremità A, B, C, ... caricate di pesi proporzionali al numero delle forze ad esse concorrenti. Simili riflessioni si faranno, se più delle forze $F, F', F'', \ldots$ applicate ai diversi punti A, B, C, ... del sistema, termineranno agli stessi; ossia se diverse delle seconde estremità A', B', C', ... coincideranno.

Da queste riflessioni si ricava la elegantissima ed utile Proposizione seguente: " Trovati separatamente i centri di gravità delle prime e delle seconde estremità delle forze, valutandole in ragione del numero delle forze ad esse concorrenti, ed uniti questi due centri, avrassi una retta parallela alla risultante di tutte le forze (si suppone sempre sola) e che ripetuta tante volte quante saranno le forze, darà la grandezza della stessa risultante ".

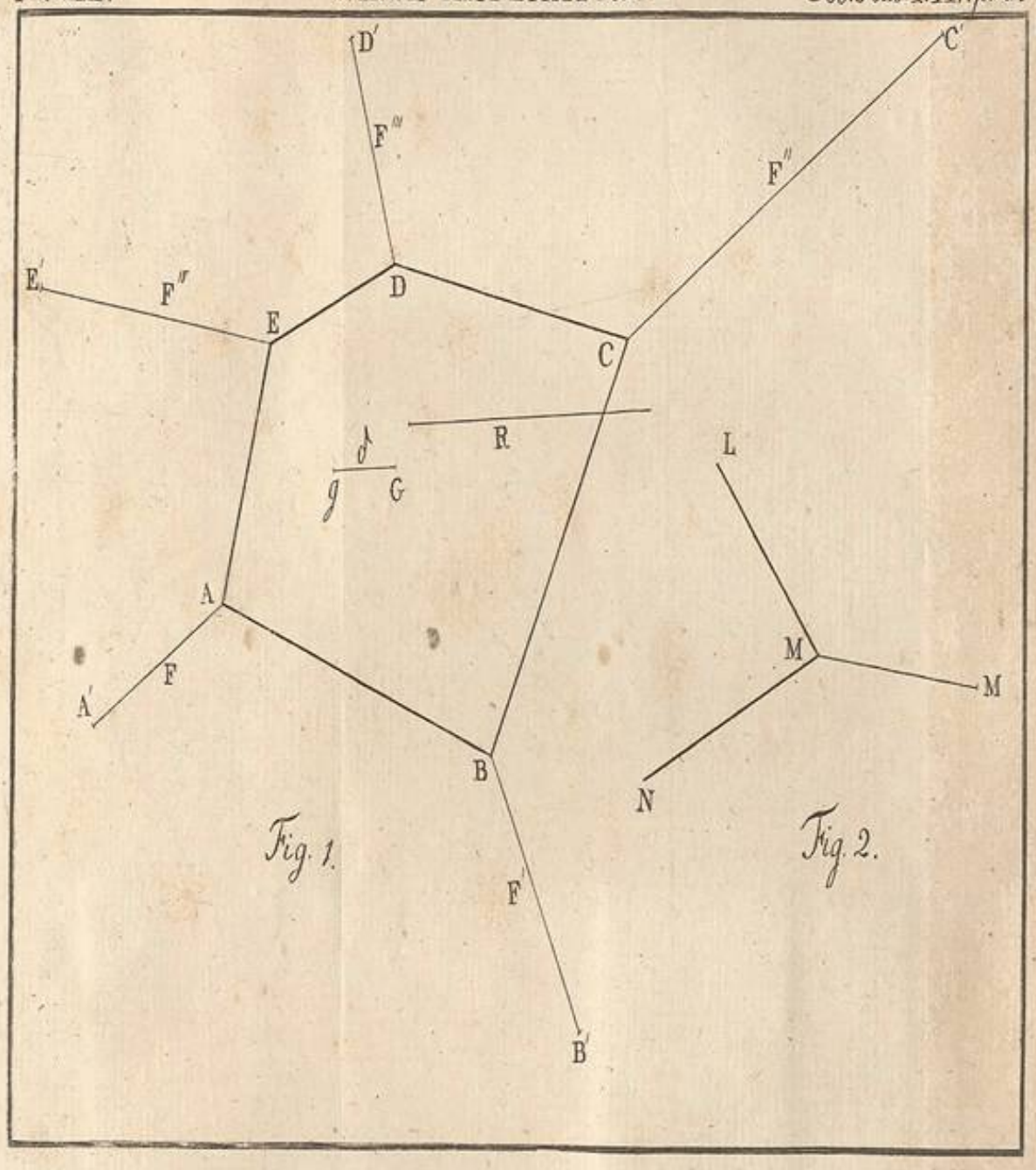

Fig. 1.

Fig. 2.

CONSEGUENZE.

1.ª Alle forze $F, F', F'', \ldots F^{(n-1)}$ applicate ai punti di un sistema rigido sia che si faccino o no equilibrio, se ne potranno sostituire delle altre $f, f', f'', \ldots f^{(n-1)}$, e non si altererà nè la grandezza nè la direzione della loro risultante, purchè la direzione e lunghezza della δ rimanga la stessa. Così, se le forze AB', BC', CA', ... avranno una sola risultante, come supponghiamo che l'abbiano le altre AA', BB', CC', ... sarà essa eguale e parallela a quella di queste ultime; perchè i centri di gravità delle estremità A, B, C, ... A', B', C', ... sono gli stessi di quelli delle altre A, B, C, ... B', C', A', ...

2.ª Se tutte le forze $F, F', F'', \ldots$ concorreranno, cioè se sarà $a=a'=a''=\ldots$, $b=b'=b''=\ldots$, od $x=x'=x''=\ldots$, $y=y'=y''=\ldots$, $z=z'=z''=\ldots$, la risultante R non solo passerà per il punto a cui concorrono tutte le forze $F, F', F'', \ldots$, come è naturale, ma coinciderà colla δ; imperciocchè, la prima supposizione dà $A=na$, $B=nb$, $C=nc$, $M=nab$, $N=bX$, $P=nac$, $Q=cX$, $R=nbc$, $S=cY$, $T=bZ$, $U=aZ$, $V=aY$, e la seconda $X'=nx$, $Y=ny$, $Z=nz$, $N=xB$, $Q=xC$, $S=yC$, $U=zA$, $T=zB$, $V=yA$, i primi dei quali valori sostituiti nelle equazioni delle condizioni espresse nell' ultima Proposizione danno $(aZ-cX)(naY-nbX)=(aY-bX)(naZ-ncX)$, $n(aY-bX)=naY-nbX$, ed i secondi $(zA-xC)(Any-Bnx)=(Ay-Bx)(Anz-Cnx)$, e $n(Ay-Bx)=Any-Bnx$ equazioni identiche.

Questo corollario costituisce il Teorema (accennato al principio) di *Leibnizio* sulla composizione del moto, riportato dallo stesso autore nel terzo Tomo delle sue Opere.

3.ª Se le forze $F, F', F'', \ldots$ si faranno equilibrio, il centro di gravità G delle prime estremità coinciderà con quello delle seconde g; perchè al valore di $R=0$, corrisponderà quello di $\delta=0$ in virtù della equazione dimostrata nella

Proposizione IV. Così tutte le volte che si avrà $\delta = 0$, avrassi pure $R = 0$.

4.ª Se tutte le forze $F, F', F'', \ldots$ applicate allo stesso punto si faranno equilibrio, il centro di gravità delle seconde estremità $A', B', C', \ldots$ cadrà nel punto di comune applicazione.

Questo risultato, il quale è un caso particolare della terza conseguenza, si dee anch'esso a *Leibnizio* (veggasi l'aurea Meccanica di *Lagrange*).