S O P R A

UN METODO DI APPROSSIMAZIONE PROPOSTO SENZA DIMOSTRAZIONE DA *SIMPSON* PER LA RISOLUZIONE NUMERICA DI OGNI SPECIE DI EQUAZIONI

M E M O R I A

Del Sig. Gioachino Pessuti

Ricevuta il dì 9 *Giugno* 1806.

La teoria della risoluzione numerica delle equazioni algebraiche di qualunque grado fu creata, per così dire, come tanti altri rami di sublime analisi, dal sommo Geometra Sig. *Lagrange*, il quale sembra essersene egli stesso cotanto, e meritamente compiaciuto, che dopo di averla esposta in due lunghe *Memorie* della R. Acad. di Berlino per gli anni 1767, e 1768, tornò poi a riprodurla sette, od otto anni indietro a Parigi, corredandola d'interessantissime note, ed addizioni. I lavori posteriori del nostro dotto Collega il Sig. Prof. *Ruffini* e del Sig. *Abbati*, a buon diritto coronati dalla nostra Società, aggiunsero poi certamente molta perfezione, e facilità di uso alle scoperte del Geometra Piemontese. Non si può però negare, che il metodo luminosissimo, e soddisfacentissimo in teoria, riesce poi assai lungo, e penoso in pratica, e massime se l'equazione del problema sia ingombra da' radicali; nel qual caso bisogna far la fatica di liberarnela per giungere per lo più ad equazioni di altissimo grado, epperò di difficilissimo maneggio; ovvero che in vece di una vi sieno più incognite, nel qual caso, per applicare il metodo, bisogna assoggettarsi al nojoso lavoro dell' eliminazione. Il metodo poi del Sig. *Lagrange* a nulla giova per la risoluzione numerica delle equazioni trascendenti.

Sarebbe dunque a desiderarsi un metodo per l' uso, e per l' applicazione più comodo, il quale prendendo le equazioni tali quali si presentano nella soluzione di un problema, sieno esse razionali, od irrazionali, algebraiche, o trascendenti, ad una, o più incognite, ne insegnasse in ogni caso per via facile, e spedita a ritrovarne una quanto si voglia approssimante risoluzione. Ed un tal metodo appunto, senza però dimostrarlo, ha dato prima della metà del passato secolo il celebre Geometra Inglese *Tommaso Simpson* nella sua Opera intitolata: *Essays on several curious and useful subjects in speculative and mix'd Matematicks, illustrated by a variety of examples. London* 1740 *in* 4.° In quest' Opera pertanto (*pag.* 81) si legge una breve memoria, che ha per titolo; *A new method for the solution of equations in numbers*. Distinguendo l' autore due casi, espone letteralmente il suo metodo come segue

CASO I.°

Quando è data una sola equazione, e vi è una sola quantità x da determinarsi.

Prendasi il differenziale della data equazione, sia essa qualsivoglia, riguardando l' incognita x *come una variabile, e dividendo per* dx, *il risultato chiamisi* A. *Si assuma quindi un valore di* x *quanto più si può prossimo al vero, e questo si sostituisca tanto nella proposta equazione, quanto nel risultato* A. *Si avranno così due numeri, il primo de' quali diviso per il secondo darà un quoziente, che essendo sottratto dal valore assunto per* x, *ne somministrerà un nuovo valore molto più vicino al vero del primo. Da questo secondo valore all' istesso modo si procederà a ricercarne un terzo, e quindi un quarto ec., sinchè si giunga a quel grado di accuratezza, che più si brama.*

CA-

CASO II.°

Quando sono date due equazioni, e due quantità x, ed y da determinarsi per mezzo di esse.

Si prenda il differenziale di entrambe le equazioni, riguardando x, *ed* y *come variabili, e chiamisi* A *il coefficiente di* dx *nella prima*, B *quello di* dy, *e similmente nella seconda chiamisi* a *il coefficiente di* dx, b *quello di* dy. *Si assumano quindi per* x, *ed* y *due valori quanto più si può prossimi al vero, e questi sostituiti nelle due proposte equazioni supponghiamo che invece di renderle eguali a zero, dieno due risultati positivi, o negativi, che denoteremo rispettivamente colle lettere* R, *ed* r. *Si sostituiscano parimenti i valori assunti per* x, *ed* y *ne' quattro coefficienti* A, B, a, b; *e convertendo in numeri le quantità* $\frac{Br-bR}{Ab-aB}$, $\frac{aR-Ar}{Ab-aB}$, *ed aggiungendole agli assunti valori di* x, *ed* y, *si avranno due nuovi valori di queste quantità molto più prossimi al vero de' primi; e si renderanno poi anche sempre più prossimi, e quanto si desidera, ripetendo quanto occorre la medesima operazione.*

NOTA 1.° *Che le equazioni su di cui si opera, si suppongono ridotte ad aver zero nel secondo membro per mezzo della trasposizione.*

2.° *Che se dopo la prima operazione i valori di* x, *o di* y *non danno risultati così prossimi al vero come i valori assunti, ciò sarà un indizio, che questi non si sono assunti a dovere, onde non andranno attesi, e bisognerà ricominciare da capo l' operazione.*

3.° *Che, generalmente parlando, il metodo proposto quando i valori assunti per* x, *ed* y *sieno bastantemente vicini ai veri, in ogni operazione raddoppia il numero delle decimali esatte, e sicure; e procede lentamente soltanto l' approssimazione nel caso, che i divisori* A, *ed* Ab—aB *sieno molto piccoli, e convergenti verso lo zero.*

Queste sono le due regole prescritte da *Simpson*, che egli poi esemplifica in varie equazioni di ogni specie, senza darsi però verun carico di dimostrarle. Ecco dunque la dimostrazione, che ne trovammo moltissimi anni addietro, allorchè c' imbattemmo a leggerle per la prima volta.

Dimostrazione della regola per il I.° CASO, *allorchè cioè si ha una sola incognita ed una sola equazione.*

Abbiasi $F.x=o$, intendendo per $F.x$ una qualunque funzione di x. Se supporremo $y=F.x$, avremo l' equazione di una curva RMN (*Fig.*ª 1.ª) riferita alle coordinate $AP=x$, $PM=y$, la quale in qualunque de' punti N ov' essa taglia l' asse delle ascisse, e dove in conseguenza $y=o$, darà $F.x=o$, cosicchè AN sarà uno de' cercati valori di x, che risolve la proposta equazione $F.x=o$. Supponghiamo ora, che si conosca un valore AP di x molto prossimo ad AN, il quale cioè prossimamente soddisfaccia all' equazione $F.x=o$, con un piccolo errore, che chiameremo E, cosicchè sia $F.AP=E$. Siccome per ipotesi dev' essere anche $F.AP=PM$, sarà perciò $E=PM$. Si differenzj ora l' equazione della curva $y=F.x$; e rappresentando al solito modo con $dxF'.x$ il differenziale di $F.x$, avremo $\frac{dy}{dx}=F'.x$, ed in M ove $x=AP$, sarà $\frac{dy}{dx}=F'.AP$, cioè sarà $\frac{dy}{dx}$ eguale al differenziale di $F.x$ diviso per dx, ponendo poscia nel quoziente AP in vece di x, cioè sarà $\frac{dy}{dx}$ eguale a ciò che il N. A. chiama A. Ma condotta la Tangente MS, si ha anche $\frac{dy}{dx}=\frac{PM}{PS}$, ossia perchè supponesi il punto P molto prossimo ad N, e perciò l' archetto MN quasi rettilineo, si ha prossimamente $\frac{dy}{dx}=\frac{PM}{PN}$. Sostituendo adunque in luogo di $\frac{dy}{dx}$, e PM i loro valori, cioè A, ed E, sarà finalmente . . .

A =

$A = \frac{E}{PN}$, e quindi $PN = \frac{E}{A}$; vale a dire, che dal valore AP assunto per x bisognerà sottrarre $\frac{E}{A}$ per avere più prossimamente la AN, che soddisfà alla proposta equazione $F.x=o$; ciò che doveva in primo luogo dimostrarsi.

Dimostrazione della regola per il II.° CASO, *allorchè cioè si hanno due equazioni e due incognite da determinarsi per mezzo di esse.*

Rappresentinsi le due date equazioni per $F.(x,y)=o, f.(x,y)=o$; intendendo per $F.(x,y)$, $f(x,y)$ due quali si sieno date funzioni di x, ed y. Possiam supporre, che queste due equazioni sieno quelle di due curve NVM, LXM (*Fig.*ª 2.ª) riferite ad un comune asse delle ascisse AP, ed allora il punto, o i punti M, in cui queste due curve s' intersecano, saranno quelli, in cui le due equazioni insieme si verificano, cioè le coordinate AP, PM di questo, o di questi punti saranno quei valori di x, ed y, che si cercano, i quali rendono allo stesso tempo $F.(x,y)=o, f.(x,y)=o$. Supponghiamo ora, che siensi già trovati due valori AQ, QS di x, ed y molto prossimi ad AP, PM, ed i quali in conseguenza con due piccoli errori, che il N. A. chiama R, ed r, soddisfanno alle proposte equazioni $F(x,y)=o, f.(x,y)=o$, cosicchè $F.(AQ, QS) = R$, e $f.(AQ, QS)=r$. Si potrà dunque senza grave errore considerare il punto S come infinitamente prossimo a PM, e come posto sopra entrambe le curve NVM, LXM.

Condotta adunque ST parallela ad AP, si potranno riguardare ST, TM come i differenziali tanto delle due coordinate AQ, QU della curva AUM, quanto delle due coordinate AQ, QX della curva LXM.

Si differenzino ora le due espressioni $F(x,y)$, $f.(x,y)$, e rappresentando i loro differenziali per rapporto ad x con $dxF'.(x,y)$, $dxf'.(x,y)$, e quelli presi per rapporto ad y con $dyF.1(x,y)$ $dyf.1(x,y)$, per i punti U, ed X delle due curve, che, come abbiam

biam detto, si confondono prossimamente col punto S, si avrà

(1) . . . $d.F(x,y) = d.F\,(AQ,QU) = dxF'.(x,y) + dyF.1(x,y) =$
$ST.F'.(AQ,QS) + MT.F.1(AQ,QS)$

(2) . . . $d.f.(x,y) = d.f.(AQ,QX) = dxf'.(x,y) + dyf.1(x,y) =$
$ST.f'.(AQ,QS) + MT.f.1(AQ,QS)$

Ora $d\,F.(AQ,QU) = F.(AP,PM) - F.(AQ,QU) = -F.(AQ,QS)$ prossimamente, dovendo essere per ipotesi $F(AP,PM) = 0$, ed essendo QU prossimamente = QS. Avendo dunque veduto, che $F.(AQ,QS) = R$, si avrà $d.F.(AQ,QU) = -R$. Allo stesso modo si proverà, che $d.f.(AQ,QX) = -r$.

Inoltre $F'.(AQ,QS)$, $f'.(AQ,QS)$ rappresentano i differenziali di $F\,(x,y)$, $f.(x,y)$ presi per rapporto ad x, e ne' quali, dopo di averli divisi per dx, si mette AQ, QS in vece di x, ed y, le quali quantità l' Au: chiama A, ed a; e similmente . . . . $F.1\,(AQ,QS)$, $f.1(AQ,QS)$ rappresentano quelle quantità, che l' Au: chiama B, e b.

Sostituendo pertanto questi valori, le due equazioni (1), e (2), che abbiam trovate qui sopra, diverranno

$$-R = A.ST + B.MT\,;\quad -r = a\,ST + b.MT$$

dalle quali facilmente si dedurrà

$$ST = \frac{Br - bR}{Ab - aB}\,;\quad MT = \frac{aR - Ar}{Ab - aB}$$

cioè, che i valori da aggiungersi ad AQ, QS, che si sono alla prima assunti per x, ed y sono $QP = ST = \frac{Br - bR}{Ab - aB}$, ed $MT = \frac{aR - Ar}{Ab - aB}$, per avere più prossimamente AP, PM, cioè i valori di x, ed y, che insieme soddisfanno alle due proposte equazioni $F.(x,y) = 0$, $f.(x,y) = 0$; ciò, che doveva in secondo luogo dimostrarsi.

Sono queste le dimostrazioni, che moltissimi anni addietro ritrovammo di queste regole date senza dimostrazione da *Simpson*, allorchè le leggemmo per la prima volta. Ci sembrano esse assai semplici, ed elementari, e che non superino la capacità, ed intelligenza degli appena iniziati nel calcolo differenziale, ai quali può esser utile l' insegnare questo speditissimo metodo di frequentissimo uso, ed applicazione. Si potran dunque ritenere

que-

queste dimostrazioni per loro comodo, mentre i più provetti nella Scienza del Calcolo più naturalmente le vedranno nascere dal celebre teorema di *Taylor*, e dalla *teoria delle funzioni*, che su quel teorema tutta si fonda. In fatti tornando molti anni dopo a riflettere su questo metodo di *Simpson*, facilmente vidimo, che il suddetto teorema di *Taylor* n' era la radice, e che da questo patrio teorema l' Au: l'avea tratto, nascondendone il fonte. E così posteriormente lo trovammo difatti dimostrato (senza farsi però veruna menzione di *Simpson*, che fu il primo a proporlo) dal Sig. *Lagrange* (*De la resolution des équations numeriques de tous les degrés*: *Note* XI.), e dal di lui perpetuo commentatore Sig. *La Croix* (*Traité du calcul differentiel, et du calcul integral. Tome* I. *pag.* 325, 326). Il transunto delle dimostrazioni delle regole di *Simpson* dedotte dal teorema di *Taylor* è il seguente, e noi le accenniamo perchè meglio se ne rilevi la differenza dalle nostre.

Dovendosi nel *I.° Caso* rendere $= o$ una data funzione di x, ed avendosi un valore di x, che chiameremo a, il quale prossimamente soddisfa; ma che in vece di o dà u, se supporremo, che il vero valore di x sia $a + h$, la quantità h sarà molto piccola, e la funzione di $a + h$, la quale deve essere $= o$, sarà per il teorema di *Taylor*.

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \&c.$$

Trascurando adunque in questa espressione le potenze superiori di h quantità molto piccola, ed eguagliando a zero, si avrà prossimamente

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} = o$$

cioè . . . . . $h = -\frac{u}{\frac{du}{da}}$

ch' è appunto la regola data da *Simpson* per il *I.° CASO*.

Similmente per il *II.° CASO* supponghiamo, che si abbiano due funzioni di x, ed y da rendere $= o$, e che prossimamente vi sod-

soddisfacciano a, e b poste in luogo di x, ed y, le quali in vece di rendere le due funzioni $= 0$, dieno u, ed v. I veri valori di x, ed y sieno $a + h$, $b + k$, essendo h, e k quantità molto piccole; le due funzioni di $a + h$, e $b + k$, che deggiono per ipotesi essere $= 0$, saranno per la *teoria delle funzioni*, e per il teorema di *Taylor*.

$$u + \frac{1}{1}\left(\frac{du}{da} \cdot h + \frac{du}{db} \cdot k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2u}{da^2} \cdot h^2 + 2\frac{d^2u}{dadb} \cdot hk + \frac{d^2u}{db^2} \cdot k^2\right) + \text{ec.}$$

$$v + \frac{1}{1}\left(\frac{dv}{da} \cdot h + \frac{dv}{db} \cdot k\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2v}{da^2} \cdot h^2 + 2\frac{d^2v}{da\,db} \cdot hk + \frac{d^2v}{db^2} \cdot k^2\right) + \text{ec.}$$

Trascurando le potenze, e i prodotti delle piccole quantità h, e k, ed eguagliando a zero ciò che resta, si avranno prossimamente vere le due equazioni

$$u + \frac{du}{da} \cdot h + \frac{du}{db} \cdot k = 0; \; v + \frac{dv}{da} \cdot h + \frac{dv}{db} \cdot k = 0$$

dalle quali risulteranno precisamente quei due medesimi valori di h, e k, che prescrive *Simpson* nella sua regola del *II.° CASO*.

Dal medesimo teorema di *Taylor* si può anche rilevare quale sarà per essere la legge, e il progresso dell'approssimazione nelle successive operazioni. Imperocchè essendosi trovato per es. per il *I.° CASO* il primo valore di $h = -\frac{u}{\frac{du}{da}}$, mettendo a in vece di x nella funzione u, il secondo valore di h, che si avrà nella seconda approssimazione risulterà allo stesso modo ponendo $a + h$ in vece di x nella funzione u. Ma ponendo $a + h$ in vece di x nella funzione u si ha per il teorema di *Taylor*.

$$u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{da^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

cioè $\left(\text{per essersi fatto } u + \frac{du}{da} \cdot \frac{h}{1} = 0\right)$

$$\frac{d^2u}{da^2} \cdot \frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3} \cdot \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Sarà dunque il secondo valore di u, epperò anche il secondo valo-

lore di $h = -\frac{u}{\frac{du}{da}}$, una quantità dell'ordine h^2; e allo stesso modo si proverà, che il terzo valore di u, e di h dovrà essere una quantità dell' ordine h^4, il quarto dell' ordine h^8 ec.; e l' istessa dimostrazione pure varrà, com' è evidente, per il *II.° CASO*. Quindi generalmente parlando si raddoppierà in ogni operazione il numero delle decimali esatte, e sicure, siccome appunto annuncia *Simpson* nella 3.ª *Nota*. Ma non più sulle dimostrazioni del *nuovo metodo di Simpson*: passiamo piuttosto con alcuni opportuni esempj ad illustrarlo. Gli esempj del *I.° CASO* ci verranno somministrati dall'equazioni del *problema meccanico*, che forma il soggetto della memoria precedente.

Risolvendo il secondo problema, in cui cioè si cercava l' arco, la di cui corda potrebbe percorrersi da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle tre corde delle sue terze parti, siam giunti all' equazione

$$2 - 8x + 4x^2 - (6 - 10x + 4x^2)\sqrt{5 - 10x + 4x^2} + \ldots$$
$$\ldots + (2 - 2x) : \sqrt{16x^4 - 88x^3 + 172x^2 - 140x + 40} = 0.$$

I limiti di x prescritti dalla natura del problema erano o, e 2, e il 2 ne dava una soluzione, la quale però come inutile doveva essere rigettata. Ma siccome posto o, ed 1 in luogo di x si hanno due risultati di segno contrario, si avrà perciò tra questi due limiti almeno un' altra soluzione. Ora ristringendo questi due limiti, si trovano anche due risultati di segno contrario ponendo $o,1$, e $o,2$ in vece di x, cioè col primo valore si ha prossimamente il risultato $+ o,56$, e col secondo $- 0,0288$. Siccome questo secondo risultato è più vicino a zero del primo, suppongo perciò per una prima approssimazione $x = 0,2$. Differenzio ora la proposta equazione, e nel differenziale diviso per dx sostituisco parimenti 0,2 in vece di x, ed ho prossimamente per risultato $- 5,403$. Finalmente secondo che prescrive la regola del detto *CASO* divido $- 0,0288$ risultato della sostituzione di 0,2 in luogo di x nella proposta equazione, per l' ultimo risultato

trovato — 54,03, ed il quoziente, che sarà prossimamente 0,0053 sottratto dal valore appunto 0,2, darà per un secondo valore di x molto più prossimo al vero 0,1947.

Similmente nel terzo problema della precedente Memoria, in cui si cercava l'arco la di cui corda potrebbe percorrersi da un Grave nello stesso tempo, che la somma delle corde delle due metà, avendo riguardo alla perdita della velocità nel passaggio dall' una all' altra si giunse all' equazione,

$$z^5 - 12z^4 + 53z^3 - 104z^2 + 86z - 23 = 0$$

e facilmente si stabilirono per il valore cercato di z i limiti 0,5, e 0,6. Adoperando il primo, ch' è più prossimo al vero, e sostituendolo nella proposta equazione si ha per risultato — 0,0938. Sostituendolo similmente nel differenziale della medesima equazione diviso per dz, cioè in

$$5z^4 - 48z^3 + 159z^2 - 208z + 86$$

ne viene per risultato + 16,0625. Diviso finalmente un risultato per l' altro si ha prossimamente per quoziente —0,00583, che sottratto da 0,5 valore assunto per z, ne da per un secondo valore molto più prossimo al vero 0,56583; dal quale si potrebbe poi passare, tenendo la medesima strada, ad ulteriori, e più accurate approssimazioni.

Il terzo, ed ultimo esempio del *I.° CASO*, che ricaveremo dalla precedente Memoria, sarà appunto l' ultimo problema, in cui si cercava l' arco, che un Grave potrebbe percorrere nello stesso tempo, che la sua corda. L' equazione, che prossimamente lo risolveva fu trovata essere

$$0{,}0122x^3 + 0{,}0351x^2 + 0{,}125x - 0{,}2732 = 0$$

nella quale al solito i limiti naturali di x erano 0, e 2, e si trovava poi facilmente, che 1, e 2 davano risultati di segno contrario, il primo cioè — 0,1009, ed il secondo + 0,2148. Adoperando il primo, come più prossimo, e sostituendo il valore 1 di x, che lo somministra, nel differenziale diviso per dx della surriferita equazione, cioè in

$$0{,}0366x^2 + 0{,}0702x + 0{,}125$$

si avrà per risultato 0,2318. Dividendo per tanto — 0,1009 per

0,2318,

0,2318, e sottraendo il quoziente — 0,4352, che ne risulta da 1, si otterrà molto prossimamente $x = 1,4352$.

Per aggiungere a questi anche un esempio di un' equazione trascendente, sia proposta a risolvere l' equazione

$$x^x - 100 = 0 .$$

Facilmente si vedrà, che il valore di x dev' essere compreso tra 3, e 4, e questi limiti si ridurranno poi colla stessa facilità a 3,5, e 3,6, i quali sostituiti in vece di x, valutando per mezzo de' logaritmi le potenze $3.5^{3,5}$; $3,6^{3,6}$ daranno prossimamente i rispettivi risultati di segno contrario — 19,8, + 0,6. Scegliendo pertanto il secondo limite come il più prossimo, si dovrà esso sostituire nel differenziale della proposta equazione diviso per dx, cioè

$$(1 + \mathrm{Log}.x).x^x$$

avvertendo, che Log.x è un logaritmo *Neperiano*, cioè eguale al logaritmo *tabulare* di x moltiplicato per 2,30258. Si avrà così per risultato prossimamente 229,368, per il quale dividendo l' altro risultato 0,6, che ha dato la proposta equazione, si avrà prossimamente per quoziente 0,0026, che sottratto da 3,6 darà per un secondo valore di x molto più prossimo del primo 3,5974.

Passando ora a dar qualche esempio del *II.° CASO*, prenderemo per il primo le due equazioni, che si propone a risolvere il medesimo *Simpson* nell' *esempio IV.°* del suo Opuscolo, cioè

$$49.\left(x - \frac{x}{1+y^2}\right) - 25.\left(1 - \frac{x^2}{1+y^2}\right) = 0$$

$$81.\left(1 - \frac{x^2}{1+y^2}\right) - 49.\left(\frac{x}{y} - \frac{xy}{1+x^2}\right) = 0 .$$

Dimostrando però prima, ciò che *Simpson* non ha fatto, che queste due equazioni nascono dal seguente problema.

Sopra di una data base AC (Fig.ª 3.ª) *descrivere un Triangolo* ABC *tale, che le rette* BD, CF, AE *dividenti in mezzo gli angoli, e prolungate sino ai lati opposti, sieno rispettivamente tra loro nel dato rapporto de' numeri* 5, 7, 9.

La soluzione di questo problema condurrà subito alle surriferite due equazioni mediante il seguente *Lemma*:

Il quadrato della retta BD *dividente in mezzo l' angolo* B *di un qualunque triangolo* (Fig.ª 4.ª). *e prolungata sino al lato opposto, eguaglia la differenza de' rettangoli de' lati* AB, BC, *che forman l' angolo, e de' segmenti* AD, DC *del lato opposto cioè* $BD^2 = AB.BC - AD.DC$.

S' intenda al Triangolo circoscritto un Circolo, e prolungata la BD in E, e condotta la EC, saranno tra loro simili i tre triangoli ABD, EBC, ECD, epperò si

avrà . . . . . $AB : BD = EB : BC$, $AD : BD = ED : DC$

d' onde . . . . $EB . BD = AB . BC$...$ED.BD = AD . DC$

e quindi . . . . $EB.BD - ED . BD$, cioè $BD^2 = AB\ BC - AD.DC$.

Tornando adunque al problema, facciasi per maggior semplicità (Fig.ª 3.ª) la data base $AC = 1$, e i lati cercati AB, BC chiaminsi rispettivamente x, ed y. Siccome BD divide in mezzo l' angolo B, si avrà dalla Geometria

$$x + y : x = 1 : AD,\ x + y : y = 1 : DC$$

cioè $AD = \frac{x}{x+y}$, $DC = \frac{y}{x+y}$.

Allo stesso modo, essendo l' angolo C diviso in mezzo dalla CF, si troverà $AF = \frac{x}{1+y}$, $FB = \frac{xy}{1+y}$; ed essendo l'angolo A diviso in mezzo dalla AE, si avrà $CE = \frac{y}{1+x}$, $EB = \frac{xy}{1+x}$.

Quindi per il premesso *Lemma* ne risulterà

$$\overline{BD}^2 = AB.BC - AD.DC = xy - \frac{xy}{x+y^2}.$$

$$\overline{CF}^2 = AC.CD - AF.FB = y - \frac{x^2y}{1+y^2}.$$

$$\overline{AE}^2 = AC.AB - CE.EB = x - \frac{xy^2}{1+x^2}.$$

Dovendo dunque stare per condizione del problema $\overline{BD}^2$, $\overline{CF}^2$, $\overline{AE}^2$, come i quadrati de' numeri 5, 7, 9, cioè 25, 49, 81, si avranno perciò le due equazioni

$$49.\left(xy - \frac{xy}{x+y^2}\right) - 25.\left(y - \frac{x^2y}{1+y^2}\right) = 0$$

$$81.\left(y - \frac{x^2y}{1+y^2}\right)^2 - 49.\left(x - \frac{xy^2}{1+x^2}\right) = 0.$$

Per

Per risolverle colla regola del II.° CASO, bisogna primieramente stabilire due valori, quanto si può più prossimi di x, ed y. Ora riflettendo, che la retta, che divide in mezzo un angolo di un triangolo formato da due lati dati sarà, generalmente parlando, tanto più grande, quanto si supporrà più piccolo il lato opposto, e viceversa, facilmente se ne conchiuderà, ch' essendosi posta AC=1, e dovendo stare BD : CF : AE=5 : 7 : 9, i due lati cercati AB, BC dovranno esser minori di 1, ed AB maggiore di BC. Questo discorso che potrà esser anche coadjuvato da una costruzione fatta a tentone del ricercato triangolo, agevolmente porterà a supporre per una prima approssimazione $x=0,8$; $y=0,6$. Colla sostituzione di questi supposti valori nelle proposte equazioni si avranno subito quei delle quantità chiamate R, ed r nella regola del II.° CASO, cioè . . . . R=0, 45, r=2, 66.

Per avere le altre quattro quantità A, B, a, b della medesima regola, bisognerà differenziare le proposte equazioni, e si troverà, che il coefficiente di dx nella prima è $49 \cdot \left(1 + \frac{x-y}{x+y^3}\right) + \frac{50x}{1+y^2}$, quello di dy e $\frac{98x}{x+y^3} - \frac{50x^2}{1+y^3}$; e similmente il coefficiente di dx nel differenziale della seconda si troverà essere $-\frac{16ax}{1+y^2} + 49 \cdot \left(\frac{y}{1+x^2} - \frac{1}{y} - \frac{2xy}{1+x^3}\right)$, e quello di dy si troverà $\frac{16ax^2}{1+y^3} + 49x \cdot \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)$. Ora la sostituzione di 0,8, e 0,6 in vece di x, ed y fatta in questi quattro coefficienti darà appunto prossimamente A=68, B=20,7; a=−131, b=146.

Finalmente con questi valori di R, r, A, B, a, b, a tenore della regola del II. CASO dovran determinarsi i valori delle quantità $\frac{Br-bR}{Ab-aB}$, $\frac{aR-Ar}{Ab-aB}$, che si troveranno essere prossimamente −0,0007, e −0,019, e che aggiunti ai supposti valori 0,8;0,6 daranno due nuovi valori di x, ed y molto più prossimi ai veri, cioè x=0,7993, y=0,581. Da questi si passerà collo stesso metodo agli altri anche più esatti x=0,79912, y=0,58138, che sono si-

sicuri sino alla quarta decimale; e si potrà andare anche più oltre, se si vuole nell' esattezza dell' approssimazione.

Aggiungiamo anche un esempio di equazioni trascendenti nelle due equazioni

$$x^x+y^y-1000=0\,,\quad x^y+y^x-100=0$$

Facilmente si scorgerà, che la maggiore delle due cercate quantità, che supporremo esser x, dev' esser maggiore di 4, e minore di 5, poichè supponendola $=4$, quando anche l' altra y fosse $=4$, si avrebbe $x^x+y^y=512$, cioè <1000, onde la prima equazione non potrebbe essere soddisfatta; e supponendola $=5$, si avrebbe il solo termine $x^x=3125$, cioè >1000. Alla stessa maniera dalla seconda equazione apparirà dover essere $y>2$, e <3; dappoichè quando anche fosse $x=5$, se si ponesse $y=2$, si avrebbe $x^y+y^x=25+32$, cioè <100, e se si facesse $y=3$, quando anche fosse $x=4$, sarebbe $x^y+y^x=64+81$, cioè >100.

Potrà dunque supporsi alla prima $x=4{,}5$, $y=2{,}5$, e questi due supposti valori sostituiti nelle due equazioni, daranno per mezzo de' logaritmi, come nell' ultimo esempio del I.° CASO, $R=-120{,}218$, ed r, $=4{,}72$. I coefficienti di dx, e dy nel differenziale della prima equazione si troveranno essere $(1+\text{Log}.x).x^x$, $(1+\text{Log}.y)y^y$, e quei del differenziale della seconda, $\frac{y}{x}.x^y+y^x.\text{Log}.y$, ed $\frac{x}{y}.y^x+x^y.\text{Log}.x$. Se in questi quattro coefficienti pertanto si porranno in luogo di x, y i valori assunti 4,5, 2,5, in vece di Log. x, e Log. y i logaritmi *tabulari* di 4,5, e 2,5 moltiplicati per 2,30258, e finalmente in vece di x^x, y^y, x^y, y^x i valori loro già determinati nel trovare R, ed r, ne risulterà prossimamente $A=2178{,}23$, $B=18{,}936$, $a=80{,}41$, $b=175{,}96$; e questi quattro valori insieme con quei di R, ed r daranno prossimamente $\frac{Br-bR}{Ab-aB}=0{,}05$; $\frac{aR-Ar}{Ab-aB}=-0{,}05$, cioè i valori da aggiungersi ai valori assunti per x, ed y, onde avere con maggiore approssimazione $x=4{,}55$, $y=2{,}45$. Da questi con una consimile operazione si passerà agli altri anche più prossimi ai veri $x=4{,}5519$, $y=2{,}4495$; ec.

SO-