TEORIA
DELL' AZIONE CAPILLARE

Del Sig. De la Place

Ridotta alla piu' semplice ed elementare Geometria

Dal Sig. Giovacchino Pessuti.

Ricevuta li 22 Maggio 1808.

INTRODUZIONE.

1. Dopo che l'immortale Newton ebbe dimostrato coi più sottili e delicati esperimenti, che i raggi di luce, passando in grandissima vicinanza di certi corpi, sono da questi sensibilmente attratti o rispinti, dimostrò altresì irrefragabilmente che da queste forze attraenti o ripellenti nelle minime impercettibili distanze dipendevano unicamente i fenomeni e le leggi della riflessione e della rifrazione, fenomeni e leggi che sin allora non si appoggiavano che alla nuda osservazione, e la di cui spiegazione avea sin allora messo i Fisici a tortura inutilmente. Ciò che vi ha di più singolare in questa teoria della riflessione e della rifrazione si è, che in essa non vi è alcun bisogno di conoscere le leggi secondo cui agiscono quelle forze attraenti o ripellenti che adopera, e basta solo che si verifichi che quelle forze divengano insensibili in una sensibil distanza, e che in pari distanza dalle molecole che l'esercitano, sien sempre le stesse. Con queste due sole ipotesi, la prima delle quali è dimostrata dall'esperienza, e la seconda è per sè stessa evidente, Newton e i Fisici e Geometri che l'han poscia seguito, han potuto far vedere che in virtù dell'azione di quelle forze dovean sempre manifestarsi i tre principali fenomeni che la riflessione e la rifrazione della luce ci presentano, cioè 1. Che il raggio riflesso o rifratto debba sempre trovarsi in quel medesimo piano perpendicolare alla superficie riflettente o refringente, in cui trovasi il raggio incidente.

2. Che nella riflessione, tanto alla superficie anteriore che alla posteriore di un corpo riflettente, l'angolo di riflessione debba essere sempre eguale a quello d'incidenza; 3. Che nella rifrazione attraverso i corpi diafani debba mantenersi sempre costante, nel passaggio da un mezzo dato in un altro parimenti dato, la ragione del seno dell'angolo d'incidenza al seno dell'angolo di rifrazione.

2. Moltissimi sono poi certamente i fenomeni, oltre quei della riflessione e rifrazione della luce, che dipendono egualmente da queste attrazioni e ripulsioni sensibili soltanto nelle insensibili distanze, come la coesione, e tutte in genere le affinità chimiche; ma siamo tuttavia ben lontani dal poterci lusingare di assoggettare ancor questi, come i primi, all'impero dell'Analisi e della Geometria. Difatti si è riguardato meritamente come un passo di somma importanza nella teoria delle affinità chimiche quello che ha recentemente fatto il gran *Berthollet* dimostrando, che in esse doveva avere una massima parte la considerazione delle masse.

3. Era riserbato al sublime genio del Sig. *De la Place*, il quale con tutta verità può dirsi che nella sua insigne opera della *Meccanica celeste* abbia ridotto all'ultimo compimento quell'immenso edifizio, di cui l'immortale Newtono avea dato appena il disegno, era ad esso, dissi, riserbato di scoprire una nuova numerosa serie di fenomeni, dipendenti ancor essi dall'azione delle forze attraenti e ripellenti nelle minime insensibili distanze, più singolari, più variati, e suscettibili della medesima esatta analisi, che quei che presenta la luce. Sono questi i fenomeni dell'azione capillare, dei quali in un *Supplemento al libro X della Meccanica celeste* ha egli dato il primo la vera teoria spiegazione e misura per mezzo di quella stessa attrazione, che produce i fenomeni della riflessione e della rifrazione.

4. Avea già fatto qualche passo in questa carriera il gran *Clairaut* nel suo Trattato *sulla figura della Terra*, ove, dopo di aver vittoriosamente confutate le precarie spiegazioni de' fenomeni capillari date da *Jurin* e da altri Fisici, con quell'eleganza che caratterizza tutti i suoi lavori, intraprese il calcolo delle forze attraenti, che possono concorrere nell'innalzar l'acqua in un tubo di vetro. Egli non potè però mai dedurre dalle sue formole la dimostrazione della principal legge di quest'

ascen-

ascensione, che, secondo l'esperienza, dev'essere in ragione inversa del diametro del tubo, contentandosi di dire che infinite sono le leggi di attrazione, che sostituite nelle sue formole possono dar questo risultato. Ma ciò non basta, e bisogna assolutamente o stabilir queste leggi, o dimostrare che i risultati non ne dipendono, ad oggetto di connetter fra loro i diversi fenomeni della capillarità; e *Clairaut* ne avrebbe egli stesso agevolmente riconosciuto la necessità, se per es. passando dai tubi agli spazj capillari compresi tra due piani, si fosse provato di dedurre dalle sue formole quel rapporto di eguaglianza che presenta l'esperienza tra l'ascensione del fluido in un tubo cilindrico, e la sua ascensione tra due piani paralleli, la di cui mutua distanza sia eguale al semidiametro del tubo, fenomeno di cui nè egli nè altri han mai tentato darne la spiegazione.

5. Ciò che arrestò a mezza strada *Clairaut*, ed obbligollo a lasciar imperfetto il suo ben incominciato lavoro, si fu l'essersi egli fisso in capo che l'azione di un tubo capillare dovesse estendersi sino alla sottilissima colonnetta fluida che passa per l'asse del tubo, e contribuire sensibilmente a tenerla sospesa dentro di esso. O egli non conobbe, o non attese l'osservazione di *Hauksbée* e di altri Fisici, da cui risulta che ne' tubi di vetro, sieno egli sottilissimi nelle loro pareti, o di qualunque grossezza, l'acqua vi s'innalza sempre all'altezza medesima, purchè eguale ed il medesimo ne sia il diametro interiore. Quest'osservazione ocularmente dimostra che all'ascensione dell'acqua ne' tubi capillari niente contribuiscono gli strati cilindrici di vetro posti ad una sensibil distanza dall'interna superficie, benchè in ciascuno di essi separatamente preso l'acqua pure vi s'innalzerebbe. Nè vi sarà chi dica, che l'interposizione degli strati più prossimi impedisca l'azione de' più lontani; essendo troppo naturale il credere che le attrazioni capillari, a guisa della gravità, si trasmettono liberamente attraverso di qualunque corpo.

6. Ora quest'osservazione di *Hauksbée* doveva illuminare *Clairaut* e gli altri Fisici, e portarli naturalmente a pensare che l'attrazione della superficie interna del tubo non esercitandosi che ad un'impercettibil distanza, cioè soltanto sopra le molecole fluide immediatamente ad essa contigue, l'elevazione perciò o la depressione della colonnetta fluida dentro il

tubo medesimo non poteva esser sennonchè occasionalmente l'effetto della detta attrazione. Quest'attrazione non potea per sè stessa che alterare alcun poco l'orizzontalità delle molecole contigue immediatamente all'interna superficie; e così dar origine, medianti le forze ch'esercitano poi le molecole fluide così spossate le une sulle altre, a quella concavità o convessità che presenta la suprema superficie del fluido contenuto nel tubo. Esclusa poi l'attrazione del tubo come l'immediata cagione dell'elevazione o depressione capillare de' fluidi, cos'altro rimaneva sennonchè di ricercarne la causa in quelle forze che le molecole fluide, spossate alcun poco dall'attrazione del tubo, esercitano a vicenda le une sulle altre? Or quest'appunto è la felice idea che prima d'ogni altro ha avuto il Sig. *De la Place*, e che nelle sue mani ha procurato un nuovo splendidissimo trionfo all'attrazione Newtoniana non meno, che alla sublime e sottile Analisi, con cui ha saputo svilupparla.

7. Ma questa stessa sottile sublime Analisi, così famigliare e facile all'Autore dell'importante scoperta, e così poco intesa dalla comune de' Fisici ed anche de' Geometri, forma appunto il grande ostacolo che le impedirà di propagarsi, e di essere, come si merita, generalmente adottata. Non potendosi infatti senza di questo trascendente calcolo dimostrare quel mirabil consenso di questa teoria coll'esperienza, che ne forma la più vittoriosa ed irrefragabil pruova, non potrà essa mai aver luogo in un corso elementare di Fisica, sennonchè in compagnia, e come una di tante altre false e precarie ipotesi, che si sono ideate sinora per la spiegazione de' fenomeni capillari, o che potranno idearsene nell'avvenire, senza che vi sia il modo di far trionfare la vera, se non per pochi (*).

(*) Ci ha presentato recentemente una pruova di ciò che qui diciamo il celebre fisico Sig. Co: da *Rumford*, il quale rimproverato che fossero in opposizione colla teoria del Sig. *De la Place* alcune sue idee lette dinanzi all'Istituto nazionale di Parigi intorno all'adesione de' fluidi, e a una certa *pellicola* che, secondo lui, si forma alla loro superficie, ed è cagione, com'egli pensa, di molti fenomeni capillari, si trova molto imbarazzato per rispondere a quest'obbiezione, e non lo fa ch'esitando, e conchiudendo infine, che se i sublimi ed astrusi calcoli del Sig. *De la Place*, de' quali egli ingenuamente confessa di non poter vedere il fondo, conducessero a risultati contrarj alle sue idee, tanto è il rispetto che ha per quel gran Geometra, che egli sarà sempre pronto a sagrificarle, e a rinunciarvi. Ma potrà credersi sincera una sì gran deferenza alle altrui opinioni, non accompagnata da interna convizione; e se pur lo fosse, troverà poi il Sig. Co:

8. Mi venne in conseguenza in mente, dopo di aver letto l'Opuscolo del Sig. *De la Place*, che farei cosa utile alla scienza e alla scoperta, se prendessi a dilucidare ed appianare l'astrusa Analisi dell'Autore, per renderla così più accessibile ad un maggior numero di Fisici e Geometri di un rango inferiore. Ed accintomi coraggiosamente all'impresa, l'avea già condotta quasi al suo termine, allorchè mi si aprì dinanzi inaspettatamente una nuova strada di rendere il mio lavoro molto più proficuo, coll'abbassare cioè quella sublime teoria alla più

---

de *Rumford* tra i Fisici molti imitatori? Ecco intanto com'egli si esprime *(Bibl. Brit. mois de Mai* 1807. *Sciences et arts pag.* 3 *)*. *Je sais qu'il y a des personnes qui imaginent que les resultats des calculs de l'illustre Auteur de la* Mecanique céleste *sur l'ascension des liquides dans les tubes capillaires, sont opposés aux opinions que j'ai publiées sur l'adhésion des molecules des liquides entr'elles; mais autant que j'ai pû comprendre les données qui fondent ces calculs, il me paroît évident que* l'attraction *dont M.r De la Place suppose que les molecules des liquides sont douées, ne différe pas essentiellement de la force que j'ai désignée sous le nom* d'adhesion; *et quant à la* pellicule *dont j'ai si souvent parlé, comme le calcul de ce savant géomètre et physicien est fondé sur la supposition que les attractions mutuelles des molecules du liquide, qui se trouvent éloignées à une distance sensible de sa surface, ne contribuent en rien à l'ascension du liquide dans un tube capillaire, ainsi qu'autres effets analogues, qu'il a considerés, il me semble que les calculs de M.r De la Place portent uniquement sur la force de cohésion de la couche des molecules qui se trouvent à la surface, ou, en d'autres termes, sur la* pellicule, *dont il est question . . . Je dois pourtant avouer que je ne suis pas assez versé dans la haute Geometrie pour pouvoir bien comprendre les calculs de M.r De la Place sur ce sujet; et je me garderai bien de les juger. Il faudroit sans doute avoir une connoissance trés-profonde des méthodes analytiques, pour sentir la force de ses démonstrations; mais j'ai une si haute idée des lumières de cet estimable savant, et comme géomètre, et comme physicien, que je suis toûjours disposé à recevoir ses opinions en matière de sciences, ainsi que sur tout autre objet, avec la plus grande déférence.*

Un altro più aperto oppositore alla sua teoria ha trovato positivamente il Sig. De la Place nel Sig. *Tardy de la Brossy*, il quale nel volume del prossimo passato Gennajo della medesima *Bibl. Brit.* ha fatto inserire un estratto di una lunga sua Memoria, il di cui oggetto si è appunto di escludere dalla spiegazione de' fenomeni capillari ogni attrazione propriamente detta ed ogni affinità, e di stabilire ch'essa debba unicamente ripetersi dalla differenza tra la forza di adesione che le molecole de' fluidi hanno coi corpi che toccano, e di quella che le lega tra loro. Risuscitando pertanto gli esplosi principj di *Jurin* egli si studia colla più piana sintesi di dedurre da questa sua immaginata causa le leggi non solo de' più noti fenomeni capillari, ma di alcuni tra quelli altresì, che prima del Sig. *De la Place* si erano rimasti senza veruna spiegazione. Benchè per altro il Sig. *Tardy de la Brossy* in questa sua contraddizione alla teoria del Sig. De la Place non faccia, secondo che osserva il Redattore della sua Memoria, che usare del diritto già da gran tempo da lui acquistato, di non arrendersi, cioè, che molto difficilmente a quanto vi ha di più certo ed evidente tra' Fisici, nondimeno noi crediamo che l'inaccessibilità de' sublimi calcoli, coi quali ha svolta la sua teoria il Sig. *De la Place*, abbia non poco contribuito a questa sua opposizione.

semplice ed elementare Geometria. L'occasione me la presentò il primo problema che prende a risolvere il Sig. *De la Place* nel bel principio del suo Opuscolo, cioè di determinare l'azione di una sfera attraente sopra di un sottilissimo filo fluido posto fuori di essa, e ad essa perpendicolare. Ingegnosissima e degna di lui è l'Analisi ch'egli adopera per la soluzione del suo problema; ma quest'Analisi medesima sembra poi che venga e debba di necessità venir meno, allorchè si tenta applicarla al problema analogo, in cui il filo fluido tocchi internamente la sfera attraente, ch'è appunto il caso che unicamente ha luogo ne' fenomeni capillari, benchè a primo aspetto ognun crederia che i due problemi non sono che due casi di un problema stesso. Il Sig. *De la Place* infatti abbandonando la via tenuta per risolvere il primo, dà del secondo una soluzione per così dire indiretta, la quale, a dir vero, non pare immune da ogni dubbio, nè appaga l'animo pienamente.

9. Ora quest'apparente o vera imperfezione dell'ingegnosissimo metodo adoperato dal Sig. *De la Place* nella soluzione del suo primo problema, di non potersi cioè applicare a tutti i casi del problema medesimo, e di escluderne principalmente quello che unicamente si presenta ne' fenomeni capillari, sembrandomi come una macchia in una sì bella ed elegante teoria, mi spronò a cercare, se fosse possibile, qualche altra via di soluzione, la quale, benchè cedesse nell'eleganza e nell'artificio a quella del Sig. *De la Place*, fosse però immune dalla mentovata limitazione. E dopo breve ricerca una me se ne presentò così elementare e semplice, che la sua stessa semplicità me la rese dapprincipio sospetta, non sembrandomi quasi possibile che non si fosse subito ad altri affacciata, e per ragione non meno della sua generalità che della sua semplicità ad ogni altra preferita. Incoraggito dal buon esito di questo primo tentativo, m'innoltrai all'altro più generale problema dell'attrazione di un corpo terminato da una qualunque superficie, e quindi alla spiegazione e misura di tutti quei fenomeni della capillarità, che successivamente si esaminano dal Sig. *De la Place*; e tutte queste ricerche mi si appianarono ancor esse, e si assoggettarono, come le prime, all'uso della più comune ed elementare Geometria.

10. Ho creduto pertanto che farei cosa utile nel pubblicare questo mio lavoro, che ad altro non mira sennonchè a

rendere a tutti accessibile e generale la cognizione scientifica della più grande ed importante scoperta fisico-matematica, e della più luminosa e trionfante applicazione dell'attrazione, che dopo i tempi dell'immortale Newtono siasi ancor fatta. Sarà questo mio qualsiasi lavoro diviso in tre parti. Esaminerò nella I.ª parte per quali ragioni e quando la superficie superiore di un fluido rinchiuso in un tubo o dentro due piani, debba prendere ora la figura convessa, ed ora la concava, giacchè questa convessità o concavità è quella che principalmente determina la depressione o l'ascensione del fluido, e tutte le altre circostanze de' fenomeni capillari. In questa prima ricerca non mi allontanerò che poco dal metodo seguito dall'illustre Autore, limitandomi per lo più a dilucidarlo soltanto e commentarlo. Mi è sembrato più naturale d'incominciare da questa ricerca, benchè dall'Autore venga essa trattata in ultimo luogo. Passo quindi nella II.ª parte a determinare l'azione di un corpo sferico, o di qualunque figura, sopra di un sottilissimo filo fluido, che perpendicolarmente lo tocchi o al di dentro o al di fuori, che è appunto il problema da cui incomincia l'Autore; e finalmente applico nella III.ª parte i risultati di questo problema alla spiegazione e misura de' tanto diversi e singolari fenomeni capillari, che dall'Autore vengono considerati. E in queste due ultime parti appunto, che sono le più importanti della teoria, ed in piena proprietà appartengono al Sig. *De la Place* (giacchè nella I.ª egli era stato prevenuto da *Clairaut*) abbandonando intieramente la difficile e sublime Analisi con cui egli le ha trattate, perchè non confacente a quei per i quali scrivo, sieguo io costantemente quel nuovo elementare geometrico discorso, che fortunatamente mi si è presentato.

PARTE I.

Per quali ragioni e quando la superficie di un fluido rinchiuso in un tubo, o tra due piani, debba prender la forma concava o convessa.

11. Dipendendo, secondo questa teoria, tutti i fenomeni capillari dalla concavità o convessità della superior superficie del fluido, fa d'uopo primieramente ricercare d'onde derivi

questa concavità o convessità del fluido contenuto in un tubo, o compreso tra due piani. Questa, siccome abbiam poc' anzi accennato, dee ripetersi dall' attrazione che il tubo esercita sopra il fluido, paragonata e combinata con quella con cui il fluido agisce sopra di sè stesso. Ora supponendo, siccome sembra naturale di dover supporre, che queste due attrazioni non differiscano che nella loro intensità, e seguano d' altronde la stessa legge d' incremento o di decremento nel variar delle distanze, cioè supponendo che ad una medesima distanza le due forze esercitate sopra di una molecola elementare del fluido da una molecola elementare del tubo e da una molecola elementare del fluido sieno sempre tra loro in una costante ragione, cioè in quella delle intensità di quelle forze, che chiameremo φ e φ', facendo, come dicevamo, questa ben naturale supposizione, sarà facile di dimostrare i seguenti teoremi.

12. TEOREMA I. *Se* $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, *cioè se l' intensità della forza attraente della materia del tubo sarà eguale alla metà di quella del fluido, la superficie di questo rinchiuso nel tubo medesimo, o tra due piani della stessa materia, manterrassi piana ed orizzontale.*

Dim. Consideriamo un qualunque punto O (*Fig.* 1) della superficie che supporremo orizzontale, compreso dentro i limiti della sfera d' azione della materia del tubo: sarà questo punto attratto insieme dal tubo, e dal fluido che in esso è contenuto. Ora ciascuna delle molecole R della superficie interna del tubo poste al disotto del livello MN del fluido, e compresa dentro la detta sfera d' azione, agirà sopra di O con una forza più o meno obbliqua OR, che potrà risolversi al solito nelle tre Of, ft, tR parallele a tre assi ortogonali che s' intendon condotti per O, o per qualunque altro punto, cioè due orizzontali, una parallela e l' altra perpendicolare ad Op, e la terza verticale e parallela ad Or. Dalla somma di tutte queste forze, distruggendosi in tutta la sfera di azione le ft, perchè a ciascuna corrisponde dall' altra parte del piano OpD la sua eguale e contraria, ne risulteranno due forze uniche, una orizzontale parallela ad Op, l' altra verticale parallela ad Or; ed è evidente che queste due forze verranno espresse da due funzioni della distanza Op moltiplicate per l' intensità φ. Chiamando adunque y ed x queste funzioni di Op, le due forze

colle quali la molecola fluida O è attratta orizzontalmente e verticalmente dalla materia del tubo posta al disotto del livello MN, saranno ϕy, ϕx.

Egli è poi evidente che queste medesime saranno le forze, colle quali verrà attratta la medesima molecola O dalla materia del tubo posta al disopra del livello MN; sennonchè la forza verticale ϕx dovrà esser presa col segno contrario, perchè agisce in senso contrario della prima. Saranno dunque ϕy, $-\phi x$ le due forze orizzontale e verticale, dalle quali la molecola O verrà attratta dalla materia del tubo situata al di sopra di MN.

Per determinare ora l'azione del fluido sopra la medesima molecola O, prendasi primieramente $Op' = Op$, e condotta la verticale $p'D'$, egli è chiaro che si distruggeranno a due a due, perchè eguali e contrarie, le attrazioni orizzontali di tutte le molecole comprese nello spazio cilindrico $Dpp'D'$, e poste a due a due alla medesima distanza dall'asse Or, ed in una linea che passi per lo stesso asse. Non potrà dunque risultare dall'azione delle molecole comprese in questo spazio, che un' azione verticale nella direzione Or, la quale potrà esprimersi, come prima, per $\phi' z$, cioè per il prodotto dell'intensità ϕ' con una funzione z di Op.

Riguardo poi all'attrazione che le molecole fluide contigue alla superficie cilindrica $p'D'$ esercitano sopra la molecola O, egli è evidente che siccome queste molecole hanno precisamente rispetto ad O la stessa posizione che le molecole della materia del tubo contigue alla superficie cilindrica pD e poste al disotto di MN, quindi l'attrazione tant'orizzontale che verticale delle une a quella delle altre dovrà stare come l'intensità dell'attrazione di una delle due materie all'intensità dell' attrazione dell'altra; cosicchè essendo ϕy, ϕx l'attrazione orizzontale e verticale della parte inferiore del tubo, l'attrazione orizzontale e verticale della materia fluida contigua a $p'D'$ verrà espressa da $\phi' y$, e $\phi' x$, o piuttosto $-\phi' y$, e $\phi' x$, perchè $\phi' y$ agisce in direzione contraria a ϕy.

Raccogliendo adunque tutte queste forze, la molecola O verrà sollecitata dalle forze orizzontali

$$\phi y,\ \phi y,\ -\phi' y$$

e dalle forze verticali

$$\phi x,\ -\phi x,\ \phi' z,\ \phi' x.$$

Le prime danno la forza orizzontale unica $(2\varphi - \varphi')y$, e le seconde l'unica forza verticale $\varphi'(z+x)$. Ora è evidente che se sarà $2\varphi = \varphi'$, ossia $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, cioè l'intensità della forza attraente della materia del tubo due volte minore di quella del fluido, riducendosi a zero la forza orizzontale $(2\varphi - \varphi')y$, non rimarrà che la forza verticale $\varphi'(z+x)$, la quale inoltre, non contenendo φ, cioè l'intensità della materia del tubo, ma unicamente dipendendo da φ' intensità dell'attrazione del fluido sopra sè medesimo, sarà perciò per qualunque molecola la medesima, giacchè ogni molecola è attratta egualmente dal fluido circostante. In quest'ipotesi adunque di $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, ogni molecola della superficie che si suppone orizzontale, sarà sollecitata da un'egual forza perpendicolare alla superficie, onde vi sarà equilibrio, e la superficie resterà com'era, piana ed orizzontale. C.C.D.D.

13. Che se la forza orizzontale $(2\varphi - \varphi')y$ non sarà $= 0$, ma una quantità positiva, cioè diretta da O verso p, la risultante di questa forza e della forza verticale devierà dalla verticale Or verso di pD, onde perchè questa risultante sia perpendicolare alla superficie del fluido, siccome richiedono le leggi dell'equilibrio, questa superficie dovrà inclinarsi in O all'orizzonte al disopra di Op e al disotto di Op', cioè divenir concava; e viceversa se $(2\varphi - \varphi')y$ sarà una quantità negativa, cioè diretta da O verso p', la risultante delle due forze orizzontale e verticale dovrà deviare da Or verso p'D', epperò la superficie del fluido in O, per esser perpendicolare a questa risultante, dovrà abbassarsi sotto di Op ed alzarsi sopra di Op', cioè divenir convessa.

14. Si meritano però questi due casi di essere più distintamente considerati ed analizzati ne' due seguenti teoremi, ne' quali supponendo la superficie del fluido concava o convessa, si assegnano le condizioni, e si stabilisce il rapporto delle intensità delle due forze il quale deve aver luogo, perchè il fluido rimanga in equilibrio nell'uno e nell'altro caso. Prima però bisogna più accuratamente e più generalmente determinare di quel che si è fatto per un caso particolare nella dimostrazione del teorema precedente, quali sieno le forze che esercita sopra di una molecola A (*Fig.* 2) posta ad un'insensibil distanza dalla linea MR, la materia attraente compresa tra i due piani MN, MO che si tagliano nella suddetta linea MR, e forman

forman tra loro un qualunque angolo PMQ = NRO = $hAg = \theta$. Si vogliano per es. le forze che da quest'attrazione ne nasceranno nella direzione AB posta nel piano MN e perpendicolare ad MR, e in una direzione perpendicolare tanto al piano MN che alla linea AB nel punto A. Con un raggio Aa eguale al limite dell'attrazione sensibile, e che faremo = 1, si descriva nel piano MN il semicircolo abc, il quale girando attorno del diametro ac generi uno spicchio sferico, ed incontri il piano MO in afc. Il punto b in questa rotazione avrà descritto l'arco bf, che sarà misura dell'angolo fatto dai due piani, cioè $= \theta$. Suppongasi quest'arco bf accresciuto del suo elemento ff', cioè il semicircolo afc trasportato in $af'c$, e insieme con esso il piano MO, girando attorno di MR per un angolo infinitesimo, la di cui misura è $ff' = \delta\theta$. Lo spicchio sferico infinitesimo $afcf'a$, se si consideri come composto di tante piramidi infinitesime terminanti nel centro A, e poste a due a due ad egual distanza da Af, sarà chiaro che le attrazioni di ciascuna coppia di queste piramidi infinitesime, comecchè eguali ed egualmente inclinate ad Af, daranno una risultante che passerà per Af, onde anche la risultante di tutte le attrazioni della materia compresa nello spicchio sferico infinitesimo $afcf'a$ passerà pure per Af ossia per Ag.

Egli è poi egualmente evidente che quest'attrazione, qualunque ne sia la legge, dovrà esser proporzionale alla sua intensità che chiameremo ϕ, moltiplicata per l'angolo compreso dallo spicchio sferico infinitesimo, cioè per $\delta\theta$, dappoichè crescendo l'intensità ϕ, o l'angolo infinitesimo $\delta\theta$, deve anche crescere l'attrazione dello spicchio nella proporzione. Assumendo adunque un'adattata quantità costante K, dall'azione di tutte le molecole comprese nello spicchio sferico infinitesimo $afcf'a$, ne risulterà sopra della molecola A un'unica forza nella direzione Ag, ed $= \phi K \delta\theta$.

Rappresentisi questa forza colla Ag, e condotta la gh normale al piano MN e alla AB, la medesima forza risolverassi nelle due $Ah = Ag \cos.\theta = \phi K \delta\theta \cos.\theta$, e $gh = Ag \operatorname{sen}.\theta = \phi K \times \delta\theta \operatorname{sen}.\theta$, la prima delle quali sarà diretta, siccome si richiede, secondo AB, e la seconda sarà normale al piano MN e ad AB in A; ed è evidente che per avere le forze intiere esercitate nelle medesime direzioni sopra di A da tutta la materia attraente compresa tra i due piani, bisognerà integrare le ritro-

vate espressioni in modo che gl' integrali svaniscano, quando i due piani MN, MO cadono l' uno sull' altro, cioè quando $\theta = 0$.

Sarà dunque finalmente l' attrazione secondo la AB esercitata sopra la molecola A dalla materia compresa tra i due piani $= \int \phi K \delta\theta \cos.\theta = \phi K \text{ sen.}\theta$, e l' altra perpendicolare al piano MN e alla AB in A $= \int \phi K \delta\theta \text{ sen.}\theta = \phi K (1 - \cos.\theta)$.

15. Che se l' angolo θ sarà retto, epperò sen. $\theta = 1$, cos. $\theta = 0$, tanto l' attrazione nella direzione AB presa nel piano MN e perpendicolare ad MR, quanto l' altra perpendicolare ad MN e ad AB, saranno tutte due $= \phi K$. Quindi se il piano MN ed AB saranno verticali, ϕK rappresenterà l' attrazione tanto verticale che orizzontale, che la materia contenuta tra il piano MN, e un altro ad esso perpendicolare sopra di MR, esercita sopra la molecola A contigua ad MR.

Ciò premesso si dimostreranno agevolmente i seguenti teoremi, che abbiam qui sopra annunciati.

16. TEOREMA II. *Supponendo concava la superficie del fluido contenuto in un tubo, o rinchiuso tra due piani, perchè il fluido sia in equilibrio, dev' essere* $2\phi - \phi'$ *una quantità positiva, cioè* $\phi > \frac{1}{2}\phi'$.

Dim. Rappresenti CAB (*Fig.* 3) un piano verticale tuffato nel fluido MNB; e a questo caso potrà ridursi anche quello di un tubo, considerandone l' interna superficie divisa in tanti piani verticali d' infinitamente piccola larghezza, corrispondente al raggio della sensibile attrazione. Sia AR la sezione della superficie concava del fluido contiguo, fatta da un piano verticale normale al primo. Chiamando, come prima, ϕ l' intensità dell' attrazione della materia del piano, e K un' adattata quantità costante, la parte inferiore AB del piano eserciterà sopra la molecola fluida A (§. 15) un' attrazione verticale all' ingiù $= \phi K$, e un' attrazione orizzontale verso M parimenti $= \phi K$; e lo stesso sarà della parte superiore AC del piano, sennonchè la forza verticale sarà $- \phi K$, perchè diretta all' insù al contrario della forza verticale che nasce dalla parte inferiore, mentre l' orizzontale diretta verso M sarà, come per la parte inferiore, $= \phi K$.

Ma condotta la tangente AD alla curva concava AR, la molecola A è inoltre attratta dalla materia fluida contenuta nell' angolo BAD; e chiamando θ quest' angolo, ϕ' l' intensità dell' attrazione del fluido, e ritenendo la solita costante K,

dalla forza attrattiva di questa porzione di fluido nascerà (§. 14) una forza verticale $=\phi'K \text{ sen.}\theta$, ed una forza orizzontale $=-\phi' \times K(1-\cos.\theta)$, che si prende negativamente, perchè diretta verso N, cioè dalla parte opposta delle altre due ϕK, e ϕK.

Finalmente bisogna anche considerare l'attrazione che nelle minime distanze esercita sopra la molecola A quella piccola porzion di fluido che riman compresa tra la curva AR e la tangente AD. Supponghiamo che ne nasca da quest'attrazione una forza Q, la di cui direzione sia AQ; e chiamando π l'angolo QAB, questa forza Q si risolverà al solito in due, una verticale all'ingiù $=Q \cos.\pi$, e l'altra orizzontale diretta verso N, epperò negativa, ed $=-Q \text{ sen.}\pi$.

Raccogliendo pertanto tutte queste forze, la molecola A sarà animata dalle forze verticali

$$\phi K, -\phi K, \phi' K \text{ sen.}\theta, Q \cos.\pi$$

e dalle forze orizzontali

$$\phi K, \phi K, -\phi' K(1-\cos.\theta), -Q \text{ sen.}\pi$$

che daranno, essendo sommate, la forza unica verticale $\phi' K \times \text{sen.}\theta + Q \cos.\pi$, e la forza unica orizzontale $2\phi K - \phi' K + \phi' K \cos.\theta - Q \text{ sen.}\pi$.

Da queste due forze ne nascerà una sola forza risultante AV, la quale, per le note leggi di equilibrio, dev'esser perpendicolare alla curva AR ossia alla tangente AD in A. Se dunque questa forza si risolverà nelle due AT, AS, una verticale, l'altra orizzontale, la prima $=AV \cos. VAT = AV \text{ sen. } BAD = AV \text{ sen.}\theta$, e la seconda $=AV \cos. VAS = AV \times \cos. BAD = AV \cos.\theta$, dovendo queste forze essere eguali alle due poc'anzi trovate, si avranno l'equazioni

$$AV \text{ sen.}\theta = \phi' K \text{ sen.}\theta + Q \cos.\pi$$

$$AV \cos.\theta = 2\phi K - \phi' K + \phi' K \cos.\theta - Q \text{ sen.}\pi$$

e quindi dalla prima moltiplicata per $\cos.\theta$ togliendo la seconda moltiplicata per $\text{sen.}\theta$

$$\phi' K \text{ sen.}\theta - 2\phi K \text{ sen.}\theta + Q \cos.\pi \cos.\theta + Q \text{ sen.}\pi \text{ sen.}\theta = 0, \text{ ossia}$$

$$Q(\cos.\pi \cos.\theta + \text{sen.}\pi \text{ sen.}\theta), \text{ cioè } Q \cos.(\pi-\theta) = (2\phi-\phi')K \text{ sen.}\theta.$$

Ora nel caso in cui siamo che la curva AR sia concava, l'angolo $\pi-\theta = DAQ$ è positivo e minore di 90°, onde il primo membro dell'ultima equazione $Q \cos.(\pi-\theta)$ è necessariamente positivo. Sarà dunque positivo anche il secondo $(2\phi-\phi')K \text{ sen.}\theta$, e siccome è pur positivo $\text{sen.}\theta$ come seno di un angolo acuto, sarà anche positivo $2\phi-\phi'$, cioè $\phi > \frac{1}{2}\phi'$.

Se dunque la superficie del fluido AR sarà concava, perchè vi sia equilibrio tra le forze attraenti, dovrà essere $\varphi > \frac{1}{2}\varphi'$. C.C.D.D.

17. Se si supporrà $2\varphi - \varphi' = 0$, cioè $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, diverrà $= 0$ il secondo membro dell'ultima equazione, epperò anche il primo. Sarà dunque $Q \cos.(\pi - \theta) = 0$, epperò anche $Q = 0$, cioè svanirà la forza attraente del fluido compreso tra la curva AR e la tangente AD, ciò che non può accadere se non quando la curva AR intieramente si confonde colla sua tangente AD, cioè quando la superficie AR da concava divien piana. Si conferma così ciò che si è dimostrato al *Teor. I.* (§. 12), cioè ch'essendo $\varphi = \frac{1}{2}\varphi'$, la superficie del fluido si mantiene piana ed orizzontale.

18. TEOREMA III. *Supponendo che la superficie del fluido contenuto in un tubo o rinchiuso tra due piani sia convessa; perchè si mantenga in equilibrio, dovrà essere $2\varphi - \varphi'$ una quantità negativa, cioè $\varphi < \frac{1}{2}\varphi'$.*

Dim. Sia AR (*Fig.* 4) la superficie convessa del fluido, e fatta la stessa costruzione del *teor. prec.*, e chiamando θ l'angolo BAD, e π l'angolo BAQ, in primo luogo si dimostrerà allo stesso modo, che la molecola fluida A verrà attratta dalla parte superiore ed inferiore del piano BAC con due forze verticali φK, $-\varphi K$, e con due forze orizzontali verso M, eguali a $-\varphi K$, $-\varphi K$, alle quali diamo il segno negativo, perchè la forza orizzontale che nasce dalla risultante AV sarà ora diretta verso la parte opposta N.

L'azione del fluido sopra la medesima molecola A risulta poi in questo caso dalla differenza tra le due azioni ch'esercitano sopra la stessa molecola il fluido contenuto nell'angolo CAD, e quello contenuto tra la curva AR e la tangente AD. Dalla prima nascerà (§. 14) una forza verticale all'ingiù $= \varphi' K \times$ sen. CAD $= \varphi' K$ sen. BAD $= \varphi' K$ sen. θ, ed una forza orizzontale verso N, ed $= \varphi' K (1 - \cos.\text{CAD}) = \varphi' K (1 + \cos.\text{BAD}) = \varphi' K (1 + \cos.\theta)$; e dalla seconda, come nel *teor. prec.* ne nascerà una forza Q, che si risolverà in una forza verticale all'insù $= -Q \cos.\pi$, ed una forza orizzontale verso N, ed $= Q$ sen. π. Quindi dall'azione del fluido rinchiuso nello spazio CAR risentirà la molecola A una forza verticale all'ingiù $= \varphi' K \times$ sen. $\theta + Q \cos.\pi$, ed una forza orizzontale verso N $= \varphi' K \times (1 + \cos.\theta) - Q$ sen. $\pi = \varphi' K + \varphi' K \cos.\theta - Q$ sen. π.

Raccogliendo tutte queste forze, si avrà l'unica forza verticale

$$\varphi' K \text{ sen. } \theta + Q \cos. \pi$$

e l'unica forza orizzontale

$$\varphi' K + \varphi' K \cos. \theta - Q \text{ sen. } \pi - 2\varphi K .$$

Ora queste due forze, come nel *teor. prec.*, dovranno essere rispettivamente eguali alla forza verticale AT, e alla forza orizzontale AS, nelle quali si risolve la risultante AV perpendicolare ad AD, cioè eguali ad AV cos. VAT = AV sen. BAD = AV sen. θ, e ad AV sen. VAT = AV cos. BAD = AV cos. θ. Si avranno dunque le due equazioni

$$AV \text{ sen.} \theta = \varphi' K \text{ sen.} \theta + Q \cos. \pi$$

$$AV \cos. \theta = \varphi' K + \varphi' K \cos. \theta - Q \text{ sen.} \pi - 2\varphi K$$

dalle quali precisamente, come nel *teor. prec.* si otterrà

$$Q \cos. (\pi - \theta) = (\varphi' - 2\varphi) K \text{ sen.} \theta$$

e quindi, dovendo esser positive le quantità Q, sen. θ, e cos. $(\pi - \theta)$ nel caso della curva AR convessa, dovrà anch' esser positiva la quantità $\varphi' - 2\varphi$, ossia nella supposizione che la superficie del fluido rinchiuso in un tubo o tra due piani sia convessa, poichè il fluido possa restare in equilibrio, dovrà esser $2\varphi < \varphi'$, cioè $\varphi < \frac{1}{2}\varphi'$. C.C.D.D.

19. Riunendo adunque insieme i risultati de' tre precedenti teoremi, si vede che la superficie del fluido in un tubo, sarà piana concava o convessa, secondo che φ sarà eguale, maggiore o minore di $\frac{1}{2}\varphi'$.

20. Questa concavità o convessità però non sarà la medesima, ma diversa secondo i diversi fluidi che riempiranno un medesimo tubo. Considerando infatti un punto I (*Fig.* 3 *e* 4) posto sulle curve concave o convesse corrispondenti a diversi fluidi, ed alla medesima distanza dal tubo dentro i limiti della sua sfera di attività, l'attrazione del tubo sopra di questo punto I sarà sempre la medesima ed orizzontale (§§. 16 e 18), ma non sarà così dell'attrazione de' diversi fluidi, la quale dee variare dall'uno all'altro, secondo la diversa loro intensità rispettiva φ' tanto nella direzione orizzontale che nella verticale (§§. citt.). Componendosi dunque quest'azione sempre diversa coll'azione sempre costante del tubo, diversa ancora dovrà essere la direzione della risultante; onde, siccome questa per l'equilibrio dev'esser perpendicolare al corrispondente elemento della superficie, diversa perciò dovrà essere, secondo i di-

versi fluidi, la giacitura di quest' elemento, cioè diversa la curva AR.

21. Diversa dunque sarà ancora, secondo i diversi fluidi in un medesimo tubo, l' inclinazione de' lati estremi della curva AR rispetto alle pareti del tubo. Essa però sarà la medesima, col medesimo fluido e colla medesima materia del tubo, qualunque sia il diametro interno di questo. Imperocchè potendosi considerare come piana la superficie di questo compresa dentro il raggio della sua sfera di attività sensibile, il fluido verrà attratto da questa come se fosse piana, epperò sempre allo stesso modo, qualunque ne sia il suo diametro; onde combinandosi quest' azione, sempre la medesima, con quella parimenti sempre costante del fluido immediatamente ad essa contiguo e compreso dentro i limiti dell' azion sensibile, dovrà sempre aversi la medesima risultante, epperò la stessa inclinazione de' lati estremi rispetto alle pareti del tubo.

22. Oltrepassato l' insensibile limite dell' attività sensibile, il fluido rimanente sottoposto quasi unicamente all' azione della gravità, e a quella che esercita sopra di sè medesimo, prenderà naturalmente nella sua superficie la figura di un segmento sferico, i di cui piani estremi, confondendosi con quei della superficie nel fluido ai limiti della sfera di attività sensibile del tubo, saranno perciò presso a poco egualmente inclinati alle pareti ne' diversi tubi. Sembra dunque potersene conchiudere che questi segmenti sferici saran tutti simili tra loro, se lo stesso sia il fluido, e la stessa la materia del tubo, qualunque ne sia poi il diametro interno, purchè capillare.

23. Dalla dimostrazione del *Teor. II* (§. 16) risulta che la forza verticale che sollecita la molecola A (*Fig.* 3) niente dipende da φ, mentre la forza orizzontale contiene il termine positivo $(2\varphi - \varphi')$ K, che sarà tanto più grande, quanto sarà più grande φ in confronto di $\frac{1}{2}\varphi'$. Ora crescendo la forza orizzontale diretta verso M, e rimanendo la medesima la verticale, tanto più la direzione della forza risultante dovrà divergere superiormente dalle pareti del tubo, onde dovendo questa risultante esser normale alla superficie, tanto più concava diverrà la superficie stessa. La concavità pertanto della curva AR sarà tanto maggiore quanto maggiore del rapporto di eguaglianza sarà il rapporto di φ a $\frac{1}{2}\varphi'$, cosicchè con un certo valore di φ sempre maggiore di $\frac{1}{2}\varphi'$, la superficie del fluido dovrà

acquistare la concavità di una mezza sfera. Crede il Sig. *De la Place* che ciò accadrà quando sia $\phi = \phi'$, ed eccone la sua dimostrazione.

Sia, dic'egli, la superficie concava di un fluido rinchiuso in un tubo quella di una mezza sfera ABC (*Fig.* 5), e figurandoci terminata l'intiera sfera ABCS, supponghiamo che si riempia del medesimo fluido anche la parte del tubo RACS superiore a questa sfera. Essendo $\phi = \phi'$, cioè l'intensità dell'attrazione della materia del tubo eguale a quella del fluido, si potrà perciò supporre che il tubo sia della medesima materia del fluido; ed allora certamente, prescindendo dalla gravità, dalla quale si può prescindere ne' tubi capillari, sarà in equilibrio tutta la materia fluida ed omogenea che circonda la sfera vuota ABCS, perchè tutti i punti della superficie interna di questa saranno animati da forze eguali e perpendicolari alla superficie stessa. Ora sopprimendo il fluido che abbiamo concepito superiormente aggiungersi RASC, non potrà risultarne che un insensibile cangiamento, tanto nella quantità, che nella direzione delle forze che animano i diversi punti dell'emisferico-concava superficie fluida rimanente ABC. Imperocchè l'azione esercitata sopra di A dal fluido compreso nell'angolo infinitesimo RAS fatto dalla tangente e dall'arco, non estendendosi che ad un' infinitamente piccola distanza, non potrà essere che incomparabilmente più piccola di quella che vi esercita la materia del tubo compresa dentro di un angolo retto (§§. 14 e 15), oltre di che all'azione verticale di questo fluido soppresso può supplire l'attrito del fluido contro le pareti del tubo; e molto più piccola e più trascurabile sarà poi l'azione del fluido soppresso RASC sopra gli altri punti posti ad una sensibil distanza del fluido rimanente ABCNM. Questo fluido rimanente pertanto si manterrà in equilibrio, anche dopo soppresso il fluido superiore RASC; vale a dire che la superficie del fluido prenderà la concavità di una mezza sfera, quando suppongasi $\phi = \phi'$.

24. Che se sarà $\phi > \phi'$, cioè l'intensità dell'attrazione del tubo sopra il fluido maggiore di quella del fluido sopra di sè stesso, crede in questo caso il Sig. *De la Place* che il fluido attaccandosi alle pareti interne del tubo vi formi un velo e come un altro tubo il quale solo attragga il fluido, onde si ritorni al caso precedente di $\phi = \phi'$, e debba perciò anche in

questo caso la superficie prender la concavità di una mezza sfera. E questo sembragli essere il caso dell'acqua, degli olj, e di tutti i fluidi in fine che possono o per sè stessi o coi loro vapori umettare il vetro, siccome fu poi confermato dall'esperienze che a sua istanza intrapresero i diligentissimi Fisici i Signori *Haüy* e *Tremery*, ad oggetto appunto di determinare la curva in cui si dispongono tutti questi fluidi rinchiusi dentro a tubi capillari. Misurando essi infatti la distanza dal fondo del punto più alto in cui questi fluidi toccano le pareti interne de' tubi ed incominciano a staccarsene, e quella del punto di mezzo più basso della loro concavità, ritrovarono sempre la differenza di queste due distanze pressochè eguale al semidiametro de' tubi, siccome doveva esserlo supponendo emisferica quella concavità, ed il piccolo difetto che vi rinvennero, doveva certamente attribuirsi alla difficoltà che vi ha di fissare con precisione, e di non prender sempre al disotto del vero quel punto in cui il fluido si distacca dalla parete interna del tubo.

Sembra dunque potersi assumere con tutta sicurezza che le superficie concave dell'acqua, degli olj, e generalmente di tutti i fluidi che umettano il vetro, debbano essere emisferiche ne' tubi capillari.

25. Passando ora al caso di $\varphi < \frac{1}{2}\varphi'$, la dimostrazione che abbiam data del *Teor. III* (§. 18) in quest'ipotesi fa vedere che rimanendo la stessa la forza verticale da cui è sollecitata la molecola A (*Fig.* 4) e la quale non dipende da φ, la forza orizzontale per lo contrario diretta verso N contiene il termine positivo $(\varphi' - 2\varphi)$K, il quale sarà tanto maggiore quanto più sarà piccolo φ relativamente a φ', e crescendo poi così la forza orizzontale verso N, mentre la verticale rimane costante, tanto più dovrà crescere la convessità della curva AR. Questa convessità diverrà infine quella di una mezza sfera, allorchè sarà φ insensibile e quasi nulla in confronto di φ'; ed ecco come lo dimostra il Sig. *De la Place* con un discorso analogo a quello per il caso della concavità, esposto al §. 23.

Supponghiamo, dic'egli, che veramente la superficie del fluido prenda la figura di una mezza sfera convessa ASC (*Fig.* 5). Continuandola al disotto di A s'intenda formata, la sfera intiera ASCB, e sopprimendo per un momento col pensiero il fluido ABCNM posto al disotto di questa sfera, e prescindendo dall'

dall'azione del peso che ne' tubi capillari in confronto delle altre forze attraenti è insensibile, e da quella del tubo che ora si considera pure come nulla per essere ϕ quasi nullo rispetto a ϕ', egli è chiaro che la sfera intiera, epperò anche la superficie della mezza sfera superiore ASC sarà in equilibrio, perchè tutti i suoi punti saranno animati da eguali forze attraenti del fluido, perpendicolari alla superficie stessa. Si ristabilisca ora il fluido soppresso ABCNM, e si dimostrerà come al §. 23, che l'azione del fluido MAB sulla molecola A, e molto più sugli altri punti della superficie ASC posti ad una maggior distanza, sarà insensibile e trascurabile in confronto di quella che vi esercita tutta la sfera. L'equilibrio adunque tuttavia sussisterà; cioè essendo ϕ incomparabilmente minore di ϕ', la superficie del fluido prenderà la convessità di una mezza sfera.

La rapidità con cui si riunisce in rotondissimi globetti il mercurio sparso sopra il vetro od altri corpi, ci dimostra visibilmente quanto sia maggiore l'attrazione ch' esso esercita sopra di sè medesimo di quella che risente dagli altri corpi. Ci presenta dunque il mercurio il caso di ϕ enormemente minore e quasi nulla in confronto di ϕ'; e diffatti i sovraccitati Fisici (§. 24) con quel medesimo metodo col quale si assicurarono della concavità emisferica dell'acqua e degli olj, si convinsero altresì che la convessità in cui si dispone dentro a' tubi capillari il mercurio, era quella di una mezza sfera.

26. Riepilogando pertanto i principali risultati che abbiamo ottenuti relativamente alla concavità o convessità della superficie de' fluidi rinchiusi in tubi capillari, si rileva che da $\phi = 0$, nel qual caso si ha la convessità di una mezza sfera, sino a $\phi = \frac{1}{2}\phi'$, la superficie diviene sempre meno convessa, e finalmente si fa piana ed orizzontale nel limite estremo di $\phi = \frac{1}{2}\phi'$, ed oltrepassato poi questo limite diviene sempre più concava sino a che, essendo $\phi = \phi'$, giugne alla concavità emisferica, la quale conserva ancora dopo di quel limite, cioè essendo $\phi > \phi'$, perchè il fluido umetti le pareti interne del tubo.

PARTE II.

Dell' attrazione esercitata da un corpo di figura qualunque sopra di un sottilissimo filo fluido interno od esterno, rinchiuso in un canaletto perpendicolare alla sua superficie.

27. Egli è un volgare e notissimo principio idrostatico, che *se una massa fluida* M (*Fig.* 6) *sollecitata da quelle forze che si vorranno, sarà in equilibrio, immaginando un canaletto* AB *qualunque, dentro di essa, perpendicolare per es. alla superficie esteriore del fluido in* A *e* B, *la somma delle forze che sollecitano la molecola* A *nella prima direzione* AC *del canaletto, dovrà essere eguale alla somma delle forze che sollecitano* B *nella contraria direzione* BD. Infatti se una delle due somme prevalesse, per es. quella che anima A, siccome questa forza per l'indole del fluido si trasmette intiera alla molecola B nella direzione BE, questa molecola dovrebbe muoversi verso E colla differenza delle due forze che l'agitano in direzioni contrarie, e l'equilibrio sarebbe però disturbato.

Questo principio idrostatico, che ci servirà di guida nell' esame e spiegazione di tutti i fenomeni capillari, ha bisogno, per essere applicato, che si sappian calcolare le forze che animano le estremità di un canaletto, ovunque esso si concepisca. Abbiamo escluso dal calcolo di queste forze l'attrazione delle pareti del tubo o de' piani che rinchiudono il fluido, poichè quest' attrazione non agisce che sull' insensibile velo fluido che tocca le dette pareti, e ad una distanza impercettibile divenendo affatto insensibile, solo influisce su quella concavità o convessità che prende il fluido esteriormente. Farà d'uopo pertanto cercar queste forze, che animano le estremità del canaletto suddetto, nelle attrazioni che vi esercita la stessa massa fluida in equilibrio, e terminata in una superficie ora piana, ora concava ed ora convessa, a tenore delle leggi, che si sono stabilite nella *I.ª Parte*. E questo appunto è ciò che ora ci proponghiamo di fare ne' seguenti Teoremi.

28. Teorema IV. Se *un sottilissimo filo fluido venga attratto da un corpo terminato da una superficie piana, ch' esso tocchi perpendicolarmente o al di dentro o al di fuori, sarà nell' uno e nell' altro caso attratto egualmente, e con una forza costante, che chiameremo* K.

Dim. Il sottilissimo filo fluido AR (*Fig.* 7) tocchi al di dentro la superficie piana BD di un corpo attraente OS. Con un raggio AB eguale alla distanza in cui termina di esser sensibile l'attrazione s'intenda dal centro A descritta una mezza sfera BCD, la di cui azione sopra di A sarà diretta, com'è evidente, da A verso R. Ora se il filo fluido *ar* sarà posto al di fuori del corpo attraente *of* la di cui superficie piana è *bd*, descritta dal centro *a* col medesimo raggio la mezza sfera *bcd*, l'azione sopra di *a* dipenderà da questa mezza sfera, e sarà diretta da *a* verso *c*, ed eguale a quella con cui l'eguale mezza sfera BCD attrae A da A verso R.

Si prendano ora due punti E ed *e* egualmente lontani da A ed *a*, e s'intendan descritti da questi centri, e con un raggio eguale ad AB, *ab*, i segmenti sferici FLM, *flm*. Si prenda inoltre EI = AE, e condotta HK parallela a BD, egli è evidente che le due fette sferiche FGNM, GHKN, eguali simili e similmente poste rispetto ad E, attrarranno egualmente ma in parti contrarie questo punto E, onde niun effetto risulterà da queste attrazioni. Sarà dunque il punto E unicamente attratto dal segmento sferico HLK, e lo sarà come il punto *e* lo è dal segmento sferico *flm*, in parte contraria, giacchè, essendo per costruzione EI = *ae*, epperò IL = *al*, i due segmenti sferici HLK, *flm* sono anche eguali simili e similmente posti rispetto ai punti attratti E ed *e*.

Tutti i punti adunque tanto del filo fluido interno AR, quanto dell'esterno *ar*, egualmente lontani dai punti estremi A ed *a*, sono egualmente attratti in una direzione normale alla superficie del corpo a cui sono contigui, e questo sino a che le distanze AE, *ae* di questi punti diverranno eguali al raggio AB od *ab* dell'attrazione sensibile, nel qual caso svaniranno i due eguali segmenti HLK, *flm*, e cesserà ogni attrazione.

Sarà pertanto la somma delle attrazioni, dalle quali il filo fluido interno AR è spinto all'ingiù, eguale alla somma delle attrazioni dalle quali è attratto all'insù il filo esterno *ar*, onde anche l'attrazione totale nel primo caso sarà eguale all'attrazione totale nel secondo, e sì l'una che l'altra sarà sempre costante e la medesima, e potrà perciò farsi = K. C. C. D. D.

29. Ma nelle attrazioni capillari si producono delle concavità e delle convessità, disposte per lo più nella figura di mezze sfere o di segmenti sferici (§. 26), ond'è necessario

saper calcolare le attrazioni che risentir dee da una massa fluida terminata da una superficie concava o convessa un sottilissimo filo fluido interno od esterno, e perpendicolare alla superficie di quella massa attraente. Qualunque però sia la concavità o convessità di questa superficie, egli è evidente che intendendo un piano tangente della medesima nel punto di contatto del filo fluido attratto, epperò a questo normale, l'attrazione della massa fluida risulterà dalle due attrazioni, della massa cioè terminata dal piano tangente, e del menisco compreso tra questo piano e la superficie, e ne sarà la somma o la differenza, secondochè la massa fluida sarà la somma o la differenza delle due masse, e secondochè le due attrazioni agiranno verso la medesima, o verso le opposte parti. Esprimendo dunque colla costante K (§. 28) l'attrazione della massa fluida terminata dal piano tangente, mancherà solo di esprimere convenientemente quella del menisco, per aver l'attrazione totale che si cerca. E a questo appunto sono diretti i seguenti teoremi.

30. TEOREMA V. *L'attrazione di un Menisco sferico sopra di un sottilissimo filo fluido esterno rispetto alla sfera e perpendicolare al Menisco nel punto di contatto del piano tangente e della sfera, può esprimersi con* $\frac{H}{b}$, *essendo* H *un' adattata quantità costante, e b il raggio della sfera.*

Dim. Sia PV (*Fig.* 8) il filo fluido attratto, OP ovvero O'P il raggio della sfera, e TZ il piano tangente di essa. Considerando i menischi come generati dalla rivoluzione degli spazj QPN, ovvero qPN attorno il diametro della sfera, si potranno riguardare come composti d'infiniti strati cilindrici concentrici generati dalla rivoluzione delle QN, qN. Ora se avranno un sensibil valore i raggi OP, O'P, e PN sia dentro i limiti di quell'insensibil distanza in cui è sensibile l'attrazione, le QN, qN, prossimamente eguali a $\frac{PN^2}{2OP}$, e $\frac{PN^2}{2O'P}$, avranno un' insensibil valore rispetto a PN, e molto più rispetto al filo fluido PV. Quindi tutti i punti delle QN, qN, e delle superficie cilindriche da esse generate avranno sensibilmente la stessa distanza e posizione rispetto a tutte le molecole componenti il filo fluido PV, epperò le attrazioni da esse esercitate sopra qualunque molecola di questo filo fluido saranno sensibilmente

proporzionali alle masse attraenti, cioè alle medesime superficie cilindriche generate dalla rivoluzione delle QN, qN. Ma queste superficie cilindriche sono proporzionali alle QN, qN, e queste QN, qN, allorchè PN è molto piccola rispetto al raggio OP od O'P, sono sensibilmente in ragion reciproca de' medesimi raggi OP, O'P. Dunque le attrazioni esercitate dalle superficie cilindriche generate da QN, qN sopra qualunque molecola del filo fluido PV, sono in ragion reciproca de' raggi OP, O'P. Queste attrazioni delle corrispondenti superficie cilindriche de' due menischi reciprocamente proporzionali ai corrispondenti raggi OP, O'P, agiscono obbliquamente da sotto in sù; ma risolvendole al solito in attrazioni orizzontali e verticali dirette all' insù, facilmente si vedrà che le prime si distruggono, perchè ciascuna ha la sua eguale e contraria nella parte della superficie cilindrica diametralmente opposta rispetto al punto di contatto P, mentre le forze verticali, per esser QN, qN infinitamente piccole rispetto alle loro distanze dalla molecola attratta, saranno nella stessa ragione delle forze obblique dalle quali nascono, cioè in ragion reciproca de' rispettivi raggi OP, O'P.

Ora siccome lo stesso può dimostrarsi di tutte le altre corrispondenti superficie cilindriche generate dalle SX, fX ec., ne siegue che nella medesima ragion reciproca de' raggi OP, O'P staranno ancora tra loro le somme delle attrazioni verticali dirette all' insù esercitate da tutte le superficie cilindriche componenti i due menischi, cioè le attrazioni stesse de' due menischi prodotti dalla rivoluzione degli spazj circolari QPT, qPT attorno il diametro della sfera. Assumendo pertanto un' adattata quantità costante H, e chiamando b il raggio OP di una sfera, l' attrazione del menisco interposto tra la sfera del raggio b e il piano tangente TZ sopra il filo fluido PV esterno rispetto alla sfera, potrà essere espressa da $\frac{H}{b}$. C.C.D.D.

31. L' attrazione del corpo RZ terminato dalla superficie piana TZ sopra il filo fluido esterno PV, potendosi esprimere colla costante K (§. 28), ed essendo evidentemente quest' attrazione eguale alla somma delle due attrazioni dirette verso la medesima parte all' insù, del menisco cioè $\frac{H}{b}$, e di quella della sfera, sarà perciò l' attrazione di una sfera del raggio OP$=b$

sopra il filo fluido esterno PV ad essa normale, espressa da $K - \frac{H}{b}$.

32. E questa pure sarà l'espressione dell'attrazione di un segmento sferico di sensibil grandezza SPM formato tagliando la sfera con un piano SM normale alla direzione del filo fluido esterno ed attratto PV; giacchè tutto il rimanente della sfera posta al disopra di SM, ritrovandosi ad una distanza sensibile da PV, non potrà che insensibilmente influire sulla totalità dell'attrazione verticale risentita dall'attratta colonnetta.

33. E sarà pure la medesima l'espressione dell'attrazione della massa fluida FPGLH terminata da una concavità emisferica FPG sopra il filo fluido interno e normale PV; giacchè questa risulta dall'attrazione all'ingiù della massa fluida TL terminata dalla superficie piana TZ ch'è $= K$ (§. 28), e dall'attrazione all'insù del menisco emisferico FPGZT, ch'è $= \frac{H}{b}$ (§. 30), onde l'attrazione totale all'ingiù sarà $= K - \frac{H}{b}$.

34. E per la ragione addotta al §. 32 l'istessa pure sarà l'attrazione all'ingiù esercitata sopra il filo fluido interno PV da una massa fluida SPMKI, la di cui superficie sia quella di un segmento sferico concavo di qualunque grandezza SPM.

35. Dovendo esser certamente sempre positiva l'espressione $K - \frac{H}{b}$ dell'attrazione della sfera del raggio b sopra un filo fluido esterno ad essa normale, sarà perciò $\frac{H}{b}$ sempre $< K$, qualunque sia il valore di b. Ma d'altronde il valore di $\frac{H}{b}$ può crescere in qualunque ragione, supponendo che nella medesima ragione si diminuisca il raggio della sfera b, e ciò non ostante dovrà sempre rimanere $< K$. Dunque avendo il raggio b della sfera un qualunque sensibil valore, $\frac{H}{b}$ non solamente sarà $<$, ma incomparabilmente $< K$; cioè l'attrazione di un menisco sopra di un filo fluido normale ed esterno rispetto alla sfera, è incomparabilmente minore di quella che vi esercita un corpo terminato da una superficie piana.

36. Teorema VI. *L'attrazione di un Menisco sopra di un filo fluido ad esso normale ed interno rispetto alla sfera, è espressa ancora da* $\frac{H}{b}$, *essendo* b *il raggio della sfera, ed* H *la medesima quantità costante del Teorema antecedente.*

Dim. Se sarà $O''P = OP = b$, e se supporremo come prima le PN, PX comprese dentro i limiti dell'attrazione sensibile, le Q'N, S'X eguali alle QN, SX avranno un insensibil valore rispetto alle PN, PX, e molto più rispetto ad O''P, PV; onde le superficie cilindriche generate dalle Q'N, S'X avranno sensibilmente la stessa posizione rispetto a PV, che le superficie cilindriche generate dalle QN, SX, e perciò sì le une che le altre eserciteranno l'istessa attrazione sopra di PV è nella stessa direzione, onde anche l'attrazione verticale del menisco generato dalla rivoluzione dello spazio TPQ' sopra il filo fluido interno PV, sarà $= \frac{H}{b}$ e diretta da V verso P, siccome fu trovata nel *Teor. precedente* esser quella del menisco prodotto dalla rivoluzione di QPT sopra il filo fluido esterno PV. C.G.D.D.

37. Esprimendo dunque negativamente l'attrazione di questo menisco, cioè con $-\frac{H}{b}$, perchè diretta in senso contrario di K, l'attrazione della sfera del raggio $O''P = b$ sopra il filo fluido interno PV, che dev'essere eguale alla differenza delle due attrazioni del corpo terminato da una superficie piana e del menisco, sarà perciò $= K + \frac{H}{b}$.

38. E la stessa pure sarà l'attrazione sopra il medesimo filo fluido PV esercitata dalla massa fluida IS'PM'K rinchiusa in un canaletto di sensibil larghezza IK e di una qualunque sensibil lunghezza, e terminante in una superficie convessa S'PM' di segmento sferico; dappoichè potendosi trascurare l'attrazione di tutta la rimanente materia della sfera attraente del raggio O''P, perchè posta tutta a sensibili distanze da PV, e potendosi aggiugnere fuori della sfera quella materia che si vuole, l'attrazione della massa fluida IS'PM'K sopra di PV sarà sensibilmente la stessa che quella dell'intiera sfera, cioè $K + \frac{H}{b}$.

39. Quindi generalmente l'attrazione di un corpo terminato da una porzione sensibile di superficie sferica sopra di un filo fluido posto nella direzione del suo asse, sarà $K \pm \frac{H}{b}$, valendo il segno + nel caso della superficie convessa, e nell' altro della concava il — (§§. 34 e *prec.*).

40. Ma l'attrazione capillare dà spesso origine a superficie concave, convesse, od anche concavo-convesse, che molto si allontanano dalla figura sferica, come per es. nel caso di una gocciola attratta tra due piani che forman tra loro un piccolo angolo, nel quale, come vedremo, la circonferenza della gocciola prende la figura di una gola di puleggia, cioè convessa nella direzione della circonferenza, e concava in una direzione alla prima normale, potendo anch'essere i raggi di convessità e di concavità molto diversi tra loro. Per generalizzare adunque la ricerca de' due precedenti teoremi, ed estenderla a tutti i casi possibili, è necessario determinare ancora l'attrazione di un menisco formato da una qualunque superficie, e dal piano tangente della medesima nel punto in cui il filo fluido attratto gli è perpendicolare. Due casi distingueremo, che partitamente esamineremo ne' due seguenti teoremi, cioè che la superficie curva formante il menisco sia una superficie di rivoluzione attorno di un asse posto nella direzione del filo fluido, oppure che il solido a cui appartiene la superficie formante il menisco, non sia un solido di rivoluzione. In questo secondo caso la Geometria c'insegna che le diverse sezioni che per il punto di contatto possono farsi nella superficie hanno in quel punto diversi raggi osculatori, e che tra questi due ve ne sono uno *Massimo* e l'altro *Minimo*, i quali appartengono a due sezioni che sono poste, l'una rispetto all'altra, ad angoli retti. Nel primo caso al contrario tutte le sezioni avranno nel punto di contatto del filo fluido il medesimo raggio osculatore, cioè quello della curva generatrice.

41. Teorema VII. *Se il Menisco venga formato dalla superficie di un solido di rivoluzione attorno di un asse, e da un piano tangente nell' estremità di quest' asse, la sua attrazione sopra di un filo fluido esterno od interno rispetto alla superficie e a questa normale, sarà pure espressa da* $\frac{H}{b}$, *essendo b il raggio osculatore*

nel

nel punto di contatto, ed H *la medesima quantità costante de'* Teoremi antecedenti.

Dim. Dovendo avere ogni sezione della superficie, nell' estremità P dell' asse di rivoluzione, il medesimo raggio osculatore OP, ovvero $O'P = b$, egli è evidente che dentro i limiti dell' attrazione sensibile il segmento SPM ovvero S'PM' si confonderà ed identificherà con un segmento sferico, e il menisco attraente formato dalla superficie di un qualunque solido di rivoluzione, e dal piano tangente nell' estremità dell' asse, dentro i medesimi limiti, si confonderà col menisco sferico del raggio b. Quindi l' attrazione dell' uno sarà la stessa che quella dell' altro, cioè $\frac{H}{b}$ (§§. 30 e 36). C.C.D.D.

42. Quindi I.° L' attrazione di un qualunque solido di rivoluzione sopra di un filo fluido esterno posto nel prolungamento dell' asse sarà $= K - \frac{H}{b}$ (§. 31). II.° E la stessa pure sarà l' espressione dell' attrazione di un qualunque segmento sensibile del detto solido, formato con un piano normale all' asse di rivoluzione (§. 32). III.° Siccome sarà pure la stessa l' espressione dell' attrazione di un corpo qualunque terminato da una superficie concava di rivoluzione sopra di un filo fluido interno posto nel prolungamento dell' asse (§. 33). IV.° Sarà però $K + \frac{H}{b}$ l' attrazione di un solido di rivoluzione, o di un segmento sensibile di esso, rispetto a un filo fluido interno posto lungo l' asse di rivoluzione (§. 37). V.° E questa medesima sarà l' attrazione esercitata da una massa fluida, terminata da una superficie convessa di rivoluzione, rispetto a un filo fluido interno situato nella direzione dell' asse (§. 38).

43. Teorema VIII. *Se il Menisco sia formato da una superficie qualunque, e da un piano tangente, e che il* massimo *raggio osculatore delle sezioni della superficie per il punto di contatto sia* b, *e il* minimo b', *l' attrazione del Menisco sopra di un filo fluido, esterno od interno rispetto alla superficie, e normale al Menisco nel punto di contatto, verrà espressa da* $\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ *essendo* H *la medesima quantità costante de'* Teoremi antecedenti.

Dim. Se intenderemo, come nel *Teor. V.* (§. 30), sopra la circonferenza del circolo che ha per raggio PN eretta una

superficie cilindrica dentro il menisco, questa non avrà dappertutto la medesima altezza QN, come nel caso della sfera, ma sotto il *massimo* raggio osculatore che ha per raggio O'P, in due punti diametralmente opposti, avrà un' altezza *minima* qN; sotto il *minimo* il di cui raggio è OP, in due punti 90° lontani dai primi, avrà una *massima* altezza QN, ed avrà poi delle altezze intermedie in tutti gli altri punti intermedj. Questa superficie cilindrica adunque verrà terminata superiormente non da una circonferenza circolare del raggio PN, come nel caso di una superficie sferica, ma da una curva a doppia curvatura; e se s' intenderà questa superficie cilindrica svolta e ridotta in un piano, essa prenderà la figura $q'tq''t'q'''n'''n'$, la di cui base $n'n'''$ sarà eguale alla circonferenza del raggio PN, ed avendo divisa questa base in quattro parti eguali $n'u$, un'', $n''u'$, $u'n'''$, le altezze corrispondenti ai punti n', u, n'', u', n''', cioè $q'n'$, tu, $q''n''$, $t'u'$, $q'''n'''$ saranno alternativamente eguali a qN, QN.

Ma attesa la piccolezza di PN, che non può superare l'infinitamente piccola distanza in cui è sensibile l' attrazione, potendosi considerare come rettilinei i lati $q't$, tq'', $q''t'$, $t'q'''$ di questa figura, ne risulta che l' area della medesima sarà sensibilmente eguale al prodotto di $n'n'''$, cioè della circonferenza del raggio PN, per la semisomma delle due $q'n'$, tu, ossia qN, QN; laddove se si trattasse di una sfera del raggio O'P, la corrispondente superficie cilindrica eretta sopra la circonferenza del raggio PN, sarebbe eguale al prodotto di questa medesima circonferenza moltiplicata per qN. Sopprimendo adunque il moltiplicatore comune, cioè la circonferenza del raggio PN, queste due superficie staranno tra loro in ragione di $\frac{1}{2}(q\mathrm{N} + \mathrm{QN}) : q\mathrm{N}$.

Ora allo stesso modo che ne' teoremi antecedenti potendosi considerare tutte le varie altezze di queste superficie cilindriche come infinitamente piccole e come punti in confronto delle distanze dalle molecole attratte del filo fluido PV, le attrazioni delle due anzidette superficie cilindriche sopra di qualunque molecola del filo fluido saranno in ragione delle superficie medesime, cioè delle masse attraenti. Sarà dunque la massa attraente, cioè l' azione sul filo fluido PV della prima superficie cilindrica, alla massa attraente ossia all' azione della seconda sul medesimo filo fluido, come $\frac{1}{2}(q\mathrm{N} + \mathrm{QN}) : q\mathrm{N}$;

ossia, potendosi dimostrare come al *Teorema V.* (§. 30) che $qN = \frac{\overline{PN}^2}{2O'P}$, $QN = \frac{\overline{PN}^2}{2OP}$, l'una attrazione starà all'altra, togliendo il fattor comune $\frac{\overline{PN}^2}{2}$, come $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{O'P} + \frac{1}{OP}\right) : \frac{1}{O'P}$; ovvero finalmente facendosi il *massimo* raggio osculatore $O'P = b$, il *minimo* $OP = b'$, queste due attrazioni staranno fra loro come $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) : \frac{1}{b}$.

Si dimostrerà poi come nel cit. *Teor. V.* che in questa medesima ragione in cui stanno le attrazioni obblique esercitate sopra qualunque molecola del filo fluido, staranno pure le forze verticali che ne nascono nella direzione del filo fluido medesimo, distruggendosi anche in questo caso le forze orizzontali. Imperocchè quantunque le altezze dello strato cilindrico non siano ora in tutto il giro le medesime, sono però le medesime ne' punti diametralmente opposti rispetto al punto di contatto, siccome appartenenti alla sezione che ha il medesimo raggio osculatore. Ora ciò basta perchè le forze orizzontali che ne nascono sieno eguali e contrarie, epperò si distruggano; mentre le forze verticali, attesa la piccolezza delle qN, QN rispetto a PN, PV, rimarranno tra loro nell'istesso rapporto delle obblique dalle quali nascono, cioè nel rapporto trovato di $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) : \frac{1}{b}$.

Potendosi dunque dimostrare lo stesso di tutte le corrispondenti superficie cilindriche componenti il menisco formato da un qualunque corpo i di cui raggi osculatori *massimo* e *minimo* in P sono b e b', ed il menisco sferico del raggio $O'P = b$, ne risulterà che l'attrazione del primo menisco sopra il filo fluido PV, all'attrazione sopra il medesimo filo fluido del menisco sferico, starà parimenti come $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) : \frac{1}{b}$; cosicchè essendo quest'ultima (§. 30) $= \frac{H}{b}$, intendendo per H una costante, la prima cioè quella del proposto menisco avente in P per *massimo* e *minimo* raggio osculatore b e b', sarà $\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$.

C. C. D. D.

44. Sarà dunque I.° $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ l'azione esercitata sopra di un filo fluido esterno e normale da un corpo qualunque, o da un qualunque suo segmento, in cui il *massimo* e *minimo* raggio osculatore per il punto di contatto sieno b e b' (§§. 31 e 32). II.° E questa pure sarà l'attrazione sopra di un filo fluido interno e normale, esercitata da una massa fluida terminata da una qualunque superficie concava, le di cui sezioni nel punto di contatto del filo fluido abbiano parimenti b e b' per *massimo* e *minimo* raggio osculatore (§. 33). III.° Sarà però $K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ l'espressione di quest'attrazione, se la massa attraente venga terminata da una superficie convessa qualunque avente, come sopra, per *massimo* e *minimo* raggio osculatore b e b' (§§. 31 e 38).

45. Se si prenderanno le $q'^{v}n'^{v}$, $t''u''$ equidistanti da $q'n'$, tu, cosicchè sia $n'^{v}u'' = n'u = 90°$ della circonferenza del raggio PN, saranno esse le altezze della superficie cilindrica componente il menisco eretta sopra di questa circonferenza, e corrispondenti a due sezioni della superficie curva del menisco le quali si tagliano ad angolo retto. Ora chiamando B e B' i raggi osculatori di queste due sezioni, siccome si sono trovate le $q'n'$, tu, ossia qN, QN, eguali a $\frac{\overline{PN}^2}{2O'P}$, $\frac{\overline{PN}^2}{2OP}$, ossia $\frac{\overline{PN}^2}{2b}$, $\frac{\overline{PN}^2}{2b'}$, essendo b e b' i raggi osculatori delle sezioni che corrispondono a $q'n'$, tu, così essendo ora B e B' i raggi osculatori delle sezioni corrispondenti a $q'^{v}n'^{v}$, $t''u''$, saranno queste eguali a $\frac{\overline{PN}^2}{2B}$, $\frac{\overline{PN}^2}{2B'}$. Ma è evidentemente $q'n' + tu = q'^{v}n'^{v} + t''u''$. Dunque togliendo il fattor comune $\frac{\overline{PN}^2}{2}$, sarà anche $\frac{1}{b} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{B} + \frac{1}{B'}$; epperò l'azione del menisco che si è trovata $= \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) = \frac{H}{2b} + \frac{H}{2b'}$ sarà anche $= \frac{H}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B'}\right) = \frac{H}{2B} + \frac{H}{2B'}$, cioè l'azione di un menisco formato da una superficie qualunque e da un piano tangente sarà eguale (§§. 30 e 36) alla semisomma delle azioni di due menischi sferici nascenti da due sfere, i raggi delle quali sieno, uno il raggio osculatore di una sezione qualunque della superficie del proposto menisco fatta da un piano perpendico-

lare a questa superficie, e l'altro il raggio osculatore della sezione fatta da un piano normale al primo.

46. Quindi essendo $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right) = K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B'}\right)$ la metà della somma di $K - \frac{H}{b}$, $K - \frac{H}{b'}$, ovvero di $K - \frac{H}{B}$, $K - \frac{H}{B'}$, sarà anche (§. 44, I.° e II.°) l'attrazione di un corpo qualunque sopra di un filo fluido esterno, ovvero di una massa fluida terminata da una qualunque superficie concava sopra di un filo fluido interno e normale, eguale alla semisomma delle attrazioni di due sfere o di due segmenti sferici dei raggi B e B' (§§. 31 e 32); e lo stesso pure sarà dell'attrazione $K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)$ ossia $K + \frac{H}{2}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{B'}\right)$ di un corpo qualunque (§. 44. III.°) terminato da una superficie convessa sopra di un filo fluido interno ad essa perpendicolare (§§. 37 e 38).

47. Ma quale sarà l'attrazione di un corpo terminato da una superficie, la quale in qualunque punto, come nella gola di una puleggia, e come vedremo accadere in una goccia attratta tra due piani, sia convessa in una certa direzione, e concava in un'altra perpendicolare alla prima? Le comuni regole del calcolo insegnano che basterà in questo caso cambiare il segno del raggio osculatore che passa dalla parte opposta allorchè la superficie, che si considerava dapprima come concava, divien convessa, cosicchè se b sia questo raggio, rimanendo b' nella parte concava, l'attrazione di un corpo terminato da una siffatta superficie concavo-convessa, invece di essere, come nel caso della superficie tutta concava $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{b}\right)$ (§. 44, II.°) sarà ora $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right)$.

Dai nostri principj e dal nostro metodo anche questa trasformazione di formola, di cui dovremo valerci in appresso, discende molto agevolmente. Sia, come nel *Teorema*, $n'u$ un quarto della base circolare di una delle superficie cilindriche componenti il menisco, (ed il discorso si trasporterà facilmente alle intiere superficie cilindriche, e ai menischi che ne risultano) la quale esista nel piano tangente il proposto solido, ove la superficie concava si separa dalla convessa, rimanendo

quella al disopra, e questa passando al di sotto. Restando dunque, come prima, al disopra di $n'u$ l'altezza tu della superficie cilindrica corrispondente al *minimo* raggio di concavità, e passando per lo contrario al di sotto di $n'u$ l'altezza $q^v n'$ corrispondente al *minimo* raggio di convessità, condotta la $q^v t$ che tagli $n'u$ in z, il triangolo tuz denoterà quella porzione che rimane di superficie cilindrica al di sopra del piano tangente e che attrae il filo fluido all'insù, mentre il triangolo $q^v n'z$ esprimerà una porzione di superficie cilindrica che attrae parimenti il filo fluido all'insù, ma che si sottrae dal solido terminato dal piano tangente di esso. Per ragione adunque di questo triangolo sottratto l'attrazione K all'ingiù della parte della massa attraente terminata dal piano tangente dovrà accrescersi, e non iscemerà che per ragione del triangolo aggiunto e posto nella parte concava della superficie tzu. Ma nel caso che la superficie terminante il solido attraente sia tutta concava, la diminuzione di K in questo medesimo quarto di superficie cilindrica nasce dall'attrazione all'insù di tutto il trapezio aggiunto sopra il piano tangente, cioè $tq'n'u$. Dunque per questo quarto di superficie cilindrica, epperò anche per l'intiera superficie, la diminuzione di K nel primo caso alla diminuzione di K nel secondo starà come $tuz - q^v n'z : tq'n'u = \frac{1}{2}(tu - q^v n') \times n'u : \frac{1}{2}(tu + q'n').n'u = tu - q^v n' : tu + q'n'$, cioè (essendo come prima tu, e $q^v n' = q'n'$ proporzionali ad $\frac{1}{b'}$ ed $\frac{1}{b}$) $= \frac{1}{b'} - \frac{1}{b} : \frac{1}{b'} + \frac{1}{b}$. E l'istesso potendosi dimostrare di tutte le altre superficie cilindriche, ne risulta che nella stessa ragione dovrà stare la diminuzione totale di K nel primo caso a quella nel secondo; cosicchè essendosi trovata in quest'ultimo (§. 44, II.°) la diminuzione suddetta $= \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'} + \frac{1}{b}\right)$, nel primo dovrà essere $\frac{H}{2} \times \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right)$, cioè l'attrazione di una massa fluida terminata da una superficie concavo-convessa sopra di un filo fluido interno normale alla superficie in un punto ove il raggio della concavità sia b', e b quello della convessità, verrà espressa da $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{b}\right)$.

48. Il metodo geometrico, piano ed elementare, che in questa II.ª Parte abbiamo sostituito all'analitico adoperato dal

Sig. *De la Place*, ingegnoso certamente, ma forse troppo astruso e difficile per il maggior numero de' Fisici, sembra raccomandarsi per la sua generalità non meno che per la sua semplicità, e noi confidiamo che per questi due titoli quell' insigne Geometra sarà per onorarlo della sua autorevole approvazione.

PARTE III.

Spiegazione e misura de' principali e più singolari fenomeni capillari.

49. Dobbiamo ora far uso della teorìa dell' attrazione capillare stabilita nelle due precedenti *Parti*, per dedurne la spiegazione e la misura de' diversi più singolari fenomeni, che la capillarità ci presenta; ed il mirabil consenso tra i risultati teorici che troveremo, e quei delle esperienze che andremo di mano in mano accennando, formeranno della premessa teorìa il più pieno trionfo e la più completa dimostrazione. Ci studieremo anche in questa *Parte*, come abbiam fatto nella II.ª, di semplicizzare ed abbassare alla più comune intelligenza la sublime Analisi dell' Autore che abbiam preso ad illustrare.

Articolo I.

Dell' innalzamento ed abbassamento de' fluidi ne' tubi capillari cilindrici.

50. È questo il più noto ed ovvio fenomeno dell' azion capillare, siccome la legge che siegue quest' innalzamento od abbassamento, cioè di essere, supposta la medesima la materia del tubo ed il fluido, sensibilmente in ragione inversa del diametro interno del tubo. Ora dalla premessa teorìa molto agevolmente si deduce questa medesima legge.

Abbiamo veduto infatti che dal rapporto delle intensità delle attrazioni della materia del tubo e del fluido dipende unicamente la concavità o convessità della superficie superiore del fluido (§§. 12, 13, 16, 18, 19), che i lati estremi di queste curve concave o convesse, essendo la medesima la materia del tubo ed il fluido, fanno i medesimi angoli colle pareti del tu-

bo (§. 21), e che le curve stesse ne' tubi capillari sono semicircolari o almeno simili tra loro (§. 22, e segg.). Ciò supposto, sia NOM (*Fig.* 9) la superficie superiore per es. concava del fluido rinchiuso in un tubo capillare: intendendo che passi per O un sottilissimo canaletto perpendicolare alla curva NOM, il quale ripiegandosi orizzontalmente in ZR sotto il tubo, sorga poi verticalmente sino a un punto V del fluido adjacente, ove non sia più sensibile l'attrazione del tubo, le leggi dell'equilibrio idrostatico esigono che le pressioni che soffrono le estremità di questo canaletto in V ed O sieno eguali tra loro (§. 27). Ora prescindendo dalla pressione dell'atmosfera, la quale è sensibilmente la stessa in V e in O, il punto V è spinto da V verso R dall'azione della massa fluida terminata nella superficie piana AV, azione che abbiamo chiamata K (§. 28), mentre il punto O è attratto da O verso Z dall'azione della massa fluida NFEM terminante nella superficie concava NOM, la quale azione si è trovata $= K - \frac{H}{b}$ (§§. 33 e 42, III.°), intendendo per b il raggio osculatore della curva in O. Sarà dunque la prima forza maggiore della seconda della quantità $\frac{H}{b}$, epperò il fluido dovrà sollevarsi dentro il tubo sino all'altezza OP, cioè sino a tanto che il peso del filo fluido sollevato OP compensi ed eguagli l'eccesso di quella prima forza. Infatti chiamando g la gravità specifica del fluido, e prendendo per unità la base del filo fluido OP, il peso di questo sarà $g.OP$; onde la pressione che da O si trasmetterà in V, la quale prima era $K - \frac{H}{b}$, si accrescerà di questa medesima quantità, e diverrà $K - \frac{H}{b} + g.OP$. Perchè dunque vi sia il richiesto equilibrio, dovrà essere la pressione in V, ch'è sempre $K = K - \frac{H}{b} + g.OP$, cioè $g.OP = \frac{H}{b}$.

Che se la superficie superiore del fluido sia convessa, come N'O'M', l'azione del fluido sul canaletto normale alla curva in O' sarà $K + \frac{H}{b}$ (§. 38 e 42, V.°), ond'essa prevarrà sulla pressione K in V, e per istabilire l'equilibrio il fluido dovrà abbassarsi dentro il tubo sino in O', cosicchè condotta l'oriz-

l'orizzontale O'R', la pressione K in V trasmessa in O' si accresca di $g.VR' = g.O'P$, e sia $K + g.O'P = K + \frac{H}{b}$, cioè di nuovo $g.O'P = \frac{H}{b}$.

Si avrà dunque tanto nel caso della curva concava, quanto della convessa, l'innalzamento od abbassamento OP od O'P al di sopra o al di sotto del livello $= \frac{H}{gb}$, epperò essendo, per una data materia del tubo e per un dato fluido, le quantità H e g costanti, il suddetto innalzamento od abbassamento sarà proporzionale ad $\frac{1}{b}$, cioè in ragione inversa del raggio osculatore della curva in O ovvero O'. Ma essendo, per una data materia del tubo e per un dato fluido, le curve NOM, N'O'M' sempre simili a loro stesse, e molto approssimantisi ad archi semicircolari o almeno archi circolari simili (§. 22 e segg.) i raggi osculatori in O ed O' sono proporzionali alle corde di queste curve, cioè ai diametri interni de' tubi NM, N'M'.

Dunque finalmente *per una data materia di tubi ed un dato fluido, l'ascensione del fluido al disopra, o la depressione al disotto del livello, sarà sempre ne' diversi tubi in ragione inversa del diametro interno di essi.*

Esperimento.

51. Riferiremo quello istituito dai Sigg. *Haüy* e *Tremery* ad istanza del Sig. *De la Place*. Osservarono pertanto questi due celebri Fisici che in un tubo, il di cui diametro interno era di 2 *millimetri*, l'acqua s'innalzava sopra il livello all'altezza di *millimetri* 6.75, e l'olio d'arancio a *millimetri* 3.4.

Prendendo un tubo più stretto di $\frac{2}{3}$ di *millimetro* nel suo diametro interno, l'acqua vi si sollevò sino a 10 *millimetri*, e l'olio d'arancio sino a 5, altezze appena sensibilmente diverse da 10.12, e 5.1, che la ragione inversa de' diametri avrebbe domandato.

Con un tubo anche più angusto di $\frac{3}{4}$ di *millimetro* di diametro, la ragione inversa de' diametri avrebbe dovuto dare per l'acqua 18 *millimetri* di altezza, e per l'olio d'arancio 9.06, e l'osservazione diede 18.5 e 9; nè maggior consenso si può

sperare in siffatti esperimenti, attesa soprattutto la grandissima difficoltà di misurare con esattezza i piccoli diametri interni de' tubi capillari.

I due primi tubi, uno di 2 *millimetri* e l'altro di $\frac{4}{3}$ di *millimetro* di diametro servirono pure a determinare l'abbassamento del mercurio sotto il livello del mercurio adjacente. A quest'oggetto furono primieramente immersi in un bagno di mercurio, ad una profondità che fu esattamente misurata. Quindi facendo scorrere sotto la loro estremità inferiore un piano levigatissimo, che impedisse al mercurio di escire dai tubi, furono questi diligentemente estratti, e si misurarono le altezze delle colonne di mercurio sopra il detto piano. Le differenze tra queste altezze e le lunghezze delle parti immerse de' tubi nel bagno, davano, com'è evidente, gli abbassamenti sotto il livello ricercati. Così questi si trovarono di $3\frac{2}{3}$ di *millimetro*, e di 5.5, i quali numeri sono precisamente in ragione inversa de' diametri interni de' tubi, ai quali appartengono, cioè 2, e $\frac{4}{3}$.

52. Se supporremo che θ sia il complemento dell'angolo sempre costante (§. 21) che in una data materia di tubi e in un dato fluido fanno i lati estremi cioè le tangenti in N, M, ovvero N', M' colle pareti del tubo, essendo T, T' i centri de' circoli osculatori, ossia degli archi circolari NOM, N'O'M', ne' triangoli NST, N'S'T' si avrà $\frac{1}{NT} = \frac{\text{sen. NTS}}{NS}$, ovvero $\frac{1}{N'T'} = \frac{\text{sen. N'T'S'}}{N'S'}$, cioè chiamando l il semidiametro interno del tubo NS ovvero N'S', sarà $\frac{1}{b} = \frac{\text{sen. }\theta}{l}$. Quindi l'ascensione o depressione del fluido nel tubo capillare che abbiamo trovata $= \frac{H}{gb}$ (§. 50) potrà anche esprimersi con $\frac{H \text{ sen. }\theta}{gl}$; d'onde coi tubi di una data materia e con un dato fluido, dovendo esser sempre le medesime le quantità H, g, θ, di nuovo si vede che la suddetta ascensione o depressione dovrà esser sempre in ragione inversa del semidiametro l, o del diametro interno del tubo.

53. Di più esprimendo $\frac{H \text{ sen. }\theta}{gl}$ l'ascensione o depressione del fluido in un tubo capillare del semidiametro l (§. *prec.*),

se per mezzo degli accennati (§. 51) o di altri equivalenti esperimenti si determinerà per un caso particolare il valore del coefficiente costante $\frac{H \text{ sen. } \theta}{g}$, si avrà la detta ascensione o depressione per qualunque altro caso. Così per es. essendosi trovato (§. 51) che in un tubo del diametro di 2 *millimetri*, cioè in cui $l = 1^{mill.}$ il mercurio si abbassava di $3\frac{1}{3}^{mill.}$, se ne dedurrà perciò che per il mercurio rinchiuso in un tubo di vetro si ha $\frac{H \text{ sen. } \theta}{g \times 1^{mill.}} = 3\frac{1}{3}^{mill.}$, ossia $\frac{H \text{ sen. } \theta}{g} = 1^{mill.} \times 3\frac{1}{3}^{mill.}$; e quindi generalmente che la depressione del mercurio in un tubo capillare di vetro del semidiametro l, cioè $\frac{H \text{ sen. } \theta}{gl} = \frac{1^{mill.} \times 3\frac{1}{3}^{mill.}}{l}$.

54. L'abbassamento del mercurio ne' tubi capillari dimostra la necessità, e suggerisce insieme il modo di correggere le altezze barometriche osservate dall'effetto della capillarità, ad oggetto di renderle comparabili, e ridurle a quelle che risulterebbero dalla sola pressione dell'atmosfera. Quest'effetto della capillarità sarebbe nullo in un barómetro a due branche di eguale larghezza, perchè lo stesso ed operante in senso contrario nelle due estremità del mercurio; ma ne' barometri formati di un tubo immerso in un largo pozzetto, l'effetto capillare si fa tanto più sensibile, quanto il tubo è più stretto. Infatti se supporremo esser A l'altezza del mercurio nel tubo sopra il livello del pozzetto, e P l'altezza della colonna mercuriale equivalente alla pressione dell'atmosfera, la pressione sopra di qualunque punto del pozzetto sarà $gP + K$, mentre quella contraria del mercurio innalzato nel tubo, e che si suppone spogliato superiormente d'aria, nel vertice della sua superficie convessa, sarà $K + \frac{H}{b} + gA$, onde dovrà aversi per l'equilibrio $gP = \frac{H}{b} + gA$, ossia $P = A + \frac{H}{gb}$; cioè all'altezza A indicata dal barometro dovrà aggiungersi $\frac{H}{gb}$ per ottenere l'altezza P conveniente alla pressione dell'atmosfera. Ma essendo l il semidiametro del tubo, $\frac{H}{gb} = \frac{H \text{ sen. } \theta}{gl}$ (§. 52) $= \frac{1^{mill.} \times 3\frac{1}{3}^{mill.}}{l}$ (§. *prec.*). Dunque questa stessa sarà l'altezza da aggiungersi ad A, per avere l'altezza P conveniente alla pressione dell'atmosfera.

Così per es. se i diametri di due tubi di barometro sieno di 2 e 3 *millimetri*, le quantità da aggiungersi saranno $3\frac{1}{3}^{mill.}$, e $2\frac{2}{3}^{mill.}$, onde quantunque indichino la medesima altezza A, corrisponderanno ciò non ostante a disuguali pressioni dell'atmosfera.

ARTICOLO II.

Dell' innalzamento od abbassamento di un fluido nell' interstizio capillare compreso tra le pareti interne di un tubo e la superficie di un cilindro concentrico della stessa materia, ovvero nell' intervallo parimenti capillare di due piani della stessa materia, paralleli e verticali.

55. Rappresenti *a'b'm'n'* (*Fig.* 10) la linea a cui s'innalza il fluido lungo le pareti del tubo, e *d'c'p'q'* quella a cui sorge lungo la superficie del cilindro concentrico interiore. Tra queste due linee più elevate si avvallerà il fluido, cosicchè condotta *a'd'* diretta al centro comune del tubo e del cilindro, il fluido da *a'* in *d'* prenderà la figura *aid* di un arco concavo circolare e pressochè semicircolare (§. 22, e segg.). Se dunque per il punto infimo *i* di quest' arco s' intenderà passare un piano orizzontale, la porzione di fluido posta al di sopra di questo piano verrà inferiormente terminata da una corona circolare e superiormente da una superficie concava parimenti circolare e semicilindrica, di cui quella corona circolare sarà tangente; e l'azione di questa porzione di fluido all'insù (§. 43) sarà quella che determinerà l'innalzamento del fluido sottoposto sopra il livello del fluido esteriore (§. 50). Consideriamo una porzione piccolissima di questa massa fluida attraente, per es. *abcdefgh* corrispondente al trapezio *a'b'c'd'*, in cui *a'd'*, *b'c'* eguagliano l'interstizio capillare tra il cilindro ed il tubo, ed *a'b'*, *c'd'* due piccolissime porzioni delle loro circonferenze: siccome tutte le altre consimili porzioni infinitesime del fluido attraente ed attratto sono le medesime in massa, figura e posizione, quello che si dimostrerà di una, varrà anche per il complesso di tutte.

Ora volendo noi determinare l'ascensione del fluido nella porzione infinitesima X dell' interstizio capillare tra il tubo e il cilindro, la paragoneremo con quella che ha luogo in un tubo

ordinario Z, il di cui diametro interno AD sia eguale ad $a'd'$. Il fluido solleverassi lungo le pareti di questo tubo precisamente allo stesso modo in cui si solleva lungo le pareti del tubo e del cilindro concentrico, conformandosi in una curva concava AID eguale e simile ad aid; poichè i piani infinitesimi attraenti rappresentati da AE, DH sono della stessa materia e situati allo stesso modo rispetto al fluido sottoposto ed attratto, rappresentato da EH, che i piani infinitesimi ae, dh rispetto ad $eh = \mathrm{EH}$. Qualunque sia pertanto la figura degli archi AID, aid, ed anche quando non fosser circolari e semicircolari, come si è veduto ai §§. 22 e segg., egli è certo però che il raggio osculatore del menisco generato dalla rivoluzione di AID attorno dell'asse del tubo nel punto infimo I sarà lo stesso che il raggio osculatore in i nel piano aid della massa fluida attraente ag. Il raggio osculatore di questa medesima massa attraente in una direzione ik perpendicolare alla prima, sarà evidentemente infinito. Se dunque quel primo raggio osculatore comune alle due masse attraenti si chiami b, nel punto I del tubo capillare Z avremo un'attrazione $= \mathrm{K} - \frac{\mathrm{H}}{b}$ (§§. 33, 34, e 42, III.°), e nel punto i, o in qualunque altro punto della ik, avremo un'attrazione $= \mathrm{K} - \frac{\mathrm{H}}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\infty}\right)$ (§. 44, II.°) $= \mathrm{K} - \frac{\mathrm{H}}{2b}$. Supponendo adunque che dai punti I ed i scendano verticalmente i soliti canaletti infinitesimi, che ripiegandosi per di sotto sorgano sino a un qualunque punto della superficie del fluido del vaso in cui l'attrazione è $= \mathrm{K}$ (§. 28), e supponendo inoltre che il fluido nel tubo Z s'innalzi sopra il livello del fluido nel vaso all'altezza A, e nell'interstizio X fra il cilindro e il tubo all'altezza a, si avranno al solito (§. 50) le due equazioni dell'equilibrio $\mathrm{K} - \frac{\mathrm{H}}{b} + g\mathrm{A} = \mathrm{K}$, $\mathrm{K} - \frac{\mathrm{H}}{2b} + ga = \mathrm{K}$, d'onde ne risulterà $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{H}}{gb}$, ed $a = \frac{\mathrm{H}}{2gb}$, e quindi $a = \frac{1}{2}\mathrm{A}$.

Sorgerà dunque il fluido nell'interstizio capillare tra il cilindro ed il tubo ad un'altezza sopra il livello del fluido esteriore contenuto nel vaso, eguale alla metà di quell'altezza a cui s'innalza in un tubo capillare del medesimo diametro che la lar-

ghezza di quell' interstizio, ovvero, il ch' è lo stesso (§. 50), *ad un' altezza eguale a quella a cui s' innalza in un tubo capillare di un diametro due volte più grande, cioè di un raggio eguale alla larghezza dell' interstizio stesso*.

56. La dimostrazione procederà allo stesso modo nel caso che la superficie del fluido sia convessa, solo che gli alzamenti si cangeranno in abbassamenti; ed il teorema, com' è evidente, avrà pure egualmente luogo nel caso che i raggi del tubo esterno e del cilindro interno divengano infiniti, nel qual caso si avranno due piani verticali e paralleli posti ad una piccolissima distanza l' uno dall' altro.

Esperimento.

57. I medesimi Sigg. *Haüy* e *Tremery*, che abbiam citati qui sopra (§. 51), avendo preso ad osservare l' ascensione dell' acqua tra due lastre di vetro verticali e parallele, poste alla distanza l' una dall' altra di 1 *millimetro*, la ritrovarono di 6. 5 *millimetri*, cioè presso a poco eguale a quella osservata nel primo de' tre tubi del §. 51 di 2 millimetri di diametro, la quale fu di millimetri 6.75.

Avendo verificato il teorema in uno de' due limiti, cioè nel caso che i raggi del tubo e del cilindro fossero infiniti, vollero anche verificarlo nell' altro limite, cioè essendo piccolissimi i raggi del cilindro e del tubo. Presero pertanto un tubo di vetro ben calibrato che avea di diametro interno 5 *millimetri*, e dentro v' inserirono un cilindro parimenti di vetro di un diametro di 3 *millimetri*, usando ogni diligenza perchè l' asse dell' uno coincidesse esattamente con quello dell' altro. Tuffando quindi nell' acqua il tubo ed il cilindro così disposti, osservarono che nell' interstizio capillare, ch' era della larghezza di 1 *millimetro*, l' acqua s' innalzava un poco meno di 7 *millimetri*, cioè presso a poco quanto nel primo de' sovraccitati tre tubi, il di cui semidiametro eguagliava la larghezza dell' interstizio capillare compreso tra il cilindro ed il tubo.

Articolo III.

De' movimenti, e dell' equilibrio di una piccola quantità di fluido rinchiusa dentro di un tubo conico capillare, orizzontale o inclinato all' orizzonte.

58. Una piccola colonna di fluido rinchiusa in un tubo capillare cilindrico, se questo sia situato orizzontalmente, rimarrà in quiete ove si trova, e se si solleverà alcun poco il tubo da una estremità, la gocciola si muoverà certamente verso l' opposta parte. Imperocchè terminando la colonnetta fluida alle due estremità in due superficie concave o convesse, ma eguali e simili tra loro, se si considererà il filo fluido che ne attraversa l' asse, il raggio osculatore nelle due estremità sarà il medesimo, per es. $= b$, epperò queste due estremità verranno spinte in direzioni contrarie con un' egual forza $K \pm \frac{H}{b}$ (§. 39), onde vi sarà equilibrio e la colonnetta si rimarrà in quiete, e solo potrà e dovrà muoversi in virtù del proprio peso, quando il tubo venga da un' estremità alcun poco sollevato.

Ma lo stesso non varrà in un tubo conico, in cui essendo diversi i raggi osculatori ne' punti estremi del filo fluido che passa per l' asse della colonnetta, diverse pure saranno le forze contrarie da cui esso trovasi spinto, onde muoverassi verso l' uno o l' altro estremo, e non potrà ridursi alla quiete se non contrabilanciando questa tendenza colla forza contraria della sua gravità, cioè sollevando debitamente l' asse del tubo al di sopra dell' orizzonte da quella parte a cui tende la colonnetta. Dobbiamo dunque ora cercare le condizioni dell' equilibrio e le leggi de' movimenti di una siffatta colonnetta fluida rinchiusa in un tubo conico capillare.

59. Supponghiamo nella figura che le due superficie in cui termina la colonnetta fluida sieno entrambe concave; ma applicheremo facilmente di mano in mano anche al caso che sieno convesse i discorsi che andrem facendo, e i risultati che andrem ritrovando. Sia pertanto ABCD (*Fig.* 11) il tubo conico tronco capillare, il di cui asse E*e* per ora supponesi orizzontale; MM'N'N sia la piccola porzione di fluido dentro di esso rinchiusa, e gli archi circolari simili M*p*N, M'*p*'N' (§. 22)

rappresentino le superficie concave in cui essa termina da ambe le parti. La lunghezza pp' di questa piccola porzione di fluido facciasi $= 2a$; la distanza del punto di mezzo q dal vertice O del cono $= a$; il piccolissimo angolo MOp chiamisi π; sia inoltre θ il complemento dell'angolo sempre il medesimo (§. 21) con una data materia di tubi ed un dato fluido, che i lati estremi delle curve MN, M'N', ossia le tangenti ML, M'L' fanno colle pareti del tubo; e finalmente sieno b, b' i raggi Mc, $M'c'$ degli archi circolari simili MpN, $M'p'N'$.

Nel triangolo pertanto OMc si avrà sen. OMc cioè sen. θ al seno o tangente del piccolissimo angolo $MOc = \pi$, come $Oc : Mc = Oq - pq - cp : Mc = a - \alpha - b : b$, onde anche sen. θ + tang. π : tang. $\pi = a - \alpha : b$, e quindi $b = \frac{(a-\alpha)\,\text{tang.}\,\pi}{\text{sen.}\,\theta + \text{tang.}\,\pi}$.

Similmente nel triangolo $OM'c'$ sarà sen. $OM'c'$ = sen. $c'M'D$ = sen. θ : sen. $M'Oc'$ ossia tang. $\pi = Oq + qp' + p'c' : M'c' = a + \alpha + b' : b'$, onde anche sen. θ − tang. π : tang. $\pi = a + \alpha : b'$, e $b' = \frac{(a+\alpha)\,\text{tang.}\,\pi}{\text{sen.}\,\theta - \text{tang.}\,\pi}$.

Sarà dunque $\frac{H}{b} = \frac{H(\text{sen.}\,\theta + \text{tang.}\,\pi)}{(a-\alpha)\,\text{tang.}\,\pi} = \left(H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi} + H\right).\frac{1}{a-\alpha}$; cioè convertendo la frazione $\frac{1}{a-\alpha}$ in serie, e tosto moltiplicando

$$\frac{H}{b} = H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}.\left(\frac{1}{a} + \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a^3} + \frac{\alpha^3}{a^4}\,\text{ec.}\right) + \frac{H}{a} + \frac{H\alpha}{a^2} + \frac{H\alpha^2}{a^3} + \text{ec.}$$

E allo stesso modo $\frac{H}{b'} = \frac{H(\text{sen.}\,\theta - \text{tang.}\,\pi)}{(a+\alpha)\,\text{tang.}\,\pi} = \left(H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi} - H\right) \times \frac{1}{a+\alpha}$, cioè riducendo la frazione $\frac{1}{a+\alpha}$ in serie

$$\frac{H}{b'} = H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}.\left(\frac{1}{a} - \frac{\alpha}{a^2} + \frac{\alpha^2}{a^3} - \frac{\alpha^3}{a^4} + \text{ec.}\right) - \frac{H}{a} + \frac{H\alpha}{a^2} - \frac{H\alpha^2}{a^3} + \text{ec.}$$

Ma $K - \frac{H}{b}$ è la forza (§§. 33, 34, e 42, III.°) con cui il sottilissimo filo fluido pp' è attratto da p verso p', e $K - \frac{H}{b'}$ è la forza contraria (§§. citt.) con cui il medesimo filo fluido è attratto e spinto da p' verso p. Essendo dunque $b < b'$, epperò $\frac{H}{b} > \frac{H}{b'}$, e $K - \frac{H}{b} < K - \frac{H}{b'}$, il filo fluido pp' situato in una posizione orizzontale, e quindi tutta la gocciola verrà necessariamente

sariamente spinta verso il vertice O del cono da una forza eguale all'eccesso della seconda forza sopra la prima, cioè da una forza $\frac{H}{b}-\frac{H}{b'}$, ossia (mettendo i valori trovati di $\frac{H}{b}$ ed $\frac{H}{b'}$ e riducendo) da una forza $=\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}\cdot\left(\frac{2a}{a^2}+\frac{2a^3}{a^4}+\text{ec.}\right)+\frac{2H}{a}+\frac{2Ha^2}{a^3}+\text{ec.}$ ossia (perchè a supponesi molto piccola rispetto ad a, e in conseguenza $\frac{a^3}{a^3}$ molto più piccola rispetto ad $\frac{a}{a}$, ed $\frac{a^3}{a^4}$ rispetto ad $\frac{a}{a^2}$ siccome anche più piccola risulterà $\frac{a^2}{a^2}$ in confronto di 1 epperò $\frac{a^2}{a^3}$ in confronto di $\frac{1}{a}$) trascurando que' termini che possono per la loro piccolezza trascurarsi, la forza con cui il sottilissimo filo fluido pp' è spinto verso il vertice O del cono, verrà prossimamente espressa da $\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}\cdot\frac{2a}{a^2}+\frac{2H}{a}$.

Se le superficie MpN, M'p'N' saranno convesse, come lo sono col mercurio, le due forze contrarie che spingeranno pp' da $pinp'$ e da p' in p saranno (§§. 38 e 42, V.°) $K+\frac{H}{b}$, $K+\frac{H}{b'}$, delle quali, per essere $\frac{H}{b}>\frac{H}{b'}$, la prima sarà maggiore della seconda, onde il filo fluido pp' e tutta la gocciola si allontanerà dal vertice O del cono con una forza $=\frac{H}{b}-\frac{H}{b'}$. Ora in quest'ipotesi si troverà, seguendo le medesime tracce di prima, $b=\frac{(a-a)\,\text{tang.}\,\pi}{\text{sen.}\,\theta-\text{tang.}\,\pi}$, $b'=\frac{(a+a)\,\text{tang.}\,\pi}{\text{sen.}\,\theta+\text{tang.}\,\pi}$, e quindi

$$\frac{H}{b}=\left(H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}-H\right).\frac{1}{a-a}=H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}.\left(\frac{1}{a}+\frac{a}{a^2}+\frac{a^2}{a^3}+\frac{a^3}{a^4}+\text{ec.}\right)-\frac{H}{a}-\frac{Ha}{a^2}-\frac{Ha^2}{a^3}-\text{ec.}$$

$$\frac{H}{b'}=\left(H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}+H\right).\frac{1}{a+a}=H.\frac{\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}.\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{a^2}+\frac{a^2}{a^3}-\frac{a^3}{a^4}+\text{ec.}\right)+\frac{H}{a}-\frac{Ha}{a^2}+\frac{Ha^2}{a^3}-\text{ec.}$$

onde la forza $\frac{H}{b}-\frac{H}{b'}$ con cui la goccia fugge verso la base del cono si ridurrà col medesimo discorso di prima ad $\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}\cdot\frac{2a}{a^2}-\frac{2H}{a}$.

Per contrabilanciare questa forza $\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{\text{tang.}\,\pi}\cdot\frac{2a}{a}\pm\frac{2H}{a}$, con cui la gocciola tende verso il vertice o verso la base del cono, bi-

sognerà sollevare nel primo caso al di sopra, abbassare nel secondo l'asse eE, al di sotto dell'orizzonte di un piccolo angolo V, onde il filo fluido pp' acquisti una forza eguale e contraria a quella che abbiamo trovata, e si rimanga in quiete nel sito ove si trova. Chiamando al solito g la gravità, ed essendo 1 la base del filo fluido pp', questa forza con cui è spinto pp' a scendere per un piano, inclinato all'orizzonte di un angolo V, è eguale a $g \,.\, 1 \,.\, pp' \,.\, \text{sen. V} = 2ag \text{ sen. V}$. Perchè dunque la gocciola rimanga in equilibrio, dovrà essere questa forza eguale all'altra quì sopra trovata, cioè dovrà aversi l'equazione

$$2ga \text{ sen. V} = \frac{\text{H sen.}\theta}{\text{tang.}\pi} \,.\, \frac{2a}{a} \pm \frac{2\text{H}}{a} \,.$$

Figuriamoci ora un tubo capillare cilindrico il di cui semidiametro sia eguale a qr semidiametro del tubo conico in q, cioè $= \text{O}q \,.\, \text{tang. } q\text{O}r = a \text{ tang.}\pi$. Essendo l l'altezza a cui s'innalzerà sopra, o si abbasserà sotto il livello l il fluido in questo tubo, abbiam trovato (§. 52) $l = \frac{\text{H sen.}\theta}{ga \text{ tang.}\pi}$, donde $\frac{\text{H sen.}\theta}{\text{tang.}\pi} = gal$, ed $\text{H} = \frac{gal \text{ tang.}\pi}{\text{sen.}\theta}$; e questi valori di $\frac{\text{H sen.}\theta}{\text{tang.}\pi}$ ed H sostituiti nell' ultima equazione dopo le ovvie riduzioni daranno

$$\text{sen. V} = \frac{l}{a} \pm \frac{l \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta} \,.$$

Ora il secondo termine $\frac{l \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}$, che si può mettere sotto la forma $\frac{l}{a} \,.\, \frac{a \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}$ sarà sempre molto piccolo in confronto del primo $\frac{l}{a}$ se $\frac{a \text{ tang.}\pi}{a \text{ sen.}\theta}$ sarà una piccola frazione, cioè se a tang. π ossia la mezza grossezza della goccia qr sarà molto minore di a sen. θ ossia di a (per esser prossimamente semicircolari gli archi MpN, M'p'N' epperò sen. θ prossimamente $= 1$) cioè della mezza lunghezza della goccia stessa. In questo caso adunque si avrà prossimamente

$$\text{sen. V} = \frac{l}{a} \,.$$

Ma l'ascensione o depressione del fluido nel tubo capillare del semidiametro a tang. π è in ragione inversa di questo semidiametro (§. 50), ossia, per essere π costante, in ragione

inversa di a; ed essendo V molto piccolo si può prendere V in luogo di sen. V.

Dunque *l' angolo di elevazione o depressione* V *dell' asse del tubo conico sopra o sotto dell' orizzonte, che farà che la gocciola si rimanga in quiete e in equilibrio, sarà presso a poco reciprocamente proporzionale al quadrato della distanza del mezzo della goccia del vertice del cono.*

Articolo IV.

De' movimenti e dell' equilibrio di una goccia di fluido compresa tra due piani, i quali combaciandosi in uno dei loro lati che supporremo orizzontale formano un piccolissimo angolo tra loro.

60. I fenomeni che presenta una goccia rinchiusa tra due piani inclinati l'uno all'altro di un piccolo angolo, sono molto analoghi a quei che si osservano in una goccia posta dentro di un tubo capillare conico, e che abbiamo esposti nell' *Articolo precedente*. Ora noi dunque ci proponghiamo di dedurre quest' analogìa di fenomeni dai nostri premessi principj, e di convalidarla cogli esperimenti.

61. Sia pertanto AA' (*Fig.* 12) l'intersezione de' due piani che supponghiamo orizzontale; BCB' il piano verticale ad essa perpendicolare che passa pel centro della goccia D; e l'angolo BCB' metà dell'angolo BCB'' che fanno i due piani che comprendon la goccia, sia $= \pi$. Sia inoltre DGIH il mezzo profilo della metà superiore della goccia, che col lato GH toccherà sensibilmente uno de' due piani tra' quali è compresa, essendo HI un arco circolare del raggio b, e che fa col piano CB un angolo dato (§. 21) il di cui complemento facciasi $= \theta$. Sia inoltre $CD = a$, $DE = x$, la normale $EF = h$, e la $DG = h_{,}$; sarà $h = CE \text{ tang.} \pi = (a - x) \text{ tang.} \pi$; $h_{,} = CD \times \text{tang.} \pi = a \text{ tang.} \pi$, epperò $\frac{1}{h} = \frac{1}{a \text{ tang.} \pi} + \frac{x}{a^2 \text{ tang.} \pi} + \text{ec.}$ ed $\frac{1}{h_{,}} = \frac{1}{a \text{ tang.} \pi}$.

Ora se la goccia si supponga tagliata per FE, DG con piani perpendicolari al piano BCB', e perciò paralleli ad AA', le distanze di tutti i punti delle sezioni che ne nasceranno dal

piano che passa per AA', CB', e che chiameremo *piano intermedio*, saranno eguali, com'è evidente, ad FE, DG, cioè ad h ed $h_{,}$. Sarà dunque facile di determinare per approssimazione i raggi osculatori nel senso verticale ne' punti estremi di quelle sezioni; dappoichè supponendo che FE', GD' rappresentino le curvature delle mezze gole della goccia in questi punti, ed FF", GG' i rispettivi raggi osculatori, siccome gli angoli F', G' sono eguali ai complementi di E'FB, D'GB, epperò eguali a θ, si avrà perciò $\frac{1}{FF'} = \frac{\text{sen.}\,\theta}{FE}$, $\frac{1}{GG'} = \frac{\text{sen.}\,\theta}{GD}$, cioè chiamando b, $b_{,}$ i raggi osculatori FF', GG', sarà $\frac{1}{b} = \frac{\text{sen.}\,\theta}{h}$, $\frac{1}{b_{,}} = \frac{\text{sen.}\,\theta}{h_{,}}$.

S'intenda ora la metà della mezza goccia, che da noi si considera, tagliata con un piano perpendicolare a BCB" che passi per ID: si avrà nella superficie della goccia una sezione rappresentata dal quarto di circolo IE"D", il di cui raggio è ID, che faremo $= b'$, e che deve intendersi eretto normalmente al piano BCB" sopra di ID. Immaginandoselo così eretto, s'intenda il solito canaletto fluido che internandosi nella goccia si porti comunque in una direzione perpendicolare alla superficie, da E" in D". I raggi de' due circoli osculatori che si tagliano ad angolo retto in E" saranno, nel senso orizzontale b', e nel senso verticale b, mentre in D" saranno b' e $b_{,}$; onde (§§. 44, II.°, e 46) l'azione della gocciola in D" per ispinger l'acqua dentro il detto canaletto sarà $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b_{,}} - \frac{1}{b'}\right)$, e quella in E" sarà $K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)$.

Ma alla seconda, per l'equilibrio (§. 27) bisognerà aggiungere la pressione nascente dalla gravità, e proporzionale all'elevazione di E" sopra di D". Condotta l'orizzontale DL, sarà l'angolo EDL l'angolo che chiameremo V fatto dal *piano intermedio* CB' coll'orizzonte; e l'elevazione di E" sopra di D", eguale a quella di E sopra di D, cioè eguale ad EL, sarà $= ED \,.\, \text{sen.}\, V = x\, \text{sen.}\, V$. Moltiplicando pertanto per la gravità g si avrà $gx\,\text{sen.}\, V$ da aggiungersi all'azione ch'esercita la gocciola in E" per eguagliarla, siccome richiede l'equilibrio del canaletto, all'azione esercitata in D".

Si avrà dunque l'equazione

$$K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)+gx\,\text{sen.}\,V=K-\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b_{,}}-\frac{1}{b'}\right)$$

ossia $$gx\,\text{sen.}\,V=\frac{H}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b_{,}}\right)$$

ossia, sostituendo in vece di $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b_{,}}$ i loro valori dianzi trovati $\frac{\text{sen.}\,\theta}{h}$, $\frac{\text{sen.}\,\theta}{h_{,}}$, e quindi in vece di $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h_{,}}$ i loro valori parimenti esposti qui sopra $\frac{1}{a\,\text{tang.}\,\pi}+\frac{x}{a^2\,\text{tang.}\,\pi}$, $\frac{1}{a\,\text{tang.}\,\pi}$, e riducendo

$$gx\,\text{sen.}\,V=\frac{Hx\,\text{sen.}\,\theta}{2a^2\,\text{tang.}\,\pi}$$

cioè $$\text{sen.}\,V=\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{2a^2g\,\text{tang.}\,\pi}.$$

Quindi essendo una quantità costante $\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{2g\,\text{tang.}\,\pi}$, *sarà* sen. V, *epperò anche il piccolo angolo* V *inclinazione del* piano intermedio *all'orizzonte, proporzionale ad* $\frac{1}{a^2}$, *cioè in ragione inversa del quadrato della distanza del centro della goccia dall'intersezione de' due piani*, come abbiam trovato (§. 59) accadere in una goccia sospesa in equilibrio in un tubo conico capillare, il di cui asse sia sollevato sopra l'orizzonte di un piccolo angolo V.

62. E se l'angolo formato dai due piani che abbiamo chiamato 2π si supporrà eguale a quello che fa l'asse del cono coi lati che chiamammo allora π (§. 59), cioè se nella formola allora trovata si metterà 2π in vece di π, e tang. 2π ossia 2 tang. π in vece di tang. π, quella formola per la goccia equilibrata nel cono diverrà

$$gx\,\text{sen.}\,V=\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{2\,\text{tang.}\,\pi}\cdot\frac{a}{a^2}+\frac{H}{a}$$

ossia $$\text{sen.}\,V=\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{2a^2g\,\text{tang.}\,\pi}+\frac{H}{gaa}$$

nella qual formola potrassi dimostrare, come allora, sostituendo que' medesimi valori di $\frac{H\,\text{sen.}\,\theta}{2\,\text{tang.}\,\pi}$ ed H, che il secondo termine divien trascurabile in confronto del primo, ond'essa diverrà

$$\text{sen. } V = \frac{H \text{ sen. } \theta}{2a^2 g \text{ tang. } \pi}$$

come appunto si è trovato nel presente caso della goccia sospesa tra due piani (§. prec.).

Se dunque l' angolo formato da due piani sia eguale a quello che fa l' asse del cono coi lati, perchè la goccia rimanga sospesa alla medesima distanza dall' intersezione de' due piani, e dal vertice del cono, l' inclinazione del piano intermedio *all' orizzonte nel primo caso dovrà esser la medesima che l' elevazione nel secondo caso dell' asse del cono sopra l' orizzonte.*

63. Si potrà anch' esprimere sen. V in termini tutti calcolabili e dati, introducendo nel valore trovato di sen. V l' altezza a cui si solleverebbe il fluido nell' interstizio di due piani paralleli posti ad una data distanza, per es. quella in cui sono i due piani l' uno all' altro inclinati che rinchiudon la goccia, ad una distanza b dalla loro intersezione. Siccome questi due piani comprendono un angolo 2π, alla distanza b dalla loro intersezione saranno lontani di b tang. 2π ossia $2b$ tang. π. Ora il fluido tra due piani paralleli posti a questa distanza si solleverebbe ad un' altezza eguale a quella in cui salirebbe in un tubo capillare di un semidiametro $= 2b$ tang. π (§§. 55, e 56), cioè ad un' altezza $\frac{H \text{ sen. } \theta}{2gb \text{ tang. } \pi}$ (§. 52). Si avrà dunque quest' altezza che chiameremo $h = \frac{H \text{ sen. } \theta}{2gb \text{ tang. } \pi}$, d' onde $hb = \frac{H \text{ sen. } \theta}{2g \text{ tang. } \pi}$, e quindi $\text{sen. } V = \frac{H \text{ sen. } \theta}{2a^2 g \text{ tang. } \pi} = \frac{hb}{a^2} = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

ESPERIMENTO.

64. È celebre a questo proposito l' esperimento colla massima diligenza istituito da *Hauksbée*, che viene riferito da *Newton* nella *Quest.* 31 della sua *Ottica*, e che il Sig. *De la Place* meritamente presceglie per paragonarne i risultati con quei della teorìa ora stabilita. Ne daremo anche noi un breve cenno, limitandoci a farne il paragone coll' ultima formola $\text{sen. } V = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

Prese pertanto *Hauksbée* due ben levigate lastre di vetro, lunghe 20 pollici inglesi, larghe 4, le quali toccandosi in una

delle loro estremità ne rimanevan dall'altra lontane di $\frac{1}{16}$ di pollice, cosicchè venivano a formare tra loro un angolo di 10'44", che rappresenta il nostro 2π. Avendole poscia bagnate internamente con un pannolino intriso d'olio d'arancio, ed essendo orizzontale una delle due lastre, lasciò cadere sopra di questa verso l'estremità più lontana dall'angolo, una o due gocce di quell'olio, e calandovi sopra l'altra lastra, sinchè toccasse la goccia, e facesse coll'inferiore il suddetto angolo di 10'44", osservò correr la goccia rapidamente e con moto accelerato verso l'angolo e l'intersezione de' piani. Per fermarla ad una maggiore o minor distanza da quest'intersezione, conveniva sollevar più o meno i lati de' due piani che si toccavano al di sopra dell'orizzonte. Così osservò egli per es. che acciò la goccia si fermasse ad una distanza di 6 pollici dall'angolo, bisognava alzare la lastra inferiore sopra dell'orizzonte di un angolo di 2°45'. Ora, siccome essendo orizzontale la lastra inferiore, il *piano intermedio* alle due lastre si sollevava dalla parte opposta della metà dell'angolo 10'44" de' due piani, cioè di 5'22", perciò egli è evidente che sollevandosi la lastra inferiore di 2°45', il *piano intermedio* non si solleverà che di 2°45' — 5'22", cioè di 2°39'38", e questo sarà l'angolo V dato dall'osservazione.

Vediamo ora qual sia il valor di quest'angolo che ci somministra la formola sen. $V = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ (§. prec.). Supponghiamo la quantità arbitraria b di 10 pollici inglesi, cioè la metà della lunghezza delle lastre: siccome queste nelle loro estremità eran distanti di $\frac{1}{16}$ di pollice, lo saranno di $\frac{1}{32}$ alla distanza b. Sarà dunque h (§. prec.) l'altezza a cui sorgerebbe l'olio d'arancio tra due lastre verticali e parallele poste alla distanza di $\frac{1}{32}$ di pollice l'una dall'altra.

Per determinarla premettiamo che 1 pollice inglese è di 25.3918 *millimetri*, epperò $\frac{1}{32}$ di pollice eguale a *millimetri* $\frac{25.3918}{32}$; e ricordiamoci inoltre che tra due lastre verticali e parallele distanti tra loro 1 *millimetro*, il nostro fluido, cioè l'olio d'arancio, dee sollevarsi a quell'altezza a cui salirebbe in un tubo del diametro di 2 *millimetri* (§§. 55, e 56), la quale si è trovata coll'esperienza di circa *millimetri* 3.4 (§. 51). Essendo dunque le altezze in ragione inversa delle distanze

de' piani (§§. 50, 55, 56) si dovrà dire $\frac{25.3918}{32} : 1 = 3.4$ ad un quarto che sarà $\frac{32 \times 3.4}{25.3918}$, ed esprimerà in *millimetri* l'altezza h a cui sorgerebbe l'olio d'arancio tra due lastre verticali e parallele poste a quella distanza che hanno i due piani alla distanza b dalla loro intersezione. Dividendo questo valore di h per 25.3918 valore del pollice inglese in *millimetri*, ne risulterà il valore di h in pollici inglesi $= \frac{32 \times 3.4}{(25.3918)^2}$. Mettendo dunque questo valore di h nella formola sen. $V = \frac{h}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}$, e facendovi $b = 10$, ed a distanza del centro della goccia dall'intersezione de' piani $= 6$, si avrà finalmente

sen. $V = \frac{32 \times 3.4}{10.(25.3918)^2} \cdot \frac{100}{36} = \frac{1088}{23210.706} = 0.046874$, che prossimamente corrispondono a 2°41', che appena sensibilmente differiscono da 2°39'38" valore di V dato dall'osservazione.

ARTICOLO V.

Della forza con cui tendono ad avvicinarsi e riunirsi due piani verticali e paralleli tuffati in un fluido, allorchè si trovano in piccola distanza l'uno dall'altro.

65. I principj della premessa teorìa somministrano anche la spiegazione e la misura di un singolare fenomeno che ci presentano due piani paralleli verticalmente tuffati in un fluido colle loro estremità inferiori, i quali, sia che il fluido tra essi s'innalzi, oppure si abbassi, se siano posti in una gran vicinanza tra loro, manifestano una forte e sensibile tendenza a riunirsi l'uno coll'altro. Così per es. due vasellini di vetro, di forma parallelepipeda, galleggianti sull'acqua o sul mercurio, frettolosamente corrono l'uno verso l'altro, allorchè si trovano in grandissima vicinanza. Noi dunque per mezzo della premessa teorìa dell'azion capillare, ci troviamo in grado di fissar l'origine di questa singolar tendenza ed attrazione manifestataci dall'esperienza, e di determinarne la misura e le leggi.

66. Rappresentino le MB, NR (*Fig.* 13) le sezioni de' due piani,

piani, fra' quali supporremo che il fluido si sollevi sino all'altezza OP sopra il livello VV' del fluido circostante. Considerando un qualunque punto R di uno di questi due piani, posto sotto del detto livello, per aver la pressione che il fluido esterno vi esercita, si concepisca un canaletto VSR col ramo VS verticale, ed il ramo SR orizzontale. E primieramente il fluido contenuto in VS agirà sopra di R con una pressione eguale al suo peso, cioè chiamando g la gravità, ed 1 la base del canaletto, con una forza $= g \,.\, VS$. Si trasmetterà inoltre dal medesimo canaletto VS al punto R la pressione che l'atmosfera esercita in V, la quale chiameremo P, e la forza attraente con cui il fluido VS agisce sopra di sè stesso, che al solito chiameremo K; onde la pressione totale trasmessa da VS in R sarà $P + K + g \,.\, VS$. Ma il fluido contenuto nel canaletto RS esercita sopra di R una forza K da R verso S contraria alla prima (§. 28). Sarà dunque la forza con cui il fluido esteriore preme il punto R del piano $= P + K + g \,.\, VS - K = P + g \,.\, VS$.

Per paragonare con questa pressione esterna l'interna corrispondente, si concepisca il canaletto OQR col ramo OQ verticale, e il ramo QR orizzontale. Il canaletto OQ agirà sopra di R primieramente col suo peso $g \,.\, OQ$, e trasmetterà poi al medesimo punto R la pressione dell'atmosfera P, ed inoltre quella forza attraente con cui il fluido OQ agisce sopra di sè stesso da O verso Q, la quale, facendosi $= b$ il raggio osculatore della curva NOM in O, ed essendo $= \infty$ l'altro raggio osculatore della sezione normale alla prima e parallela ai piani, sarà perciò $= K - \frac{H}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{\infty}\right) = K - \frac{H}{2b}$ (§§. 44, e segg.). La forza trasmessa dal fluido OQ in R sarà dunque $= P + K - \frac{H}{2b} + g \,.\, OQ$. Ma l'altezza OP alla quale s'innalza il fluido tra i due piani sopra il livello del vaso è la metà di quella a cui s'innalzerebbe in un tubo capillare di un diametro eguale all'interstizio de' piani, e che avesse in conseguenza il medesimo raggio osculatore b nel punto infimo della superficie concava da cui superiormente è terminato (§§. 55, e 56); onde siccome quest' altezza nel tubo sarebbe $\frac{H}{gb}$ (§. 50), l'altezza OP tra i due piani dovrà essere $\frac{H}{2gb}$, d'onde risulta $\frac{H}{2b} = g \,.\, OP$. Dunque sosti-

tuendo questo valore, la suddetta forza trasmessa in R dal canaletto OQ sarà $P+K-g.OP+g.OQ=P+K+g.PQ$; d'onde, come si fece per RS, sottraendo K per la forza contraria con cui il fluido RQ attrae sè stesso da R verso Q rimarrà la pressione interna del canaletto OQ sopra di $R=P+g.PQ=P+g.VS$, cioè eguale alla pressione esterna sul medesimo punto. Tutti dunque i punti de' piani posti al disotto del livello VV' del fluido circoscritto, sono egualmente premuti da fuori in dentro che da dentro in fuori, epperò per questo capo non potranno tendere nè ad avvicinarsi, nè a discostarsi.

Oltrepassato questo livello, il fluido in virtù dell'azione del piano combinata colla propria s'innalza verso Z, formando la curva VZ'Z, siccome internamente s'innalza sino in N formando la curva ON'N. Sia Z' un punto di questa curva, e per esso s'intenda condotto il canaletto orizzontale $Z'q$. Se Z'T sia normale alla curva, e b' il suo raggio osculatore in Z', si dimostrerà, come per il punto O, che $P+K-\frac{H}{2b'}$ sarà la forza che preme Z' da Z' verso T; e questa forza verrà trasmessa al punto q del piano in una direzione normale al medesimo piano. Quivi però verrà diminuita dalla forza contraria K con cui il fluido del canaletto qZ' agisce da q verso Z'. Rimarrà dunque la pressione esterna in $q=P-\frac{H}{2b'}$. Ora è facile il vedere che $\frac{H}{2b'}=g.qG$; dappoichè nel canaletto VTZ' dev'esser per l'equilibrio la pressione in V cioè $P+K$ eguale alla pressione in Z', cioè a $P+K-\frac{H}{2b'}$, aggiunto il peso relativo del fluido contenuto nel canaletto obbliquo Z'T e sostenuto sopra il livello di V, cioè $g.qG$. Si avrà dunque $P+K=P+K-\frac{H}{2b'}+g.qG$, cioè $\frac{H}{2b'}=g.qG$, e quindi tutta la pressione esterna in $q=P-g.qG$.

Si dimostrerà poi, come per il punto R, che la pressione interna in q proveniente dal canaletto Oq' è $=P+K-g.OP+g.Oq'=P+K-g.Pq'$, la quale diminuita al solito di K, pressione in senso contrario del canaletto qq', ci farà trovare la pressione interna in $q=P-g.Pq'$, cioè eguale alla pressione esterna pocanzi determinata $P-g.qG$. Dunque anche da G

in Z, come al di sotto del livello VV', le pressioni esterne ed interne si pareggiano, e niuna forza in conseguenza ne può nascere per accostare o discostare i piani.

Ma al di sopra di Z, per es. in R', la pressione esterna si ridurrà a quella dell'atmosfera P, mentre l'interna si dimostrerà, come si è fatto per q, che sarà sempre $P - g.PQ'$, onde quella prevarrà sopra questa della quantità $g.PQ'$, cioè il punto R' del piano sarà spinto da fuori in dentro con una forza $g.PQ'$, cioè dal peso di un filo fluido compreso tra il medesimo punto, e il livello del fluido circostante VV'. Lo stesso accadrà di tutti gli altri punti compresi tra Z ed L.

Oltrepassato il punto L, sia p' un punto della piccola altezza NL del menisco NOM, la cui pressione esterna sarà sempre $= P$. Per averne l'interna, s'intenda il canaletto orizzontale $p'N'$, ed essendo b'' il raggio osculatore della curva NOM in N', la pressione in N' in una direzione N'L' perpendicolare alla curva sarà, come si è veduto per il punto O, $= P + K - \frac{H}{2b''}$; e questa trasmessa in p' verrà al solito diminuita di K, e si ridurrà a $P - \frac{H}{2b''}$. Ora considerando il canaletto N'L'O, dovrà, per l'equilibrio, la pressione in O, cioè $P + K - \frac{H}{2b}$, essere eguale alla pressione in N' ora trovata $P + K - \frac{H}{2b''}$, aggiunto il peso relativo del canaletto N'L' sostenuto sopra il livello di O, cioè $g.p'L$. Ne risulterà evidentemente da quest'eguaglianza

$$\frac{H}{2b''} = \frac{H}{2b} + g.p'L$$

ossia perchè, come si è veduto qui sopra, $\frac{H}{2b} = g.OP$,

$$\frac{H}{2b''} = g.OP + g.p'L = g.p'G.$$

Quindi essendosi trovata superiormente la pressione interna di $p' = P - \frac{H}{2b''}$ essa si ridurrà a $P - g.p'G$; onde l'esterna, ch'è P, prevarrà sopra di questa della quantità $g.p'G$, vale a dire che anche tutti i punti del piano compresi tra L ed N, egualmente che i compresi tra Z ed L, sono spinti da fuori in dentro da forze equivalenti ai pesi di altrettanti fili

fluidi di un' altezza eguale alla distanza di que' punti dal livello del fluido circostante VV'.

Tutti i punti adunque de' due piani compresi tra Z *ed* N, *ove sorge il fluido esternamente ed internamente, sono spinti da fuori in dentro con forze eguali ai pesi di altrettanti fili fluidi compresi tra que' punti e il livello* VV'; *ond' essi tenderanno ad accostarsi con una forza eguale alla somma di queste forze.*

Lo stesso, ed anche più facilmente potrà dimostrarsi nel caso che il fluido si abbassi tra i due piani, prendendo la figura convessa NOM (*Fig.* 14). Infatti andando sulle medesime tracce della ora esposta dimostrazione, tutti i punti posti al di sotto di N, per es. R, saranno egualmente premuti di dentro e di fuori; poichè la pressione esterna sarà, come prima, $P + g.VS$, e quella di dentro sarà ora $P + K + \frac{H}{2b} + g.OQ - K$ (§. 44, e segg.), cioè (per essere come prima $\frac{H}{2b} = g.OP$) $= P + g.PQ$, cioè eguale all' esterna $P + g.VS$. Nel tratto ZG sono pure evidentemente eguali le pressioni interna ed esterna, poichè si riducono entrambe a quella dell' atmosfera P. Finalmente nell' intervallo NZ, per es. in R', la pressione interna sarà evidentemente $= P$, mentre l' esterna, come in R, sarà $= P + g.VS'$, cioè supererà l' interna di $g.VS'$.

Anche in questo caso dunque dell' abbassamento del fluido tra i due piani, come in quello dell' innalzamento, i due piani in tutti i punti tra Z *ed* N, *ove si abbassa esternamente ed internamente il fluido, sono spinti da fuori in dentro da forze equivalenti ai pesi di altrettanti fili fluidi compresi tra que' punti, e il livello superiore* VV' *del fluido; onde nell' un caso, come nell' altro, hanno essi una tendenza a riavvicinarsi.*

67. L' espressioni delle forze prementi i diversi punti de' piani da fuori in dentro, che abbiamo ora trovate, non involvono la pressione P dell' atmosfera, e sarebbero le stesse, quando anche si supponesse $P = 0$. Il fenomeno adunque della tendenza a riunirsi che mostrano i piani tuffati in un fluido, allorchè si pongono in grandissima vicinanza tra loro, avrà luogo egualmente nel vuoto che nel pieno, e si effettuerà colla medesima forza.

68. Dietro le tracce della dimostrazione addotta niente vi sarà poi di più facile che calcolare la forza totale, con cui ten-

dono a riunirsi i due piani. Si consideri un qualunque punto R' (*Figg.* 13, *e* 14) posto tra N e Z, e sia $GR' = x$, $R'r = \delta x$. Se la larghezza data de' piani tuffati nel fluido si chiami a, la forza con cui l'elemento $R'r$ è spinto da fuori in dentro, per ciò che si è dimostrato, sarà $= agx\delta x$; onde la somma di queste forze sino in R' sarà $\int agx\delta x = \frac{1}{2} ag . r^2 + C$. Ora questa somma dovendo svanire in Z, quando $GR' = x$ diviene GZ, sarà perciò $C = -\frac{1}{2} ag . \overline{GZ}^2$. Quindi la cercata somma delle forze sino in R' sarà $\frac{1}{2} ag . (\overline{GR}^2 - \overline{GZ}^2)$, e tutta l'intiera somma delle forze da Z sino in N, ossia la forza totale con cui uno de' due piani è spinto verso l'altro, sarà finalmente $\frac{1}{2} ag \times (\overline{GN}^2 - \overline{GZ}^2) = \frac{1}{2} ag . (GN + GZ) . (GN - GZ) = \frac{1}{2} ag . (GN + GZ) . NZ$. Ora essendo g la gravità specifica del fluido, quest'espressione rappresenta la metà di un parallelepipedo fluido, la di cui base è $a . NZ$, cioè la porzione del piano bagnata al di dentro o al di fuori soltanto da N sino in Z, e l'altezza è $GN + GZ$, cioè la somma degli innalzamenti od abbassamenti sopra il livello VV' de' punti di contatto dell'interna ed esterna superficie del fluido col piano. Il peso adunque di questo parallelepipedo fluido rappresenta la forza con cui uno de' due piani tende ad unirsi coll'altro postogli in somma vicinanza.

69. La base $a . NZ$ dell'anzidetto parallelepipedo cresce in ragione di NZ, cioè sensibilmente in ragione dell'innalzamento od abbassamento OP del fluido al di sopra o al di sotto del livello VV'; e l'altezza similmente $GN + GZ = NZ + 2GZ$, se si trascuri la quantità 2GZ molto piccola in confronto di NZ, cresce pure prossimamente nella stessa ragione di NZ ossia di OP. Il peso adunque del medesimo parallelepipedo esprimente la forza di tendenza reciproca de' due piani, cresce sensibilmente in ragion del quadrato di OP. Ma l'innalzamento od abbassamento è in ragione inversa della distanza de' due piani (§§. 50, 55, e 56).

Dunque *la forza con cui tendono ad unirsi due piani paralleli verticalmente tuffati in un fluido, e posti in somma vicinanza l'uno dell'altro, varia in ragion duplicata inversa della distanza tra loro* (*).

(*) Il Sig. *De la Place*, sopprimendone al solito la dimostrazione, dice che questa tendenza de' piani si troverà essere in ragione inversa della loro reciproca distanza: ma il discorso egualmente semplice che irrefragabile che ci ha

ARTICOLO VI.

Di alcuni altri fenomeni capillari, che anche più ocularmente dimostrano l' esposta teorìa.

70. Oltre ai fenomeni capillari, che al lume della teorìa e dell' esperienza abbiamo esaminati e trovati sì mirabilmente tra loro consenzienti ne' precedenti *Articoli*, altri molti ancora se ne sono osservati e descritti accuratamente dai Fisici, i quali quasi intuitivamente e senza quasi alcun bisogno di discorso geometrico dimostrano la necessità e verità dell' esposta teorìa, mettendo soprattutto come sott' occhio quell' attrazione ch' esercitano le superficie concave o convesse, in cui termina una massa fluida capillare, la quale attrazione è appunto, come si è veduto, dell' esposta teorìa la prima base e il principal fondamento. Non perchè la nostra teorìa dell' azion capillare abbia bisogno di nuova conferma, ma solo per abbondanza, e per renderne sempre più sensibile la verità, descriveremo alcuni di questi *fenomeni*, soggiungendovi le loro facili ed ovvie spiegazioni.

FENOMENO.

71. *S' immerga nell' acqua a una piccola profondità un tubo capillare, e chiudendone col dito l' estremità inferiore si estragga poscia dall' acqua: rimovendone il dito, il fluido si abbasserà alcun poco nel tubo, e n' escirà in forma di goccia; ma quando avrà finito di discendere, si troverà sempre che l' altezza della colonna residua sospesa nel tubo è notabilmente maggiore di quell' altezza, a cui sorgeva l' acqua nel tubo tuffato in questo fluido, sopra il livello del fluido circostante.*

---

fatto trovare in vece la ragione inversa duplicata, sembra che ci autorizzi ad attribuire l' asserzione del Sig. *De la Place* o ad una svista, o ad uno sbaglio di stampa. Frattanto potrà sembrare a taluno assai singolare e degno di riflessione, che questa ragione duplicata inversa, secondo cui si accresce la tendenza reciproca de' piani posti ad una piccola ma sensibil distanza, mentre è così consentanea alle leggi dell' universale attrazione de' corpi celesti, elettrici, magnetici ec. posti in distanze sensibili, non suppone poi d' altronde che debba esser la stessa, e neppure che debba esser nota e data la legge dell' attrazione nelle minime impercettibili distanze, benchè da questa seconda tragga la prima la sua origine ed esistenza,

Spiegazione.

72. La ragione del fenomeno si è, che nel tubo tuffato nell'acqua, non vi ha che la concavità della superficie superiore del fluido rinchiuso nel tubo che contribuisca a sollevar l'acqua, laddove estratto che sia dall'acqua, concorre con quella forza l'altra della superficie convessa della goccia che formasi all'estremità inferiore. Sia MON (*Fig.* 15) la superficie concava superiore del fluido, allorchè il tubo è tuffato nell'acqua, e il raggio osculatore in O sia $= b$: abbiam veduto (§. 50) che l'altezza a cui s'innalzerà il fluido sopra il livello del vaso, sarà $= \frac{H}{gb}$. Estraendolo dall'acqua, e supponendo che rimanga la stessa la superficie concava MON, sia b' il raggio osculatore della curva convessa in cui terminerà la goccia inferiore M'O'N' in O'. Immaginando il solito canaletto OO', sarà questo spinto all'in giù dal suo proprio peso g . OO', e dall'azione $K - \frac{H}{b}$ ch'esercita il fluido sopra di sè stesso da O verso O' (§§. 34, e 42, III.°); mentre al contrario sarà spinto all'insù dall'azione $K + \frac{H}{b'}$ che il fluido esercita in O' da O' verso O (§§. 38, e 42, IV.°). Si avrà dunque nell'equilibrio (§. 27) $g . OO' + K - \frac{H}{b} = K + \frac{H}{b'}$, e quindi $OO' = \frac{H}{gb} + \frac{H}{gb'}$ cioè maggiore di $\frac{H}{gb}$, altezza a cui sorgerebbe nel tubo tuffato nel vaso. Se fosse $b = b'$ quell'altezza sarebbe doppia di questa.

Fenomeno.

73. *Immergendo nell'acqua un sifone ricurvo capillare* ABC (Fig. 16) *a braccia disuguali, sicchè il braccio più corto* AB *rimanga tutto sott'acqua, questa s'innalzerà sopra il livello nel braccio più lungo* BC *sino ad un'altezza* FG. *Estraendo quindi il sifone dall'acqua, si formerà nell'estremità* A *una goccia* ANO. *Ora aspettando che il fluido divenga stazionario nel tubo, si osserverà che conducendo per la sommità della goccia l'orizzontale* NI', *l'altezza* I'C *dell'acqua nel braccio più lungo sarà*

maggiore di FG. *Si tolga col dito la goccia formatasi in* A; *quest' altezza andrà a mano a mano scemando, e quando la superficie dell' acqua in quel punto diverrà piana ed orizzontale, quell' altezza si farà eguale ad* FG. *Rimettendo per lo contrario nuove goccie d' acqua in* A, *sicchè la superficie torni ad esser ivi convessa, a misura che crescerà questa convessità, si accrescerà altresì di mano in mano l' altezza dell' acqua nel braccio* BC, *e diverrà proporzionatamente maggiore di* FG.

SPIEGAZIONE.

74. Il fenomeno è in sostanza lo stesso che il precedente, epperò l' istessa ancora ne dovrà essere la spiegazione. In fatti anche qui, allorchè il sifone è tuffato nel vaso, l' innalzamento del fluido nel braccio più lungo BC dipende unicamente dall' attrazione del menisco concavo in cui termina superiormente la massa fluida innalzatasi; laddove, estratto il sifone dall' acqua, e formatasi una goccia più o meno convessa in A, alla primiera forza si aggiugne quella di questa superficie convessa, che agisce nel medesimo senso.

FENOMENO.

75. *Sia* ABC (Fig. 17) *un sifone capillare, ed una colonna di mercurio in equilibrio ne riempia la parte inferiore* ABC, *cosicchè* AC *sia orizzontale. Inclinando il tubo da una parte, per es. dalla parte di* A, *il mercurio salirà sino in* A' *nel braccio* AB, *e scenderà sino in* C' *nel braccio* BC. *Se in questo stato si rialzerà lentamente il tubo per ricondurlo alla sua primiera situazione, giunto che ci sia si osserverà che la sua altezza nel braccio* AB *si manterrà per qualche tempo un po maggiore che nel braccio* BC.

SPIEGAZIONE.

76. La ragione del fenomeno nasce da ciò che nel rialzare lentamente il tubo per ricondurlo alla sua prima posizione, la superficie del fluido nel braccio AB diviene meno convessa, e per lo contrario nel braccio BC più convessa di quel che fosse nella prima posizione, in cui era egualmente convessa

vessa da ambe le parti. Questa differenza di convessità nelle due superficie dipende dall'attrito cui soggiace il mercurio, nello scorrere lungo le pareti del tubo. Rialzando il tubo, le parti contigue alla sua superficie, che si ritirano da A' verso A, sono trattenute da quest'attrito, mentre le parti più lontane che si muovono lungo l'asse del tubo, poco risentono quell' impedimento. Quindi dovrà divenir meno convessa la superficie, ed un poco appianarsi. Egli è poi evidente che questo medesimo attrito dovrà produrre un effetto contrario sulla superficie del mercurio che sale nell'altro braccio BC, trattenendone le parti che scorrono lungo la superficie del tubo, e lasciando più libero il movimento di quelle che salgono lungo l'asse.

Quando dunque il tubo, lentamente rialzandolo, torna alla sua primiera posizione, in cui AC era orizzontale, il raggio osculatore nel vertice della convessità del braccio AB sarà maggiore del raggio osculatore nel vertice della convessità del braccio BC; onde chiamando quello b, e questo b', sarà $K + \frac{H}{b}$, cioè la forza che agisce nel vertice della prima convessità (§§. 38, e 42, IV.°) minore di $K + \frac{H}{b'}$ cioè della forza che agisce nel vertice della seconda; e per restituire il necessario equilibrio tra queste forze (§. 27), converrà che il mercurio si sollevi alquanto di più nel braccio AB che nel braccio BC, onde compensare così col proprio peso la differenza di quelle due forze.

Fenomeno.

77. *Se s'immerga nell'acqua un sifone qualunque capillare* ABC (Fig. 18), *le di cui braccia disuguali in lunghezza sieno comunque di eguale o d'ineguale diametro, e che quindi si estragga dall'acqua, si osserverà che questa non escirà, come negli ordinarj sifoni, dal braccio più lungo* BC, *a meno che la differenza delle lunghezze delle due braccia non sia maggiore dell'altezza* FG, *a cui si solleverebbe il fluido in un tubo dello stesso diametro del braccio più corto* AB.

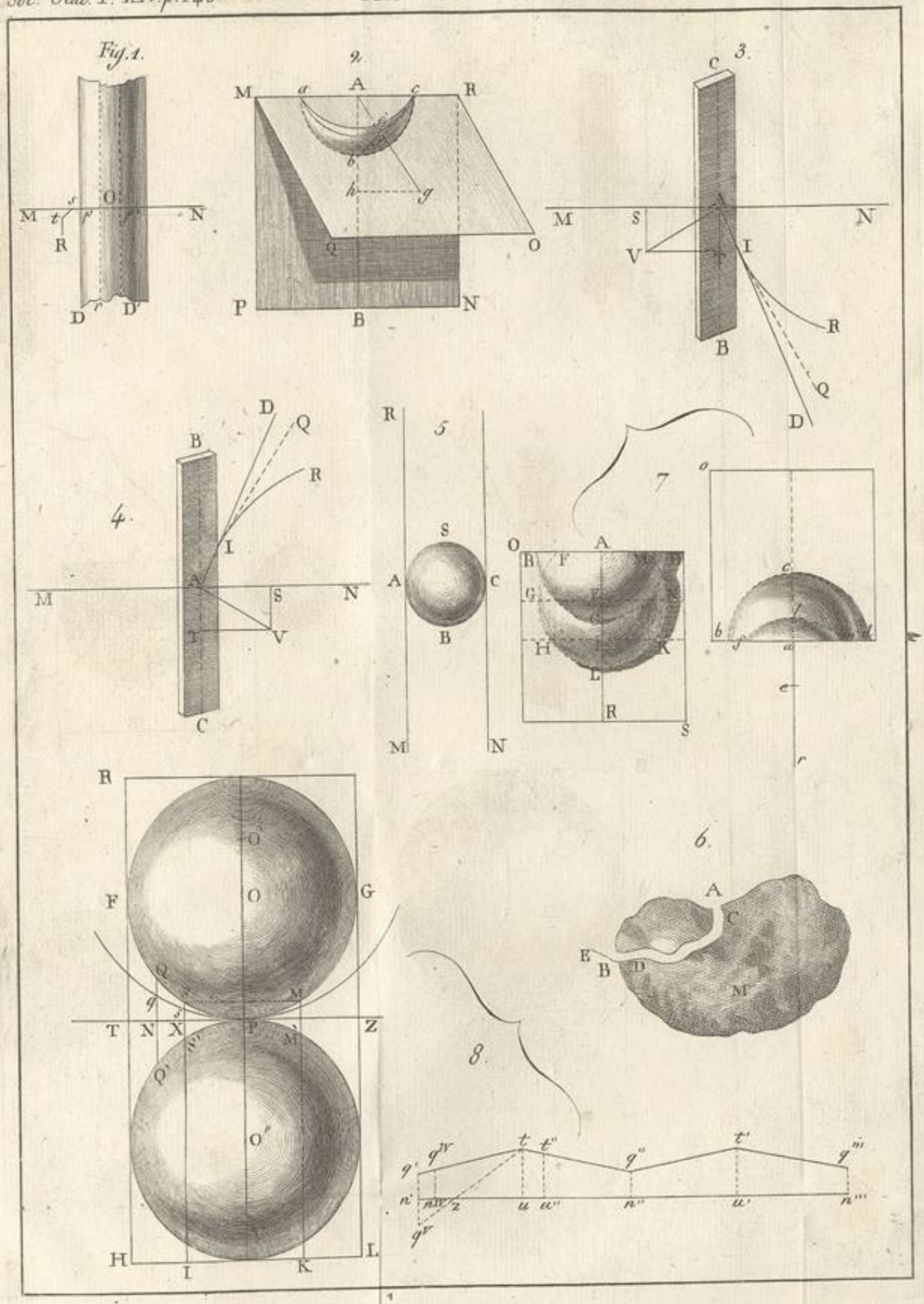
Fig. 1.
2.
3.
4.
5
6.
7
8.

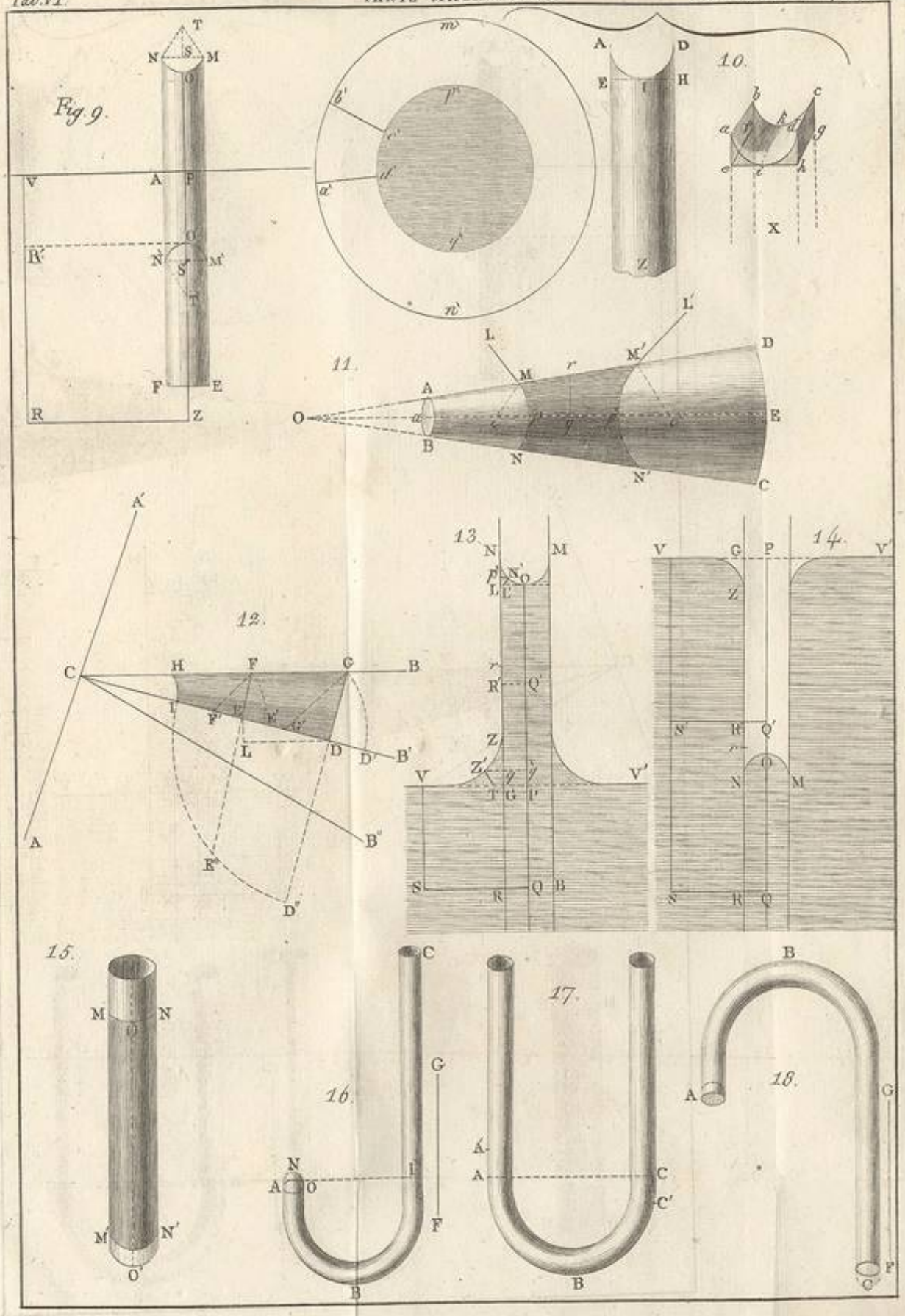
Fig. 9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
17.
18.

SPIEGAZIONE.

78. Il fluido sgorgando dall'estremità C, terminerà in A in una superficie concava del raggio b, ed in C in una superficie convessa del raggio b', o al più in una superficie piana, nel qual caso b' diverrà infinito. L'altezza FG a cui si alzerebbe il fluido in un tubo dello stesso diametro che il braccio AB, ed essendo b il raggio della concavità della superficie del fluido, sarebbe $\frac{H}{gb}$ (§. 50), d'onde si avrà $\frac{H}{b} = g.FG$. Supponghiamo che a ed a' sieno le altezze del punto superiore B sopra l'estremità del sifone A e C.

Immaginando il solito canaletto lungo l'asse del sifone, l'estremità di questo canaletto in A sarà spinta all'insù verso B dalla pressione dell'atmosfera che chiameremo P, e dall'attrazione ch'esercita il fluido sopra di sè stesso nella medesima direzione, la quale è $= K - \frac{H}{b}$ (§§. 34, e 42, III.°) $= K - g.FG$, essendosi poc'anzi dimostrato che $\frac{H}{b} = g.FG$. Sarà poi spinta in senso contrario dal peso del canaletto BA, la di cui altezza è a, cioè da una forza $g.a$. Tutta dunque la forza che spinge il canaletto AB da A verso B, e che tende in conseguenza a fare sgorgare il fluido dall'estremità C, sarà $= P + K - g.FG - g.a$.

Si oppone a questo sgorgo per l'estremità C la pressione P dell'atmosfera, che rispinge il fluido da C in B, e l'attrazione del fluido sopra di sè stesso nella medesima direzione ed $= K + \frac{H}{b'}$ (§§. 38, e 42, IV.°), onde tutta la forza che rispinge il canaletto CB da C verso B sarà $P + K + \frac{H}{b'}$. Ma questa forza verrà scemata dal peso del canaletto BC, la di cui altezza è a', cioè da una forza $g.a'$. Tutta dunque la forza che si oppone allo sgorgo per l'estremità C sarà $= P + K + \frac{H}{b'} - g.a'$.

Perchè dunque succeda l'efflusso per l'estremità C, egli è evidente che la prima di queste due forze dovrà esser mag-

giore della seconda, cioè $P + K - g.FG - g.a > P + K + \frac{H}{b'} - g.a'$, e quindi $a' - a > FG + \frac{H}{gb'}$; e solamente nel caso che b' sia infinito, cioè che la superficie dell'acqua che tende a sgorgare per C sia piana, basterà che sia $a' - a > FG$. In questo caso adunque, perchè l'acqua scorra dal braccio più lungo BC, basterà che $a' - a$, cioè la differenza della lunghezza delle due braccia BC, BA sia maggiore di FG, cioè di quell' altezza a cui si sosterrebbe sopra il livello il fluido in un tubo capillare dello stesso diametro del braccio più corto AB. Ma se, come l'osservazione c'insegna, la superficie della goccia d'acqua che si affaccia in C abbia una qualche convessità, potrà mancare l'efflusso anche quando la differenza delle lunghezze delle due braccia del sifone sia maggiore di FG.