SULL' OPINIONE
DELLE PIOGGIE DE' SASSI DAI VULCANI LUNARI
DISQUISIZIONE MATEMATICA

Del P. D. Pietro Cossali

Ricevuta il dì 6 Maggio 1806.

Che la luna nostro satellite, oltre a quegli influssi, che segretamente, a pretesa di alcuni, esercita sulle piante delle nostre campagne, su gli animali di nostro servigio, e su i corpi nostri medesimi, abbia eziandio la podestà di flagellarci con pioggie, o piuttosto grandini di sassi! Così è, così è si echeggia tra Alemagna, e Francia, ed anche in Italia. Ed il celebratissimo Fisico, e Chimico Vauquelin, tra gli altri, dopo avere esaminate le estrinseche qualità, e con diligente analisi ricercati i componenti dei sassi della sì decantata pioggia di sassi nei contorni dell' Aquila in Francia, pronuncia, che *l' opinione, che li fa venir dalla Luna, comunque strana ella sembri, è forse la meno irragionevole, e se non possono darsene prove dirette, nemmeno se le può opporre un ben fondato ragionamento*. Trascrivo le parole della versione italiana del Chiarissimo nostro Collega Sig. Ab. Amoretti nel Tomo XXII degli *Opuscoli scelti* stampati in Milano, non avendo il *Journal des Mines*, nel numero 76 del quale egli fa sapere essere inserita la Memoria del Sig. Vauquelin. Importa molto il veder con chiarezza, se l' ideare de' sassi da lunari vulcani lanciati in terra, cosa in realtà ella si sia, cui, giusta l' asserto dal Vauquelin, fondato ragionamento oppor non si possa. La disquisizione ha due parti: matematica l' una, fisica l' altra, ed è d' uopo, che dalla matematica incominci, dalla quale la fisica deve trarre appoggio, e lume. Mi accingo io quì pertanto alla parte matematica, e premetto i seguenti

Da-

Dati.

1.° Il raggio medio della terra, che chiamerò R è di tese 3269511 — La Lande Astr. § 1703 —. Dunque di Piedi Parigini 19617066.

2.° Dalle esperienze istituite intorno alle vibrazioni del Pendolo all' Equatore risulta, che la discesa ivi di un grave in 1'' di tempo, è di Piedi 15,0515.

3.° Il raggio medio della Luna, che segnerò con r è $\frac{3}{11}$ del raggio medio della Terra — La-Lande § 1398: cioè $r = \frac{3}{11}$ R.

4.° La massa della Luna è $\frac{1}{58,6}$ della massa della Terra - La-Place Méchanique Céleste 2ª Partie. Liv. VI. Chap. X. §. 30. pag. 108, tom. 2ª.

5.° La distanza media tra i centri della Terra, e della Luna è = 60 R.

PROBLEMA I.

Determinare il rapporto della densità media della Luna alla densità media della Terra presa per unità.

Essendo le densità in ragione diretta delle masse, ed in ragione inversa dei volumi, sarà la densità media della Luna alla densità media della terra nella ragione diretta di $\frac{1}{58,6}$: 1, e nella inversa di $\left(\frac{3}{11}\right)^3 . R^3 : R^3$ o sia di $\left(\frac{3}{11}\right)^3$: 1 : dunque nella composta di $\frac{1}{58,6} \times \left(\frac{11}{3}\right)^3$: 1, che trovasi, in frazione decimale uguale a 0,8412337 : 1.

PROBLEMA II.

Ritrovare il valore della gravità assoluta media terrestre.

La caduta di un grave per piedi 15,0515 in 1" di tempo all' Equatore non presenta l' intero valore della gravità in quel luogo, ma sì l'effetto solo dell' eccesso di esso valore sopra la forza centrifuga nascente dal rotamento della terra sul suo asse, e tanto ivi maggiore, che altrove, quanto il raggio del cerchio equatoriale è del raggio di ogni parallelo maggiore. E l' aggiugnere alla misura di Piedi 15,0515, che agli occhi manifestasi, quanto con contraria azione detrae colà la forza centrifuga, basta bensì a rilevare l' assoluto valore della gravità all' Equatore; ma non può tale assoluto valore aversi per comune a tutti i punti della terra, poichè essendo la figura della terra sferoidica, a diversi punti, diversamente dal terrestre centro distanti, diverso è il valore assoluto della gravità. Di tutte queste differenti gravità pertanto cercasi la media: quella cioè, che si avrebbe sopra la terra in ogni dove, conformandosi essa in una perfetta sfera omogenea, e lasciando di rotare sul suo asse.

Riducendo al caso la formola del La-Place, (*Méc. Cel. Part.* Ire *Liv.* III. *Chap.* III. § 24. *tom.* 2.^{d} *pag.* 72), la cercata gravità assoluta media terrestre stà alla gravità apparente all' Equatore : : 1 : $1 - \frac{13}{3.4.289,261}$: rapporto, che si riduce a quello di 347113 2:3458132. Ma per quello, che, ad onta della forza centrifuga all' equatore apparisce di gravità, la caduta ivi di un corpo in 1" di tempo è di Piedi 15,0515, come si è detto; dunque $\frac{347113 2}{3458132} \times 15,0515 = 15,108082$ sarebbero i piedi, per i quali il corpo in 1" discenderebbe in virtù della gravità assoluta media. E perchè poi in fine di tale discesa avrebbe una velocità, per la quale equabilmente in 1" percorrere potrebbe uno spazio doppio, cioè lo spazio di Piedi $(15,108082) \times 2$; quindi da tal velocità in 1" di tempo generata estimando la terrestre gravità assoluta media, che chiameremo G, si avrà $G = (15,108082) \times 2$.

PRO-

PROBLEMA III.

Determinare la gravità assoluta media alla superficie media della Luna; ad una distanza dal suo centro uguale al raggio della terra; ed a qualunque altra distanza.

Avendo segnato per R il raggio medio della terra, per r il raggio medio della Luna, per G la gravità assoluta media terrestre, si denoti per g la gravità assoluta media alla superficie della Luna, e per $\frac{1}{m}$ il rapporto della massa lunare alla massa terrestre pigliata come unità: sarà per la legge composta dell' attrazione in diretta semplice ragione della massa, e duplicata inversa della distanza, $G : g :: \frac{1}{R^2} : \frac{1}{mr^2}$; onde $g = \frac{GR^2}{mr^2} = \frac{GR^2}{m\left(\frac{3}{11}\right)^2 R^2} =$

$\frac{121G}{9 \times 58,6} = 0,229427G = 6,932384$ Piedi Parigini

A distanza $= R$ dal centro della Luna sarà evidentemente l' attrazione lunare $= \frac{G}{m}$

Ed a qualunque altra distanza yR sarà $= \frac{GR^2}{m(yR)^2} = \frac{G}{my^2}$

PROBLEMA IV.

Nella retta di distanza dei centri della Terra e della Luna trovare il punto, nel quale un corpo verrebbe ugualmente attratto dalla Terra e dalla Luna. Dicasi

kR la distanza dei due centri, terrestre, e lunare,

yR la distanza del punto delle uguali attrazioni dal centro della Luna

$(k-y)R$ la sua distanza dal centro della terra.

Sarà l'attrazione della Luna sul corpo in tal punto $= \frac{G}{m(yR)^2}$, e l' attrazione della terra $= \frac{G}{(k-y)^2R^2}$: e dovrà essere $\frac{G}{my^2R^2} = \frac{G}{(k-y)^2R^2}$,

$\frac{G}{(k-y)^2R^2}$, donde ricavasi $y^2 + \frac{2ky}{m-1} - \frac{k^2}{m-1} = 0$, e quinci $y = k \times \frac{-1+\sqrt{m}}{m-1} = 60 \times \frac{-1+\sqrt{58,6}}{57,6}$, essendo per il Dato 4.° $m = 58,6$, e per il Dato 5.° $k = 60$, ed in ultimo computo $y = 6,932358$, e per conseguenza $k - y = 53,067642$. Per la qual cosa manifestasi; che il punto di equilibrio delle due opposte attrazioni della Luna, e della Terra sta a 6,932358 R dal centro della Luna, ed a 53,067642 R dal centro della terra. Sia in avvenire $6,932358 = h$; $53,067642 = H$.

PROBLEMA V.

Posto, che da un vulcano della Luna situato ad una data distanza dal suo centro sia scagliato nella direzione della linea, che da quel centro stesso viene al centro della terra, un sasso con la velocità u, determinare la espressione della velocità del sasso medesimo a qualunque punto del viaggio lungo la detta linea, considerando il continuo conflitto delle due opposte attrazioni, quinci della terra, di là della Luna, l'una continuamente crescente, l'altra continuamente decrescente in ragione duplicata inversa della distanza pel viaggio diminuita verso il centro della Terra, ed accresciuta dal centro della Luna.

Sia aR la distanza del vulcano, o del punto di scagliamento dal centro della Luna

xR il viaggio dal sasso già fatto

$(x+a)$ R per conseguenza la sua distanza nel dato istante dal centro della Luna:

Sarà l'attrazione della Luna sul sasso in tale istante $= \frac{GR^2}{m(a+x)^2R^2}$; e sarà l'attrazione della Terra nell'istante medesimo $= \frac{GR^2}{(k-a-x)^2R^2}$, onde sarà la forza sollecitante il sasso

$$= \frac{G}{(k-a-x)^2} - \frac{G}{m(a+x)^2}$$

Si

Si dica V la velocità, che in tale istante, ed a tal punto di viaggio il sasso trovasi avere;
e si dica $d(x\mathrm{R})$ l' aumento elementare del viaggio

Per la formola Galileana sarà

$$\mathrm{V}d\mathrm{V} = \frac{\mathrm{GR}dx}{(k-a-x)^2} - \frac{\mathrm{GR}dx}{m(a+x)}$$

ed integrando, $\frac{1}{2}\mathrm{V}^2 = \frac{\mathrm{GR}}{k-a-x} + \frac{\mathrm{GR}}{m(a+x)} + \mathrm{Cost.}$

La costante deve determinarsi dalla condizione, che il sasso sia dal lunare vulcano scagliato con la velocità u, cioè nel principio del viaggio abbia la velocità u. Dunque fatto $x = 0$, deve porsi $\mathrm{V} = u$, con che si ha

$$\mathrm{Cost.} = \frac{1}{2}u^2 - \frac{\mathrm{GR}}{k-a} - \frac{\mathrm{GR}}{am}.$$

E quindi per generale completa formola della velocità del sasso a qualunque punto del suo viaggio nella linea dal centro della Luna al centro della Terra risulta

$$\mathrm{V} = \sqrt{\left(u^2 + \frac{2\mathrm{GR}}{k-a}\cdot\frac{x}{k-a-x} - \frac{2\mathrm{GR}}{am}\cdot\frac{x}{a+x}\right)}$$

PROBLEMA VI.

Determinare quanta esser debba la velocità u dal vulcano lunare al sasso impressa nello scagliamento, onde il sasso medesimo soggetto alle due contrarie attrazioni della Luna, e della Terra arrivar possa al punto del loro equilibrio.

Vi arrivi, e perduta tutta la velocità sia costretto ad ivi fermarsi, bilicato tra Luna e Terra. Sarà dunque $\mathrm{V} = 0$, fatto $a + x = h$, essendo h (vedi in fine del Prob. IV) il numero de' raggi terrestri tra il centro della Luna, ed il punto dell' uguaglianza delle opposte attrazioni della Luna, e della Terra. Per lo che si avrà

$$\sqrt{\left(u^2 + \frac{2\mathrm{GR}}{k-a}\cdot\frac{h-a}{\mathrm{H}} - \frac{2\mathrm{GR}}{am}\cdot\frac{h-a}{h}\right)} = 0, \text{ donde}$$

$$u = \sqrt{\left(-\frac{2\mathrm{GR}}{k-a}\cdot\frac{h-a}{\mathrm{H}} + \frac{2\mathrm{GR}}{am}\cdot\frac{h-a}{h}\right)}.$$

Ipo-

Ipotesi.

A determinare u bisogna assegnare un valore ad a, che nel Prob. V si è presa a dinotare la frazione di R, della quale il punto dello scagliamento del sasso dista dal centro della Luna. È quistione tra i Naturalisti intorno al sito dei focolari de' vulcani. Hamilton sostiene essersi a partito ingannati quelli, che pretesero generalmente stabilire, che ardano alla sommità, o pure al mezzo per lo meno delle montagne; e dalle sue osservazioni sul Vesuvio, su tutta la estensione dei campi Flegrei, su i tremuoti della Calabria, su l' Etna, sul vulcano di Stromboli, sul sorgimento delle isole Eoliche accumula prove per dimostrare, che i focolari vulcanici si trovano piuttosto profondi sotto terra, e persino sotto il fondo del mare. Prendendo un medio, non si potrebbe condannare il porre i focolari vulcanici terrestri alla superficie media della terra. E similmente si concederà il porre per un medio i focolari vulcanici lunari alla superficie media della Luna, e quindi alla distanza $\frac{3}{11}$ R dal centro della Luna medesima, con fare $a = \frac{3}{11}$. Ed è ben vero osservarsi nel lunar globo delle altissime montagne, che giusta l' Evelio si elevano all' altezza di $\frac{1}{13}$, e giusta il Galileo sino di $\frac{1}{10}$ del lunare semidiametro. Ma chi asserirà, che quelle più alte lunari montagne sieno le sole vulcaniche, ed abbiano i focolari loro alla cima, alla metà dell' altezza, piuttosto, che alla radice, o sotto? E se pure li avessero alla metà dell' altezza loro, la frazione da aggiungere a $\frac{3}{11}$ sarebbe, dietro il computo del Galileo $= \frac{3}{11.20} = \frac{3}{220}$, e dietro il computo dell' Evelio $= \frac{3}{11.26} = \frac{3}{286}$, e nulla più. Tutto insieme pertanto considerato in argomento massimamente, che non esige minutezza, mi cre-

credo permesso il supporre $a = \frac{3}{11}$, lo che riesce assai comodo.

Ciò supposto, per effettuare la determinazione della velocità u incomincio dal cercare i logaritmi dei due fattori costanti $\frac{2GR}{k-a}$, $\frac{2GR}{am}$, il primo de' quali segno per ω, il secondo per φ, tornando bene averli a parte, occorrendone frequente uso ne' problemi seguenti.

Or essendo per il dato 1° $R = 19617066$; per il Prob. II $G = 30,216164$; per il Probl. III $m = 58,6$; per il Dato 5°, e per il Probl. IV $k = 60$; per l'ipotesi $a = \frac{3}{11}$, e perciò $k - a = 60 - \frac{3}{11} = 60, -0,272727 \ldots = 59,7272727 \ldots$ si trova

Log. R	= 7,2926332	Log. 2GR	= 9,0739026
Log. G	= 1,4802394	Log. a	= 9,4357286
Log. 2	= 0,3010300		9,6381740
Log. 2GR	= 9,0739026	Log. m	= 1,7678976
Log. $(k-a)$	= 1,7761727	Log. φ	= 7,8702764
Log. ω	= 7,2977299		

A proseguire per logaritmi il calcolo si richiami pure a memoria, che per il Probl. IV, $H = 53,067642$; $h = 6,932358$, e conseguentemente $h - a = 6,659631$. Dunque

Log. ω	= 7,2977299	Log. φ	= 7,8702764
Log. $(h-a)$	= 0,8234501	Log. $(h-a)$	= 0,8234501
	8,1211800		8,6937265
Log. H	= 1,7248298	Log. h	= 0,8408809
Log. $\frac{\omega(h-a)}{H}$	= 6,3963502	Log. $\frac{\varphi(h-a)}{h}$	= 7,8528456

Quindi risulta

$\frac{\omega(h-a)}{H} = 2490864,57142857$ $\qquad$ $\frac{\varphi(h-a)}{h} = 71259967,213115.$

Onde $u = \sqrt{(71259967,213115 - 2490864,57142857)}$
$= \sqrt{(68769102,64168643)} = 8292,7138$ Piedi di Parigi

tale cioè esser dovrebbe la velocità al sasso impressa dal lunare vulcano, onde tra le avverse ma decrescenti attrazioni della Luna,

na, e le favorevoli, e continuamente crescenti della terra arrivar potesse al punto dell' equilibrio delle une, e delle altre, ed ivi bilicarsi, che atta per se fosse a fargli in 1″ di tempo percorrere Piedi Parigini 8292, 7138.

Corollario 1.° Si valuta, che una palla di libbre 24 esca dalla bocca di un Cannone carico con libbre 12 di polvere fornita della velocità di Piedi 1560 per 1″. Poichè dunque $\frac{8292}{1560} = 5\frac{41}{130}$, si appalesa, che il vulcano lunare aver dovrebbe la forza di scagliare i sassi con una velocità cinque volte, e quasi un terzo, maggiore di quella, con la quale un Cannone caricato al modo detto scaglia la sua palla.

Corollario 2.° Ma un sasso scagliato dal lunare vulcano con la precisa velocità necessaria a farlo arrivare al punto delle uguali attrazioni della Luna, e della Terra, ivi arrivato si bilicherebbe tra Luna, e Terra, nè potrebbe a noi cadere. Dunque la velocità dal vulcano lunare impressa al sasso, onde giunga a terra, esser deve di qualche cosa, sia quanto si voglia piccola, maggiore della velocità trovata. Si segni tale velocità di u maggiore per v, ed il suo eccesso sopra u sia c, sia cioè $v = u + c$: sarà $V = \sqrt{\left(v^2 + \frac{ax}{b-a-x} - \frac{ax}{a+x}\right)}$ la formola, della quale ci dovremo in progresso servire.

PROBLEMA VII.

Essendo dal vulcano lunare scagliato il sasso con una velocità $v = u + c$, della quantità c maggiore della velocità u, che gli sarebbe precisamente necessaria per arrivare, tra il conflitto delle opposte, ed oppostamente varianti attrazioni della Luna, e della Terra, al punto della uguaglianza loro, determinare quale sarà la velocità, che il sasso ivi arrivato conserverà per passare di quà.

So-

Sostituito nella formola or ora stabilita $u^2 + 2uc + c^2$ in luogo di v^2 si ha

$$V = \sqrt{\left(u^2 + 2uc + c^2 + \frac{ax}{h-a-x} - \frac{px}{a+x}\right)}$$

Ma fatto $x = h - a$, cioè considerato il sasso giunto al punto della uguaglianza dell' attrazione lunare e della terrestre, i termini $\frac{ax}{h-a-x} - \frac{px}{a+x}$ acquistano per il Prob. VI una differenza negativa, per la quale si distrugge u^2. Dunque la velocità, che ivi al sasso rimane, si è

$$V = \sqrt{(2uc + c^2)}$$

Corollario. Se dunque la velocità di Piedi 8292, 7138, che nel Prob. VI si è veduto dover essere al sasso impressa per poter esso arrivare al detto punto precisamente, si accresca sol di $\frac{162}{10000}$ di Piede, facendola di Piedi 8292, 73 il sasso al suo arrivo al punto delle uguali attrazioni conserverà la velocità

$$V = \sqrt{\left(8292,7138 \times \frac{324}{10000} + \left(\frac{162}{10000}\right)^2\right)} = 16,39$$ prossimamente. Arriverebbe cioè il sasso al punto delle uguali attrazioni della Luna, e della Terra con una velocità di Piedi Parigini 16,39 per 1'' di tempo mercè la quale lo oltrepasserebbe non sofferendo bilico.

La velocità pertanto di Piedi Parigini 8292, 73 per 1'' di tempo sarà quella che in seguito nell' applicazione dei Problemi generali io supporrò impressa al sasso nello scagliamento dal lunare vulcano.

PROBLEMA VIII.

Scagliato il sasso dal vulcano lunare con una velocità v tale, per cui oltrepassar egli possa con qualche residuo di essa il punto dell' equilibrio delle attrazioni, lunare e terrestre, determinare nella retta dal centro della Luna al centro della Terra, di qua da quel punto, il luogo, in cui avrà il sasso medesimo ricuperata l' intera primiera velocità v.

Dalla generale formola $V = \sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{k-a-x} - \frac{\varphi x}{a+x}\right)}$ appalesasi in due casi aversi $V = v$, cioè non solo essendo $x = 0$, che è il punto dello scagliamento, ma di più qualora sia $\frac{\omega}{k-a-x} - \frac{\varphi}{a+x} = 0$, conseguentemente $x = \frac{(k-a)\varphi - a\omega}{\varphi+\omega}$. Or essendosi nel Probl. VI trovato Log. $\varphi = 7.8702764$; e Log. $\omega = 7,2977299$ ne proviene, ai numeri passando

$\varphi = 74178220,34$; $\omega = 19848598,17$; $\varphi + \omega = 94026818,5$, e quinci Log. $(\varphi+\omega) = 7,9732514$; laonde si ha il calcolo seguente

Log. $(k-a)$	$= 1,7761727$	Log. ω	$= 7,2977299$
Log. φ	$= 7,8702764$	Log. a	$= 9.4357286$
	$9,6464491$		$6,7334585$
Log $(\varphi+\omega)$	$= 7,9732514$	Log. $(\varphi+\omega)$	$= 7,9732514$
Log. $\frac{(k-a)\varphi}{\varphi+\omega}$	$= 1,6731977$	Log. $\frac{a\omega}{\varphi+\omega}$	$= 8,7602071$

Dunque

$\frac{(k-a)\varphi}{\varphi+\omega} = 47,119$; $\frac{a\omega}{\varphi+\omega} = 0,057571$; e perciò $x = 47,061429$.

Ricupererà cioè il sasso la primiera velocità, con la quale fu dal vulcano lunare scagliato dopo aver fatto (47,061429) R di viaggio. Per conseguenza

alla distanza $\left(47,061429 + \frac{3}{11}\right)$R=(47,334156) R dal centro della Luna

alla distanza (47,061429 — 6,932358) R = (40,401798) R dal punto delle uguali attrazioni della Luna e della Terra, al di qua,

alla distanza (53,067642 — 40,401798) R = (12,665844) R dal centro della Terra

alla distanza (11,665844) R dalla terrestre superficie.

E tutto ciò qualunque sia la velocità v maggiore di u, con cui il vulcano lunare abbia scagliato il sasso.

PRO-

PROBLEMA IX.

Scagliato dal vulcano lunare il sasso lungo la linea dal centro della Luna a quello della Terra con la velocità v=Piedi 8292,73, determinare la velocità di esso sasso al giugnere alla superficie della Terra.

Bisogna nella formola generale al *Corol.* 2.° del Probl. VI stabilita, fatto $v = 8292,73$, fare $x = 59 - a$, con che proviene

$$V = \sqrt{\left((8292,73)^2 + \frac{\omega(59-a)}{1} - \frac{\varphi(59-a)}{59}\right)}$$

e calcolando per logaritmi

$$\text{Log. } \omega = 7,2977299 \qquad \text{Log. } \varphi = 7,8702764$$

$$\text{Log. } \left(59 - \frac{3}{11}\right) = \underline{1,7688399} \qquad \text{Log. } \left(59 - \frac{3}{11}\right) = \underline{1,7688398}$$

$$\text{Log. } \omega\left(59 - \frac{3}{11}\right) = 9,0665698 \qquad \text{Log. } 59 = \underline{1,7708520}$$

$$9,6391162$$

$$\text{Log. } \frac{\varphi\left(59 - \frac{3}{11}\right)}{59} = 7,8682642$$

Quindi $\omega\left(59 - \frac{3}{11}\right) = 1165654155,5$, $\frac{\varphi\left(59 - \frac{3}{11}\right)}{59} = 73833222$

$V = \sqrt{(68769370,8529 + 1165654155,5 - 73833222)} = \sqrt{(1160588104,3529)} = 34067,4$.

Il sasso cioè dal vulcano lunare scagliato lungo la linea dal centro della Luna a quel della Terra con una velocità di Piedi Parigini 8292, 73, diritto vegnente in Terra avrà al giugnere alla sua superficie la velocità di Piedi 34067, 4.

Corollario 1° Si è veduto nel Prob. VIII, che sino ad (11,665844)R dalla superficie della Terra non fa il sasso, che ricuperare la velocità, con la quale fu scagliato, che nel nostro supposto fu di Piedi 8292, 73; dunque il di più sino alla velocità di Piedi 34067,4, cioè la velocità di Piedi ben 25774, 68, è da esso acquistata nel viaggio dei (11,665844)R verso Terra.

Corollario 2° Dividendo 34067 per 1560, che come nel *Corol.* 1° del Prob. VI si è detto, estimasi essere la velocità, con

la quale una palla di lib. 24 è scagliata da un Cannone per la carica di lib. 12 di polvere, si ha per quoziente 21, 84 prossimamente. La velocità dunque, con la quale il detto sasso batterebbe in Terra, sarebbe poco meno, che 22 volte maggiore di quella, con cui è scagliata dal Cannone di 24 ben caricato la palla.

Scolio.

La formola generale di V, presentando in distinti termini la velocità impressa nello scagliamento, l' effetto della serie delle crescenti attrazioni della Terra, e l' effetto della serie delle decrescenti attrazioni della Luna presta luogo a varj riflessi, calcoli separati, e confronti.

1° Si scorge dalle quantità trovate nel Prob. VI, che il prodotto delle via via crescenti attrazioni della Terra dalla superficie della Luna, sino al punto di ugual attrazione per parte della Luna, e per parte della Terra, sarebbe $V = \sqrt{(2490864,57)} =$ Piedi 1578, 2. Togliendo dalla Luna il pensiero, e non ritenendo, che la distanza di $\left(60 - \frac{3}{11}\right)R$ dal centro della Terra, un corpo, che da tal distanza cominciasse il suo moto per attrazione della Terra, dopo (6, 659631) R di caduta avrebbe una velocità di Piedi 1578, 2. Ed il prodotto della serie delle decrescenti attrazioni Lunari essendo $V = \sqrt{(71259967,21)} = 8441\frac{1}{2}$ Piedi si comprende, che tanta sarebbe la velocità, che per la stessa serie a rovescio, cioè dalle minori alle maggiori attrazioni, si genererebbe in un corpo, che dalla distanza di (6,932358)R dal centro della Luna cadesse da essa attratto alla sua superficie.

2° Dalle quantità trovate nel Prob. IX si rende manifesto, che il prodotto delle continuamente crescenti attrazioni della Terra dalla faccia della Luna sino a quella della Terra è $V = \sqrt{(1165654155,5)} = 34141,67$. Dunque il prodotto dal punto dell' equilibrio delle attrazioni lunare e terrestre sino alla superficie della Terra è $V = 34141,67 - 1578,2 = 32563,47$. E perchè il prodotto delle continuamente decrescenti attrazioni lunari nella stessa lunghez-

za dalla lunare alla terrestre superficie, risulta $V=\sqrt{(73835322)}$ $=8592,7$, ne segue, che il prodotto loro dal punto delle uguali attrazioni sino alla superficie della Terra si è $V=8592,7-8441,5$ $=$ Piedi 151,2.

3° Essendosi nello scioglimento del Probl. IX trovato, che il sasso dal vulcano Lunare scagliato con la velocità di Piedi 8292,73, dopo avere passato con una velocità di Piedi 16, 39 il punto delle uguali attrazioni della Luna, e della Terra, proseguendo ad essere sollecitato da questa, e retrotratto da quella, arriverebbe a noi con una velocità di Piedi 34067,4: se si paragoni tal velocità con quella or or trovata del sasso, che dalla faccia della Luna, od in generale da una uguale distanza; alla faccia della Terra venisse, senza essere scagliato, dalla quiete movendosi, e non sentendo altre attrazioni, che quelle della Terra, si fa manifesto, che la velocità del sasso al giugnere in questo caso alla Terra, essendo di Piedi 34141, 67, supererebbe di Piedi 74, 27 la velocità del sasso nel caso primo trattato nel Prob. IX; che la Luna conseguentemente con il suo continuo retrotrarre il sasso, gli ruba qualche cosa di più di velocità, di quello siasi supposto avergliene il di lei vulcano impresso nello scagliamento.

La nostra formola inoltre facilmente si acconcia al Problema di determinare la velocità, che acquisterebbe la Luna, se privata della forza di projezione, ubbidiente alla sola attrazione della Terra cadesse retta linea alla terrestre superficie. Ommessi i termini v^2, $\frac{2GRx}{am(a+x)}$, non vi ha, che il termine $\frac{2GRx}{(k-a)(k-a-x)}$ da ritenersi, e questo con qualche cangiamento. Poichè non trattandosi più di un sasso, che parta dalla superficie della Luna, ma sì dello stesso centro di lei, che partasi dal suo punto, e prenda viaggio verso la Terra, in luogo per conseguenza di $k-a$ bisogna sostituire k, ed $a+x$ in luogo di x: fatti i quali cangiamenti, la velocità cercata a qualunque punto del viaggio $a+x$, che a maggior distinzione è bene segnare con nuova lettera, quale z, sarà

$$V=\sqrt{\left(\frac{2GR}{k}\cdot\frac{z}{k-z}\right)}.$$

E

E perchè dal centro della Luna alla superficie della Terra vi sono 59R, ma arrivando la superficie della Luna a battersi con la superficie della Terra, il centro della Luna non avrà percorso, che $\left(59 - \frac{3}{11}\right)R$, restando dalla faccia terrestre distante tanto, quanto è lungo il Lunar raggio $= \frac{3}{11}R$; perciò si avrà la velocità, con la quale la Luna colpirà la Terra, facendo $z = 59 - \frac{3}{11}$, ed il suo valore sarà

$$V = \sqrt{\left\{\frac{2GR}{k} \cdot \frac{59 - \frac{3}{11}}{1 + \frac{3}{11}}\right\}}$$

Ecco il calcolo per logaritmi

Log. 2GR	= 9,0739026	Log. $59 - \frac{3}{11}$	= 1,7688398
Log. k	= 1,7781513	Log. $1 + \frac{3}{11}$	= 0,1047352
Log $\frac{2GR}{k}$	= 7,2957513	Log. $\frac{59 - \frac{3}{11}}{1 + \frac{3}{11}}$	= 1,6641046
Log. $\frac{59 - \frac{3}{11}}{1 + \frac{3}{11}}$	= 1,6641046		
Log. V^2	= 8,9598559		
Log. V	= 4,4799279		

V = Piedi 3,0194, 5

Se il centro della Luna arrivar potesse sino alla superficie della Terra, la sua velocità in arrivarvi sarebbe

$$V = \sqrt{\left(\frac{2GR}{k} \cdot 59\right)}.$$

Log. $\frac{2GR}{k}$	= 7,2957519
Log. 59	= 1,7708520
Log. V^2	= 9,0666033

Log.

Log. V - - = 4,5333016

conseguentemente V = Piedi 34143

Per la qual cosa il centro della Luna nel viaggio di un tratto al suo raggio uguale, cioè nel viaggio di $\frac{3}{11}$ R presso Terra acquisterebbe una velocità = 34143 — 30194,5 = Piedi 3948,5: tanto è il prodotto delle attrazioni della Terra per il tratto di $\frac{3}{11}$R presso la sua superficie, il qual tratto ritrovasi di miglia 937, tese 549, piedi 3, 27.

Per lo contrario, essendo la velocità, che il centro della Luna partendo dalla distanza di 59R per la serie delle attrazioni terrestri acquisterebbe in tutto il viaggio di essi 59R=Piedi 34143; ed essendo la velocità che partendo un sasso dalla faccia della Luna, od in genere dalla distanza di $\left(59-\frac{3}{11}\right)$R in tutto il viaggio di $\left(59-\frac{3}{11}\right)$R per le attrazioni terrestri acquisterebbe = 34141, 67: deducesi, che il prodotto delle terrestri attrazioni per il tratto di $\frac{3}{11}$R, cominciando alla distanza di 59R dalla superficie della Terra, non è, che una velocità di Piedi 34143 — 34141,67 = Piede 1,33. Qual differenza dal prodotto per lo stesso tratto presso Terra, che si è veduto essere una velocità di Piedi ben 3948, 5!

Se il centro della Luna proseguir potesse il suo viaggio sino al centro della Terra, con la stessa legge di essere sempre attratta in ragione duplicata inversa della distanza dallo stesso terrestre centro, la sua velocità ivi arrivata sarebbe

$$V=\sqrt{\left(\frac{2GR}{k}\cdot\frac{60}{0}\right)},$$ cioè sarebbe infinita.

È anche facile determinare il tempo T, che la Luna stessa impiegherebbe nella caduta. Preso per elemento il viaggio $d(zR)$, sarà per le leggi del moto variabile

$$dT=\frac{d(zR)}{V}=\frac{Rdz}{V}=\frac{Rdz}{\sqrt{\left(\frac{2GR}{k}\cdot\frac{z}{k-z}\right)}}=\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\cdot\frac{dz\sqrt{(k-z)}}{\sqrt{z}}=$$

R

$$\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} \cdot \frac{dz(k-z)}{\sqrt{(kz-z^2)}} = \frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} \left(\frac{dz\left(\frac{1}{2}k-z\right)}{\sqrt{(kz-z^2)}} + \frac{\frac{1}{2}kdz}{\sqrt{(kz-z^2)}} \right). \text{ Onde}$$

$$T = \frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} \left(\sqrt{(kz-z^2)} + \frac{1}{2}k \text{ Arc.Cos. } \frac{\frac{1}{2}k-z}{\frac{1}{2}k} \right); \text{ o meglio, } =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} \left(R\sqrt{(kz-z^2)} + \frac{1}{2}kR \text{.Arc.Cos. } \frac{\left(\frac{1}{2}k-z\right)R}{\frac{1}{2}kR} \right).$$

Non fa bisogno di aggiugnere costante, poichè, fatto $z=0$, si ha a dirittura $\sqrt{(kz-z^2)}=0$, ed il coseno dell' arco, divenendo $\frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}=1$, dà parimente l' arco $=0$, e quinci risulta $T=0$, come debb' essere.

Poichè, posto $z=0$, risulta, come si vien di dire, l'arco $=0$; e posto poi $z=k$, risulta il coseno $=\frac{-\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k}=-1$, e conseguentemente l' arco $=$ al semi-cerchio: manifestasi doversi dal centro della Luna al centro della Terra concepire un semi-cerchio descritto col raggio $\frac{1}{2}kR$, e perciò avente il centro suo alla metà della retta dal centro della Luna al centro della Terra. Significa pertanto $\frac{1}{2}kR$.Arc. Cos. $\frac{\left(\frac{1}{2}k-z\right)R}{\frac{1}{2}kR}$ l' arco di questo semicerchio, che dal centro della Luna si estende sino a corrispondere al punto estremo di z. E perchè in un semicerchio del raggio $\frac{1}{2}kR$ un arco, il cui coseno sia $\left(\frac{1}{2}k-z\right)R$, ha il seno $=R\sqrt{(kz-z^2)}$; si deduce, che il tempo dalla Luna impiegato in qualunque tratto zR della caduta viene espresso per la frazione $\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}$ mol-

ti-

tiplicata nell' aggregato del detto arco, e del suo seno.

Facciamo $z = 59 - \frac{3}{11}$, ed avremo il tempo dalla Luna impiegato per arrivare a battere con la sua faccia la faccia della Terra determinato per

$$T = \frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\left(R\sqrt{\left(1+\frac{3}{11}\right)}\sqrt{\left(59-\frac{3}{11}\right)} + 30R.\text{Arc.Cos.}\frac{-\left(29-\frac{3}{11}\right)R}{30R}\right)$$

Si trova Arc. Cos. $\frac{-\left(29-\frac{3}{11}\right)}{30} = 163°15'3'' = 587703''$. E presa per rapporto della semi-circonferenza al raggio la frazione $\frac{355}{113}$ si ha, co' logaritmi operando:

Log. R	= 7,2926332	Log. $\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}$	= 3,6447576
Log. $\sqrt{\frac{2GR}{k}}$	= 3,6478756	Log. $\frac{355}{113}$	= 0,4971500
Log. $\frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}$	= 3,6447576	Log. $\frac{587703''}{648000''}$	= 9,9575829
Log. $\sqrt{\left(1+\frac{3}{11}\right)}$	= 0,0523681	Log. 30	= 1,4771213
Log. $\sqrt{\left(59-\frac{3}{11}\right)}$	= 0,8844199		5,5766118
	4,5815456		

quinci

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\cdot R\left(1+\frac{3}{11}\right)\sqrt{\left(59-\frac{3}{11}\right)} = 38154'',74$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}}\cdot 30\,R.\text{Arc. Cos.}\frac{-\left(29-\frac{3}{11}\right)R}{30R} = 377234'',8$$

$T = 415389'' = 115^{ore}\,23'\,9''$.

Con simile calcolo, ponendo $z = 59$, si troverà, che, qualora il centro della Luna arrivar potesse alla superficie della Terra, il tem-

tempo speso in arrivarvi sarebbe $= 415556'',54 = 115^{gg}\,25'\,56'',54$.

Supponiamo, che il centro medesimo della Luna, accelerato sempre da una attrazione crescente in ragione duplicata inversa dal centro della Terra, giugner potesse sino al centro della Terra stessa. Abbiamo veduto, che in arrivarvi avrebbe una velocità infinita. E quale sarebbe il tempo impiegato? fatto $z = k$ si ha $\sqrt{(kz - z^2)} = 0$ . . . . . Arc. Cos. $-1 = 180° = 648000''$. Laonde speditissimo è il calcolo del tempo

$$\text{Log.}\ \frac{R}{\sqrt{\frac{2GR}{k}}} = 3{,}6447576$$

$$\text{Log.}\ \frac{355}{113} = 0{,}4971500$$

$$\text{Log.}\ \frac{648000''}{648000''} = 0{,}0000000$$

$$\text{Log.}\ 30 = 1{,}4771213$$

$$\text{Log.}\ T = 5{,}6190289$$

Dunque $T = 415938'' = 115^{gg}\,31'\,18''$

Tanto, e non più sarebbe il tempo, che il centro della Luna, cadendo per l' attrazione della Terra dalla sua orbita, impiegherebbe ad arrivare sino al centro della Terra medesima; ma la velocità acquistata nel viaggio sarebbe infinita.

Facili riusciti sono questi calcoli intorno alla supposta caduta della Luna per la sola attrazione terrestre. Non è del pari facile il calcolo della caduta del sasso supposto scagliato da un vulcano lunare, retro-tratto dalla Luna, e sollecitato dalla Terra, come si vedrà.

PROBLEMA X.

Scagliato da un vulcano lunare lungo la retta dal centro della Luna vegnente al centro della Terra un sasso con velocità tale, che tra le retro-attrazioni della Luna e le sollecitazioni della Terra oltrepassar possa il punto delle uguali attrazioni dell' una e dell' altra, determinare per qualunque punto di essa retta, al quale il sasso suppongasi arrivato, il tempo in arrivarvi speso.

Sia

Sia xR il viaggio dal sasso fatto

V la sua velocità al fine di esso viaggio

T il tempo speso

$d(xR) = Rdx$ il proseguimento infinitamente piccolo del viaggio

dT l' incremento infinitamente piccolo del tempo

Per i principj di Meccanica si ha

$$dT = \frac{Rdx}{V} = \frac{Rdx}{\sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{N-x} - \frac{\sigma x}{a+x}\right)}}, \text{ fatto per brevità } k-a=N$$

e perciò

$$T = R\int \frac{dx}{\sqrt{\left(v^2 + \frac{\omega x}{N-x} - \frac{\sigma x}{a+x}\right)}}$$

Questa frazione irrazionale da integrarsi non ammette di essere trasformata in razionale; laonde fa di mestieri ricorrere alle serie, ed accontentarsi di avere il valore di T per approssimazione.

SERIE I.

A svolgere la esposta frazione in serie il metodo, che primo s' affaccia, e più comune, si è di ridurre i tre termini sotto il radicale alla medesima denominazione, con che vien cangiata nella seguente forma

$$\sqrt{\left(\frac{Na+(N-a)x-x^2}{Nav^2+(v^2(N-a)-(N\gamma-a\omega))x+(\omega+\sigma-v^2)x^2}\right)}, \text{ che io compendio in}$$

$\sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta x-x^2}{\gamma+\delta x+\varepsilon x^2}\right)}$, e pongo = alla serie infinita

$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+Hx^7+Ix^8+Kx^9 : \ldots.$

onde sarà

$$T=R\left(Ax+\frac{1}{2}Bx^2+\frac{1}{3}Cx^3+\frac{1}{4}Dx^4+\frac{1}{5}Ex^5+\frac{1}{6}Fx^6 \ldots\ldots\right)$$

Bisogna determinare i coefficienti A, B, C, D .... e vedere l'indole della serie. Al che fare devesi elevare al quadrato la frazione irrazionale, e la serie infinita, ed il quadrato di questa mol-

tiplicare per il denominatore $\gamma+\delta x+\varepsilon x^2$, per le quali operazioni si avrà

$$\alpha+\beta x-x^2 =$$

$$\begin{aligned}
&A^2\gamma+2AB\gamma x+B^2\gamma x^2\\
&\qquad+2AC\gamma x^2+2BC\gamma x^3+C^2\gamma x^4\\
&\qquad\qquad+2AD\gamma x^3+2BD\gamma x^4+2CD\gamma x^5 \ldots\\
&\qquad\qquad\qquad+2AE\gamma x^4 \ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\\
&+A^2\delta x+2AB\delta x^2+B^2\delta x^3\\
&\qquad+2AC\delta x^3+2BC\delta x^4+C^2\delta x^5\\
&\qquad\qquad+2AD\delta x^4+2BD\delta x^5 \ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\\
&\quad+A^2\varepsilon x^2+2AB\varepsilon x^3+B^2\varepsilon x^4\\
&\qquad\qquad+2AC\varepsilon x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

donde

$A^2\gamma=\alpha$, e quinci $A=\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}=\sqrt{\frac{aN}{aNv^2}}=\frac{1}{v}$

$2AB\gamma+A^2\delta=\beta$, e perciò $B=\frac{\beta}{2a\gamma}-\frac{A^2\delta}{2A\gamma}=\frac{N-a}{2aNv}-\frac{v^2(N-a)}{2aNv^3}-$

$\frac{N\varphi-a\omega}{2aNv^3}=\frac{N\varphi-a\omega}{2aNv^3}=\frac{\psi}{v^3}$, ponendo $\frac{N\varphi-a\omega}{2aN}=\psi$

$B^2\gamma+2AC\gamma+2AB\delta+A^2\varepsilon=-1$, e però

$C=\frac{-1}{2aNv}-\frac{1}{2aNv^3}-\frac{B\delta}{aNv^2}-\frac{B^2v}{2}=-\frac{\varphi}{2a^2v^3}-\frac{\omega}{2N^2v^3}+$

$\frac{3(N\varphi-a\omega)^2}{8a^2N^2v^3}=-\frac{\varphi}{2a^2v^3}-\frac{\omega}{2N^2v^3}+\frac{3vB^2}{2}$

- - - - - - - - - - - - - - - -

Dunque $Ax:\frac{1}{2}Bx^2::\frac{1}{v}B:\frac{1}{2}Bx::1:\frac{1}{2}vBx::1:\frac{1}{2}\cdot\frac{\psi}{v^2}x$

$\frac{1}{2}Bx^2:\frac{1}{3}Cx^3::\frac{1}{2}B:\frac{1}{3}Cx::\frac{1}{2}B:\left(\frac{vB^2}{2}-\frac{\varphi}{2.3a^2v^3}-\frac{\omega}{2.3N^2v^3}\right)x::1:$

$\left(vB-\frac{\varphi}{3a^2v^3B}-\frac{\omega}{3N^2v^3B}\right)x::1:\left(\frac{\psi}{v^2}-\frac{\varphi}{3a^2\psi}-\frac{\omega}{3N^2\psi}\right)x$

Riduciamo a numeri questi rapporti richiamando alla mente, che

che si è preso $v = 8292,73$, e che v^2 è per conseguenza $= 68769370,853$

Log. φ	$= 7,8702764$	Log. ω	$= 7,2977299$
Log. a	$= 9,4357286$	Log. N	$= 1,7761727$
	$8,4345478$		$5,5215572$
Log. 2	$= 0,3010300$	Log. 2	$= 0,3010300$
Log. $\frac{\varphi}{2a}$	$= 8,1335178$	Log. $\frac{\omega}{2N}$	$= 5,2205272$

quindi $\frac{\varphi}{2a} = 135993375$; $\frac{\omega}{2N} = 166160,26$; $\frac{\varphi}{2a} \quad \frac{\omega}{2N} = \frac{N\varphi - a\omega}{2aN}$ $= \psi = 135827215,74$; Log. $\psi = 8,1329868$

Log $\frac{\varphi}{a}$	$= 8,4345478$	Log. $\frac{\omega}{N}$	$= 5,5215572$
Log. a	$= 9,4357286$	Log. N	$= 1,7761727$
	$8,9988192$		$3,7453845$
Log. 3	$= 0,4771213$	Log. 3	$= 0,4771213$
	$8,5215979$		$3,2682632$
Log. ψ	$= 8,1329868$	Log. ψ	$= 8,1329868$
Log $\frac{\varphi}{3a^2\psi}$	$= 0,3887111$	Log. $\frac{\omega}{3N^2\psi}$	$= 5,1352764$

Per conseguenza $\frac{\varphi}{3a^2\psi} = 447434$; $\frac{\omega}{3N^2\psi} = 0,000013654$

$-\frac{\varphi}{3a^2\psi} - \frac{\omega}{3N^2\psi} = -2,447448$.

Dunque il 1° termine della serie sta al 2° come 1 a $\frac{135827215,74}{v^2} \cdot \frac{x}{2}$. Per la qual cosa a far sì, che il primo fosse del 2° maggiore per tutta la estensione di x, cioè posto eziandio $x = 59 - \frac{3}{11}$, converrebbe, che v^2 fosse maggiore di $135827215,74 \times \frac{59 - \frac{3}{11}}{2}$. Nel mio supposto di $v = 8292,73$ la ragione del 1° termine al 2° è quella di $1 : \frac{135827215,74}{68769370,853} \cdot \frac{x}{2}$, cioè, riducendo, di $1 : 1,975 \cdot \frac{x}{2}$, e di $1 : 0,9875\left(59 - \frac{3}{11}\right)$ fatto

$x =$

$x = 59 - \frac{3}{11}$. Dal che apparisce che il 2° termine non può essere minore del termine 1°, che dando ad x un valore minore di $\frac{2000}{1975}$; e che riesca grandemente di esso 1° maggiore posto $x = 59 - \frac{3}{11}$.

Il 2° termine poi della serie sta al 3° : : 1 : $(1{,}975 - 2{,}447)x$: : 1 : $(-0{,}472)x$; laonde rilevasi, considerando soltanto la quantità, che il termine 3° non può essere minore del 2°, che preso x minore di $\frac{1000}{472}$; e che risulta molto maggiore fatto $x = 59 - \frac{3}{11}$. È per tanto la serie dal 1° al 2°, dal 2° al 3° termine divergente; la divergenza cala, ma non si vede dove possa finire; e si presenta inoltre l' incomodo della mescolanza dei termini negativi ai positivi. Volgiamoci dunque a cercare altra serie, che sia dal suo principio convergente, e proceda pure se è possibile, costantemente con termini positivi.

SERIE II.

Ripresa l' espressione primigenia di T

$$T = R \int \frac{dx}{\sqrt{\left(v^2 + \frac{ax}{N-x} - \frac{px}{a+x}\right)}}$$

fo $v^2 = P$, $\frac{ax}{N-x} - \frac{px}{a+x} = Q$, e sarà $T = R \int \left(P + Q\right)^{-\frac{1}{2}} dx =$

$$R \int \left(P^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q\, dx + \frac{3}{8} P^{-\frac{5}{2}} Q^2\, dx - \frac{5}{16} P^{-\frac{7}{2}} Q^3\, dx \ldots\ldots \right)$$

Avanti di passare alle integrazioni risolvo Q in parte intera e co-

e costante, ed in parte fratta e variabile. Di fatti dividendo in ciascun dei due termini il numeratore per il denominatore, e congiungendo in una le due frazioni variabili rimanenti, si ha

$$Q = -\omega + \frac{N\omega}{N-x} - \varphi + \frac{a\varphi}{a+x} = -(\omega+\varphi) +$$

$$\frac{Na(\omega+\varphi)+(N\omega-a\varphi)x}{(N-x)(a+x)} = -\beta + \frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)}$$ ponendo per comodo

$\omega+\varphi=\beta$, $Na(\omega+\varphi)=\gamma$, $N\omega-a\varphi=\delta$

Or integriamo.

$$R\int P^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{R}{v}x, \text{ e fatto } x=59-a, = \frac{R}{v}(59-a)$$

$$\begin{aligned}
\text{Log. } R &= 7{,}2926332 \\
\text{Log. } (59-a) &= \underline{1{,}7688398} \\
& \quad 9{,}0614730 \\
\text{Log. } v &= \underline{3{,}9186976} \\
\text{Log. } \frac{R}{v}(59-a) &= 5{,}1427754
\end{aligned}$$

Dunque $R\int P^{-\frac{1}{2}}dx = 138923'',38$

$$R\int -\frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Qdx = R\int \frac{-1}{2v^3}\left(-\beta + \frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)}\right)dx =$$

$$\frac{R\beta x}{2v^3} - \frac{R}{2v^3}\int\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)}$$

$$\frac{R\beta x}{2v^3} = \frac{\beta}{2v^2}\cdot\frac{Rx}{v}$$

$$\begin{aligned}
\text{Log. } \beta &= 7{,}9732514 \\
\text{Log. } 2 &= \underline{0{,}3010300} \\
& \quad 7{,}6722214 \\
\text{Log. } v^2 &= \underline{7{,}8373952} \\
\text{Log. } \frac{\beta}{2v^2} &= 9{,}8348262 \\
\text{Log. } \frac{R}{v}(59-a) &= \underline{5{,}1427754} \\
\text{Log. } \frac{R\beta}{2v^3}(59-a) &= 4{,}9776016
\end{aligned}$$

. Quinci $\frac{R\beta(59-a)}{2v^3} = 94973'',3$

$$\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = \frac{Adx}{N-x} + \frac{Bdx}{a+x}$$

$A = \frac{\gamma+\delta x}{a+x}$, fatto $N-x=0$, donde $x=N$, e perciò $A = \frac{\gamma+\delta N}{k}$

$= \frac{Na\omega+Na\varphi+N^2\omega-Na\varphi}{k} = \frac{(N+a)N\omega}{k} = N\omega$

$B = \frac{\gamma+\delta x}{N-x}$ fatto $a+x=0$, donde $x=-a$, e perciò

$B = \frac{\gamma-a\delta}{k} = a\varphi$. Segnando per l i logaritmi iperbolici

$\int\frac{Adx}{N-x} = -A\,l\,(N-x) + l.\,\text{Cost.} = -Al(N-x) + A\,l.\,N$ (esser dovendo l' integrale $= 0$, preso $x=0$) $= A\,l\,\frac{N}{N-x}$, ed $= A\,lN$ fatto $x=59-a$

$\int\frac{Bdx}{a+x} = B\,l\,(a+x) + l.\text{Cost.} = B\,l\,(a+x) - B\,l\,a = Bl\,\frac{a+x}{a}$ ed $=$ $Bl\,\frac{59}{a}$, fatto $x=59-a$.

Dunque

$$-\frac{R}{2v^3}\int\frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)} = -\frac{R}{2v^3}\left(N\omega lN + a\varphi l\,\frac{59}{a}\right)$$

trovasi $lN = l\,59{,}727272727) = 4{,}0897608$

$l.\,\frac{59}{a} = l.\,\frac{59.11}{3} = 5{,}3768204$: e quinci il seguente calcolo

Log. R	= 7,2926332	Log. $\frac{R}{2v^3}$	= 5,2355104
Log. $2v^3$	= 12,0571228	Log. $a\varphi$	= 7,3060050
	5,2355104		
Log. $N\omega$	= 9,0739026	Log. $l\,\frac{59}{a}$	= 0,7305255
Log. l N	= 0,6116980		
Log. $\frac{R}{2v^3}N\omega.l.N$	= 4,9211110	Log. $\frac{R}{2v^3}.a\varphi l.\frac{59}{a}$	= 3,1720409
Laonde $\frac{R}{2v^3}.N\omega lN$	= 83389'',41	$\frac{R}{2v^3}.a\varphi\,l.\,\frac{59}{a}$	= 1870'',85.

Dun-

Dunque

$$R\int -\frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Q\,dx = 94973'',3 - 83389'',41 - 1870'',85 = 9713''$$

$$R\int \frac{3}{8}P^{-\frac{5}{2}}Q^2\,dx = \frac{3R}{8v^5}\int\left(-\beta + \frac{\gamma+\delta x}{(N-x)(a+x)}\right)^2 dx =$$

$$\frac{3R}{8v^5}\beta^2 x - \frac{3R}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} + \frac{3R}{8v^5}\int\frac{(\gamma+\delta x)^2}{(N-x)^2(a+x)^2}dx.$$

$$\frac{3R}{8v^5}.\beta^2(59-a) = \frac{3\beta}{4v^2}\cdot\frac{R}{2v^3}(59-a)$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 3\beta &= 8{,}4503727 \\ \text{Log. } 4v^2 &= \underline{8{,}4394552} \\ & \quad 0{,}0109175 \end{aligned}$$

$$\text{Log. } \frac{R\beta(59-a)}{2v^3} = \underline{4{,}9776016}$$

$$\text{Log. } \frac{3\beta}{4v^2}\cdot\frac{R\beta(59-a)}{2v^3} = 4{,}9885191.\ \text{Dunque } \frac{3R}{8v^5}\beta^2(59-a) = 97391'',07$$

$$\frac{3R}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = \frac{3\beta}{2v^2}\cdot\frac{R}{2v^3}\int\frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = \frac{3\beta}{2v^2}(85260'',26)$$

$$\begin{aligned} \text{Log. } 3\beta &= 8{,}4503727 \\ \text{Log. } 2v^2 &= \underline{8{,}1384252} \\ & \quad 0{,}3119475 \end{aligned}$$

$$\text{Log. } 85260{,}26 = \underline{4{,}9307466}$$

$$\text{Log. } \frac{3\beta}{2v^2}(85260{,}26) = 5{,}2426941.\ \text{Dunque } \frac{-3R}{8v^5}\int\frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} =$$

$$-174861'',44$$

$$\frac{(\gamma+\delta x)^2dx}{(N-x)^2(a+x)^2} = \frac{A\,dx}{(N-x)^2} + \frac{A'dx}{N-x} + \frac{B\,dx}{(a+x)^2} + \frac{B'dx}{a+x}$$

$A = \frac{(\gamma+\delta x)^2}{(a+x)^2}$ fatto $N-x=0$, donde $x=N$, $A = \frac{(\gamma+\delta N)^2}{k^2} = N^2\omega^2$

$A' = \frac{1}{-dx}\,d\frac{(\gamma+\delta x)^2}{(a+x)^2}$ (fatto dopo la differenziazione $x=N$) =

$$\frac{-1}{dx}\left(\frac{2\delta(\gamma+\delta x)dx}{(a+x)^2} - \frac{2(\gamma+\delta x)^2dx}{(a+x)^3}\right) = -\frac{2\delta(\gamma+\delta N)}{k^2} + \frac{2(\gamma+\delta N)^2}{k^3} =$$

$$2\left(-\frac{N\omega\delta}{k} + \frac{N^2\omega^2}{k}\right) = -\frac{2N\omega\varphi a}{k}$$

$B = \frac{(\gamma+\delta x)^2}{(N-x)^2}$ fatto $x+a=0$, donde $x=-a$, $B=\frac{(\gamma-\delta a)^2}{k^2}=a^2\varphi^2$

$B' = \frac{1}{dx}\, d\frac{(\gamma+\delta x)^2}{(N-x)^2}$ (fatto dopo la differenziazione $x=-a$) =

$\frac{2\delta(\gamma+\delta x)}{(N-x)^2}+\frac{2(\gamma+\delta x)^2}{(N-x)^3}=\frac{2\delta(\gamma-\delta a)}{k^2}+\frac{2(\gamma-\delta a)^2}{k^3}=2\left(\frac{a\varphi\delta}{k}+\frac{a^2\varphi^2}{k}\right)=\frac{2N\omega\varphi a}{k}$

$\int\frac{A\,dx}{(N-x)^2}=\frac{A}{N-x}+\text{cost.}=\frac{A}{N-x}-\frac{A}{N}=\frac{N^2\omega^2}{N-x}-\frac{N^2\omega^2}{N}$,

e (posto $x=59-a$) $=N^2\omega^2-N\omega^2$

$\int\frac{A\,dx}{N-x}=-A'l(N-x)+l.\text{cost.}=A'l\frac{N}{N-x}=-\frac{2N\omega\varphi a}{k}\,l\,\frac{N}{N-x}$,

ed $=-\frac{2N\omega\varphi a}{k}\,l.N$, fatto $x=59-a$

$\int\frac{B\,dx}{a+x}=-\frac{B}{a+x}+\text{cost.}=-\frac{B}{a+x}+\frac{B}{a}=-\frac{a^2\varphi^2}{a+x}+a\varphi^2$,

ed $=-\frac{a^2\varphi^2}{59}+a\varphi^2$, fatto $x=59-a$

$\int\frac{B'\,dx}{a+x}=B'l.(a+x)+l.\text{cost.}=B'l\frac{a+x}{a}$, ed $=B'\,l\,\frac{59}{a}=$

$\frac{2N\omega\varphi a}{k}\,l.\,\frac{59}{a}$, pigliato $x=59-a$

Log. 3R	= 7,7697545	Log. $\frac{3R}{8v^5}$	= 7,2731765
Log. $8v^5$	= 20,4965780	Log. 2	= 0,3010300
	7,2731765	Log. $N\omega$	= 9,0739026
Log. $N^2\omega^2$	= 18,1478052	Log. φa	= 7,3060050
Log. $\frac{3R}{8v^5}\,.\,N^2\omega^2$	= 5,4209817	Log. lN	= 0.6116980
Log. N	= 1,7761727		4,5658121
Log. $\frac{3R}{8v^5}\,.\,N\omega^2$	= 3,6448090	Log. k	= 1,7781513
		Log. $\frac{3R}{8v^5}\cdot\frac{2N\omega\varphi a}{k}lN$	= 2,7876608

Quinci

$\frac{3R}{8v^5}\,.\,N^2\omega^2$	= 263622	$-\frac{3R}{8v^5}\cdot\frac{2N\omega\varphi a}{k}lN$	= −613,28
$\frac{3}{8v^5}\,.\,N\omega^2$	= 4413,76		
$\frac{3R}{8v^5}(N^2\omega^2-N\omega^2)$	= 259208,24		

Log.

$\text{Log.}\frac{3R}{8v^5} = 7{,}2731765$ $\quad$ $\text{Log.}\frac{3R}{8v^5}\cdot\frac{2N\omega\varphi a}{k} = 2{,}1759628$

$\text{Log.}\, a = 9{,}4356286$

$\text{Log.}\,\varphi^2 = 15{,}7405528$ $\quad$ $\text{Log.}\, l\,\frac{59}{a} = 0{,}7305255$

$\text{Log.}\frac{3R}{8v^5}.a\varphi^2 = 2.4494579$ $\quad$ $\text{Log.}\frac{3R}{8v^5}\cdot\frac{2N\omega\varphi a}{k}\cdot l\frac{59}{a} = 2{,}9064883$

$\text{Log.}\, a = 9{,}4357286$

$1{,}8851865$

$\text{Log.}\, 59 = 1{,}7708520$

$\text{Log.}\frac{3R}{8v^5}\cdot\frac{a^2\varphi^2}{59} = 0{,}1143345$ $\quad$ $\frac{3R}{8v^5}\cdot\frac{2N\omega\varphi a}{k}\, l\,\frac{59}{a} = 806'',28$

Quindi

$$\frac{3R}{8v^5}\cdot a\varphi^2 = 285'',48$$

$$-\frac{3R}{8v^5}\cdot a^2\varphi^2 = -\ 1'',30$$

$$\frac{3R}{8v^5}\left(a\varphi^2 - \frac{a^2\varphi^2}{59}\right) = 280'',18$$

Dunque

$$\frac{3R}{8v^5}\int \beta^2\, dx = 97391'',07$$

$$-\frac{3R}{8v^5}\int \frac{2\beta(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)(a+x)} = -\ 174861'',44$$

$$\frac{3R}{8v^5}\int \frac{(\gamma+\delta x)dx}{(N-x)^2(a+x)^2} = \frac{3R}{8v^5}\int\frac{A\,dx}{(N-x)} + \frac{3R}{8v^5}\int\frac{A'dx}{N-x} + \frac{3R}{8v^5}\int\frac{B\,dx}{(a+x)^2} +$$

$$\frac{3R}{8v^5}\int\frac{B'dx}{a+x} = 259208'',24 - 613'',28 + 280'',18 + 806'',28 = 259681'',42$$

Laonde $R\int\frac{3}{8}P^{\frac{-5}{2}}Q^2dx = 97391'',07 - 174861'',44 + 259681'',42$ $= 182211'',05$. Dando pertanto il 1° termine della serie 138923'', il 2° 9713'', il 3° 259681'', si fa chiaro che anche questa serie manca della desiderata costante convergenza, ed è irregolare, onde conviene abbandonarla. Tentiamone una terza

SERIE III.

A formare una terza serie pongo $P = v^2 + \frac{ax}{N-x}$, $Q = \frac{\varphi x}{a+x}$,

 per

per lo che sarà $T = R\int(P-Q)^{\frac{-1}{2}}dx = R\int(P^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}P^{\frac{-3}{2}}Q + \frac{3}{8}P^{\frac{-5}{2}}Q^2 + \frac{5}{16}P^{\frac{-7}{2}}Q^3 \ldots)dx$: il calcolo di questa serie riuscirebbe faticosissimo, se non si potesse trattare i suoi termini in modi generali, e con opportuni teoremi risparmiare molte operazioni. Egli è per ciò, che a' calcoli dei termini in particolare premetto la teoria generale della serie.

Teoria generale della Serie.

Prob. 1° trovare il termine generale della serie.
Inteso per μ il coefficiente numerico, la forma generale dei termini si è

$$\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi} dx$$

Il coefficiente μ è $= 1$ per il primo termine, cioè quando $\pi = 0$, ed è generalmente per gli altri termini $= \frac{1.3.5.7.9\ldots.2\pi-1}{1.2.3.4.5\ldots.\pi.2^{\pi}}$.
Poichè il coefficiente si forma per il prodotto continuo dei termini della serie

$$1, \frac{-\frac{1}{2}}{1}, \frac{-\frac{3}{2}}{2}, \frac{-\frac{5}{2}}{3}, \frac{-\frac{7}{2}}{4}, \ldots \frac{-\frac{2\pi-1}{2}}{\pi}.$$

Risulta il coefficiente alternativamente positivo, e negativo; positivo per il 1° termine, negativo per il 2°, positivo per il 3°, negativo per il 4°, e così via via; ma siccome devesi moltiplicare nella podestà $(-Q)^{\pi}$, che nel 1° termine è $(-Q)^0 = 1$, nel 2° è $(-Q)^1 = -Q^2$, nel 3° è $(-Q)^3 = Q^2$, e così alternativamente positiva, e negativa nei termini, dov' è istessamente positivo, e negativo il coefficiente, perciò ogni termine della serie riesce positivo.

Teorema 1° La serie del termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}$ è, nel valore di $x = 59 - a$, convergente

Es-

Essendo $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi}$ il termine π^{esimo}, sarà il suo susseguente $(\pi+1)^{esimo} = \frac{\mu(2(\pi+1)-1)}{(\pi+1)^2} P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi+1}$. Dunque in generale il π^{esimo} al $(\pi+1)^{esimo} :: 1 : \frac{2\pi+1}{2\pi+2} P^{-1} Q$. Si è posto $P = v^2 + \frac{\omega x}{N-x} = \frac{Nv^2-(v^2-\omega)x}{N-x}$, e perciò $P^{-1} = \frac{N-x}{Nv^2-(v^2-\omega)x}$; e si è posto $Q = \frac{\varphi x}{a+x}$: Il coefficiente $\frac{2\pi+1}{2\pi+2}$ è evidentemente una frazione, e parimenti $\frac{x}{a+x}$; onde resta a vedere, che cosa divenga $\frac{(N-x)\varphi}{Nv^2-(v^2-\omega)x}$ dato ad x il suo massimo valore $= 59 - a$. Ora, posto ciò, $N - x = k - a - (59 - a) = 1$, ed $Nv^2 - (v^2 - \omega)x = (60 - a)v^2 - (v^2 - \omega)(59 - a) = v^2 + \omega(59 - a)$: dunque $\frac{(N-x)\varphi}{Nv^2-(v^2-\omega)x} = \frac{\varphi}{v^2+\omega(59-a)}$. Ma nel Probl. VI il calcolo ci ha dato il logaritmo di $\varphi = 7.8702764$; e nel Prob. IX si è trovato il logaritmo di $\omega(59-a) = 9{,}0665697$: dunque $\varphi < \omega(59-a)$, ed a più forte ragione $< v^2 + \omega(59-a)$, e conseguentemente $\frac{\varphi}{v^2+\omega(59-a)}$ vera frazione: per la qual cosa il prodotto $\frac{2\pi+1}{2\pi+2} \cdot \frac{(N-x)\varphi}{Nv^2-(v^2-\omega)x} \cdot \frac{x}{a+x}$ nel caso di $x = 59 - a$ è un prodotto di tre frazioni, e quinci necessariamente una frazione di ciascuna delle tre minore. Dunque stando generalmente il termine π^{esimo} della serie al $(\pi+1)^{esimo}$ come 1 a tale prodotto resta dimostrato, che quello è di questo in tutta la serie, nel caso di $x = 59 - a$, minore, e che la serie del termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi}$ riesce in tal caso convergente.

Prob. 2° Rendere razionale il termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi} dx$. Essendo per le posizioni $P = v^2 + \frac{\omega x}{N-x} = \frac{Nv^2-(v^2-\omega)x}{N-x}$, $Q = \frac{\varphi x}{a+x}$; e dalla prima posizione venendone $P^{-1} = \frac{N-x}{v^2+\omega(59-a)}$, ristringo

per

per comodità questo valore di P in $\frac{N-x}{e-f^2x}$ segnando Nv^2 per e e $v^2-\omega$ per f^2

fo poi $\frac{N-x}{e-f^2x}=z^2$, donde ne segue $x=\frac{N-ez^2}{1-f^2z^2}=\frac{N(1-v^2z^2)}{1-f^2z^2}$, ed indi $dx=\frac{-2zdz(e-f^2N)}{(1-f^2z^2)^2}=\frac{-2N\omega.zdz}{(1-f^2z^2)^2}$, per essere $e-f^2N=N\omega$.

$Q=\frac{2N(1-v^2z^2)}{1-f^2z^2}\times\frac{1-f^2z^2}{N+a-(af^2+e)z^2}=\frac{2N(1-v^2z^2)}{k-(kv^2-a\omega)z^2}=\frac{2N(v^2z^2-1)}{Mz^2-k}$, facendo $kv^2-a\omega=M$. Ed insieme componendo queste espressioni di P, dx, Q si ha

$$\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}}Q^{\pi}dx=\frac{-2\mu N^{\pi+1}\omega^{\pi}z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^{\pi}dz}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^{\pi}}.$$

Si scorge a primo colpo d' occhio, che il grado di z nel numeratore risulta $=4\pi+2$, laddove nel denominatore risulta $=2\pi+4$; onde in questo riesce lo stesso, che in quello nel caso di $\pi=1$, e minore in tutti gli altri di π maggiore di 1. Anche pertanto nel caso di $\pi=1$, e molto più nei casi di $\pi>1$ fa di mestieri dividere il numeratore per il denominatore sino ad abbassar quello ad un grado minore, che questo, spezzando così la frazione impura in due parti una intera, e l' altra fratta.

Prob. 3° Spezzando la frazione $\frac{z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^{\pi}}$ in due parti, una intera, la quale si segni per Z, l' altra fratta, la quale si denoti per $\frac{Z}{(1-f^2z^2)(Mz^2-k)}$: determinare la forma della parte intera Z.

Svolgendo per la formola Newtoniana $(v^2z^2-1)^{\pi}$ si ha

$$v^2z^{2\pi-\pi}v^{2\pi-2}z^{2\pi-2}+\frac{\pi(\pi-1)}{1.2}v^{2\pi-4}z^{2\pi-4}-\frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}v^{2\pi-6}z^{2\pi-6}\ldots$$

Ponendo per comodo $\frac{\pi(\pi-1)}{1.2}=\pi'$, $\frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}=\pi''$ . . . . . .

Si ha $z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^{\pi}=$

$$v^{2\pi}z^{4\pi+2}-\pi v^{2\pi-2}z^{4\pi}+\pi'v^{2\pi-4}z^{4\pi-2}-\pi''v^{2\pi-6}z^{4\pi-4}+\pi'''v^{2\pi-8}z^{4\pi-6}\ldots$$

Similmente $(Mz^2-k)^{\pi}=$

$$M^{\pi}z^{2\pi}-\pi M^{\pi-1}z^{2\pi-2}k+\pi'M^{\pi-2}z^{2\pi-4}k^2-\pi''M^{\pi-3}z^{2\pi-6}k^3+\pi'''M^{\pi-4}z^{2\pi-8}k^4\ldots$$

ed

ed $(Mz^2-k)^\pi(1-f^2z^2)^2 = M^\pi f^4 z^{2\pi+4}$

$-\pi f^4 M^{\pi-1} k z^{2\pi+2} + \pi' f^4 M^{\pi-2} k^2 z^{2\pi} - \pi'' f^4 M^{\pi-3} k^3 z^{2\pi-2}$ . . . . . .

$-2f^2 M^\pi z^{2\pi+2} + 2\pi f^2 M^{\pi-1} k z^{2\pi} - 2\pi' f^2 M^{\pi-2} k^2 z^{2\pi-2} \ldots \pm 2f^2 k^\pi z^2$

$+ M^\pi z^{2\pi} \quad - \pi M^{\pi-1} k z^{2\pi-2} \ldots \pm \pi M k^{\pi-1} z^2 \mp k^\pi$

dai quali termini abbastanza manifestasi la legge per formare qualunque altro termine ulteriore.

Si denoti $M^\pi f^4$ per (a), ed ordinatamente gli altri coefficienti per (b), (c), (d), (e) . . . (n), (p).

Dividendo $(v^2z^2-1)^\pi z^{2\pi+2}$ per $(Mz^2-k)^\pi(1-f^2z^2)^2$, si troverà la cercata forma della intera parte $'Z$ essere

$$'Z = \frac{v^{2\pi}}{(a)} z^{2\pi-2} + \frac{\Delta}{(a)} z^{2\pi-4} + \frac{\Delta'}{(a)} z^{2\pi-6} + \frac{\Delta''}{(a)} z^{2\pi-8} + \frac{\Delta'''}{(a)} z^{2\pi-10} \ldots \text{sino}$$

a z^0: e sarà $\Delta = \frac{(b)}{(a)} v^{2\pi} - \pi v^{2\pi-2}$

$$\Delta' = \frac{(b)}{(a)} \quad - \frac{(c)}{(a)} v^{2\pi} + \pi' v^{2\pi-4}$$

$$\Delta'' = \frac{(b)}{(a)} \Delta' - \frac{(c)}{(a)} \Delta + \frac{(d)}{(a)} v^{2\pi} - \pi'' v^{2\pi-6}$$

$$\Delta''' = \frac{(b)}{(a)} \Delta'' - \frac{(c)}{(a)} \Delta'' + \frac{(d)}{(a)} \Delta' - \frac{(e)}{(a)} v^{2\pi} + \pi''' v^{2\pi-8}$$

. . . . . .

è già palese l'andamento.

Si ha poi

$$\frac{(b)}{(a)} = \frac{\pi k}{M} + \frac{2}{f^2}$$

$$\frac{(c)}{(a)} = \frac{\pi' k^2}{M^2} + \frac{2\pi k}{Mf^2} + \frac{1}{f^4}$$

$$\frac{(d)}{(a)} = \frac{\pi'' k^3}{M^3} + \frac{2\pi' k^2}{M^2 f^2} + \frac{\pi k}{Mf^4}$$

$$\frac{(e)}{(a)} = \frac{\pi''' k^4}{M^4} + \frac{2\pi'' k^3}{M^3 f^2} + \frac{\pi' k^2}{M^2 f^4}$$

. . . . . .

$$\frac{(n)}{(a)} = \frac{2k^\pi}{M^\pi f^2} + \frac{\pi k^{\pi-1}}{M^{\pi-1} f^4}$$

$$\frac{(p)}{(a)} = \frac{k^\pi}{M^\pi f^4}$$

Li quozienti 3°, 4°, 5° dimostrano il progresso per gli altri sino ai

due

due ultimi, dove dai tre termini si ritorna a due, e si finisce in un solo

Per mezzo di codesti quozienti si trova svolgendo

$$\Delta = \frac{\pi k v^{2\pi}}{M} + \frac{2v^{2\pi}}{f^2} - \pi v^{2\pi-2}$$

$$\Delta' = \frac{(\pi^2-\pi')k^2 v^{2\pi}}{M^2} + \frac{2\pi k v^{2\pi}}{Mf^2} + \frac{3v^{2\pi}}{f^4} - \frac{\pi^2 k v^{2\pi-2}}{M} - \frac{2\pi v^{2\pi-2}}{f^2} + \pi' v^{2\pi-4}$$

$$\Delta'' = \frac{(\pi^3-2\pi\pi'+\pi'')k^3 v^{2\pi}}{M^3} + \frac{2(\pi^2-\pi')k^2 v^{2\pi}}{M^2 f^2} + \frac{3\pi k v^{2\pi}}{Mf^4} + \frac{4v^{2\pi}}{f^6} - \frac{(\pi^3-\pi\pi')k^2 v^{2\pi-2}}{M^2}$$

$$- \frac{2\pi^2 k v^{2\pi-2}}{Mf^2} - \frac{3\pi v^{2\pi-2}}{f^4} + \frac{\pi\pi' k v^{2\pi-4}}{M} + \frac{2\pi' v^{2\pi-4}}{f^2} - \pi'' v^{2\pi-6}$$

. . . . . .

Queste espressioni ammettono delle riduzioni generali. Per esempio l' espressione di Δ si riduce generalmente a

$\Delta = \frac{2v^{2\pi}}{f^2} + \frac{\pi a v^{2\pi-2}}{M}$; poichè $\frac{\pi k v^{2\pi}}{M} - \pi v^{2\pi-2} = \frac{\pi v^{2\pi-2}}{M}(kv^2 - M) =$

$\frac{\pi v^{2\pi-2}}{M}(kv^2 - kv^2 + a\omega) = \frac{\pi a v^{2\pi-2}}{M}$ (*Probl.* 2°).

A molte più riduzioni si fa luogo in particolare secondo i varj valori di π. Ad esempio, nel caso di $\pi = 4$, si ha immediatamente

$\Delta'' = \frac{20k^3 v^8}{M^3} + \frac{20k^2 v^8}{M^2 f^2} + \frac{12kv^8}{Mf^4} + \frac{4v^8}{f^6} - \frac{40k^2 v^6}{M^2} - \frac{30kv^6}{Mf^2} - \frac{12v^6}{f^4} +$

$\frac{24kv^4}{M} + \frac{12v^4}{f^2} - 4v^2$; ma si ottiene riducendo

$\Delta'' = \frac{20k^2 a\omega v^6}{M^3} + \frac{12k\omega v^6}{Mf^4} + \frac{20ka\omega^2 v^4}{M^2 f^2} + \frac{4kv^4}{M} + \frac{4\omega^3 v^2}{f^6}$; imperciocchè

$$\frac{20k^3 v^8}{M^3} - \frac{20k^2 v^6}{M^2} = \frac{20k^2 v^6}{M^3}(kv^2 - M) = \frac{20k^2 a\omega v^6}{M^3}$$

$$\frac{20k^2 v^8}{M^2 f^2} - \frac{20k^2 v^6}{M^2} = \frac{20k^2 v^6}{M^2 f^2}(v^2 - f^2) = \frac{20k^2 v^6}{M^2 f^2}\left(v^2 - (v^2 - \omega^2)\right) = \frac{20k^2 \omega v^6}{M^2 f^2}$$

$$\frac{12kv^8}{Mf^4} - \frac{12kv^6}{Mf^2} = \frac{12kv^6}{Mf^4}(v^2 - f^2) = \frac{12k\omega v^6}{Mf^4}$$

$$-\frac{20kv^6}{Mf^2} + \frac{20kv^4}{M} = \frac{-20kv^6}{Mf^2}\left(v^2 - f^2\right) = -\frac{20k\omega v^8}{Mf^2}$$

$$\frac{4v^8}{f^6} - \frac{12v^6}{f^4} + \frac{12v^4}{f^2} - 4v^2 = 4v^2\left(\frac{v^2}{f^2} - 1\right)^3 = \frac{4v^2}{f^6}\left(v^2 - f^2\right)^3 = \frac{4\omega^3 v^2}{f^6}$$

e di

e di nuovo $\frac{20k^2\alpha v^6}{M^2f^2} - \frac{20k\alpha v^4}{Mf^2} = \frac{20k\alpha v^4}{M^2f^2}\left(kv^2 - M\right) = \frac{20k\alpha^2 v^4}{M^2f^2}$.

Si vedrà nell'applicazione la comodità prodotta da simili riduzioni. Ed è bene riserbarsi a farle tutte in particolare per non chiudersi con qualche generale il luogo a qualcheduna particolare più vantaggiosa, come sarebbe avvenuto, se riducendo generalmente la espressione immediata di Δ'', si fosse nelle generali riduzioni compreso alcuno dei quattro termini, che in particolare, nel caso di $\pi = 4$, si sono ridotti nel solo termine $\frac{4\alpha^3 v^2}{f^6}$.

Prob. 4. Assegnare la forma del numeratore Z della parte fratta $\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}$.

La forma sarà in generale

$$\alpha z^{2\pi+2} - \beta z^{2\pi+} + \gamma z^{2\pi-2} - \delta z^{2\pi-4} + \epsilon z^{2\pi-6} \ldots \mp \xi$$

ed i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon \ldots\ldots$ saranno formole composte di $\Delta, \Delta', \Delta'' \ldots$ con inverso ordine moltiplicate per gli esposti quozienti $\frac{(b)}{(a)}, \frac{(c)}{(a)}, \frac{(d)}{(a)} \ldots$ Nel caso ad esempio di $\pi = 4$ si avrà

$$\alpha = \frac{(b)}{(a)}\Delta'' - \frac{(c)}{(a)}\Delta' + \frac{(d)}{(a)}\Delta - \frac{(e)}{(a)}v^9 + 1$$

$$\beta = \frac{(c)}{(a)}\Delta'' - \frac{(d)}{(a)}\Delta' + \frac{(e)}{(a)}\Delta - \frac{(f)}{(a)}v^8$$

$$\gamma = \frac{(d)}{(a)}\Delta'' - \frac{(e)}{(a)}\Delta' + \frac{(n)}{(a)}\Delta - \frac{(p)}{(a)}v^8$$

$$\delta = \frac{(e)}{(a)}\Delta'' - \frac{(n)}{(a)}\Delta' + \frac{(p)}{(a)}\Delta$$

$$\epsilon = \frac{(n)}{(a)}\Delta'' - \frac{(p)}{(a)}\Delta'$$

$$\xi = \frac{(p)}{(a)}\Delta''$$

Si comprende dover riuscire operoso il calcolo di questi coefficienti, e ciascuno dover essere una lunga fila di termini. Ma si vedrà fra poco come si possa schivare questo calcolo sì operoso, e gli altri più operosi ancora, che lo dovrebbero seguire.

Probl. 5° Spezzare la frazione $\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}$ nella serie delle frazioni

$$\frac{A}{(1+fz)^2}+\frac{A'}{1+fz}+\frac{B}{(1-fz)^2}+\frac{B'}{1-fz}+\frac{C}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{C'}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi-1}}\cdots+\frac{C'^{(\pi-1)}}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}$$

$$+\frac{D}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{D'}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}}\cdots\cdots+\frac{D'^{(\pi-1)}}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}$$

sarà

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^{\pi}} \\ A' &= \frac{1}{fdz}\,d\,\frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^{\pi}} \end{aligned}\right\}\text{fatto } 1+fz=0\text{, donde } z=-\frac{1}{f}$$

$$\left.\begin{aligned} B &= \frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^{\pi}} \\ B' &= \frac{1}{-fdz}\,d\,\frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^{\pi}} \end{aligned}\right\}\text{fatto } 1-fz=0\text{, donde } z=\frac{1}{f}$$

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}} \\ C' &= \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}dz}\,d\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}} \\ C'' &= \frac{1}{2.Mdz}\,d^2\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}} \\ C''' &= \frac{1}{2.3M^{\frac{3}{2}}dz}\,d^3\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C'^{(\pi-1)} &= \frac{1}{2.3..\pi M^{\frac{1}{2}}\pi dz^{\pi-1}}\,d^{\pi-1}\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}} \end{aligned}\right\}\text{fatto } z\sqrt{M}+\sqrt{k}=0\text{, donde } z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}} \\ D' &= \frac{1}{M^{\frac{1}{2}}dz}\,d\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}} \\ D'' &= \frac{1}{2Mdz^2}\,d^2\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}} \\ D''' &= \frac{1}{2.3M^{\frac{3}{2}}dz^3}\,d^3\,\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}} \end{aligned}\right\}\text{fatto } z\sqrt{M}-\sqrt{k}=0\text{, donde } z=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

$D'^{(\pi-1)}$

$$D'^{(\pi-1)} = \frac{1}{2.3\ldots\pi M^{\frac{1}{2}\pi}} \frac{d^{\pi-1}}{dz^{\pi-1}} \frac{Z}{(1-fz^2f^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi} \Bigg\} \text{fatto } z\sqrt{M}-\sqrt{k}=0, \text{donde } z=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

Teorema 2° B = A generalmente

Non contenendo Z, che potenze di grado pari di z, non può nascervi differenza, vi si sostituisca per z il negativo valore $\frac{-1}{f}$, od il positivo $\frac{1}{f}$; e la contrarietà poi di questi due valori distrugge la contrarietà dei segni nelle due quantità $(1-fz)^2$, $(1+fz)^2$, fattori dei due denominatori; nè può per essi contrarj valori sorgere differenza nel comune fattore de' medesimi denominatori $(Mz^2-k)^\pi$ inchiudente il solo quadrato di z: dunque generalmente B = A.

Per lo che basterà determinar A, e sarà tutt' insieme determinato B.

Probl. 6° svolgere le quantità

$$\frac{1}{dz} d \frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi} \qquad \frac{1}{dz} d \frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi}$$

Ponendo $\frac{1}{dz} dZ = Z'$, si ha

$$\frac{1}{dz} d \frac{Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi} = \frac{Z'}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^\pi} + \frac{2fZ}{(1-fz)^3(Mz^2-k)^\pi} - \frac{2\pi Mz.Z}{(1-fz)^2(Mz^2-k)^{\pi-1}}$$

$$\frac{1}{dz} d \frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi} = \frac{Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^\pi} - \frac{2f.Z}{(1+fz)^3(Mz^2-k)^\pi} - \frac{2\pi Mz.Z}{(1+fz)^2(Mz^2-k)^{\pi-1}}$$

Teorema 3° generalmente B' = A'

A' è uguale alla prima delle due espressioni ora trovate divise per f, e postovi $\frac{-1}{f}$ per z; e B' è uguale alla seconda divisa per $-f$, e postovi $\frac{-1}{f}$ per z. Li denominatori dei tre termini delle due espressioni diventano per le ragioni nel 2° *Teor.* addotte identici, sostituitivi i contrarj valori di z; i numeratori dei due secondi termini divengono identici divisi rispettivamente per f, e per $-f$; li numeratori dei due terzi termini, separato il comune fattore $2\pi MZ$, e rispettivamente per f, e per $-f$ divisi, presentano $\frac{-z}{f}$, $\frac{-z}{-f}$, e risultano identici, ed ambedue $= \frac{1}{f^2}$, posto in

questo $z = \frac{1}{f}$, in quello $z = \frac{-1}{f}$; li numeratori finalmente dei due primi termini, divisi rispettivamente per f, e per $-f$, riescono $\frac{Z'}{f}$, $\frac{Z'}{-f}$, ma è da avvertire, che essendo Z una funzione di sole potenze pari di z, ne segue, che Z' sia una funzione di sole potenze di z impari, e senza termine costante, già svanito nel differenziare: laonde sostituito $\frac{-1}{f}$ in luogo di z in $\frac{Z'}{f}$, ed $\frac{1}{f}$ in luogo di z in $\frac{Z'}{-f}$, comprendesi, che risultar debbono identici $\frac{Z'}{f}$, $\frac{Z'}{-f}$. Tutti dunque e tre i termini di B' coincidono con i tre termini di A', ed è generalmente $B' = A'$.

Per conseguenza trovato A' si avrà in un con esso anche B'.

Teorema 4° $D = C$, sempre che sia π numero pari; e $D = -C$, qualora sia π numero dispari. A cagione del grado pari delle potenze di z nel comune numeratore Z, e nel comun divisore $(1-f^2z^2)^2$ non può in questi nascere differenza di contrarj valori di $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, $z = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$: tutto dunque l'esame si restringe ai due divisori $(z\sqrt{M} - \sqrt{k})^\pi$, $(z\sqrt{M} + \sqrt{k})^\pi$, che per la sostituzione, di $\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ in quello, di $\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ in questo, in luogo di z, divengono $(-2\sqrt{k})^\pi$, $(+2\sqrt{k})^\pi$. Ma nel caso di π pari $(-2\sqrt{k})^\pi = (+2\sqrt{k})^\pi$, ed in caso di π dispari $(-2\sqrt{k})^\pi = -(+2\sqrt{k})^\pi$. Dunque $D = C$, se π pari, e $D = -C$, se π dispari.

Nell' uno, e nell' altro caso però trovato C sarà trovato D, a sola condizione di cangiare a C il segno nel caso di π impari.

Probl. 7° Trovare le successive espressioni sviluppate, ma insieme convenevolmente ridotte, delle quantità generalmente rappresentate in

$$\frac{1}{dz^n} d^n \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi} \quad \ldots \quad \frac{1}{dz^n} d^n \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}$$

S' intenda $Z' = \frac{1}{dz} dZ$, $Z'' = \frac{1}{dz} dZ'$, $Z''' = \frac{1}{dz} dZ''$ . . . . . e si avrà

$\frac{1}{dz}$

$$\frac{1}{dz^2}d^2\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}=\frac{Z''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{4f.z.Z'}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$$
$$-\frac{\pi\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}}$$

Presi i differenziali di questi tre termini ne risultano nove, risultandone da ciascheduno tre, ma i nove si riducono ai sette seguenti

$$\frac{1}{dz^3}d^3\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}=\frac{Z'''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{8f^2.z.Z'}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$$
$$-\frac{2\pi\sqrt{M}.Z'}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{4f^2Z}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{24f^4z^2.Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}-\frac{8\pi f^2z\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^3(\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{\pi(\pi+1)M.Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+2}}$$

Pigliando i differenziali di questi sette termini ne proverranno ventuno, i quali però a tredici ridotti esibiranno

$$\frac{1}{dz^3}d^3\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}=$$
$$\frac{Z'''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{12f^2z.Z''}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}-\frac{2\pi\sqrt{M}.Z''}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{12f^2.Z'}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{72f^4z^2.Z'}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}-\frac{96f^2z\sqrt{M}.Z'}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$+\frac{3\pi(\pi+1)M.Z'}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+2}}$$
$$+\frac{72f^4z.Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}+\frac{192f^6z^3.Z}{(1-f^2z^2)^5(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}-\frac{12\pi f^2\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$$
$$-\frac{288f^4z^2\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^4(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}+\frac{12\pi(\pi+1)f^2z^2.MZ}{(1-f^2z^2)^3(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+2}}-\frac{\pi(\pi+1)(\pi+2)M\sqrt{M}.Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+3}}$$

. . . . . .

Così proseguendo sino a $\frac{1}{dz^{n-1}}d^{n-1}\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$ si anderà moltiplicando il numero de' termini, ma sempre, riducendo, ad un numero minore di quello, che a prima vista parrebbe dover provenire, e sarebbe 3^n, significando per n l'ordine del differenziale; e con distanza tanto più grande da 3^n, quanto più nella successione dei differenziali si avanzerà, come vedesi già accaduto ne' tre eseguiti, essendo il numero de' termini risultato per

il

il 1° giustamente $= 3$, per il 2° $= 7 = 3^2 - 2$, per il 3° $= 13 = 3^3 - 14$.

Le espressioni delle quantità generalmente rappresentate per $\frac{1}{dz^n} d^n \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2 (z\sqrt{M}+\sqrt{k})^\pi}$ si ottengono col solo cangiare nelle trovate al denominatore in $+$ il segno $-$, che sta al radicale $\sqrt{k}$; poichè non cadendo $\sqrt{k}$, siccome quantità costante, sotto la differenziazione, non reca verun cangiamento ne' differenziali la contrarietà del suo segno.

Teorema 5° Le quantità successive

$$\frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}, \frac{1}{dz} d \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}, \frac{1}{dz^2} d^2 \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi},$$

$$\frac{1}{dz^3} d^3 \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi}, \frac{1}{dz^4} d^4 \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^\pi} \cdots$$

postovi $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$

contengono alternamente e non contengono in tutti i termini loro il radicale $\sqrt{k}$, con questa differenza.

Che nel caso di π pari l'ordine alternativo comincia dal non contenerlo, cioè la prima delle esposte quantità nol contiene, la 2ª il contiene, la 3ª no, e così via via; nel caso di π dispari l' ordine alterno comincia inversamente dal contenerlo; ma in ambedue i casi si finirà in quantità, che lo conterrà.

È primieramente chiaro, che posto $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, nel divisore $1-f^2z^2$ elevato a qualsiasi podestà non vi entrerà, che k a potenza intera, onde questo divisore non può avere parte alcuna nella differenza dei casi, e dei risultati, che si contemplano, e che perciò la disquisizione ristrignesi ai numeratori, ed alle potenze dell'altro divisore $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$. Quanto ai numeratori essendo Z una funzione di sole potenze pari di z, Z' di potenze soltanto dispari, Z'' di potenze pari, Z''' di potenze dispari; e così alternativamente, è evidente che, posta $z = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, Z non conterrà $\sqrt{k}$, Z' il conterrà, Z'' nol conterrà, e così via via alternativamente. E rispetto al divisore $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$, che fatto $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, si riduce a $-2\sqrt{k}$, è del pari

ma-

manifesto, che non conterranno $\sqrt{k}$ le sue potenze pari, e lo conterranno le sue potenze dispari. Dunque $\frac{Z}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$, fattovi $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ non conterrà $\sqrt{k}$, se π sia numero pari, e lo conterrà se π sia numero dispari, e così sarà della 1ª delle quantità nel teorema segnate, non portando differenza, come si è detto, il divisore $(1-f^2z^2)^2$.

Le frazioni $\frac{Z'}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$, $\frac{zZ}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}$, $\frac{Z}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi+1}}$ fattovi $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ conterranno tutte e tre $\sqrt{k}$ nel caso di π pari, poichè le due prime lo avranno nei loro numeratori senza averlo al denominatore, e la terza inversamente al denominatore, senza al numeratore. E tutte e tre non lo conterranno nel caso di π dispari; imperciocchè le due prime avendolo insieme al numeratore, ed al denominatore, ne rimarranno prive per elisione, e la terza ne sarà da se priva, e nel numeratore, e nel denominatore. Dunque la 2ª delle segnate quantità conterrà $\sqrt{k}$ se π pari; nol conterrà se π dispari.

È patente il processo della dimostrazione.

Che poi l'ultima di esse segnate quantità sia per contenere in ogni caso; e di π pari e di π dispari, il radicale $\sqrt{k}$, si comprenderà riflettendo, che il numero delle quantità sarà sempre $= \pi$, e che nel caso di π dispari cominciando l'ordine alternativo dal contenere $\sqrt{k}$, deve pure terminare nel contenere; e che nel caso di π pari cominciando l'ordine alternativo dal non contenere $\sqrt{k}$, deve terminare nel contenere.

Teorema 6° Dei numeratori C, C', C'', C''' ... e dei D, D', D'', D''' ... delle frazioni del *Prob.* 5° quelli dei corrispondenti saranno identici, che non conterranno $\sqrt{k}$; e quelli avranno contrario segno, e valore, che il conterranno.

Nasce la serie dei numeratori C, C', C'', C''... dal farsi $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$

La serie dei numeratori D, D', D'', D''' .... dal farsi $z = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ dove sussiste $\sqrt{k}$, deve sussistere la contrarietà del segno, e produr-

durre contrarietà di valore; e là donde $\sqrt{k}$ svanisce per elevazione a potenza pari, ivi deve succedere identicità.

Corollario 1° Dunque nel caso di π pari si avrà questa serie $D = C, D' = -C', D'' = C'', D''' = -C''' \ldots D'^{(\pi-1)} = -C'^{(\pi-1)}$ e nel caso di π dispari quest' altra
$D = -C, D' = C', D'' = -C'', D''' = C''' \ldots D'^{(\pi-1)} = -C'^{(\pi-1)}$

Corollario 2° Li due qualunque di tali numeratori, che segnerò per $C'^{(2i)}$, $D'^{(2i)}$, appartenenti a frazioni, che abbiano a denominatori potenze pari di $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$, che indeterminatamente comprendo in $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda}$, $(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda}$, saranno identici. Ed all'opposto saranno di contrario segno, e valore li due qualunque numeratori di due frazioni, i cui denominatori sieno le potenze dispari $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}$, $(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}$.

Probl. 8° Designati per Λ, Λ' i valori che prendono Z, Z' fatto $z = \frac{-1}{f}$, e per Π, Π', Π'', Π'''... i valori che prendano Z, Z', Z'', Z'''... fatto $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ dedurre dalle espressioni svolte nei *Prob.* 5° 6°, 7° le formole di A, A', e di C, C', C'', C''' ....

Fatto $z = \frac{1}{f}$, il divisore $1 - fz$ si cangia in 2, ed il divisore $Mz^2 - k$ diventa $= \frac{M}{f^2} - k = \frac{M - f^2k}{f^2} = \frac{1}{f^2}(kv^2 - a\omega - kv^2 + k\omega)$ (*Prob.* 2°) $= \frac{(k-a)\omega}{f^2} = \frac{N\omega}{f^2}$ (*Prob.* X sul principio). Quindi

$$A = \frac{f^2 \Lambda}{4N^\pi \omega^\pi}$$

$$A' = \frac{f^{2\pi-1}}{4N^\pi \omega^\pi} \Lambda' + \left(\frac{f^{2\pi}}{4N^\pi \omega^\pi} + \frac{\pi f^{2\pi} M}{2N^{\pi+1} \omega^{\pi+1}}\right) \cdot \Lambda$$

Posto $z = \frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, il divisore $1 - f^2z^2$ si fa $= 1 - \frac{f^2k}{M} = \frac{1}{M}(M - f^2k)$ $= \frac{N\omega}{M}$; ed il divisore $z\sqrt{M} - \sqrt{k} = -2\sqrt{k}$. Conseguentemente

$$C = \frac{1}{(-2)^\pi N^2 \omega^2 k^{\frac{\pi}{2}}} \cdot M^2 \Pi$$

$$C' = \frac{1}{(-2)^\pi N^2 \omega^2 k^{\frac{\pi}{2}}} \Pi' M\sqrt{M} - \left(\frac{4f^2\sqrt{k}}{(-2)^\pi N^3 \omega^3 k^{\frac{\pi}{2}}} + \frac{\pi}{(-2)^{\pi+1} N^2 \omega^2 k^{\frac{\pi+1}{2}}} \Pi M^2\right.$$

$$C''=\frac{1}{2(-2)^{\pi}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi}{2}}}\Pi''M-\left(\frac{4f^{2}\sqrt{k}}{(-2)^{\pi}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi}{(-2)^{\pi+1}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+1}{2}}}\right)\Pi'M\sqrt{M}$$

$$+\left(\frac{4(\pi-1)f^{2}}{(-2)^{\pi+1}N^{3}\omega^{3}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{12f^{4}k}{(-2)^{\pi}N^{4}\omega^{4}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi(\pi+1)}{2(-2)^{\pi+2}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+2}{2}}}\right)\Pi M^{2}$$

$$C'''=\frac{1}{6(-2)^{\pi}N_{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi}{2}}}\cdot\Pi'''\sqrt{M}-\left(\frac{2f^{3}\sqrt{k}}{(-2)^{\pi}N3\omega3k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi}{2(-2)^{\pi+1}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+1}{2}}}\right)\Pi''M$$

$$+\left(\frac{12f^{4}k}{(-2)^{\pi}N^{4}\omega^{4}k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{12f^{2}}{(-2)^{\pi+1}N3\omega3k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{\pi(\pi+1)}{2(-2)^{\pi+2}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+2}{2}}}\right)\Pi'M\sqrt{M}$$

$$-\left(\frac{-32f6k\sqrt{k}}{(-2)^{\pi}N5\omega5k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{24f^{4}\sqrt{k}}{(-2)^{\pi+1}N4\omega4k^{\frac{\pi}{2}}}+\frac{2\pi(\pi+1)f^{2}}{(-2)^{\pi+2}N3\omega3k^{\frac{\pi+3}{2}}}+\frac{\pi(\pi+1)(\pi+2)}{6(-2)^{\pi}N^{2}\omega^{2}k^{\frac{\pi+3}{2}}}\right)\Pi M^{2}$$

. . . . . .

A compiere la determinazione di A, A', C, C', C'', C''' . . . ed insieme di B, B', D, D', D'', D''' . . . non rimane, che di trovare i valori di Λ, Λ', Π, Π', Π'', Π''' . . . .

Prob. 9° Ritrovare i valori di Λ, Λ', Π, Π', Π'', Π''' . . . .

Essendo Λ, Λ' ciò, che divengono Z, Z', fattovi $z=\frac{-1}{f}$, e Π, Π' Π'', Π''' . . . . ciò che diventano Z, Z', Z'', Z''' . . . fattovi $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, il metodo, che primo, e naturalmente allo intelletto presentasi per determinarne i valori, quello si è di cominciar dal cercare le espressioni di Z, Z', Z'', Z''' . . . . E poichè (*Prob.* 4°) abbiamo detto, che la forma di Z è

$$Z=\alpha z^{2\pi+2}-\beta z^{2\pi}+\gamma z^{2\pi-2}-\delta z^{2\pi-4}+\epsilon z^{2\pi-6}\ldots\ldots\mp\xi$$

e quindi ne vengono

$$Z'=(2\pi+2)\alpha z^{2\pi+1}-2\pi.\beta z^{2\pi-1}+(2\pi-2)\gamma z^{2\pi-3}-(2\pi-4)\delta z^{2\pi-5}\ldots.$$

$$Z''=(2\pi+2)(2\pi+1)\alpha z^{2\pi}-2\pi(2\pi-1)\beta z^{2\pi-2}+(2\pi-2)(2\pi-3)\pi\gamma z^{2\pi-4}\ldots$$

$$Z'''=(2\pi+2)(2\pi-1)(2\pi)\alpha z^{2\pi-1}-2\pi(2\pi-1)(2\pi-2)\beta z^{2\pi-3}\ldots\ldots$$

. . . . . .

Il primo passo a farsi sarebbe il determinare per le formole nello stesso *Prob.* 4 accennate, i coefficienti α, β, γ, δ . . . ciascheduno de' quali emergerebbe composto di una fila di termini ancor più

lunga, come dalle formole medesime apparisce, di quelle delle quantità Δ, Δ', Δ'', Δ'''... numeratori dei coefficienti della parte intera 'Z. Si dovrebbe di poi a trovare Λ, cangiata nella funzione Z la variabile z in $\frac{-1}{f}$, disporre ordinatamente, le une sotto le altre con corrispondenza dei termini simili le fila di $\alpha\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi+2}$, $-\beta\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi}$, $+\gamma\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi-2}$, $-\delta\left(\frac{-1}{f}\right)^{2\pi-4}$ ... e con le somme delle colonne trovarne il risultato. Lo stesso si avrebbe a fare per determinare Π con la sola differenza di moltiplicare i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ... per le potenze di $\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, come si moltiplicarono per quelle di $\frac{-1}{f}$. Similmente avrebbesi ad operare per determinare Λ', Π', Π'', Π''' ...., ma con calcoli tanto più via via fastidiosi, quanti più sono i numeri, co' quali gli stessi coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .... trovansi via via in Z', Z'' Z''' ... moltiplicati. Qual fatica, qual pena di calcolo! Ma si può evitare tanta laboriosità mercè i seguenti teoremi.

Teorema 7.° Λ è ciò che diventa $z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi$ fatto $z=\frac{-1}{f}$

Per lo partimento nel *Prob.* 3° operato si ha

$$'Z + \frac{Z}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi} = \frac{z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi}{(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi}. \text{ Quindi}$$

$$'Z\,(1-f^2z^2)^2\,(Mz^2-k)^\pi + Z = (v^2z^2-1)^\pi\, z^{2\pi+2}$$

fatto $z=\frac{-1}{f}$, va a zero il primo termine del primo membro, e rimane

$$Z = \Lambda = z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi = \frac{1}{f^{2\pi+2}}\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^\pi = \frac{k^\pi}{f^{4\pi+2}}$$

quale speditezza di determinazione, e semplicità di risultato!

Teorema 8.° $\Lambda = \frac{1}{dz}\, d\,(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi)$ fatto dopo la differenziazione $z = \frac{-1}{f}$.

Differenziando l' equazione $'Z(1-f^2z^2)^2(Mz^2-k)^\pi + Z = z^{2\pi+2}$ $(v^2z^2$

$(v^2z^2-1)^\pi$, e dividendo per dz, in tutti e tre i termini risultanti dal differenziale del primo termine del primo membro vi sarà $1-f^2z^2$, onde posto $z=\frac{-1}{f}$, tutti e tre cadranno a zero, e rimarrà soltanto $\frac{1}{dz}dZ=Z'=\Lambda'=\frac{1}{dz}d\,(z^{2\pi+2})(v^2z^2-1)^\pi$ a condizione di far, dopo avuto il differenziale, $z=\frac{-1}{f}$

Ora $\frac{1}{dz}d(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi)=(2\pi+2)z^{2\pi+1}(v^2z^2-1)^\pi+2\pi v^2z^{2\pi+3}$ $(v^2z^2-1)^{\pi-1}$, che posto $z=\frac{-1}{df}$ diventa $=\frac{-(2\pi+2)}{f^{2\pi+1}}\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^\pi-\frac{2\pi v^2}{f^{2\pi+3}}\left(\frac{v^2}{f^2}-1\right)^{\pi-1}=\frac{-(2\pi+2)v^\pi-2\pi v^{\pi-1}v^2}{f^{4\pi+1}}$

Dunque $\Lambda'=\frac{-(2\pi+2)v^\pi-2\pi v^{\pi-1}v^2}{f^{4\pi+1}}$

Teorema 9°

$$\left.\begin{aligned}
\Pi &= z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\\
\Pi' &= \frac{1}{dz}d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)\\
\Pi'' &= \frac{1}{dz^2}d^2\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)\\
\Pi''' &= \frac{1}{dz^3}d^3\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Pi'^{(\pi-1)} &= \frac{1}{dz^{\pi-1}}d^{\pi-1}\left(z^{2\pi-2}(v^2z^2-1)^\pi\right)
\end{aligned}\right\}\text{fatto per }\Pi\text{ immediatamente e per }\Pi',\Pi'',\Pi'''\ldots\text{ dopo le differenziazioni } z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$$

Nella equazione $'Z(1-f^2z^2)^2+Z=z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi$, posto $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, si annulla il primo termine del primo membro, e resta $Z=\Pi=z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi$ intendendo, che quì si faccia $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$. Differenziata, e divisa per dz l'equazione medesima, svaniranno, fatto $z=\frac{-\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$ tutti i termini nati dal differenziale del primo termine del primo membro, perchè tutti contenenti Mz^2-k, per lo che non rimarrà se non $\frac{1}{dz}dZ=Z'=\Pi'=\frac{1}{dz}d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)$

La ragione si estende sino al differenzial $d^{\pi-1}$ dell' equazione; dunque è chiara la verità del proposto teorema.

Ora $\frac{1}{dz} d\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)=(2\pi+2)z^{2\pi+1}(v^2z^2-1)^\pi+2\pi v^2z^{2\pi+3}(v^2z^2-1)^{\pi-1}$

$$\frac{1}{dz^2}d^2\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)=(2\pi+2)(2\pi+1)z^{2\pi}(v^2z^2-1)^\pi+2\pi(4\pi+5)v^2z^{2\pi+2}\times (v^2z^2-1)^{\pi-1}+4\pi(\pi-1)v^4z^{2\pi+4}(v^2z^2-1)^{\pi-2}$$

$$\frac{1}{dz^3}d^3\left(z^{2\pi+2}(v^2z^2-1)^\pi\right)=(2\pi+2)(2\pi+1)(2\pi)z^{2\pi-1}(v^2z^2-1)^\pi+24(\pi+1)\times v^2(v^2z^2-1)^{\pi-1}+12\pi(\pi-1)(\pi+3)v^4z^{2\pi+3}(v^2z^2-1)^{\pi-2}+8\pi(\pi-1)(\pi-2)\times v^6z^{2\pi+5}(v^2z^2-1)^{\pi-3}$$

. . . . . .

fatto $z=-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{M}}$, ed attendendo che $\frac{v^2k}{M}-1=\frac{v^2k-M}{M}=\frac{v^2k-kv^2+a\omega}{M}=\frac{a\omega}{M}$ si troverà

$$\Pi=\frac{k^{\pi+1}a^\pi\omega^\pi}{M^{2\pi+1}}$$

$$\Pi'=\left(-(2\pi+2)a^\pi\omega^\pi-2\pi kv^2a^{\pi-1}\omega^{\pi-1}\right)\cdot\frac{k^{\pi+\frac{1}{2}}}{M^{2\pi+\frac{1}{2}}}$$

$$\Pi''=\left((2\pi+2)(2\pi+1)a^\pi\omega^\pi+2\pi(4\pi+5)kv^2a^{\pi-1}\omega^{\pi-1}+4\pi(\pi-1)k^2v^4a^{\pi-2}\omega^{\pi-2}\right)\cdot\frac{k^\pi}{M^{2\pi}}$$

$$\Pi'''=\left(-(2\pi+2)(2\pi+1)(2\pi)a^\pi\omega^\pi-24\pi(\pi+1)^2kv^2a^{\pi-1}\omega^{\pi-1}-12(2\pi+3)(\pi)(\pi-1)\times k^2v^4a^{\pi-2}\omega^{\pi-2}-8\pi(\pi-1)(\pi-2)k^3v^6a^{\pi-3}\omega^{\pi-3}\right)\cdot\frac{k^{\pi-\frac{1}{2}}}{M^{2\pi-\frac{1}{2}}}$$

. . . . . .

Probl. 10.° Assegnare i completi generali valori de' numeratori A, A', C, C', C'', C''' . . . . ed insieme dei B, B', D, D', D'', D''' . . . . .

Non rimane, che d' inserire nelle formole loro stabilite nel *Probl.* 7° quelle delle quantità Λ, Λ', Π, Π', Π'', Π''' . . . . testè ritrovate, e fatte le convenienti riduzioni si troverà

$$A=\frac{1}{4f^{2\pi+2}N^\pi}$$

$$A'=\frac{\pi a}{2f^{2\pi}N^{\pi+1}\omega}-\frac{2\pi+1}{4f^{2\pi+2}N^\pi}$$

$$C=\frac{k^{\frac{\pi+2}{2}}a^\pi\omega^{\pi-2}}{(-2f^\pi N^2M^{2\pi-1}}$$

C' =

$$C' = \frac{(3\pi+4)k^{\frac{\pi+1}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-2}}{(-2)^{\pi+1} N^2 M^{2\pi-1}} - \frac{2\pi k^{\frac{\pi+3}{2}} a^{\pi-1} \omega^{\pi-3} v^2}{(-2)^{\pi} N^2 M^{2\pi-1}} - \frac{4k^{\frac{\pi+3}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-3} f^2}{(-2)^{\pi} N^3 M^{2\pi-1}}$$

$$C'' = \frac{(9\pi^2+17\pi+8)k^{\frac{\pi}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-2}}{2(-2)^{\pi+2} N^2 M^{2\pi-1}} - \frac{2\pi(3\pi+5)k^{\frac{\pi+2}{2}} a^{\pi-1} \omega^{\pi-3} v^2}{(-2)^{\pi+1} N^2 M^{2\pi-1}} + \frac{2\pi(\pi-1)k^{\frac{\pi+4}{2}} a^{\pi-2} \omega^{\pi-4} v^4}{(-2)^{\pi} N^2 M^{2\pi-1}}$$

$$- \frac{4(8\pi+5)k^{\frac{\pi+2}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-3} f^2}{(-2)^{\pi+1} N^3 M^{2\pi-1}} + \frac{8\pi k^{\frac{\pi+4}{2}} a^{\pi-1} \omega^{\pi-4} f^2 v^2}{(-2)^{\pi} N^3 M^{2\pi-1}} + \frac{12k^{\frac{\pi+4}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-4} f^4}{(-2)^{\pi} N^4 M^{2\pi-1}}$$

$$C''' = \frac{(9\pi^3+15\pi^2+6\pi)k^{\frac{\pi-1}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-2}}{2(-2)^{\pi+3} N^2 M^{2\pi-1}} - \frac{(9\pi^3+23\pi^2+16\pi)k^{\frac{\pi+1}{2}} a^{\pi-1} \omega^{\pi-3} v^2}{(-2)^{\pi+2} N^2 M^{2\pi-1}} +$$

$$\frac{(6\pi^3+6\pi^2-12\pi)k^{\frac{\pi+3}{2}} a^{\pi-2} \omega^{\pi-4} v^4}{(-2)^{\pi+1} N^2 M^{2\pi-1}} - \frac{4\pi(\pi-1)(\pi-2)k^{\frac{\pi+5}{2}} a^{\pi-3} \omega^{\pi-5} v^6}{3(-2)^{\pi} N^2 M^{2\pi-1}} -$$

$$\frac{(3(\pi^2-2\pi-32)k^{\frac{\pi+1}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-3} f^2}{(-2)^{\pi+2} N^3 M^{2\pi-1}} + \frac{(32\pi^2+16\pi)k^{\frac{\pi+3}{2}} a^{\pi-1} \omega^{\pi-4} f^2 v^2}{(-2)^{\pi+1} N^3 M^{2\pi-1}}$$

$$- \frac{8(\pi^2-1)k^{\frac{\pi+5}{2}} a^{\pi-2} \omega^{\pi-5} f^2 v^4}{(-2)^{\pi} N^3 M^{2\pi-1}} + \frac{(48\pi+24)k^{\frac{\pi+3}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-4} f^4}{(-2)^{\pi+1} N^4 M^{2\pi+1}} - \frac{24\pi k^{\frac{\pi+5}{2}} a^{\pi-1} \omega^{\pi-5} f^4 v^2}{(-2)^{\pi} N^4 M^{2\pi-1}}$$

$$- \frac{30k^{\frac{\pi+5}{2}} a^{\pi} \omega^{\pi-5} f^6}{(-2)^{\pi} N^5 M^{2\pi-1}}$$

. . . . . .

Essendosi nei *Teoremi* 2° *e* 3° dimostrato, che generalmente $B = A$, $B' = A'$ non occorrono per B, B' nuove formole; e similmente non sono di mestieri per D, D', D'', D''' . . . essendosi nel *Corollario* 2° *del Teorema* 6 dedotto essere identici con i corrispondenti C, C', C'', C''' . . . quei tali, che hanno per denominatori potenze pari di $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$; ed essere di segno, e valore contrario quei tali, che hanno per denominatori potenze dispari delle quantità medesime $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$.

Integrazione

del termine generale $\mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi} dx$

Attesa la trasformazione operata nel *Probl.* 2.°, attesi gli spez-

za-

zamenti fatti nei *Probl.* 3° e 5°, ed i teorem i relativamente dimostrati si ha

$$\int \mu P^{-\pi-\frac{1}{2}} Q^{\pi} dx =$$

$$-2\mu N^{\pi+1}\omega\varphi^{\pi}\int\left(\frac{v^{2\pi}}{(a)}z^{2\pi-2}dz+\frac{\Delta}{(a)}z^{2\pi-4}dz+\frac{\Delta'}{(a)}z^{2\pi-6}dz+\frac{\Delta''}{(a)}z^{2\pi-8}dz\ldots+\frac{\Delta^{(\pi-1)}}{(a)}z^{0}dz\right)$$

$$-2\mu N^{\pi+1}\omega\varphi^{\pi}\left(A\int\left(\frac{dz}{(1+fz)^2}+\frac{dz}{(1-fz)^2}\right)+A'\int\left(\frac{dz}{1+fz}+\frac{dz}{1-fz}\right)+C\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi}}\pm\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi}}\right)+C'\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{\pi-1}}\mp\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{\pi-1}}\right)\ldots+C^{(\pi-1)}\int\left(\frac{dz}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}-\frac{dz}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}\right)\right)$$

Rappresenti $\Omega z^p dz$ un qualunque termine della parte intera, e sarà

$\int \Omega z^p dz = \frac{\Omega}{p} z^{p-1} + \text{Cost.} = \frac{\Omega}{p}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p-1}{2}} + \text{Cost.}$ E dovendo essere l' integrale $= 0$, fatto $x = 0$, poichè allora $T = 0$, sarà

$\text{Cost.} = \frac{\Omega}{p}\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{p-1}{2}}$ cioè (*Probl.* 2°) $= -\frac{\Omega}{p}\cdot\frac{1}{v^{p-1}}$: onde

$$\int \Omega z^p dz = \frac{\Omega}{p}\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{p-1}{2}} - \frac{1}{v^{p-1}}\right]$$

Passando alle frazioni sarà

$A\int\left(\frac{dz}{(1+fz)^2}+\frac{dz}{(1-fz)^2}\right) = \frac{A}{f}\left(\frac{-1}{1-fz}+\frac{1}{1-fz}\right) + \text{Cost.} = \frac{A}{f}\left(\frac{-1+fz+1+fz}{1-f^2z^2}\right)$ $+ \text{Cost.} = \frac{2Az}{1-f^2z^2} + \text{Cost.}$ Ma $z = \frac{\sqrt{(N-x)}}{\sqrt{(e-f^2x)}}$, ed $1 - f^2z^2 =$ $\frac{e-f^2x-f^2(N-x)}{e-f^2x} = \frac{e-f^2N}{e-f^2x} = \frac{N\omega}{e-f^2x}$ (*Probl.* 2°); dunque $\frac{2Az}{1-f^2z} + \text{Cost.}$ $= 2A.\frac{(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega} + \text{Cost.}$ E per dover essere l' integrale $= 0$, fatto $x = 0$, $\text{Cost.} = -\frac{2AN^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}}{N\omega} = -\frac{2ANv}{N\omega}$ (per le posizioni del Probl. 2°). Dunque $A\int\left(\frac{dz}{(1+fz)^2}+\frac{dz}{(1-fz)^2}\right) = \frac{2A}{N\omega}\left[(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}} - Nv\right]$;

$A'\int\left(\frac{dz}{1+fz}+\frac{dz}{1-fz}\right) = \frac{A'}{f}\left(l(1+fz)-l(1-fz)\right) + l.\text{Cost.}$ (segnando per l i logaritmi iperbolici) $= \frac{A'}{f}\, l\left\{\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\} + l.\text{Cost.}$ E dovven-

vendo essere l'integrale $= 0$, posto $x = 0$, Cost. $= -\frac{A'}{f}\, l \left\{ \frac{1+f\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N}{e}\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}$

$= -\frac{A'}{f}\, l \left\{ \frac{1+\frac{f}{v}}{1-\frac{f}{v}} \right\}$; laonde $A' \int \left(\frac{dz}{1+fz} + \frac{dz}{1-fz} \right) = \frac{A'}{f}\, l \left\{ \frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}} \right.$

$\left. \times \frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}} \right\}$

Procedendo alle frazioni, che hanno per denominatori le potenze delle quantità $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$ basta trattare in generale i due casi distinti nel *Corollario* 2° *del Teor.* 6°. Incominciamo dal caso delle potenze di grado pari

$$C'^{(2s)} \int \left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda}} + \frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda}} \right) = -\frac{C'^{(2s)}}{(2\lambda-1)\sqrt{M}} \left(\frac{1}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}} \right) + \text{Cost.} = -\frac{C'^{(2s)}}{(2\lambda-1)\sqrt{M}} \left(\frac{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}+(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}}{(Mz^2-k)^{2\lambda-1}} \right) + \text{Cost.}$$

È facile a comprendere, che effettuando le due potenze nel numeratore indicate, e sommando i termini simili, si elideranno per la contrarietà de' segni tutti i termini di luogo pari, e non rimarranno, che quelli di luogo impari da unirsi insieme: la qual unione equivalerà al doppio dei termini di sede dispari della sola potenza $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}$: così che, se per Σ s' intenda l'aggregato de' termini soltanto tali di questa potenza, il numeratore tutto della frazione variabile si riduca a 2Σ. Per ciò, che spetta il denominatore, osservisi, che, sostituito il valore di z, si ha $Mz^2 - k = \frac{M(N-x)}{e-f^2x} - k = \frac{1}{e-f^2x}(MN - Mx - ke + f^2kx)$. Ma, per le posizioni del *Prob.* 2°, $MN - ke = -Na\omega$, e per ciò, che si è dimostrato nel *Prob.* 7°, $M - f^2k = N\omega$, conseguentemente $MN - ke - (M - f^2k)x = -N\omega(a+x)$: dunque $Mz^2 - k = -\frac{N\omega(a+x)}{e-f^2x}$, e quinci $\frac{1}{(Mz^2-k)^{2\lambda-1}} = \frac{(e-f^2x)^{2\lambda-1}}{(-N\omega(a+x))^{2\lambda-1}}$, e finalmente

$C'^{(2s)}$

$$C'^{(2s)}\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda}}+\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda}}\right)=\frac{C'^{(2s)}}{(2\lambda-1)\sqrt{M}}\times\frac{\Sigma(c-f^2x)^{2\lambda-1}}{(M\omega(a+x))^{2\lambda-1}}.$$

Passiamo all' altro caso.

$$C'^{(2s-1)}\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}}-\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}}\right)=$$

$$\frac{C'^{(2s-1)}}{(2\lambda-2)\sqrt{M}}\left(\frac{-(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-2}+(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-2}}{(Mz^2-k)^{2\lambda-2}}\right)+\text{Cost.}$$

in tal caso elisi i termini di luogo dispari delle potenze formanti il numeratore, non rimarranno da raccogliersi, che i termini di luogo pari della potenza $(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-2}$ volti di negativi in positivi, e quelli istessamente di sede pari della potenza $(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-2}$ col positivo loro segno; così che se la somma di questi soli si ponga $=\Sigma'$, tutto il numeratore variabile si ridurrà ad essere $2\Sigma'$. Rispetto al denominatore si applichino le riduzioni di sopra. Sarà dunque

$$C'^{(2s-1)}\int\left(\frac{dz}{(z\sqrt{M}+\sqrt{k})^{2\lambda-1}}-\frac{dz}{(z\sqrt{M}-\sqrt{k})^{2\lambda-1}}\right)=$$

$$\frac{C'^{(2s-1)}}{(2\lambda-2)\sqrt{M}}\times\frac{\Sigma'(c-f^2x)^{2\lambda-1}}{(N\omega(a+x))^{2\lambda-2}}+\text{Cost.}$$

Le costanti si determineranno per i valori risultanti da Σ, Σ', fatto $x=0$.

Resta la integrazione delle due frazioni aventi per denominatori i binomj $z\sqrt{M}+\sqrt{k}$, $z\sqrt{M}-\sqrt{k}$ al semplicissimo grado 1, ed i numeratori generalmente di contrario segno, e valore. Sarà pertanto il loro integrale

$$C'^{(\pi-1)}\int\left(\frac{dz}{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}-\frac{dz}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}\right)=\frac{C'^{(\pi-1)}}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{z\sqrt{M}+\sqrt{k}}{z\sqrt{M}-\sqrt{k}}\right)+l.\text{Cost.}$$

$$=\frac{C'^{(\pi-1)}}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{c-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{c-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

AP-

APPLICAZIONE.

A più comoda intelligenza dell' applicazione stimo bene raccogliere quì i significati delle lettere

R . . . raggio della Terra medio

$k = 60$, numero di raggi terrestri dal centro della Terra a quel della Luna

a frazione tale, che aR significhi la distanza del punto dello scagliamento del sasso dal centro lunare

$N = k - a$

$\frac{1}{m} = \frac{1}{58,6}$ espressione della massa della Luna rispetto a quella della Terra

G . . . . . Gravità assoluta media alla superficie della terra (*Probl.* II)

$\omega = \frac{aGR}{N}$

$\varphi = \frac{aGR}{am}$

v . . . velocità dal vulcano lunare al sasso impressa nello scagliamento

$e = Nv^2$

$f^2 = v^2 - \omega$

$M = kv^2 - a\omega$

x . . . numero indeterminato, intero o rotto, per cui xR significa il viaggio dal sasso fatto

$P = v^2 + \frac{ax}{N-x}$

$Q = \frac{ax}{a+x}$

l . . . segno dei logaritmi iperbolici

Tenuti alla mente presenti questi significati, ecco l' applicazione con i fattori dalle diverse formole dipendenti gli uni dagli altri distinti a più facile riscontro, riserbando all' atto del calcolo numerico le convenienti riduzioni

I.° Termine, fatto $\pi=0$

$$R\int P^{-\frac{1}{2}}dx = -2RN\omega \times$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$-\frac{1}{4f^2}\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

II.° Termine, fatto $\pi=1$

$$R\int\frac{1}{2}P^{-\frac{3}{2}}Qdx=-\frac{2}{2}RN^2\omega\varphi\times$$

$$\frac{v^2}{Mf^4}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right)$$

$$+\frac{1}{4f^4N}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{a}{2f^4N^2\omega}-\frac{3}{4f^4N}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

$$-\frac{k^{\frac{3}{2}}a}{2N^2M\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

III.° Termine, fatto $\pi=2$

$$R\int\frac{3}{8}P^{-\frac{5}{2}}Q^2dx=\frac{3\cdot 2}{8}RN^3\omega\varphi^2\times$$

$$\frac{v^4}{M^2f^4}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{v^3}\right]$$

+

$$+\left(\frac{2v^4}{f^6M^2}+\frac{2\alpha v^2}{f^4M^3}\right)\left[\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right]$$

$$+\frac{1}{4f^6N^4}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{\alpha}{f^4N^3\omega}-\frac{5}{4f^6N^2}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left[\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right]$$

$$+\frac{k^2\alpha^2}{4N^4M^3}\left(\frac{2\left(N-x\right)^{\frac{1}{2}}\left(e-f^2x\right)^{\frac{1}{2}}}{N\omega(\alpha+x)}-\frac{2v}{\omega\alpha}\right)$$

$$+\frac{-3k^{\frac{3}{3}}\alpha^3}{4N^5M^3}-\frac{k^{\frac{5}{2}}\alpha v^2}{N^2M^3\omega}-\frac{k^{\frac{5}{2}}\alpha^{3/2}}{N^3M^3\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

IV.° Termine, fatto $n=3$

$$R\int\frac{5}{16}P^{-\frac{7}{2}}Q^3dx=\frac{5\cdot 2}{16}RN^4\omega\varphi^3\times$$

$$\frac{v^6}{M^3f^4}\cdot\frac{1}{5}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{v^5}\right)$$

$$+\left(\frac{2v^6}{f^6M^3}+\frac{3\alpha v^4}{f^7M^4}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{v^3}\right)$$

$$+\left(\frac{3k^2v^6}{f^4M^3}+\frac{6k\alpha v^4}{f^8M^4}+\frac{3k\alpha v^4}{M^4f^4}+\frac{3\alpha^2v^2}{M^3f^8}\right)\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right)$$

$$+\frac{1}{4f^8N^3}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}\left(e-f^2x\right)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{3\alpha}{2f^6N^2\omega}-\frac{7}{4f^8N^3}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

$$-\frac{k^{\frac{5}{2}}\alpha^3\omega}{8N^2M^5}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{k}(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{3}{2}}}{N^2\omega^2(\alpha+x)^2}-\frac{4\sqrt{k}.v^3}{\omega^2\alpha^2}\right)$$

$$+\left(\frac{13k^2a^3\omega}{16N^2M^5}+\frac{3k^3a^2v^2}{4N^2M^5}+\frac{k^3a^3f^2}{2N^3M^5}\right)\left(\frac{(2N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega(a+x)}-\frac{2v}{\omega a}\right)$$

$$+\left(-\frac{35k^{\frac{3}{2}}a^3\omega}{16N^2M^5}-\frac{21k^{\frac{5}{2}}a^2v^2}{N^2M^5}-\frac{3k^{\frac{7}{2}}av^4}{2N^2M^5\omega}-\frac{7k^{\frac{5}{2}}a^3f^2}{2N^3M^5}-\frac{3k^{\frac{7}{2}}a^2f^2v^2}{N^3M^5\omega}\right.$$

$$\left.-\frac{3k^7a^3f^4}{2N^4M^5\omega}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

V.° Termine, fatto $\pi=4$

$$R\int\frac{35}{128}P^{-\frac{9}{2}}Q^4dx=-\frac{35\,.\,2}{128}RN^5\omega\varphi^4\times$$

$$\frac{v^8}{M^4f^4}\cdot\frac{1}{7}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{v^7}\right)$$

$$+\left(\frac{2v^8}{f^6M^4}+\frac{4av^6}{f^4M^5}\right)\cdot\frac{1}{5}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{v^5}\right)$$

$$+\left(\frac{3v^8}{f^8M^4}+\frac{10ka\omega v^6}{f^4M^6}+\frac{2a\omega v^6}{f^6M^5}+\frac{6a\omega^2v^4}{f^6M^5}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{v^3}\right)$$

$$+\left(\frac{20k^2a\omega v^6}{f^4M^7}+\frac{12k\omega v^6}{f^8M^5}+\frac{20ka\omega^2v^4}{f^6M^6}+\frac{4kv^4}{f^4M^5}+\frac{4\omega^3v^2}{f^{10}M^4}\right)\left(\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{v}\right)$$

$$+\frac{1}{4f^{10}N^4}\cdot\frac{2}{N\omega}\left((N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}-Nv\right)$$

$$+\left(\frac{2a}{f^6N^5\omega}-\frac{9}{4f^{10}N^4}\right)\cdot\frac{1}{f}\,l\left(\frac{1+f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{1-f\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right)$$

$$+\frac{k^3a^4\omega^2}{16N^2M^7}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2M(N-x)^{\frac{3}{2}}(e-f^2x)^{\frac{3}{2}}}{N^3\omega^3(a+x)^3}-\frac{2Mv^3}{\omega^3a^3}+\frac{6k(N-x)^{\frac{3}{2}}(e-f^2x)^{\frac{5}{2}}}{N^3\omega^3(a+x)^3}\right.$$

$$\left.-\frac{6kv^5}{\omega^3a^3}\right)$$

$$+\left(-\frac{k^{\frac{5}{2}}a^4\omega^2}{2N^2M^7}-\frac{k^{\frac{7}{2}}a^3\omega v^2}{2N^2M^7}-\frac{k^{\frac{7}{2}}a^4\omega f^2}{4N^3M^7}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{k}(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{3}{2}}}{N^2\omega^2(a+x)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{4\sqrt{k}\,.\,v^3}{\omega^2a^2}\right)$$

+

$$+\left(\frac{55k^2a^4\omega^2}{32N^2M^7}+\frac{17k^3a^3\omega v^2}{4N^2M^7}+\frac{3k^4a^2v^4}{2N^2M^7}+\frac{7k^3a^4\omega f^2}{8N^3M^7}+\frac{2k^4a^3f^2v^2}{N^3M^7}\right.$$

$$\left.+\frac{3k^4a^4f^4}{4N^4M^7}\right)\left(\frac{2(N-x)^{\frac{1}{2}}(e-f^2x)^{\frac{1}{2}}}{N\omega(a+x)}-\frac{2v}{\omega a}\right)$$

$$+\left(-\frac{105k^{\frac{3}{2}}a^4\omega^2}{32N^2M^7}-\frac{63k^{\frac{5}{2}}a^3\omega v^2}{4N^2M^7}-\frac{27k^{\frac{7}{2}}a^2v^4}{2N^2M^7}-\frac{2k^{\frac{9}{2}}av^6}{N^2M^7\omega}-\frac{63k^{\frac{5}{2}}a^4\omega f^2}{8N^3M^7}\right.$$

$$-\frac{18k^{\frac{6}{2}}a^3f^2v^2}{N^3M^7}-\frac{3k^{\frac{9}{2}}a^2fv^4}{2N^3M^7\omega}-\frac{27k^{\frac{7}{2}}a^4f^4}{4N^4M^7}-\frac{6k^{\frac{9}{2}}a^3f^4v^2}{N^4M^7\omega}$$

$$\left.-\frac{2k^{\frac{9}{2}}a^4f^6}{N^5M^7\omega}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{M}}\,l\left(\frac{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{k}}{\sqrt{M}\left(\frac{N-x}{e-f^2x}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right)$$

ec. ec.

CALCOLO NUMERICO.

Volendo sapere il tempo T dal sasso speso in tutto il viaggio dal punto del suo scagliamento per la forza del vulcano lunare sino alla superficie della Terra, bisogna fare $x=59-a$: il che facendo si ha

$N-x=k-a-(59-a)=60-a-59+a=1$

$e-f^2x=Nv^2-(v^2-\omega)(59-a)=(60-a)v^2-(v^2-\omega)(59-a)$

$=v^2+\omega(59-a)$

Io non darò tutto esteso il calcolo numerico, che occuperebbe un buon numero di pagine, e mi restrignerò a dare i logaritmi fondamentali, ed i risultati dei cinque termini della serie algebraicamente quì sopra svolti ne' loro membri de' quali, chi si sentisse lena, e pazienza, avrà per mezzo dei detti logaritmi il comodo di riscontrare il computo, ed aggiugnere quello di altri termini.

LOGARITMI FONDAMENTALI.

Unirò ai logaritmi fondamentali richiesti al calcolo dei cinque esposti termini, ed altri qualunque della serie, che si ha per le mani, del tempo, quegli altri pochi, che nei Problemi ci hanno

no servito per il calcolo della velocità; onde tutti si abbiano in una tavola sott' occhio

Log. R = Log. 19617066 = 7,2926332

Log. k = Log. 60 = 1,7781513 . . . . Log. $\sqrt{k}$ = 0,8890756

Log. H = Log. 53,067642 = 1,7248298

Log. h = Log. 6,932358 = 0,8408809

Log. m = Log. 58,6 = 1,7678976

Log G = Log. 2(15,108082) = 1,4802394

Log. a = Log. $\frac{3}{11}$ = 9,4357286

Log. N = Log $(k-a)$ = Log $\left(60-\frac{3}{11}\right)$ = 1,7761727

Log. $(h-a)$ = Log. $\left(6\ 932358-\frac{3}{11}\right)$ = 0,8234501

Log. 59 = 1,7708520

Log. $(59-a)$ = 1,7688398

Log. ω = Log. $\frac{2GR}{N}$ = 7,2977299

Log. φ = Log. $\frac{2GR}{am}$ = 7,8702764

Log. $(\omega+\varphi)$ = 7,9732514

Log. v = Log. 8292,73 = 3,9186976

Log. f^2 = Log. $(v^2-\omega)$ = 7,6894934 . . . Log. f = 3,8447467

Log. M = Log $(kv^2-a\omega)$ = 9,6149762 . . . Log. $\sqrt{M}$ = 4,8074881

Log. $(v^2+\omega(59-a))^{\frac{1}{2}}$ = 4,5457146

$$l\left\{\frac{1+\frac{f}{\sqrt{(v^2+\omega(59-a))}}}{1-\frac{f}{\sqrt{(v^2+\omega(59-a))}}}\times\frac{1-\frac{f}{v}}{1+\frac{f}{v}}\right\}=-2,0623314$$

Log. 2,0623314 = 0,3143584

$$l\left\{\frac{\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{(v^2+\omega(59-a))}}+\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{\sqrt{(v^2+\omega(59-a))}}-\sqrt{k}}\times\frac{\frac{\sqrt{M}}{v}-\sqrt{k}}{\frac{\sqrt{M}}{v}+\sqrt{k}}\right\}=-7,5295688$$

Log. 7,5295688 = 0,8767701

Ri-

RISULTATI.

$$R\int P^{-\frac{1}{2}}dx = 31^{ore}.47'.18''$$

$$R\int \tfrac{1}{2}P^{\frac{3}{2}}Qdx = 12^{ore}.50'.55''$$

$$R\int \tfrac{3}{8}P^{-\frac{5}{2}}Q^2dx = 8^{ore}.\ 0'.50''$$

$$R\int \tfrac{5}{16}P^{-\frac{7}{2}}Q^3dx = 5^{ore}.54'.\ 1''$$

$$R\int \tfrac{35}{128}P^{\frac{9}{2}}Q^4dx = 4^{ore}.41'.22''$$

Importano adunque i soli cinque primi termini della serie $64^{ore}.14'.26''$:

cioè tanto, attesi i soli primi cinque termini della serie, risulta il tempo, che un sasso scagliato da un vulcano alla superficie media della Luna ardente, con una velocità di Piedi di Parigi 8292,73, lungo la retta dal centro della medesima Luna vegnente al centro della terra, impiegherebbe a cadere diritta-linea alla terrestre superficie; ed io stimo, che se ne abbia abbastanza per le deduzioni fisiche, come nella parte fisica appunto della disquizione farò vedere, senza spendere altra fatica, ed altro tempo in calcolare altri ulteriori termini della serie stessa.

Scolio.

Ho trattato il caso semplice, che il sasso venga dal lunare vulcano scagliato nella retta dal centro della Luna al centro della Terra concepita, ed al lungo di essa tenendo fedel viaggio a noi cada. Compostissimo diverrebbe il Problema, *supponendo, che il sasso scagliato fosse sotto qualunque angolo con la medesima retta, ed eziandio con il piano dell' orbita della Luna; e proponendosi di cercare la velocità, con cui dovrebbe essere scagliato, onde l' orbita sua incontrasse l'atmosfera terrestre, per la cui resisten-*

stenza dovesse il sasso, dopo alcuni spirali giri, finalmente cadere in terra; e quinci determinare la velocità, con la quale caderebbe, ed il tempo, che dall' istante dello scagliamento allo istante della caduta speso avrebbe. Problema sarebbe egli questo più intricato, che quello dei moti della Luna, che tanto di travaglio recato hanno, e recano agli Astronomi. Poichè egli è ben vero, che un vantaggio avrebbesi nella tenuità della massa del sasso; ma non avrebbesi quello, che nella teoria Lunare si ha per l' eccesso della distanza del Sole dalla Luna, e della Terra sopra la distanza di questi due corpi fra loro; e poi l' elemento della resistenza dell'Atmosfera crescente via via negli strati più bassi, quale nuova difficoltà non aggiugnerebbe? Io non credo esservi il pregio dell' Opera nell' immergersi in tale complicato problema; tanto più, che la lunghezza del tempo richiesta per la caduta del sasso retti-linea somministra una base sufficiente per l' esame fisico dell' opinione.

OS.