ALCUNE RIFLESSIONI CRITICHE SUI NUOVI PRINCIPJ D' IDRAULICA DI M.^A BERNARD PUBBLICATI IN PARIGI NEL MDCCXXCVII

Del Sig. Cav. Teodoro Bonati.

Ricevute li 6 Settembre 1810.

Teorìa di M. Bernard *intorno alla velocità dell' acqua per un foro fatto nel fondo di un vaso cilindrico mantenuto sempre pieno d' acqua.*

1.° Il vaso sia ABHN (*Fig. I*) col foro PQ nel fondo HB da mantenersi pieno aggiungendo acqua in AN.

2. Alle prime pagine l' Autore prescrive, che le aggiunte in AN si facciano con acqua priva di velocità.

3. Nomina *fondo assoluto* il fondo intiero BH del vaso; e chiama *fondo reale* ciò, che resta del fondo assoluto fatto che sia il foro PQ.

4. A foro chiuso, e vaso pieno egli è manifesto, che il fondo reale sostiene il peso di quella parte dell' acqua nel vaso, che insiste verticalmente sullo stesso fondo.

5. E tiene per cosa certa, che il fondo reale sostenga lo stesso peso, anche a foro aperto.

6. Suppone, che a foro aperto ogni strato orizzontale dell' acqua dentro il vaso discenda mantenendosi orizzontale, e piano.

7. Per trovare la velocità dell' acqua pel foro cerca prima la velocità, colla quale discendono tali strati dell' acqua nel vaso nel primo tempo (dopo l' aprimento del foro) eguale al tempo della caduta libera di un grave dall' altezza AB del

vaso, ed a tal fine ricorre al caso di un corpo, che partito dalla quiete in A discenda lungo un piano inclinato AC. L'inclinazione deve essere tale, che come sta il fondo assoluto al fondo reale, così stia la AC all'orizzontale BC.

8. Da un punto F del piano inclinato alza una verticale FD, e fatto il rettangolo EG nota, che rappresentando FD la forza della gravità del corpo, tal forza equivale ad altre due forze dello stesso genere, cioè acceleratrici uniformemente, una espressa dalla GF, che preme normalmente in F il piano inclinato, e che viene distrutta dalla resistenza del piano; e l'altra espressa dalla EF, che accelera il corpo lungo il piano AC.

9. Così abbiamo DF : GF :: AC : BC, come il fondo assoluto al fondo reale (7). Ma come il fondo assoluto al reale, così il peso di tutta l'acqua nel vaso al peso sostenuto dal fondo reale (5). Perciò ne viene, che la DF alla GF sta come il peso di tutta l'acqua nel vaso al peso sostenuto dal fondo reale. Dunque (dice M. *Bernard*) come nel caso del piano inclinato la forza totale DF della gravità sta alla forza GF distrutta dalla resistenza del piano inclinato, così nell' altro caso il peso di tutta l'acqua nel vaso sta al peso dell' aoqua sostenuto, e distrutto dal fondo reale.

10. Quindi ha creduto l'Autore di ravvisare (*Discorso critico* pag. IX), che in ambi i casi la gravità sia *similmente modificata*, e di poter dire, che anche la gravità EF, che resta al corpo sul piano inclinato per accelerare il suo moto lungo il piano sia proporzionale alla parte di gravità, che resta all'acqua nel vaso per accelerare la discesa d'ogni strato, come se mancando il fondo fosse quell'acqua animata da una gravità diminuita, e minore della comune nella ragione della EF alla DF (pag. 5).

11. Tira indi l'Autore la BO normale al piano inclinato AC, e nota, che il corpo partito da A arriverà in O nel tempo stesso, che un altro corpo sarebbe caduto liberamente da A in B.

12. Pel punto O si conduca l'orizzontale OIM, e questa si prolunghi verso T finchè sia OT = IM, e si faccia il parallelogrammo AOTS, che esprima un cilindro obbliquo AOTS di acqua (che io supporrò gelata) appoggiato sul piano AC della base del diametro OT = IM, e dell' altezza AI. Sarà questo cilindro eguale all'altro ANMI dell' acqua nel vaso perchè della medesima altezza AI, e di basi eguali.

13. E siccome il diametro degli strati dei due cilindri è il medesimo, tiene in sostanza M. *Bernard* come conseguenza evidente (pag. 6, 7) che se all'aprire il foro PQ, e mentre in conseguenza comincieranno a discendere tutti gli strati dell' acqua nel vaso, e perciò anche lo strato superiore AN, se dissi, si lascierà libero alla discesa lungo il piano inclinato AC il cilindro gelato AT, questo scorrerà uno spazio AO, ed arriverà colla sommità AS in OT, mentre lo strato AN arriverà in IM, e mentre un grave partito anch'esso da A all'aprire del foro, arriverà in B.

14. Intanto pel foro PQ sarà uscito un volume di acqua eguale al cilindro AIMN. Intendendo questo volume di acqua uscita conformato in un cilindro della base eguale al foro PQ, la sua altezza secondo l'Autore sarà la cercata velocità pel foro.

15. Per esprimere codest'altezza di una maniera generale denomina M. *Bernard* a l'altezza AB del vaso, y il fondo assoluto, b il fondo reale, cosicchè l'aja del foro riesce $y - b$; e denomina v l'altezza del detto cilindro di acqua uscita pel foro PQ nel tempo della caduta di un grave per AB. Calcolando alle pag. 7, 8 trova l'A. $v = a + \frac{ab}{y}$.

Al calcolo dell'Autore sostituisco il seguente più spedito.

16. Dev'essere (7) AC alla BC come il fondo assoluto y al fondo reale b; donde si ha $BC = \frac{AC.b}{y}$, e perciò $BC^2 = \frac{AC.^2.b^2}{y^2}$.

17. Poichè nel triangolo ABC rettangolo in B la BO è normale alla AC abbiamo AC : BC : : BC : OC $= \frac{BC^2}{AC} = (16) = \frac{AC^2 . b^2}{AC . y^2} = \frac{AC . b^2}{y^2}$.

18. Inoltre AC : OC : : AB : IB. Ma OC $= \frac{AC . b^2}{y^2}$ (17), ed AB $= a$ (15). Dunque AC : $\frac{AC . b^2}{y^2}$: : a : IB $= \frac{ab^2}{y^2}$. Ma AI = AB — IB. Dunque AI $= a - \frac{ab^2}{y^2} = \frac{a(y^2 - b^2)}{y^2}$.

19. Moltiplicando quest'altezza AI nella sezione del vaso, ossia nel fondo assoluto y, avremo $a \times \frac{y^2 - b^2}{y}$ volume cilindrico ANMI di acqua nel vaso eguale all'acqua uscita pel foro PQ mentre lo strato AN è passato in IM. Questo volume di acqua diviso pel foro PQ lascia la cercata altezza $v = a . \frac{y + b}{y} = a + \frac{ab}{y}$.

20. Ella è questa la formola, che dà M. *Bernard* alla pag. 7 come formola generale per la velocità dell'acqua per un foro nel fondo di un vaso cilindrico mantenuto sempre pieno; essendo l'altezza v lo spazio, che può scorrere un corpo uniformemente colla velocità dell'acqua pel detto foro nel tempo della caduta libera di un grave dall'altezza AB del vaso (pag. 47).

21. Quanto la esposta teorìa sia bene stabilita, e quanto sia fondata la lusinga dell'Autore, che la sua formola sia conforme alla sperienza, ed in massima parte conforme ai risultati della Teorìa del *Newton*, lo indagheremo nelle seguenti riflessioni.

RIFLESSIONE I

22. M. *Bernard* trova la formola $v = a + \frac{ab}{y}$ supponendo, che aperto il foro lo strato AN arrivar debba in IM nel tempo, che un grave caderebbe per AB (13).

23. Qui l'Autore pecca d'incoerenza ne' suoi principj, perchè avendo egli prima stabilito (pag. 5), che lo strato AN, aperto che sia il foro PQ, discenderà come animato da una gravità, che stia alla comune, come EF alla DF, io trovo, che in questa ipotesi nel tempo della caduta di un grave per AB lo strato AN deve arrivare oltre IM, come in *mo*.

24. Io la discorro così. Egli è principio noto, che se due corpi partiti dalla quiete siano animati da forze costanti, ma diverse, gli spazj scorsi in capo a tempi eguali saranno come le forze.

25. Nel caso nostro le forze stanno come EF alla DF. Lo spazio da scorrersi dallo strato AN nel tempo della caduta del grave per AB sia A*m*, e lo spazio da scorrersi dal grave è la AB. Perciò avremo EF : DF : : A*m* : AB, onde $Am = \frac{AB \cdot EF}{DF}$.

26. Abbiamo poi ancora DF : EF : : AC : AB : : AB : AO, onde anche $AO = \frac{AB \cdot EF}{DF}$.

27. Dunque A*m* = AO, ed AO è sempre maggiore della AI; dunque ec.

28. Fatta pertanto A*m* = AO, l'Autore per non essere incoerente doveva dire, che nel tempo della caduta del grave per AB lo strato AN deve arrivare in *mo*.

29. Cerchiamo la A*m*. Abbiamo AB : AO : : AO : AI; onde $AO^2 = AB \cdot AI$. Ma $AB = a$, ed al n.° 18 ho trovato $AI = a \cdot \frac{y^2 - b^2}{y^2}$.

Dunque $AO^2 = a \cdot a \cdot \frac{y^2 - b^2}{y^2}$, ed $AO = a \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{y} = Am$.

30. Moltiplicando questa altezza Am nella sezione y del vaso si ha $a\sqrt{y^2-b^2}$ volume del cilindro AmoN eguale al volume dell'acqua uscita pel foro nel tempo della caduta del grave per AB.

31. E dividendo per $y-b$, aja del foro, si trova $\frac{a\sqrt{y+b}}{\sqrt{y-b}}$ altezza del cilindro di acqua della base eguale al foro, e del volume dell'acqua uscita pel foro in capo al primo tempo della caduta libera di un grave dall'altezza AB del vaso dopo l'aprimento del *foro*, e perciò $v=\frac{a\sqrt{y+b}}{\sqrt{y-b}}$ è la formola, che doveva dare l'Autore invece della data $v=a+\frac{ab}{y}$ ben diversa.

32. Infatti mettendo il fondo assoluto $y=30$, ed il reale $b=29$, cosicchè il foro sia $=1$, la formola esibita dall' Autore dà $v=a\,(1,96)$, e la formola qui riformata dà $v=a\,(7,68)$.

33. E mettendo b quasi eguale ad y la formola esibita non arriva a dare $v=2a$, e la qui riformata dà v quasi infinita: affatto contro la sperienza. Questo solo mostra, che *i nuovi principj d'Idraulica* di M. *Bernard* hanno un qualche vizio, o dei vizj molto gravi.

RIFLESSIONE II

34. Ma vi è di più. Anche accordando che lo strato AN fosse per arrivare in IM nel tempo voluto da M. *Bernard*, mostrerò, che tuttavia la formola $v=a+\frac{ab}{y}$ non regge perchè dedotta male.

Infatti giusta l'Autore, aperto il foro, lo strato superiore AN deve discendere fino in IM nel tempo, che un grave può cadere dall'altezza del vaso, e tale discesa deve seguire come se lo strato fosse animato da una gravità, cioè con moto

uniformemente accelerato: e stando al principio notissimo, che pure si vede adottato dall'Autore alla pag. 29, §. 45 la velocità dello strato giunto in IM dev'essere quella, colla quale un corpo nel tempo di tale discesa potrebbe scorrere uniformemente uno spazio doppio della discesa AI.

35. Al n.° 18 colle denominazioni dell'Autore ho trovato $AI = a \cdot \frac{y^2 - b^2}{y^2}$. Dunque la velocità dello strato AN giunto con moto accelerato in IM dovrebb'esser quella di un corpo, che nel tempo della detta discesa per AI, l'altezza AI scorresse uniformemente uno spazio $2AI = 2a \cdot \frac{y^2 - b^2}{y^2}$.

36. E perchè come il foro $PQ = y - b$ alla sezione y del vaso, così deve stare la velocità di ogni strato dell'acqua nel vaso alla velocità dell'acqua pel foro, si trova, che all'arrivo del detto strato AN in IM la velocità pel foro dovrebb'essere di scorrere uno spazio $v = 2a + \frac{2ab}{y}$ uniformemente in un tempo eguale al tempo della discesa dello strato AN per AI, che qui coll'Autore si suppone eguale al tempo della caduta di un grave dall'altezza $a = AB$ del vaso.

37. Dunque anche accordando all'Autore ciò, che non gli si avrebbe dovuto accordare, risulta sempre una velocità pel foro diversa da quella dell'Autore. In questo caso è doppia; e si scosta troppo dal vero, giacchè quando il foro è piccolo, rapporto al fondo, dà il doppio della sperienza.

38. E perchè come il foro $y - b$ alla sezione y del vaso, così deve stare la velocità dello strato in IM alla velocità pel foro, si trova, che allora la velocità pel foro PQ dovrebbe essere $v = 2a + \frac{2ab}{y}$, cioè doppia di quella, che l'A. assegna pel foro all'arrivo dello strato AN in IM, nel qual caso i Nuovi Principj dell'Autore si scosterebbero troppo dalla sperienza.

39. Merita poi una singolare riflessione la ipotesi dell'Autore

tore, che giunto lo strato AN con moto accelerato in IM debba sul momento cessare l'accelerazione onninamente, e che in appresso debba lo strato continuare bensì la sua discesa, però con movimento affatto uniforme. Di un fenomeno di tal natura ognuno mi accorderà, che all'Autore correva l'obbligo di addurne una qualche causa: ma questa dall'Autore si aspetta invano.

40. Egli è quindi, che io metto una tale ipotesi fra le arbitrarie. Anzi perchè un effetto senza causa in natura non si dà, io la metto fra le assurde.

RIFLESSIONE III

41. Parmi, che queste, ed altre eccezioni che potrei aggiugnere, sieno state presentite dall'Autore, giacchè alla pag. 8 non lo vedo molto lontano dall'essere contento nel caso, che la sua formola $v = a + \frac{ab}{y}$ venisse riguardata almeno come una semplice ipotesi, però da valutarsi per la ragione, che ha il *merito* (pag. 8) d'essere conforme alla sperienza nei due casi estremi del foro infinitamente piccolo, e del foro eguale al fondo assoluto.

42. A che servirebbe ciò se poi in tutti i casi intermedj la formola recedesse dalla sperienza?

43. Finchè il foro è piccolissimo egli è vero, che il fondo reale b può considerarsi come eguale al fondo assoluto y, e la formola diviene $v = a + \frac{ab}{y} = 2a$, ed in tal caso convengo, che la formola viene confermata dalla sperienza, la quale allora dà, che la velocità pel foro contratto sia quella di un corpo, che nel tempo della caduta libera di un grave dall'altezza a del vaso scorre uniformemente uno spazio pressochè $= 2a$.

44. Ma io mostrerò, che in tutti gli altri casi la formola inganna, e che arriva a scostarsi dal vero fuor di modo.

45. Per ora verrò soltanto al confronto della formola colla sperienza nell'altro caso estremo del foro eguale al fondo.

46. Sia il vaso cilindrico ABCD (*Fig. II*) pieno d'acqua, e da mantenersi sempre pieno allorchè gli venga aperto un foro nel fondo, e si dica anche qui a l'altezza AD del vaso. Si levi a un tratto il fondo DC, e saremo nel caso del foro eguale al fondo assoluto. Tutti gli strati dell'acqua nel vaso liberati dall'ostacolo ubbidiranno alla gravità completamente, e discenderanno colla legge dei gravi; e lo strato, che al mancare del fondo DC si trovava in AB, arrivato in DC giusta le regole note avrà una velocità di potere con essa correre uniformemente uno spazio $2AD = 2a$ nel tempo della caduta libera di un grave per AD.

47. Ma la formola $v = a + \frac{ab}{y}$ per essere in questo caso estremo $b = 0$ dà $v = a$, cioè dà, che lo strato AB giunto in DC abbia la sola velocità di scorrere sul detto tempo lo spazio a. Dunque le regole note, e la sperienza danno, che in capo al primo tempo della caduta di un grave per AD dopo la mancanza del fondo la velocità pel foro eguale al fondo DC sia doppia di quella, che dà la formola.

48. Andiamo avanti. Giunto il contemplato strato AB in DC sarà uscito per DC un cilindro ABCD di acqua.

49. Ma intanto il vaso deve essere stato mantenuto tutto pieno d'acqua, e l'acqua introdotta dev'essere tutta affetta della stessa velocità, che abbiamo trovato avere lo strato DC disceso da AB, perchè se un qualunque altro strato *mn* avesse una velocità minore egli è manifesto, che tra i due strati vi sarebbe un qualche vóto contro il supposto.

50. E qui è pure da dirsi, che questo secondo cilindro d'acqua perchè non impedito ubbidirà completamente alla gravità accelerando vieppiù la sua discesa secondo la legge dei gravi, e che al suo ultimo uscire per DC si avrà pel foro DC una velocità maggiore di quella, che vi si ebbe all'ultimo uscire del primo cilindro, cioè più che doppia della velocità della formola.

51. Continuando questo discorso si trova, che la velocità per DC non si ridurrà mai a una uniformità, ma che si farà sempre maggiore, ed in modo, che nel primo tempo eguale a quello della caduta di un grave per AD uscirà dal vaso un cilindro ABCD di acqua: nel successivo tempo eguale al primo ne usciranno tre; nel terzo cinque ec., e che in conseguenza la velocità pel foro si scosterà dalla velocità della formola sempre, e sempre più finchè il vaso verrà mantenuto pieno.

52. Altrove mostrerò, che la formola si scosta dalla sperienza anche nei casi intermedj.

RIFLESSIONE IV

53. Intende M. *Bernard* di appoggiare la sua formola dicendola (pag. 9) conforme ai risultati della Teorìa del *Newton*. Ecco come egli scrive " denominando a l'altezza del vaso, „ y il fondo assoluto, b il fondo reale, $y-b$ il foro, trova „ il *Newton* (pag. 292, 293 del Tomo II con comenti stampato „ in Ginevra) che nel tempo, che un grave cade liberamen- „ te dall'altezza del vaso uscirebbe pel foro un cilindro d'ac- „ qua, che avendo per base questo foro contratto sarebbe „ dall'altezza $v = 2a \times \frac{y}{y+y-b} = \frac{2ay}{2y-b}$. Ora in questa formo- „ la supponendo il foro eguale al fondo assoluto, il fondo „ reale diviene $= 0$, ed anche $b = 0$; e $v = \frac{2ay}{2y} = a$. Que- „ sto è il caso nel quale l'acqua cade liberamente. Quando „ il foro è infinitamente piccolo, $b = y$; dunque $v = \frac{2ay}{2y-y} =$ „ $2a$; ciò che è conforme alla sperienza „ fin qui M. *Bernard*, il quale, perchè la da esso esibita formola del *Newton* fuori dei detti due casi estremi non combina colla sua, riprende il *Newton* per la ragione, che non ha impiegato dei principj *cogniti*, come conviene nella soluzione dei Problemi.

54. Qui l'Autore ha equivocato gravemente; non ha inteso il *Newton*.

55. Per determinare la velocità dell'acqua pel foro nel fondo di un vaso mantenuto sempre pieno d'acqua immagina il *Newton* (Prop. 36 di quel Tomo II) il caso di un cilindro PABQ (*Fig. III*) di ghiaccio dell'asse HR, verticale, di una altezza indefinita, che discenda perpetuamente con velocità uniforme, ed eguale a quella di un grave caduto liberamente da un'altezza IH da determinarsi dalle misure del vaso, e del foro; e finge, che all'arrivo del cilindro in AB (bocca superiore del vaso cilindrico ABDC) si squagli, e suppone, che da AB in giù l'acqua divenuta fluida continui la discesa colla legge dei gravi formando una cateratta, o colonna ABNEFM, la quale secondo, che cresce la velocità, diminuisce di sezione, e che esca pel foro EF. Sulle prime finge lo spazio ACEM, BDFN pieno di ghiaccio. In queste ipotesi determina il *Newton* la sua legge della velocità dell'acqua pel foro EF; ed intende, che la medesima velocità si abbia anche essendo l'acqua nel vaso divenuta tutta fluida.

56. Venendo poi alle citate pagine 292, 293 non si trova, che il *Newton* ivi parli punto del tempo della caduta di un grave dall'altezza del vaso, come falsamente ci asserisce M. *Bernard*.

57. In quel sito citato sta il Corollario terzo della proposizione 36, col quale il *Newton* non fa, che dimostrare sinteticamente, che come sta la somma dei circoli AB, ed EF al doppio del circolo minore EF, così sta l'acqua tutta nel vaso all'acqua componente la cateratta ABNFEM. Mi giova il dimostrare qui lo stesso analiticamente.

58. Poichè in AB l'acqua ha la velocità di un grave caduto dall'altezza IH, e continua la sua discesa colla legge dei gravi cadenti liberamente (14), la velocità dell'acqua per ogni altra sezione MN sarà quella di un grave caduto dall'altezza IO, onde le velocità per AB e per MN saranno $:: \sqrt{IH} : \sqrt{IO}$.

59. E perchè il movimento dell'acqua della cateratta è uniforme, giacchè uniforme è la discesa del cilindro AQ di ghiaccio (55), si vede, che in tempi eguali passano per le due sezioni AB, MN quantità eguali di acqua, e perciò le due sezioni saranno in ragione inversa della velocità dell'acqua, ossia delle radici delle altezze IH, IO, cosicchè avremo; sezione AB : sezione MN :: $\sqrt{IO} : \sqrt{IH}$. Ritenendo le denominazioni al n.° 53 avremo qui $AC = a = HG$, la sezione $AB = y$, la sezione $EF = y - b$. Si dica inoltre $IH = z$, $HO = x$, ed una sezione $MN = u$. Sarà $IO = z + x$; $IG = z + a$.

60. Perciò sezione $AB = y$: sezione $MN = u :: \sqrt{IO = z + x} : \sqrt{IN = z}$; onde $y\sqrt{z} = u\sqrt{z + x}$ (N).

61. Quando x crescendo diviene $= HG = a$ la sezione $MN = u$ diviene sezione $EF = y - b$, e l'equazione (N) diviene $y\sqrt{z} = \overline{y - b}\sqrt{z + a}$, d'onde si ricava $z = a\frac{(y-b)^2}{2by - b^2} = IH$.

62. E dalla stessa equazione (N) si ha $x = \frac{y^2 z}{u^2} - z$.

63. E siccome qui le y, z sono costanti, differenziando sarà $\partial x = -\frac{2y^2 z \partial u}{u^3}$. Condotta una mn infinitamente prossima alla MN sarà $Oo = \partial x$, e l'elemento ANnm della cateratta sarà $u\partial x = -\frac{2y^2 z \partial u}{u^2}$.

64. Ed integrando per modo, che quando $u = y$ l'integrale sia $= 0$ si avrà $\int u \partial x = \frac{2y^2 z}{u} - 2yz$, volume del tronco ABNM della cateratta.

65. Passando poi dalla sezione MN al foro EF avremo $u = y - b$, e sostituendo in luogo della z il trovato suo valore $\frac{a(y-b)^2}{2by - b^2}$ (61) si troverà $\frac{2ay(y-b)}{2y-b}$ volume della cateratta intiera ABNFEM, quarto termine proporzionale ai tre $2y - b$, $2(y - b)$, ay, essendo $2y - b = y + y - b$ somma dei due circoli AB, EF; e $2(y - b)$ il doppio del circolo EF; ed ay

l'acqua tutta nel vaso, appunto come mostra il *Newton* nel Corollario citato (17).

66. Questo volume della cateratta intiera diviso pel foro $y-b$ lascia $\frac{2ay}{2y-b}$ altezza di un cilindro della base eguale al foro, e del volume eguale alla cateratta, e non (come ha equivocato M. *Bernard*) eguale al volume dell'acqua uscito pel foro in un tempo, che impiegarebbe un grave cadendo dall'altezza del vaso; che è ben diverso dal volume della cateratta.

67. Infatti alla citata pag. 292 il *Newton* dice, che l'acqua uscita per un foro EF nel tempo, che un grave potrebbe cadere non dall'altezza HG del vaso, ma dall'altezza IG, è del volume di un cilindro della base eguale al foro, e dell'altezza $=2$IG. Ho trovato (61) $IH=z=a\frac{(y-b)^2}{2by-b^2}$, e la HG si è detta $=a$ (53), con che si ha $IH+HG=IG=\frac{ay^2}{2by-b^2}$; e $2IG=\frac{2ay^2}{2by-b^2}$; e moltiplicando in $y-b=$ foro, avremo $\frac{2ay^2(y-b)}{2by-b^2}$ volume dell'acqua uscita giusta il *Newton* per EF nel tempo, che un grave cade per IG.

68. Ma la velocità dell'acqua per EF è uniforme. Dunque per avere l'acqua uscita pel foro nel tempo dell'Autore; cioè nel tempo della caduta per AG, basterà dire come il tempo della caduta di un grave da I in G al tempo della caduta da H in G, ossia $::\sqrt{IG}:\sqrt{HG}$, così l'acqua uscita nel tempo del *Newton* all'acqua uscita nel tempo di M. *Bernard*. Quindi $\sqrt{\frac{ay^2}{2by-b^2}}:\sqrt{a}::2ay^2\frac{(y-b)}{2by-b^2}$, che è il volume dell'acqua uscita nel tempo, che un grave cade per HG; il qual volume diviso per $y-b=$ foro lascia $\frac{2ay}{\sqrt{2by-b^2}}$ altezza del cilindro della base eguale al foro EF, e del volume dell'acqua uscita (stando al *Newton*) nel tempo, che un grave cade dall'altezza del vaso.

69. Questa è l'altezza di un cilindro, che ci doveva dare M. *Bernard* alla pag. 9, invece della quale, per non avere inteso il *Newton*, ci ha dato l'altezza $\frac{2ay}{2y-b}$, la quale non è altro, che l'altezza del cilindro della base bensì eguale al foro, ma del volume della cateratta.

70. Confrontando le due formole $v=a+\frac{ab}{y}$ di M. *Bernard*, e l'altra $v=\frac{2ay}{\sqrt{2by-b^2}}$, che è del *Newton*, si trova bensì, che nel caso estremo del foro infinitesimo posto $b=y$ si accordano dando ambedue $v=2a$. Ma in tutti gli altri casi discordano sostanzialmente, perchè al crescere del foro, ossia al calare del fondo reale b, la formola dell'A. dà delle velocità vieppiù minori, e quella del *Newton* le dà sempre maggiori.

71. Notabilissima è poi la discrepanza delle due formole nell'altro caso estremo del foro eguale al fondo, nel quale essendo $b=0$ la formola di M. *Bernard* diviene $v=a$, e quella del *Newton* diviene $v=\infty$.

RIFLESSIONE V

72. Dopo di avere redarguito il *Newton* alla pag. 10, perchè non ha impiegato dei principj *cogniti*, passa M. *Bernard* nella stessa pagina ad attaccare i celebri Geometri *MacLaurin*, *Daniele Bernoulli*, *Giovanni Bernoulli*, *Eulero*, *D'Alembert* ec. Per dare un giudizio della loro Teorìa crede, che basti il prendere in esame la formola di *Giovanni Bernoulli*, alla quale si accostano tutte quelle degli altri.

73. La formola è $z=\frac{h^2}{h^2-m^2}$ essendo z l'altezza dalla quale un grave cadendo può acquistare la velocità dell'acqua pel foro; h è la sezione del vaso, ed m è l'aja del foro nel fondo. Fa riflettere, che secondo questa formola, crescendo

il foro *m*, cresce ancora la velocità dell'acqua pel foro. *Ora* (egli dice alla pag. 13) *questo è assolutamente contro la sperienza*.

74. In prova di un'asserzione sì franca io stavo in attenzione di sperienze immediate con un vaso cilindrico, col foro *m* nel fondo, ora piccolo, ora grande; ma mi sono ingannato. Le sperienze addotte dall'Autore non sono, che alcune sperienze indirette, quali sono quelle dei getti all'insù delle fontane artificiali; sperienze in parte non vere, ed in parte non applicabili al caso nostro, che è di getti all'ingiù.

75. Ecco gli argomenti di M. *Bernard*. La formola vuole, che crescendo il foro nel fondo del vaso cilindrico cresca la velocità dell'acqua pel foro; dove che la sperienza dà, che i getti, crescendo il foro, si alzino meno, indizio di una velocità diminuita per lo stesso foro.

76. Inoltre se la formola fosse vera, la velocità, pel foro, di un getto sarebbe sempre maggiore di quella di un grave caduto dall'altezza del vaso; ed in conseguenza di questo il getto si alzarebbe sempre sopra il livello della conserva, dove che i getti restano sempre al disotto di quel livello.

77. Prima piacemi di notare di passaggio, che nella taccia, che qui l'Autore intenderebbe di dare ai *Bernoulli*, ed ai da esso nominati rispettabili Geometri, cade anche il *Newton*, dalla cui teorìa deriva la stessa formola Bernoulliana in questione.

78. Di questo se ne veda in fine la prova segnata A.

79. Vengo ora alla prima difficoltà di M. *Bernard*, che i getti crescendo il foro si alzino meno. Fa veramente caso, che M. *Bernard*, il quale mostra pure di aver veduta la Idrodinamica del Sig. Abb. *Bossut*, non siasi incontrato nelle sperienze I, II, III nel Tomo secondo (589).

80. La carica, ossia l'altezza dell'acqua nella conserva sopra il foro era in tutte tre di piedi 11.

81. Nella prima col foro largo 2 linee, il getto verticale si alzò piedi 10. 0. 10.

82.

82. Nella seconda col foro largo 4 linee il getto verticale si alzò piedi 10. 5. 10.

83. Nella terza essendo il foro largo 8 linee, il getto si elevò piedi 10. 6. 6.

84. Il Sig. Abb. *Bossut* nella riflessione (586) adduce la ragione dicendo: *i getti grossi s'alzano più dei piccoli*, perchè di due getti, che escono dai loro zampilli con velocità eguali, il più grosso ha più materia, ed in conseguenza ha più forza per vincere gli ostacoli opposti, che i più piccoli.

85. Anche *Mariotte* aveva trovato, che i getti grossi si alzano più, e ne aveva addotto una ragione consimile nelle sue *Regole per i Getti d'Acqua*. Avendo egli dato una Tavola delle altezze delle conserve per ottenere dai getti delle altezze dai 5 ai 100 piedi, soggiunge. " Lo sfregamento dei „ zampilli scema un poco di questa proporzione nelle grandi „ altezze: per questo egli è necessario, che in queste gran- „ di altezze i zampilli abbino un foro di 10, o 12 linee; „ perchè se n'avessero di due, o di tre linee, l'acqua si al- „ zarebbe molto meno di ciò, che dà questa Tavola; oltre „ di che l'aria resiste molto più a un piccolo corpo, che a „ un più grande, come se ne vede l'esempio nelle armi a „ fuoco, che portano più lontano una palla grossa, che una „ piccolissima, come la munizione, o la polvere di piombo „.

86. Conviene bensì, che al foro possa arrivare l'acqua in una copia proporzionata. Potrebbe essere, che il tubo E (*Fig. IV*) di condotta non fosse di una tale larghezza, che bastasse per mantenere la massima altezza del getto essendo il foro F di 6 linee, ma che bastasse per un getto di 4 linee. Allora sì, che il getto più sottile salirebbe più alto, che il getto più grosso. Ma ciò accaderebbe per difetto di afflusso di acqua. Ma quando il tubo E di condotta sia di un diametro sufficiente, accaderà sempre, che il getto si eleverà più col foro di 6 linee, che col foro di 2 linee.

87. Non sussistendo perciò generalmente il supposto di M. *Bernard*, che i getti delle fontane crescendo il foro s'al-

zino meno, non sussisterà neppure la deduzione dell'Autore dal suo supposto, la quale è, che crescendo il foro nel fondo del nostro vaso l'acqua debba uscirne con una velocità minore.

88. Ma posto anche per un momento, che i getti, crescendo il foro, si alzassero meno, e che insieme la velocità pel foro cresciuto divenisse minore, non valerebbe già neppure in questa ipotesi la deduzione dell'Autore, che lo stesso dovesse accadere anche al foro fatto nel fondo del vaso. Eccomi colla sperienza.

89. Al vaso ACDB (*Fig. V*) abbiamo unito (col Signor *Luigi Gozzi* abile mio sostituto) il vaso cilindrico NPQO, ed a questo abbiamo unito una cassetta PGHR, come mostra la figura.

90. Le misure sono.

Diametro AB	= pollici	5
Diametro NO	= linee	5
AC	= pollici	13
QO	= pollici	7
QR	= pollici	2
Cassetta larga, ed alta	linee	9

91. Un foro in V ha il suo centro nell'asse dei due cilindri AD, NQ.

92. Il centro del foro T dista dal centro del foro V linee 16.

93. Verticalmente al foro T sovrasta un foro I.

94. Nelle seguenti tre sperienze il diametro dei fori era di una linea.

Sperienza I

95. Chiusi i tre fori abbiamo empito tutto con acqua. Indi aperto il foro I, l'acqua nel vaso superiore si è abbassata otto pollici in secondi 250.

Sperienza II

96. Chiuso il foro I, abbiamo riempito tutto con acqua fino a 9 linee sotto all'orlo AB, cosicchè l'acqua restava più alta dei due fori T, V quanto lo era sopra il foro I al principio della sperienza precedente. Aperto indi il foro T, l'acqua nel vaso superiore si è abbassata otto pollici in secondi 250, pochissimo meno.

Sperienza III

97. Chiuso il foro T, e riempito il tutto con acqua, come nella sperienza precedente, ed aperto il foro V, il calo dell'acqua, nel vaso superiore, di otto pollici è seguito parimenti in secondi 250.

98. Nelle seguenti tre sperienze i fori I, T, V erano stati allargati sino al diametro di quattro linee.

Sperienza IV

99. Chiusi i fori, ed empito tutto con acqua sino a tre linee sotto l'orlo del vaso superiore, ed aperto indi il foro I, si è avuto nel vaso superiore l'abbassamento della superficie dell'acqua, di dieci pollici in secondi 42.

Sperienza V

100. Chiuso il foro I, ed empito tutto d'acqua sino ad un pollice sotto l'orlo AB, ed aperto il foro T, si è avuto il calo di dieci pollici in secondi 42 poco meno.

Sperienza VI

101. Chiuso il foro T, riempito il tutto di acqua sino a un pollice sotto l'orlo AB, ed aperto il foro V, il calo di dieci pollici è seguito in secondi 34.

102. Si veda pertanto, che quando i fori erano piccoli, cioè di una linea, la velocità pel foro I del getto è stata eguale alle velocità per T, e per V. Ma quando i fori sono stati grandi, cioè del diametro di 4 linee, essendo il diametro del vaso NQ di cinque linee, la velocità del getto è stata bensì eguale alla velocità dell'acqua pel foro T sottoposto al foro I, ma è stato notabilmente minore della velocità pel foro V da considerarsi come nel fondo del vaso BG.

103. Non essendo pertanto vero il supposto di M. *Bernard*, che la velocità in I di un getto sia sempre eguale alla velocità dell'acqua per un foro V, essendo i fori, e le cariche eguali, sparisce anche qui tutta la forza dell'argomento di M. *Bernard* contro la formola del *Bernoulli*.

RIFLESSIONE VI

104. Invece di ricorrere alle sperienze indirette dei getti, perchè non rivolgersi a sperienze dirette, immediate, e che non abbisognino di raziocinj complicati per applicarle, cioè a sperienze con vasi cilindrici con un foro nel fondo ora piccolo, ed ora grande?

105. Qui M. *Bernard* risponde, che sperienze con un foro grande rapporto al fondo non ne sono state fatte, e che per farle a dovere s'incontrano delle difficoltà (pag. 19). Le difficoltà si trovano intorno al rimpiazzare nella parte superiore del vaso l'acqua, che esce pel foro.

106. Nelle prime pagine dove l'Autore espone la sua teorìa, prescrive, che l'acqua venga aggiunta priva affatto d'ogni movimento. Solamente alla pag. 16 dichiara essere suo parere, che l'acqua, che si aggiunge, dovrebbe essere affetta di quella stessa velocità, che ha l'acqua nel vaso; perchè altrimenti si anderebbe ad introdurre nell'acqua del vaso dei movimenti irregolari atti ad alterarne la velocità naturale pel foro; e dice, che per ottenere l'intento una maniera ci manca.

107. Anche *Giovanni Bernoulli* (Idraulica Parte prima X) vuole, che l'acqua venga aggiunta colla velocità dell'acqua nel vaso, ma non ne dice il modo.

108. Il *Newton* dà una maniera di aggiugnere in AN (*Fig. I*) acqua affetta di una velocità data. La maniera è giusta teoricamente; ma in pratica è ineseguibile. Consiste in quel cilindro indefinito di ghiaccio qui sopra descritto (55), il quale discenda uniformemente, ed all'arrivo in AB (*Fig. III*) si converta in acqua fluida.

109. Quella maniera, che altri non videro, cadde in mente a me. L'abbiamo tentata (bensì finora in piccolo), e l'abbiamo trovata eseguibile. Sia NPQO (*Fig. VI*) un vaso cilindrico con un foro F nel fondo. Si abbia un altro vaso più alto, e più largo ABCD, con un foro E nel fondo, armato di un tubo addizionale, il di cui diametro sia eguale al diametro del vaso NQ; ed a questo vaso sia sovrapposto l'altro, come mostra la figura.

110. Le misure dei due vasi siano tali, che empiti d'acqua, ed aperti i due fori E, F, l'acqua del foro E mantenga il vaso inferiore pieno, anzi sulle prime trabocchi in parte dall'orlo NO.

111. Questo trabocco anderà scemando secondo, che la superficie dell'acqua nel vaso superiore s'abbasserà; ed al momento, che il trabocco cesserà si noti prontamente il punto R, fino al quale l'acqua del vaso superiore si sarà abbassata. Se in appresso coll'aggiugnere acqua nuova si manterrà nel vaso superiore la superficie al punto R, egli è chiaro, che il vaso NQ continuerà ad esser pieno, e senza trabocco, e che in tempi eguali passerà egual corpo di acqua per ogni sezione, tanto del tubo addizionale, che per ogni sezione del vaso NQ, e pel foro F.

112. E che essendo le sezioni del tubo addizionale E, e del vaso NQ per ipotesi eguali, la velocità dell'acqua pel tubo sarà eguale alla velocità pel vaso.

113. E che in conseguenza avremo il caso di un vaso

cilindrico NPQO, che a foro aperto nel fondo vien mantenuto pieno con acqua aggiunta nella parte superiore affetta della stessa velocità, che ha l'acqua discendente per lo stesso vaso NPQO.

114. Con questa circostanza, avuta in vista dal *Newton*, prescritta da *Giovanni Bernoulli*, e desiderata dallo stesso M. *Bernard*, abbiamo fatte le esperienze seguenti.

Sperienza VII

115. Il vaso NPQO era del diametro di linee 5, ed alto sette pollici, col foro F nel fondo, largo linee 4.

116. Il vaso superiore ACDB era di cristallo, alto 13 pollici, e del diametro di pollici 5, col foro E con tubo addizionale del diametro eguale a quello del vaso sottoposto, ossia di linee 5.

117. Empito tutto d'acqua, ed aperti indi i fori E, F, l'acqua da E sulle prime non solo manteneva pieno il vaso NQ ma in parte traboccava dall'orlo NO. Al cessare del trabocco l'acqua nel vaso superiore si era ridotta all'altezza CR di linee 48.

118. Allora coll'aggiugnere acqua nuova venne mantenuto il vaso superiore pieno all'altezza CR dieci minuti secondi, e l'acqua uscita in quel tempo uniformemente da F fu raccolta in un vaso cilindrico GLMH del diametro di cinque pollici, nel quale formò l'altezza di linee 35.

119. Dunque in un secondo era uscito per F un cilindro di acqua alto linee $3\frac{1}{2}$, e del diametro di pollici 5, ossia di linee 60, essendo il diametro del foro F di linee 4.

120. Poichè le altezze di cilindri eguali sono in ragione inversa dei quadrati dei diametri delle loro basi, se faremo $4^2 : 60^2 :: 3\frac{1}{2} :$ al quarto termine proporzionale, che è $787\frac{1}{2}$, sarà questo l'altezza del cilindro d'acqua della base eguale al foro F, uscita in un minuto secondo dallo stesso foro F con velocità uniforme.

121. Le dette linee $787\frac{1}{2}$ sono pollici 65. 7; che io dirò $= m$; e si cerchi l'altezza x dalla quale un grave cadendo liberamente acquista la velocità di scorrere un minuto secondo lo spazio m con moto uniforme.

122. In un minuto secondo un grave cade dall'altezza di piedi 15. 1, ossia di pollici 181; ed acquista la velocità di scorrere in un altro secondo uniformemente uno spazio doppio, cioè pollici 362. E perchè le velocità così acquistate dai gravi cadenti sono come le radici quadrate delle cadute, avremo perciò l'analogìa $\sqrt{181} : \sqrt{x} :: 362 : m$ d'onde si ha $x = \frac{m^2}{724} =$ (nel caso nostro) pollici 6, altezza dalla quale un grave cadendo liberamente acquista la velocità che ebbe l'acqua uscendo da F, essendo nel vaso superiore mantenuta all'altezza CR.

Sperienza VIII

123. Il diametro del foro F era stato fatto di linee $4\frac{1}{2}$. Il resto era come prima.

124. Empiti di nuovo i due vasi AC, NQ ed aperti indi i due fori E, F, anche questa volta sulle prime si ebbe del trabocco dall'orlo NO, il quale cessò allorchè l'acqua nel vaso superiore fu ridotta all'altezza CR sopra il fondo di linee 98.

125. Mantenendo l'acqua alla stessa altezza CR, l'acqua uscita da F in cinque secondi fece nel vaso GLMN l'altezza di linee 25. Dunque in un secondo vi aveva fatto l'altezza di linee 5.

126. Perciò facendo $(4\frac{1}{2})^2 : 60^2 :: 5$ al quarto termine $888\frac{8}{9}$, sarà questa l'altezza in linee del cilindro di acqua uscita in un secondo dal foro F, la cui base sia lo stesso foro F del diametro di linee $4\frac{1}{2}$; sono pollici $74\frac{8}{27}$ il cui quadrato (122) diviso per 724 pollici come sopra, dà pollici $7\frac{1}{2}$, che è l'altezza dalla quale un grave cadendo può ac-

quistare la velocità dell'acqua pel foro F in questa sperienza; altezza maggiore dell'altezza NQ, che è di pollici 7.

Sperienza IX

127. Al foro F fu dato il diametro $4\frac{3}{4}$. Empiti per la terza volta i due vasi AC, NQ, ed aperti indi i fori E, F, non si ebbe trabocco dall'orlo NO, anzi il vaso sottoposto NQ non arrivò ad esser pieno del tutto, e presto in esso l'acqua calò sensibilmente. Si vede che se il vaso superiore fosse stato più alto in modo, che anche in questa sperienza si avesse avuto trabocco, l'acqua indi al cessare del trabocco si sarebbe ridotta a una altezza CR maggiore dell'altezza del vaso, che era alto linee 156, d'onde viene, che la velocità per F sarebbe stata sempre maggiore, che nelle due sperienze precedenti.

Conseguenze.

128. Perchè nella *sperienza VIII* la velocità pel foro F fu quella di un grave caduto dall'altezza di pollici $7\frac{1}{2}$ (126), e l'altezza del vaso NQ è di soli 7 pollici, sarà questa, per quanto io sappia, la prima sperienza nella quale la velocità dell'acqua pel foro nel fondo di un vaso cilindrico mantenuto sempre pieno, sia stata maggiore dell'acquistata da un grave caduto liberamente dall'altezza del vaso, e sarà questa una sperienza, che M. *Bernard* non se la sarebbe forse aspettata mai.

129. E non meno è da dirsi, che l'Autore non si sarebbe aspettato mai le tre ultime sperienze, nelle quali al crescere del foro nel fondo del vaso le velocità sono state maggiori, conchè si oppongono diametralmente alla sua formola fondamentale $v = a + \frac{ab}{y}$, e vi si oppongono con divarj assai notabili.

130. Infatti nella *sperienza VII* il diametro del fondo assoluto y era di linee 5, e quello del foro F era di linee 4 (115), onde facendo $5^2 : 4^2 :: y$ al quarto termine $\frac{16y}{25}$, sarà questo l'aja del foro F, la quale tolta dal fondo assoluto y lascia il fondo reale $b = \frac{9y}{25}$, e perciò $\frac{b}{y} = \frac{9}{25}$, e $v = a + \frac{ab}{y} =$ linee $84 + 84 \times \frac{9}{25} =$ linee $114\frac{16}{25}$, velocità in questo caso di M. *Bernard*, e la velocità della sperienza è stata di linee $787\frac{1}{2}$ (120).

131. Nella *sperienza VIII* il diametro del foro F era di linee $4\frac{1}{2}$. Facendo $5^2 : (4\frac{1}{2})^2 :: y$ al quarto termine $\frac{(4\frac{1}{2})^2 \cdot y}{25} = \frac{20\frac{1}{4} \cdot y}{25}$, sarà questo la nuova aja del foro F, la quale tolta dal fondo assoluto y lascia il fondo reale $b = \frac{4\frac{1}{4}y}{25}$, onde $\frac{b}{y} = \frac{4\frac{1}{4}}{25} =$ linee 108, velocità di M. *Bernard*, dovechè la sperienza ha dato linee $888\frac{8}{9}$ (126).

132. E se nella *sperienza IX* il vaso superiore fosse stato alto abbastanza, si vedrebbe la velocità di M. *Bernard* sempre più lontana dalla velocità della sperienza (127).

133. Il nominato Sig. *Cozzi* col comodo del corredo della mia Scuola d'Idraulica, veduto il successo delle descritte *sperienze VII, VIII, IX*, me ne ha fatto altre quattro consimili, le quali anche perchè eseguite con un vaso più largo servir possono per una buona conferma delle precedenti.

134. In luogo del vaso cilindrico NQ (*Fig. VI*) del diametro di linee 5 (115) qui abbiamo il vaso cilindrico PQSR (*Fig. VII*) del diametro di linee 17.

135. Il vaso superiore ABCD ha la bocca del diametro AB di pollici 30, ed il fondo del diametro DC di pollici $25\frac{1}{2}$.

136. AED è un cannello comunicante col vaso, ed es-

sendo colla parte *Am* di vetro serve per indicare le altezze della superficie dell'acqua dentro il vaso superiore V.

137. Nel mezzo del fondo DC havvi un foro HI del diametro di linee 17, cioè eguale al diametro del vaso cilindrico sottoposto PQSR. Lo stesso foro HI è armato di un tubo addizionale HILM, ed inoltre è armato di un imbuto interno FHIO per ottenere l'uscita dell'acqua per ML a bocca piena.

138. Le altre misure sono

AE = pollici 30
HM = linee 35
TH = linee 17
PR = pollici sei.

Sperienza X

139. Essendo il diametro del foro *ab* di linee 15 ½ furono empiti con acqua i due vasi V, Z. Poi aperti i due fori ML, *ab*, l'acqua da principio empiva il vaso inferiore, ed anzi traboccava dall'orlo NO, però sempre meno. Al cessare del trabocco la superficie dell'acqua nel vaso superiore si trovava a pollici 6 ½ sopra il fondo DC. Coll'aggiungere nuova acqua fu mantenuta la superficie a quell'altezza costantemente per 55 minuti secondi, nel qual tempo uscirono pel foro *ab* pollici cubi 5488 di acqua.

140. Mettendo con *Archimede*, che il quadrato del diametro all'aja del circolo stia come 14 a 11, trovo l'aja del foro *ab* di linee quadrate 188, 767, ossia (dividendo per linee quadrate 144 componenti un pollice quadrato) di pollici quadrati 1, 3108.

141. Dividendo poi i pollici cubi 5488 (139) pei 55 minuti secondi, si hanno pollici cubi 99, 781 d'acqua uscita pel foro *ab* in un minuto secondo con velocità uniforme. E questi, divisi per la trovata aja del foro, danno pollici 76, 122, altezza del cilindro di acqua uscito per *ab* della ba-

se eguale al foro in ognuno dei detti 55 minuti secondi, che sono lo spazio da scorrersi in un minuto secondo uniformemente da un corpo, che si muova colla velocità dell'acqua pel foro *ab*, ridotta all'uniformità.

142. Il quadrato del detto spazio di pollici 76, 122, diviso per 724 (122) dà pollici 8, altezza dalla quale un grave cadendo liberamente acquista la velocità, ch'ebbe l'acqua pel foro *ab* nel fondo del vaso cilindrico PQSR mantenuto pieno aggiungendovi acqua affetta della velocità stessa dell'acqua nel vaso (112), del quale l'altezza era di soli pollici 6, (138).

Sperienza XI

143. Il diametro del foro *ab* era di linee 16. Il resto era come qui sopra. Empiti i due vasi V, Z con acqua, ed aperti i fori, l'acqua, che da principio sormontava l'orlo NO, cessò di traboccare quando la superficie dell'acqua nel vaso superiore V si trovò sopra il fondo DC pollici 10.4. Aggiungendo nuova acqua fu mantenuta quella superficie alla medesima altezza 55 minuti secondi; in ognuno de' quali uscirono per *ab* pollici cubi di acqua 121, 769. Questi divisi per l'aja del foro *ab*, (che era di pollici 1, 396) danno pollici 87, 222 altezza di un cilindro d'acqua uscita uniformemente per *ab* in un minuto secondo. Il quadrato di quest'altezza diviso per 724 dà pollici 10.5, altezza, dalla quale un grave cadendo acquista la velocità dell'acqua per *ab* ridotta alla uniformità (122).

Sperienza XII

144. Essendo il foro *ab* largo linee 16 ½ furono riempiti i vasi con acqua. Aperti i fori, l'acqua cessò di traboccare allorchè la superficie nel vaso superiore fu a pollici 13 ½ sopra il fondo IX. Mantenuta con tale altezza per 55 minuti

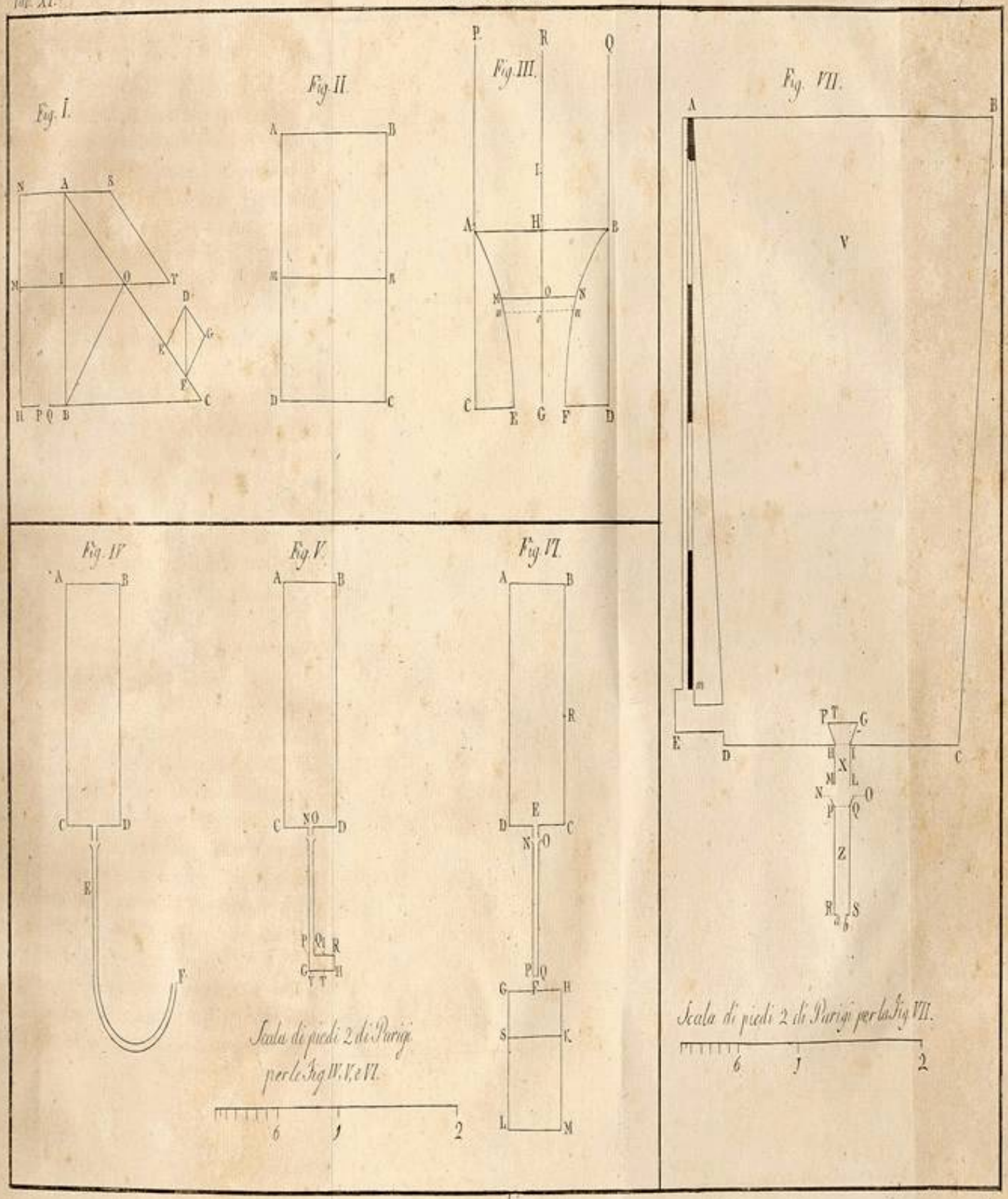
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Scala di piedi 2 di Parigi per le Fig. IV, V, e VI.
Scala di piedi 2 di Parigi per la Fig. VII.

secondi si ebbero dal foro *ab* pollici cubi di acqua 143,344 in ogni secondo; i quali divisi per l'aja del foro (che era di pollici 1,485) danno pollici 96,528, altezza del cilindro di acqua uscita per *ab* in un minuto secondo. Quadrando, e dividendo per 724 (122) si hanno pollici 12,8 altezza competente alla velocità dell'acqua per *ab* in questa sperienza.

Sperienza XIII

145. Il diametro del foro *ab* era di linee 16 $\frac{3}{4}$. Operando come sopra, il trabocco cessò quando la superficie nel vaso V fu a pollici 16,4 sul fondo. Mantenuta tale altezza durante il tempo di 55 minuti secondi, in ognuno di questi uscirono per *ab* pollici cubi 156,581 di acqua. Dividendo per pollici 1,530 (aja del foro) si hanno pollici 102,28 altezza del cilindro di acqua uscito per *ab* in un minuto secondo. Quadrando, e dividendo per 724 (122) avremo pollici 14,4, altezza d'onde un grave acquista la velocità dell'acqua di questa sperienza pel foro *ab*.

Conseguenze.

146. L'altezza del vaso di queste quattro sperienze era di soli 6 pollici (138); ed intanto nella sperienza X essendo il foro largo linee 15 $\frac{1}{2}$, si è avuta per esso la velocità competente all'altezza di pollici 8 (142); cioè quella, che può acquistare un grave cadendo dall'altezza di pollici 8; nella *sperienza XI* essendo il foro largo linee 16 la velocità per esso è stata la competente all'altezza di pollici 10,5 (143); nella *sperienza XII* essendo il foro largo linee 16 $\frac{1}{2}$, la velocità è stata quella, che compete all'altezza di pollici 12,8 (144); e nella *sperienza XIII* essendo il foro largo linee 16 $\frac{3}{4}$ si è avuta la velocità competente all'altezza di pollici 14,4 (145), il che conferma più che abbastanza:

1.° Che per un foro nel fondo di un vaso cilindrico,

mantenuto sempre pieno di acqua, si possono avere benissimo delle velocità sensibilmente maggiori di quella di un grave caduto liberamente dall'altezza dello stesso vaso.

2.° Che crescendo il foro, la velocità cresce; con che resta provato colla stessa sperienza la totale insussistenza della formola $v = a + \frac{ab}{y}$ risultante dai nuovi principj d'Idraulica di M. *Bernard*; cosa, che non recherà meraviglia a chi avrà veduto le mie *riflessioni I*, e *II*, colle quali mostro, che tai principj sono assai male stabiliti, e che anzi sono da dirsi assurdi.

Dimostrazione promessa al N.° 77.

La z del *Bernoulli* è l'altezza d'onde un grave cadendo liberamente acquista la velocità dell'acqua per un foro EF (*Fig. III*) nel fondo di un vaso cilindrico AB dell'altezza $= a$ mantenuto sempre pieno. La stessa altezza z giusta il *Newton* è l'altezza IG trovata al n.° 67 $= \frac{ay^2}{2by - b^2}$. Mettendo in luogo della y sezione del vaso, la h del *Bernoulli*, e mettendo in luogo di $y - b$, aja del foro, la m pure del *Bernoulli*, si trova che anche giusta il *Newton* deve essere $z = \frac{h^2 . a}{h^2 - m^2}$.