SUL CALCOLO DELLE DERIVAZIONI

DEL SIG. PIETRO PAOLI

MEMORIA

Ricevuta il dì 9 Febbrajo 1806.

Il celebre Geometra Arbogast ha dato questo nome ad un nuovo calcolo, il quale abbraccia la teoria delle serie, e di cui il calcolo differenziale sotto un certo aspetto non è che un caso particolare. Leggendo le numerose ed eccellenti applicazioni, che Egli fa di un tal metodo, lo ebbi da principio in gran pregio, e desiderai che fosse generalmente coltivato, riguardandolo come la regia strada, per la qual sola giunger facilmente si potesse a tanti e sì nobili ritrovati. Ma dopo un più maturo esame mi accorsi, che l'esito felice delle soluzioni del Sig. Arbogast dipendeva più da alcuni artifizj ingegnosi di calcolo e da certe forme date da lui alle sue formole, che dai principj dai quali le medesime soluzioni faceva discendere; e che il calcolo differenziale era solo sufficiente a condurci agli stessi risultati in un modo forse più semplice ed anche più generale. La complicazione, a cui è giunta l'analisi, esige che le diverse ricerche si riuniscano e si colleghino insieme, e per quanto è possibile, si facciano dipendere da pochi principj. In questa breve Memoria mi propongo di mostrare, come con i metodi già conosciuti si possano trattare quelle medesime questioni, intorno alle quali si aggira l'opera del Sig. Arbogast, prendendo a risolvere il problema principale, da cui la soluzione di tutti gli altri discende.

I.

Data la funzione

$$\varphi\,.\,(a + bx + b'x^2 + b''x^3 + b'''x^4 + \text{ec.})$$

sia proposto di svolgerla in una serie ordinata secondo le potenze di x.

Tut-

Tutto si riduce a trovare il valore della funzione $\frac{d^n.\varphi\ (a+bx+b'x^2+\text{ec.})}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ndx^n}$ nel caso di $x=0$, giacchè è noto esser questo il coefficiente cercato di x^n. Facciamo a tale oggetto

$$t=b+b'x+b''x^2+b'''x^3+\text{ec.},$$

sostituendo il qual valore la funzione proposta diventa $\varphi.(a+tx)$, e svolgendola in serie secondo il teorema di Taylor avremo

$$\varphi.(a+tx)=\varphi.a+\frac{d\varphi}{da}tx+\frac{d^2\varphi}{1.2da^2}t^2x^2+\frac{d^3\varphi}{1.2.3da^3}t^3x^3$$

$$\ldots\ldots+\frac{d^n\varphi}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ nda^n}t^nx^n+\text{ec.}$$

Ora il coefficiente di x^n in tx è $\frac{d^{n-1}.t}{1.2\ldots(n-1)\,dx^{n-1}}$

in t^2x^2 $\frac{d^{n-2}.t^2}{1.2\ldots(n-2)dx^{n-2}}$

in t^3x^3 $\frac{d^{n-3}.t^3}{1.2\ldots(n-3)dx^{n-3}}$

. .

. .

. .

in $t^{n-1}x^{n-1}$ $\frac{d.t^{n-1}}{dx}$

in t^nx^n t^n

purchè si faccia $x=0$ dopo le differenziazioni. Sarà dunque con questa condizione

$$\frac{d^n.\varphi.(a+bx+\text{ec.})}{1.2\ .\ .\ .\ ndx^n}=\frac{d^n.\varphi.a}{1.2\ldots nda^n}+\frac{d^{n-1}.\varphi}{1.2..(n-1)da^{n-1}}\cdot\frac{d.t^{n-1}}{dx}$$

$$+\frac{d^{n-2}.\varphi}{1.2..(n-2)da^{n-2}}\cdot\frac{d^2\,t^{n-2}}{1.2\,dx^2}\ldots+\frac{d\varphi}{da}\cdot\frac{d^{n-1}t}{1.2..(n-1)dx^{n-1}}.$$

2.

L' equazione precedente ci disimpegna dalla considerazione della funzione φ di un polinomio; e riduce tutto alla ricerca del valore di $\frac{d^p.t^r}{1.2..pdx^p}$ nel caso di $x=0$, o sia alla ricerca del coef-

fi-

ficiente di x^p nel polinomio $t = b + b'x + b''x^2 +$ ec. innalzato alla potenza r; onde potranno quì applicarsi i varj metodi che si conoscono per l' evoluzione delle potenze dei polinomj. Ma anche indipendentemente da questi metodi potremo con i medesimi principj giungere ad ottenere il coefficiente di x^p in t^r, e quindi un ulteriore sviluppo della funzione proposta.
Ponghiamo infatti

$$t' = b' + b''x + b'''x^2 + b^{\text{iv}}x^3 + \text{ec.}$$

in modo che sia $t = b + t'x$, ed in vigore del ragionamento precedente avremo

$$\text{(A)} \quad \frac{d^p.t^r}{1.2..p dx^p} = \frac{d^p.t^r}{1.2..p dt^p}.t'^p + \frac{d^{p-1}.t^r}{1.2..(p-1)dt^{p-1}}.\frac{d t'^{p-1}}{dx}$$
$$+ \frac{d^{p-2}.t^r}{1.2..(p-2)dt^{p-2}}.\frac{d^2.t'^{p-2}}{1.2dx^2} \ldots + \frac{d.t^r}{dt}.\frac{d^{p-1}.t'}{1.2..(p-1)dx^{p-1}}$$

ove nel secondo membro ho scritto t in luogo di b, perchè nel caso di $x=0$ è $t=b$. Mediante l' equazione (A) potremo conseguire un ulteriore sviluppo del valore di $\frac{d^n.\Phi.(a+bx+b'x^2+\text{ec.})}{1.2.3\ldots n dx^n}$, sostituendo in luogo dei differenziali di t^r quelli delle potenze di t'. Così pure facendo

$$t'' = b'' + b'''x + b^{\text{iv}}x^2 + b^{\text{v}}x^3 + \text{ec.}$$

esprimeremo i differenziali di t'' per quelli delle potenze di t''; e così in seguito. E poichè in ciascuna operazione diminuisce di una unità l' esponente del differenziale più alto, giungeremo ad ottenere l' intero sviluppo della quantità $\frac{d^n.\Phi.(a+bx+b'x^2+\text{ec.})}{1.2.3\ldots\ldots n dx^n}$ espresso senza differenziali per mezzo delle lettere t, t', t'', ec., che nel caso di $x=0$, il quale unicamente quì si considera, divengono rispettivamente i coefficienti b, b', b'', ec. del polinomio $a + bx + b'x^2 +$ ec.

3.

Ma per eseguire con più facilità e prontezza queste diverse operazioni, è opportuno di fare le riflessioni seguenti. Se nella equazione (A) ponghiamo $p+1$ in luogo di p, avremo

$$(B)\quad \frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dx^{p+1}} = \frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dt^{p+1}}.t'^{p+1} + \frac{d^p.t^r}{1.2..pdt^p}.\frac{d.t'^p}{dx}$$
$$+ \frac{d^{p-1}.t^r}{1.2..(p-1)dt^{p-1}}.\frac{d^2.t'^{p-1}}{1.2dx^2}\ldots + \frac{d.t^r}{dt}.\frac{d^p.t'}{1.2..pdx^p}.$$

Di quì facilmente apparisce, che dalla formola (A) possiamo passare alla formola (B) con le seguenti operazioni: 1.° differenziando la formola (A) per rapporto ad x supposta t costante, e dividendo ciascun termine pel rispettivo esponente del differenziale, che ne nasce; 2.° facendo variare anche la t, ma nel solo primo termine $\frac{d^p.t^r}{1.2..pdt^p}.t'^p$, ove non sono i differenziali di t', onde risulta $\frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dt^{p+1}}.t'^p\frac{dt}{dx}$, ponendovi t' invece di $\frac{dt}{dx}$, che nel caso di $x=0$ gli è eguale, con la quale sostituzione questo termine diventa $\frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dt^{p+1}}.t'^{p+1}$, e dividendolo per l' esponente $p+1$ di t'.

4.

Così pure facendo

$$t'' = b'' + b'''x + b^{iv}x^2 + \text{ec.}$$
$$t''' = b''' + b^{iv}x + b^{v}x^2 + \text{ec.}$$
ec.

potremo esprimere il differenziale $\frac{d^p.t^r}{1.2...pdx^p}$ per t'', e nel passare al differenziale seguente $\frac{d^{p+1}.t^r}{1.2..(p+1)dx^{p+1}}$ vedremo doversi in simil guisa prendere il differenziale della formola trovata, supposta ovunque costante t' fuorchè nel primo termine, ove non sono i differenziali di t'', e divider poi questo termine per l' esponente della potenza risultante di t'', dopo di avervi posto t'' invece di $\frac{dt'}{dx}$. E la stessa regola avrà luogo per rapporto alle lettere seguenti t'', t''', ec.

5.

5.

Quindi nel prendere uno dopo l' altro i valori della quantità $\frac{dp.t^r}{1.2\,pdx^p}$ converrà differenziare il valore già trovato per rapporto ad x facendo variare t nei soli termini che contengono t', ma non in quelli che contengono i differenziali di t', cioè le lettere t'', t''', &c.; facendo similmente variare t' nei soli termini che non comprendono t''', t^{iv}, &c., t'' nei soli termini che non contengono t^{iv}, t^{v}, &c.; e così in seguito. In una parola bisognerà in ciascun termine far variare la lettera dell' indice più alto, e quella dell' indice prossimamente inferiore, se vi è, e dividere per l' esponente delle nuove potenze, che nasceranno.

6.

Ciò posto avremo

$$\frac{d.t^r}{dx}=\frac{d.t^r}{dt}.t'$$

$$\frac{d^2.t^r}{1.2dx^2}=\frac{d^2\,t^r}{dt^2}\cdot\frac{t'^2}{2}+\frac{d.t^r}{dt}\cdot t''$$

$$\frac{d^3t^r}{1.2.3dx^3}=\frac{d^3.t^r}{dt^3}\cdot\frac{t'^3}{2.3}+\frac{d^2.t^r}{dt^2}.t't''+\frac{d.t^r}{dt}\cdot t'''$$

$$\frac{d^4\,t^r}{1.2.3.4dx^4}=\frac{d^4\,t^r}{dt^4}\cdot\frac{t'^4}{2.3.4}+\frac{d^3\,t^r}{dt^3}\cdot\frac{t'^2}{2}\cdot t''$$
$$+\frac{d^2.t^r}{dt^2}\cdot\left(t'\,t'''+\frac{t''^2}{2}\right)+\frac{d.t^r}{dt}\cdot t^{iv}$$

$$\frac{d^5.t^r}{1.2..5dx^5}=\frac{d^5.t^r}{dt^5}\cdot\frac{t'^5}{2..5}+\frac{d^4.t^r}{dt^4}\cdot\frac{t'^3}{2.3}\cdot t''$$
$$+\frac{d^3.t^r}{dt^3}\left(\frac{t'^2}{2}t'''+t'\cdot\frac{t''^2}{2}\right)+\frac{d^2.t^r}{dt^2}\left(t'\,t^{iv}+t''\,t'''\right)+\frac{d.t^r}{dt}.t^v$$

$$\frac{d^6.t^r}{1.2..6dx^6}=\frac{d^6.t^r}{dt^6}\cdot\frac{t'^6}{2\,...\,6}+\frac{d^5.t^r}{dt^5}\cdot\frac{t'^4}{2\,.\,3\,.\,4}\cdot t''$$

$$+\frac{d^4.t^r}{dt^4}\left(\frac{t'^3}{2.3}\cdot t'''+\frac{t'^2}{2}\cdot\frac{t''^2}{2}\right)+\frac{d^3.t^r}{dt^3}\left(\frac{t'^2}{2}\cdot t^{iv}+t't''t'''+\frac{t''^3}{2.3}\right)$$

$$+\frac{d^2.t^r}{dt^2}\left(t't^{v}+t''t^{iv}+\frac{t'''^2}{2}\right)+\frac{d.t^r}{dt}\cdot t^{vi}$$

&c.

7.

Osservando attentamente questi valori, per esempio il sesto, vedremo che gl' indici delle lettere t', t'' &c. presi insieme formano da per tutto 6, e contengono tutte le diverse maniere, nelle quali si può far 6 con la somma dei numeri inferiori; e questo in modo tale, che nel primo termine, ov'è $t'^6=t'.t'.t'.t'.t'.t'$, il 6 è formato dalla somma di sei numeri $1+1+1+1+1+1$; nel secondo, ov' è $t'^4.t''=t'.t'.t'.t'.t''$, il 6 è formato dalla somma di cinque numeri $1+1+1+1+2$; nel terzo, ove sono $t'^3.t'''$, $t'^2.t''^2$, il 6 è formato dalla somma di quattro numeri, cioè $1+1+1+3$, $1+1+2+2$; nel quarto il 6 è composto dalla somma di tre numeri; nel quinto da due; nel sesto finalmente da uno; e dove gl' indici sono ripetuti, cioè dove si forma una potenza dell' esponente p, il termine corrispondente è diviso per $1.2.3...p$.

8.

Verificata questa legge in una data formola, essa avrà luogo necessariamente nella formola susseguente. Poichè, se sono dati tutti i modi, nei quali con m numeri si può formare n, per dedurne i modi, nei quali con m numeri si può comporre $n+1$, conviene accrescere in quelli di una unità il più alto dei numeri componenti, ed il numero prossimamente inferiore, quando vi si trova. Ora a questa operazione si riduce la regola del n.° 5, la quale ci prescrive, che nel passaggio da una data formola alla seguente si aggiunga in ciascun termine un apice alla lettera t d' indice massimo, e a quella d' indice prossimamente inferiore al massimo; e si divida poi per l' esponente delle nuove potenze, che ne nascono.

9.

9.

Se adesso riflettiamo, che nelle formole precedenti si deve fare $x = 0$, nel qual caso t, t', t'', &c. diventano rispettivamente $b, b'\, b''$, &c., avremo in generale

$$\frac{d^p.t^r}{1.2..pdx^p} = \frac{d^p.b^r}{db^p}\cdot\frac{b'^p}{1.2...p} + \frac{d^{p-1}.b^r}{db^{p-1}}\cdot\frac{b'^{p-2}}{1.2...(p-2)}\cdot b''$$
$$+ \frac{d^{p-2}.b^r}{db^{p-2}}\left(\frac{b'^{p-3}}{1.2..(p-3)}\cdot b''' + \&c.\right) + \frac{d^{p-3}.b^r}{db^{p-3}}\left(\frac{b'^{p-4}}{1.2..(p-4)}.b^{\mathrm{iv}} + \&c.\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{d.b^r}{db}.b^{(p)},$$

ove il termine $\frac{b'^{p-3}}{1.2..(p-3)}.b''' + \&c.$ si deve intendere, che contenga tutti i prodotti corrispondenti alle diverse maniere, nelle quali si può formar p con la somma di $p-2$ numeri; e così degli altri. La formola precedente ci dà il coefficiente di x^p nel polinomio $b + b'x + b''x^2 + b'''x^3 + \&c.$ elevato alla potenza r.

10.

Sostituendo adunque i valori trovati in quello di $\frac{d^n\,\varphi\,(a + bx + b'x^2 + b''x^3 + \&c.)}{1.2\ldots\ldots ndx^n}$ avremo finalmente il coefficiente di x^n nella evoluzione della formola $\varphi.(a + bx + b'x^2 + \&c.)$ così espresso:

$$\frac{d^n\varphi.a}{1.2..nda^n}.b^n + \frac{d^{n-1}.\varphi.a}{1.2..(n-1)da^{n-1}}\cdot\frac{d.b^{n-1}}{db}.b'$$
$$+ \frac{d^{n-2}.\varphi.a}{1.2..(n-2)da^{n-2}}\left(\frac{d^2.b^{n-2}}{db^2}\cdot\frac{b'^2}{2} + \frac{d.b^{n-2}}{db}.b''\right) \qquad \text{(C)}$$
$$+ \frac{d^{n-3}.\varphi.a}{1.2..(n-3)da^{n-3}}\left(\frac{d^3.b^{n-3}}{db^3}\cdot\frac{b'^3}{1.2.3} + \frac{d^2.b^{n-3}}{db^2}.b'b'' + \frac{d.b^{n-3}}{db}.b'''\right)$$
$$+ \frac{d^{n-4}.\varphi.a}{1.2..(n-4)da^{n-4}}\left\{\begin{array}{l}\frac{d^4.b^{n-4}}{db^4}\cdot\frac{b'^4}{1.2.3.4} + \frac{d^3.b^{n-4}}{db^3}\cdot\frac{b'^2}{2}b'' \\ + \frac{d^2.b^{n-4}}{db^2}\left(b'b''' + \frac{b''^2}{2}\right) + \frac{d.b^{n-4}}{db}.b^{\mathrm{iv}}\end{array}\right\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{d.\varphi.a}{da}.b^{(n-1)}.$$

ove

ove il coefficiente del termine $\frac{d^{n-q}.\phi.\alpha}{1.2..(n-q)dx^{n-q}}$ sarà generalmente $\frac{d^q.b^{n-q}}{db^q}\cdot\frac{b'^q}{1.q}+\frac{d^{q-1}.b^{n-q}}{db^{q-1}}\cdot\frac{b'^{q-2}}{1.(q-2)}b''+\frac{d^{q-2}.b^{n-q}}{db^{q-2}}\left(\frac{b'^{q-3}}{1..(q-3)}b'''+\&c.\right)+\frac{d^{q-3}.b^{n-q}}{db^{q-3}}\cdot\left(\frac{b'^{q-4}}{1.2..(q-4)}b^{iv}+\&c.\right)\ldots$ $\ldots+\frac{d.b^{n-q}}{db}.\beta^{(q)}$.

II.

La formola ritrovata (C) è di un grandissimo uso in molte ricerche, le quali possono ridursi al ritrovamento del coefficiente di x^n nello sviluppo della funzione di un polinomio. Per darne un esempio prendiamo a cercare il differenziale n.esimo di una funzione qualunque di x nella ipotesi di dx variabile. Si consideri x come funzione di una nuova variabile t, e sia proposto di differenziare la funzione $\phi.x$ per rapporto a t. Ponendo $t+i$ in luogo di t, la funzione $\phi.x$ pel Teorema di Taylor diventerà

(1) $$\phi.x+\frac{d\phi.x}{dt}i+\frac{d^2\phi.x}{2dt^2}i^2+\frac{d^3\phi.x}{2.3dt^3}i^3+\&c.$$

Ma pel medesimo teorema la quantità x, allorchè vi si pone $t+i$ in luogo di t, si cangia in

$$x+\frac{dx}{dt}i+\frac{d^2x}{2dt^2}i^2+\frac{d^3x}{2.3dt^3}i^3+\&c.,$$

e per la medesima sostituzione la funzione $\phi.x$ diventa

(2) $$\phi.\left(x+\frac{dx}{dt}i+\frac{d^2x}{2dt^2}i^2+\frac{d^3x}{2.3dt^3}i^3+\&c.\right).$$

Dovendo pertanto essere identici i due risultati (1) e (2), sarà $\frac{d^n\phi.x}{1.2..ndt^n}$ coefficiente di i^n nella serie (1) eguale al coefficiente di i^n nello sviluppo della serie (2); il qual coefficiente ci verrà dato dalla formola (C), se vi faremo $\alpha=x$, $b=\frac{dx}{dt}$, $b'=\frac{d^2x}{2dt^2}$, $b''=\frac{d^3x}{2.3dt^3}$, &c. Trovato il valore di $\frac{d^n\phi.x}{1.2...ndt^n}$ basterà moltiplicarlo

per

per $1.2.3...ndt^n$ per ottenere il differenziale $n.^{esimo}$ della funzione $\varphi.x$ preso nella ipotesi di dx variabile.

12.

Un metodo simile a quello usato nella soluzione del problema del n.° 1 può applicarsi allo sviluppo in serie delle funzioni di polinomj di più variabili. Mi astengo dal trattenermi in una tale applicazione, la quale dopo le cose dette non può incontrare alcuna difficoltà, perchè l' unico oggetto propostomi in questa Memoria è stato quello di accennare, come senza caricarci la mente di nuovi principj e nuovi modi di considerare lo stato variato delle quantità, troviamo nel Calcolo Differenziale i sussidj necessarj alla soluzione di tutti i problemi relativi allo sviluppo delle funzioni in serie.

OP-