OSSERVAZIONI

SULLE RESISTENZE DELL' ACQUA E DELL' ARIA

Del Sig. Paolo Delanges

Ricevute il dì 6 Giugno 1806.

§. I. Riflettendo e prendendo in esame da profondo Geometra il nostro Socio, Sig. Cavalier Vittorio Fossombroni i risultati delle tante e tante sperienze fin ora instituite intorno all' urto o alla resistenza, che incontrano i corpi in movimento nell' acqua o nell' aria, non che le ipotesi e le teorie immaginate per ispiegarne e fissarne le regole, conobbe ben a ragione essere necessario d' isolatamente sperimentare sull' influenza in tali resistenze, palesata dagli sperimenti, e sostenuta da' più sensati raziocinj „ „ della maggior' o minore facilità con cui il fluido resistente o „ urtante passa dalla parte anteriore alla posteriore del solido. „ Pervenne esso in fatti al sagace suo divisamento cogli sperimenti ch' espose nell' ubertosissima sua Memoria *Della resistenza e dell' urto* ec. inserita nel Tom. IX degli Atti nostri, e da' quali conchiuse, che la maggior' o minore facilità con cui le molecole „ fluide (dipendentemente dalla pressione delle superincombenti ad esse) passano dall' anterior parte del solido alla poste- „ riore, influisce significantemente nelle intensità delle resisten- „ ze o degli urti dei fluidi „ Proprietà idrostatica cui serve inoltre, come fa osservare il prelodato Autore, a dimostrare de' fenomeni singolari, ed a discutere delle importanti teorie idrauliche.

§. II. Le più recenti e grandiose sperienze intraprese per ordine del Governo in Francia sulla resistenza particolarmente dell' acqua, sono certamente quelle dirette dai tre illustri Geometri li Signori d' Alembert, il Marchese De Condorcet, e l' Abate Bossut

(*nouv. Exp. sur la résist. des fluides ann.* 1777), e le altre pure dirette dal chiarissimo Signor Cav. Du Buat (*Princip. d'Hydraul. &c. ann.* 1786). All' accennata proprietà pertanto deggiono attribuirsi le varietà de' risultati in dette sperienze fatte, per conoscere le leggi seguite dalla suddetta resistenza, sì riguardo alla velocità del corpo in moto, che alla grandezza della superficie urtante o urtata, siccome pure che il valore assoluto di essa dipender debba non solo dalla faccia anteriore del corpo, ma eziandio dalla posteriore e dalle laterali, e in una parola dall' intiera sua figura, e dall' essere più o meno immerso: nullameno il Signor Cav. Du Buat opina che fino ad un dato limite sieno incomputabili le variazioni de' risultati provenienti dalle diverse indicate circostanze di figura e d'immersione, sì che non esita a conchiudere che le resistenze egualmente „*pour les petites vitésses dans les corps flottans, & pour les vitésses jusqu'à 3 pieds dans les corps plongés . . . sont très sensiblément proportionnelles aux quarrés des vitésses*„ (*Op. cit. Tom. II. pag.* 225).

§. III. Ma volendo non trascurare la scoperta idrostatica proprietà (§. I.), è manifesto che se per determinare la legge delle velocità, basta fare, per esempio, correre uniformemente nell'acqua con differenti gradi di velocità uno stesso solido parallelepipedo ad una costante immersione; per conoscere quella della grandezza delle superficie urtanti, converrebbe sottoporre all' esperienza parecchj solidi simili, come de' cubi, delle sfere ec., i di cui lati e diametri procedessero in data ragione, e che similmente immersi venissero mossi nell' acqua colla stessa uniforme velocità, onde cognita per esperienza la resistenza assoluta d' un corpo, poter dedurre quella d' un corpo simile di qualsivoglia grandezza e mosso con qualsivoglia altro grado di velocità. Potrebbe anche accadere, che l' effetto della minor facilità sull' intensità della resistenza dell' acqua, ne' corpi simili, derivante dalla maggior lunghezza e larghezza differisse di quantità trascurabile da quello prodotto dalla maggior facilità per la maggior' immersione del solido; e che perciò i canoni singolarmente conchiusi dalle celebri sperienze fatte a Parigi del 1777 fossero suffi-

cien-

cienti a somministrare risultati prossimi a' veri nell'applicazione di essi alle pratiche. Su detti canoni pertanto siami lecito di fare le seguenti osservazioni.

§. IV. E primieramente osservo che non si è con certezza fissato l' istante, ovvero il punto in cui nella linea del suo movimento il corpo galleggiante entrava in moto uniforme, su di che sta affidata singolarmente la sicurezza de' risultati in tali sperimenti e le conseguenze da dedurne. E vaglia il vero, supposto, che mezzi minuti secondi 17,08 sia il tempo in cui il galleggiante tirato dal peso di 12 marchi percorre piedi 20 con moto equabile nell' acqua, e che in vece del tempo 12",45 (come si vede nella Tav. I. Cap. II. pag. 138. op. cit.) fosse soltanto 12",00 quello in cui lo stesso galleggiante percorresse li suddetti 20 piedi tirato dal peso di 24 marchi, si ricaverebbe che l' esperienza conferma la legge della resistenza proporzionale al quadrato della velocità dall'antica teoria voluta, mentre il quarto proporzionale a $\overline{1200}^2$, $\overline{1708}^2$, ed a 12 marchi, si è marchi 24,31, che differisce di quantità trascurabile dal peso di 24 marchi adoperato nell' esperienza, in paragone del peso di marchi 22,58 che risulta nella supposizione del tempo 12",45, come s' è di sopra accennato. Se così fosse avvenuto, il che diventa sempre più calcolabile riguardo a' maggiori pesi motori posti in cimento (Tav. sopraind.), non sarebbe d' ammettersi il canone *qu'à la rigueur la résistance augmente en plus grand rapport que le quarré de la vitésse* (Reflex. §. 9. pag. 147), e tanto più che non si sono eseguiti sperimenti con velocità significanti.

§. V. Ma supposto che non avesse luogo l' esposta correzione ne' pesi motori, io reputo però che convenisse depurarli dalle resistenze dell' attrito, dell'aria, e da quella che incontrava il corpo galleggiante dall' affollamento dell' acqua, chiamato da' Francesi *remou*, che costantemente nel suo movimento si conservava alla sua faccia anteriore, prima di passare a conchiudere dalle relazioni loro le leggi ricercate. Le due prime resistenze non sono state ommesse in alcuni casi; della terza poi non se n' è fatto conto veruno, quantunque riconosciuta a segno di riferire appunto

a questa il già menzionato canone nell' antecedente paragrafo. Per computare pertanto tali depurazioni si ponga, com'era di fatto, che 31 : 2 sia la ragione del raggio delle girelle impiegate nel meccanismo delle sperienze, aumentato di quello della cordicella che le attorniava, al raggio del loro perno, e 5 ad 1 la ragione della pressione alla resistenza dell' attrito che soffrivano le girelle intorno a' loro perni. Chiamata x la resistenza che incontra il corpo galleggiante nel moversi equabilmente per l' acqua con qualsivoglia grado di velocità, si conoscerà per le leggi delle resistenze degli attriti de' solidi da me investigate nella *Meccanica pratica* pubblicata in Verona l' anno 1783, nella *Nuova discussione* ec. esposta nel tom. VI della Biblioteca fisica in Pavia l' anno 1783, e nella Memoria sul *Moto concreto* ec. nel Tom. III. degli Atti nostri, che il peso motore nel disparto usato è generalmente espresso dalla seguente formola (A)

$$x + \frac{2}{31} \cdot \frac{1}{5} \left(2x + \frac{2}{31} \cdot \frac{1}{5} \cdot 2x\sqrt{2} \right) \ldots \text{(A)}$$

oppure dalla (B) riducendo la (A) a minimi termini

$$\frac{123281}{120125} \cdot x \ldots \text{(B)}$$

Paragonando quindi la formola (B) al peso motore d' un dato sperimento si svilupperà il valore d' x, cioè la resistenza che in esso incontrava il corpo galleggiante depurata da quella degli attriti. La resistenza poscia che oppone al galleggiante il corpo d' acqua che se l' innalza alla prora, io la determino sul principio fondamentale dell' Idrostatica, avvegnacchè entrato che sia il galleggiante in movimento equabile, mantiensi l'innalzamento d' acqua alla di lui prora costantemente lo stesso, e ciò mediante l' ammirabile sostituzione a quella quantità d' acqua innalzata che lungo le laterali sponde ricorre dietro esso, della nuova acqua che dinanzi alla stessa prora ne ripara con precisione la perdita. Perciò dicendo a l' altezza media dell' innalzamento d' acqua alla prora del galleggiante ed l la lunghezza di essa, ed essendo inoltre libbre 70 il peso d' un piede cubo d' acqua oppure 140 marchi, cioè il peso d' un' oncia cuba d' acqua $\frac{140}{1728}$ ovvero $\frac{35}{432}$ marchi; si

ot-

otterrà nella formola (C) il valore della pressione, oppure la resistenza che soffre il galleggiante in virtù dell' innalzamento d'acqua alla di lui prora

$$\text{marchi } \frac{35}{864} \cdot a^2 l \ldots \text{(C)}$$

§. VI. Non tenendo conto ora della resistenza dell'aria, essendo essa picciolissima rispetto a quella dell' acqua ne' gradi di velocità con cui si movevano i galleggianti, come fanno considerare gli Autori medesimi (§. 31. pag. 170. 171. op. cit.), ed applicando le formole (B) (C) ad un esempio, scelgo le due sperienze VIII. e XVI. eseguite col secondo battello. Così calcolando, si scopre, che nella prima sperienza il peso motore di 16 marchi depurato dagli attriti, e dalla pressione dell' innalzamento d'acqua alla prora, si riduce a marchi 13,64, e quello di marchi 43 della seconda a marchi 35,97. Ma il tempo per iscorrere gli ultimi 20 piedi impiegato dal galleggiante nella sperienza VIII. è 21",11; ed il tempo pegli ultimi 20 piedi nella sperienza XVI è 12",59: sarà dunque la ragione delle resistenze opposte dall' acqua al battello rappresentata dal numero 2,63, e quella de' quadrati delle velocità dal numero 2,81: numeri che differiscono della quantità $\frac{18}{100}$, e che diminuirebbesi non trascurando anche la resistenza dell' aria, che non può indurre a non istabilire che le resistenze seguano la ragione de' quadrati delle velocità senza l' accennata modificazione (§. IV.).

§. VII. Depurati i pesi motori nell' indicata guisa, possono concludersi almeno prossimamente per le pratiche i seguenti canoni, come conclusero pure gli Autori delle note sperienze (*conclusion générale &c. pag.* 174), non computando più, forse come di effetto non computabile, la modificazione alla legge delle velocità da loro riconosciuta (§. IV.), intorno all' urto ed alla resistenza perpendicolare e diretta, cioè; 1° che proceda essa in un fluido indeterminato e per ogni senso libero in ragione della piana superficie urtata; 2° che segua la ragione del quadrato della velocità non variando di grandezza la superficie; e 3° che la sua in-

intensità equivalga al peso d'una colonna dello stesso mezzo, che abbia per base la superficie piana esposta all' urto, e per altezza quella che compete alla velocità con cui si fa l' urto medesimo. Ma se le due prime leggi non vengono con la desiderabile approssimazione confermate come dalle moderne così dalle antiche sperienze, come specialmente sono le reputate del Signor Cavalier De Borda (*Mem. de l'Acad. ann.* 1763. 1767.), molto più sono discordi le sentenze teoriche ed i risultati sperimentali riguardo alla terza, mentre chi conchiuse, che l' altezza della colonna fluida equivalente all' intensità della resistenza sia la semplice dovuta alla velocità, chi la doppia, e chi, che tale altezza sia maggiore della prima e minore della seconda. Similmente avvenne dell' urto o della resistenza obbliqua, avendo già riconosciuto i tre Geometri Francesi, come riconobbe il precitato Signor Cav. De Borda, che non segue essa nemmeno prossimamente la legge del quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, come sostiensi dall' ordinaria teoria. Li Signori Marchese De Condorcet ed Abate Bossut anzi dalle nuove sperienze che fecero su questo particolare (*Mem. del' Acad. des Scien. ann.* 1778) dedussero che le resistenze obbliqne procedono bensì nella ragione del quadrato del seno dell' angolo d' incidenza, ma aumentato della potenza 3 ¼ del coseno dell' angolo medesimo. Quivi però cade in acconcio di trovare, depurando i risultati sperimentali come ho indicato (§.V.), la relazione tra la resistenza che soffre la superficie d' un cilindro e la sua sezione per l' asse, movendosi parallelamente ad esso ed interamente immerso nell' acqua, onde conoscere come feci degli altri canoni, anche di questo della resistenza obbliqua il grado della sua convenienza colla comune teoria. Le due sperienze, che fanno all' intento, sono le XXVI. e CLXXXIX; come che in esse possono considerarsi dotati i pesi motori o sieno i galleggianti della stessa velocità. Quindi riducendosi il peso motore della prima sperienza da 22 a mar. 19,39; e quello della seconda da 12, a 10,85; sarà la resistenza della semisuperficie cilindrica a quella del piano che passa per l' asse del cilindro in ragione de' numeri 1085, 1939, che

dan-

danno la ricercata relazione nel numero 1,79 prossimamente eguale al numero 1,82 che risulta dalla ragione 11 a 20 determinata per lo stesso solido dalle già ricordate sperienze del Cav. De Borda.

§. VIII. Per risolvere ora teoricamente il problema nella comunemente abbracciata ipotesi, che le antecedenti molecole fluide immediatamente dopo l'urto, o contro una superficie immobile, o dalla stessa in movimento urtate passino dall' anteriore alla posterior parte senza impedire nè modificare l'urto delle successive; rappresenti il cerchio ABCD la sezione perpendicolare all'asse del dato cilindro, cui nel suo movimento incontra il fluido nella direzione DF perpendicolare al verticale diametro AC, e sia l'ordinata fd infinitamente vicina alla FD, e si unisca il raggio ED. Si dica poscia $AF = x$, $AC = 2r$; sicchè $Ff = dx$, $FC = 2r - x$, ed $FD = \sqrt{(2rx - x^2)}$. E poichè l'elemento superficiale del piano che passa per l'asse all'elemento corrispondente della superficie cilindrica, avendo amendue la stessa lunghezza del cilindro, stanno in ragione di Ff a Dd, ed incontrerebbero o sarebbero amendue urtati, supposti separatamente in moto, dallo stesso numero di filamenti fluidi, l'urto dunque contro essi elementi, secondo il principio dinamico universalmente noto, seguirà la ragione del seno dell'angolo secondo cui è percosso; e perciò esprimendo dx l'impulsione perpendicolare che soffre l'elemento Ff del piano che passa per l'asse, il quarto proporzionale ad r, $\sqrt{(2rx - x^2)}$, e dx, cioè $\frac{1}{r}\, dx\sqrt{(2rx - x^2)}$ sarà l'impulsione obbliqua sofferta dall'elemento Dd della cilindrica superficie; e siccome l'impulsione del fluido contro ciascun elemento Dd esercitasi in direzione ad esso perpendicolare, supponendosi, com'è di comune consenso, sferiche le molecole componenti ogni suo filamento; così indicata da DG presa nel raggio DE la detta impulsione e compiuto il rettangolo Hh, verrà essa divisa nelle due DH, Dh, per la teoria delle forze composte, ed ogni elemento Dd ha il suo elemento corrispondente distante tanto dall'estremità A del diametro AC, quant'è desso dall'altra C: quin-

quindi è evidente che ogni impulsione Dh ne ha una eguale e contraria, e che non agiscono contro la superficie cilindrica ADC che le sole impulsioni DH. Essendosi trovata pertanto l'impulsione $DG = \frac{1}{r} dx\sqrt{(2rx-x^2)}$, si avrà nel quarto proporzionale ad r, $\sqrt{(2rx-x^2)}$, e ad $\frac{1}{r} dx\sqrt{(2rx-x^2)}$, oppure al quadrato del seno tutto r^2, al quadrato del seno dell'angolo d'incidenza $2rx-x^2$, ed a dx rappresentante la resistenza diretta contro l'elemento Ff, si avrà dico in $\frac{2rxdx-x^2dx}{r^2}$, cioè nell'integrale $\frac{x^2}{r} - \frac{x^3}{3r^2}$ l'impulsione contro la porzione di superficie cilindrica AD, e posto $2r$ in vece d'x, si scoprirà che l'impulsione contro la semisuperficie cilindrica esposta all'urto a quella che incontra il piano che passa per l'asse ha la ragione di 2 a 3, e perciò dal numero 1,50 viene definita la relazione tra le dette due impulsioni o resistenze. Differisce troppo tale relazione teorica dalla sperimentale, onde ammettere che l'una e l'altra vicendevolmente si confermino: nullameno piuttosto che considerare incerti in questo caso i risultati sperimentali, attribuirei io il difetto alla teoria, come appoggiata all'ipotesi conveniente unicamente all'urto de' solidi, su cui vuolsi egualmente fondare quella dell'urto de' fluidi.

§. IX. I primi Geometri che si occuparono dell'argomento di cui trattasi, e ch'è tra più difficili ed importanti della Fisico-Matematica, rivolsero le prime loro meditazioni ed esperienze sulla resistenza dell'aria, scegliendo il corpo di figura sferica a preferenza d'ogni altro. Newton giudicò potersi stabilire che la resistenza dell'aria contro un corpo sferico, com'è la palla del Cannone o del Mortajo, è uguale al peso d'una colonna cilindrica d'aria, di cui la base sia il cerchio massimo della palla, e l'altezza la metà di quella da cui un corpo dovrebbe cadere nel vuoto, per acquistare la velocità che ha in un punto dato della linea che descrive; di maniera che la resistenza incontrata dalla semisuperficie sferica sia la metà di quella che incontrerebbe il cerchio

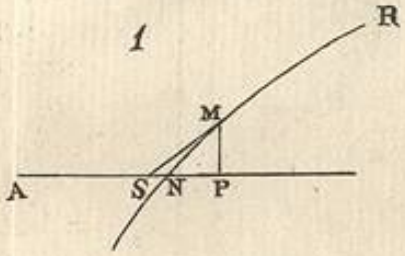
chio massimo della stessa sfera. Robins ha instituite appunto delle sperienze singolarmente collo scopo di conoscere le leggi della resistenza de' projetti, e non parlando delle utili osservazioni che fece riguardo all' artiglieria, mi fermerò soltanto ad esaminare se l' esperienza da lui fatta, e da cui risultò che una palla di ferro di 12 libbre di peso, mossa colla velocità di 25 piedi per secondo, incontrava una resistenza equivalente al peso di mezz' oncia, corrisponda alla Newtoniana sentenza. E poichè in misure Parigine il diametro della palla di ferro di 12 libbre di peso è poll. 4,17, lo spazio percorso dalla gravità terrestre in un minuto secondo, piedi 15,10, e lo spazio percorso dalla palla nell'esperienza piedi 23, 50, cioè li suddetti 25 di Londra; il quarto proporzionale ai quadrati 30,20 : 23,50, ed a 15,10, cioè piedi 9.14 è l'altezza da cui la palla dee cadere per acquistare la velocità di piedi 23 , 50 per secondo . Essendo poi il cerchio massimo di essa once quadrate 13, 64, e la metà della detta altezza once 54,84 : dunque secondo Newton 13, 64 . 54, 84, vale a dire il peso d' once cube 748 d'aria dee equivalere alla resistenza che essa oppone alla palla ; ma il peso d' un piede cubico d'aria ossia di once cube 1728 è once 1, 32 : dunque il peso della colonna d'aria equivalente alla resistenza della palla è once 0,57, cioè prossimamente la mezz' oncia trovata nell' accennata sperienza del Robins . Per accertarsi però di tale approssimazione farebbe d' uopo depurare il risultato sperimentale dalle straniere influenze che concorrevano ad alterare il valore isolato della sola resistenza dell' aria, dipendenti dalla compostissima macchina con cui venne l' esperienza eseguita . Tale dubbietà tanto più dee valutarsi , sapendosi che le sperienze pure sulla resistenza dell' aria del Cav. De Borda lo condussero a determinare non già la ragione di 2 a 4 tra la resistenza della semisuperficie sferica ed il suo cerchio massimo, ma quella di 2 a 5 sensibilmente minore .

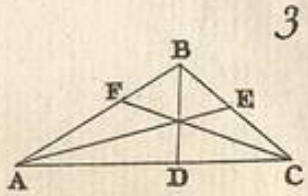
§. X. Egli è vero che 2 a 4 è pure la ragione che dà la solita teoria, come ritrovò con tutta la sagacità e dottrina il P. Gregorio Fontana (*Disquisitiones Physico - Mathematicae &c. pag.* 323.) paragonando la resistenza diretta contro la zona elemen-

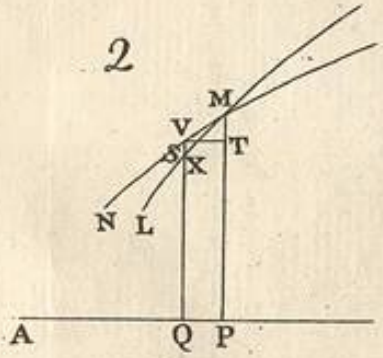
tare che nasce dall'elemento F*f* alla resistenza obbliqua che soffre l' elemento sferoidale, che nasce dall' elemento D*d* nella rivoluzione del semicerchio BCL che genera la sfera, girandosi intorno all'asse BL. Nulla meno io non sono di parere, che la stessa ragione possa valere egualmente per la resistenza della sfera, sì in movimento nell'acqua, che nell'aria. La diversa sostanza, tessitura, e figura degli elementi ne' detti fluidi, che fanno, che, fisicamente parlando, incompressibile sia il primo, e compressibile ed elastico il secondo, deggiono altresì influire non solo nell' intensità, come vorrebbe Newton, ma eziandio nell'esercitare il loro urto o resistenza contro un solido in essi in movimento. Quindi può essere egualmente vero che nell'acqua, poste sempre pari le restanti circostanze, 1°: segua la resistenza la ragione delle superficie, e che s'aumenti in maggior ragione della loro estensione nell' aria, come sperimentò il Cav. De Borda, e recentemente il Signor Riccardo Lowell Edgwoorth (Trans. filosof. della Soc. R. di Londra Vol. 73); 2°: che sotto gradi di velocità significanti proceda la resistenza in maggior ragione del quadrato della velocità nell' acqua, e che segua quella del quadrato nell' aria, come sperimentò lo stesso Cav. De Borda, o che s'alteri pure nello stesso fluido coll' aumentarsi della velocità, ma sotto gradi diversi, e con differenti proporzioni come sperimentò il Robins; 3°: e che per ultimo la resistenza obbliqua si allontani più nell' acqua che nell'aria dalla ragione del quadrato del seno dell'angolo d' incidenza: così la teoria pel cilindro dà la ragione di 2 a 3 (§ VIII), e le sperienze Parigine sull'acqua danno la ragion minore di 1085 a 1939 (§. VII.); mentre la ragione ricavata dalla teoria, come s' è superiormente accennato, riguardo alla sfera, alle sperienze di Newton e di Robins fatte sull' aria con fisica approssimazione corrisponde (§. IX.). Dalle sperienze però sulla resistenza dell' aria del Cav. De Borda, risulta che quella del cilindro è di 11 a 20, e quella della sfera di 2 a 5, amendue minori delle suddette ragioni teoriche. Ma ormai sonosi moltiplicate a grado le sperienze su questo soggetto, e sono così discordi i risultati e le dedotte conseguenze che diviene asserto assai malagevole l'af-

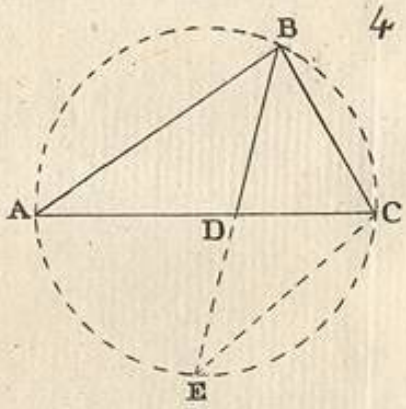
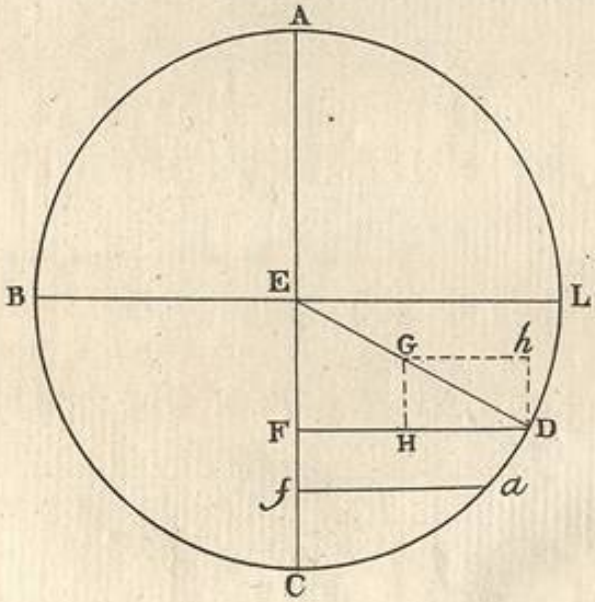
l'affacciarsi ad esso. Non può però non convenirsi che non si abbiano acquistati de' lumi, e de' limiti sufficienti utili in alcune pratiche, e sopra tutto, il che deesi molto valutare, che gli studj fatti abbiano fatto conoscere, che la resistenza o l'urto che soffrono i solidi ne' fluidi dipende non solo dalla loro faccia anteriore, come singolarmente voleva Newton, ma dalla complessiva loro figura e grandezza, o dall'essere in essi più o meno immersi, alle quali circostanze appunto io giudico doversi riferire le contraddizioni, che riscontransi ne' risultati sperimentali, oltre al non essersi forse questi depurati dalle alterazioni dipendenti dagli usati meccanismi, e dal supporre que' che si ottennero dalle sperienze in un fluido indistintamente all'altro applicabili.

Memoria II.









Memoria Delanges p. 171.