ESAME

DI ALCUNI TENTATIVI DI SOLUZIONE

DI UN FAMOSO PROBLEMA DI MECCANICA STATICA

Del Sig. Michele Araldi

Ricevuto il dì 18 *Aprile* 1806.

CHe il Mondo sia stato consegnato alle dispute interminabili degli Uomini è sentenza nota e celebre e niente bisognosa delle prove e conferme, che offerteci in folla dalla giornaliera sperienza sono rendute superflue dall' autorità infallibile dell' oracolo, che primamente la pronunziò. Dello studio della Natura sembra infatti lecito il dire, ch' esso per poco non è tanto un campo, che gli Uomini mirino a coltivare, quanto una specie di steccato, in cui discendono a battagliare, per tal modo trovansi essi continuamente alle prese gli uni cogli altri. Ma se in questo studio gli ostacoli, che si paran loro davanti per ogni dove, e l' oscurità, di che la Natura si avvolge, rendono inevitabile e la frequenza degli errori, e il conflitto delle opinioni, ben pare che dell' un danno e dell' altro dovrebbero essere immuni le Scienze, che versano sopra nozioni dagli Uomini stessi in certa guisa create, e alle quali conseguentemente è in loro balia di aggiugnere la precisione, e perspicuità ed esattezza richiesta come a tener lontano l' errore, così a chiuder l' ingresso a qualunque division di pareri. E non pertanto alcuni esempii di questa incontransi fino nelle Matematiche pure, non senza forse qualche sorpresa e qualche scandalo de' Profani, che non sono la più parte in istato di comprendere come in simili incontri le dispute, più che non da veri dubbii e fondati, partano per solito da meri equivoci. Se, come tutto cospira a persuadercene, la Meccanica teori-

rica non a torto pretende di sostenere nella certezza metafisica de' suoi principii il confronto delle Matematiche pure, sorgendo in essa dispute, dovrebbe dirsi che qualche equivoco le faccia nascere, e concorra a mantenerle. Intorno a che mi si permetta di avventurare il sospetto, in cui sono, che un simil giudizio portar debbasi d' una controversia, che bolle da qualche anno in Italia intorno al Problema denominato degli appoggi, e renduto celebre dal numero e dalla celebrità de' Matematici insigni, de' quali ha desso, per quanto sembra, delusi fin'ora gli sforzj estremi diretti a renderne in ogni caso determinata la soluzione. Ad ottenerla tale si lusingò d' esser giunto l' Eulero, che da prima propose il Problema, ed essendosi accinto a scioglierlo, inciampò in un abbaglio, che non tolse ad altri la speranza d' essere più fortunati. Poichè gli scritti comparsi su questo argomento in Italia trovansi la più parte consegnati ai volumi di questa nostra Società; non isdegnino i valentuomini, che mi hanno preceduto, ch' io entri a prender posto fra essi, e inserisca in questo stesso deposito le presenti mie riflessioni. Per esse senza arrogarmi di decidere una controversia tanto famosa, ritengo qualche fiducia di riuscire a mostrare che trattasi di un Problema essenzialmente e per propria indole indeterminato. Forse, giacchè gli Atti di questa lite trovansi sparsi assai e divulgati, non è male il prevenire gli avvisi e le ammonizioni, che per parte di qualche Oltramontano potessero per avventura giugnere agl' Italiani di cessare omai da un' impresa d' impossibile riuscimento.

Difetto della soluzione di Leonardo Eulero.

Giova ritenere l' enunciazion del Problema, qual Eulero lo propose da prima, invitando i Matematici ad occuparsene. Concepiscasi un Corpo collocato sur un Piano rigido e immobile, cui esso tocchi e prema in un numero determinato di punti. Sia noto il peso del Corpo, e ne sia pur noto il centro di gravità; cioè il punto, in cui una normale abbassata da detto centro sul Piano, lo incontrerebbe: per ultimo sia noto il numero e la posizione de'

pun-

punti toccati e premuti dal Corpo. Si tratta di determinar la pressione sofferta da cadauno de' detti punti. Nel tentar di sciogliere generalmente questo Problema non tardò l' Eulero ad accorgersi che i soli comuni principii della Meccanica non bastavano all' uopo. Le formole analitiche esprimenti le pressioni, alle quali guida la semplice applicazione di que' principii, tosto che il numero de' punti premuti sorpassa il tre, riescono indeterminate, e vestono irreparabilmente l' aspetto della nota frazione, in cui nello zero diviso da zero gli Analisti ravvisano l' indizio e il criterio della indeterminazione. A toglier di mezzo l' inciampo ha ricorso l' Eulero a una ipotesi. Se concepiscasi, dice egli, che le pressioni esercitate da un Corpo sovrapposto a un Piano contro ai punti, ai quali si appoggia, vengano rappresentate da linee rette innalzate normalmente sopra i punti corrispondenti, queste linee avranno, secondo lui, per luogo, come suol dirsi, geometrico un Piano. Infatti, egli aggiunge, se immagineremo che il Piano divenga per un istante tutt' all' improvviso un tal poco molle e cedente, i punti del Corpo si profonderanno in esso qual più qual meno per una discesa momentanea, scorrendo spazietti proporzionali alle pressioni, ed esprimenti queste stesse pressioni. Di questi spazietti non potrà non avverarsi, che i loro estremi appartengano tutti allo stesso Piano, siccome quelli a cui simultaneamente giungono nel discendere i punti del Corpo appartenenti senza dubbio tutti ad un Piano. Dunque le linee proporzionali a questi spazietti, ossia alle pressioni avranno a luogo geometrico un Piano. Con questo dato accoppiato agli altri offertigli da noti principii della Meccanica avvisò l' Eulero di poter giugnere all' intento. Ma per una di quelle inavvertenze, a cui qualche volta anche i grand' uomini vanno soggetti, ei trascurò di osservare che appunto perchè i punti del Corpo nello scendere non cessano di appartenere allo stesso Piano, cioè sono vincolati essenzialmente gli uni cogli altri, della discesa di cadaun d' essi si risente quella degli altri; ch' essi modificano scambievolmente questa discesa cosicchè non può dessa rappresentare acconciamente la pressione esercitata dianzi da cadaun

pun-

punto sul Piano supposto rigido e immobile. Queste pressioni erano tali, quali avrebbe potuto farle sorgere un sistema di corpi sciolti e disgiunti affatto gli uni dagli altri. L'ipotesi dunque, e le speranze, che su di essa fondò l'Eulero, sono in tutto illusorie. Egli è il vero, ch' ei valendosi della sua ipotesi giugne nel caso de' tre soli appoggi, a quella stessa determinata soluzione, a cui guidano i principii ordinarii della Meccanica. Ma questa specie di accidente non è già una presunzion favorevole, da cui sia lecito d' inferire la legittimità dell' ipotesi. A mio avviso ciò accade perchè nel caso de' tre punti, e in questo solo, sieno i punti vincolati o no, non ponno essi nel discendere non ritrovarsi in un Piano. Del resto confesso che il discorso da me fatto non è quasi che una specie di commento del breve cenno, con cui il chiarissimo e acutissimo Sig. Paoli additò l' abbaglio dell' Eulero.

Tentativo del Sig. Lorgna e riflessioni su di esso.

Dell' illustre Fondatore della Società nostra è noto che in lui all' acutezza e al vigor dell' ingegno accoppiavasi quella tempera d' animo nobile ed elevato, per cui chi n' è fornito amoreggia le imprese più ardue; nè gli ostacoli bastano a sconfortarlo, ma lo irritan piuttosto, e gli servon di stimolo, e in più incontri di cose, onde giugnere a vincerli. Il perchè non è a stupire ch' ei volesse pure esperimentar le sue forze intorno a un Problema, che aveva resistito a quelle d' un Eulero. Il successo per vero dire non corrispose al coraggio e alle speranze. Parecchi anzi non tardarono ad avvertire che il tentativo reggevasi sur un principio arbitrario. Poichè tuttavia non mi è noto che niuno abbia mostrato, in che ne consista precisamente l' inutilità; e che d' altronde mi verrà il destro di recare qualche osservazione applicabile ad alcune soluzioni uscite in luce posteriormente, chieggo licenza di poter riferirlo e disaminarlo alquanto estesamente. Delle regole ordinarie della Meccanica è d' avviso il Sig. Lorgna, ch' esse bastino all' uopo di sciogliere generalmente il Problema

ove

ove loro si associi un suo nuovo principio da niuno non per anche avvertito, e cui giova espor tostamente, giacchè nella esposizion dello stesso è rinchiusa quella dell'intero tentativo. Venga il Corpo sostenuto su quattro soli punti del Piano immobile. In questo caso e in ogni altro di un numero maggiore di punti non sono giunti i Meccanici a determinar la pressione sofferta da cadaun punto; e ogni loro artificio riesce a voto salvo che nel caso di due punti, e in quello pure di tre: anzi in quest' ultimo, se i tre punti sieno posti nella stessa linea retta, rivive e risorge la nemica indeterminazione, e infetta, e macchia indelebilmente la soluzione, a cui giungono. A cessar tanta molestia osserva il Sig. Lorgna, scegliendo il caso de' quattro punti, che ponno questi concepirsi combinati assieme a tre a tre; cosicchè ne risultino quattro combinazioni, o come ei li chiama, sistemi di tre punti cadauno, i quali sistemi, affinchè l'immaginazione riesca con meno fatica ad afferrarli, ponno col soccorso di linee rette condotte da un punto all' altro concepirsi trasformati in quattro triangoli descritti sul Piano, a cadaun angolo de' quali corrisponde uno de' quattro punti, che reggono il Corpo. Di questi quattro sistemi due vengono per lui detti attivi, due inutili. Ei chiama attivi quelli, che nel triangolo corrispondente rinchiudono il punto, in cui una normale abbassata sul Piano dal centro di gravità del Corpo, taglia il Piano stesso; inutili quelli, che non comprendon quel punto. Posto ciò egli osserva, che de' due sistemi attivi potrebbe l' uno indipendentemente dall'altro sostenere il peso intero del Corpo; poichè per l' una parte il Piano è immobile, e per l' altra cadauno nel triangolo corrispondente rinchiude il centro di gravità. Ma siccome non ponno essi non sostenerlo congiuntamente, non essendo essi che due diverse combinazioni di que' quattro punti, a cui realmente il Corpo si appoggia, gli sembra lecito d' inferirne che debbano concorrere egualmente a sostenerlo; ossia che il peso del Corpo debba distribuirsi e spezzarsi egualmente fra l' uno e l' altro. L' Autore ottiene speditamente l' intento con questo soccorso, in faccia del quale, sgombra ogni indeterminazione; e giacchè il resto è un affare di puro calcolo, le pressio-

ni

ni sofferte da cadaun punto ci si presentano in ultimo espresse da formole di un certo e determinato valore.

Giova prima di tutto esaminare il motivo, per cui il Sig. Lorgna si mostra persuaso che la Meccanica per l' una parte abbisogni di nuovi soccorsi, e per l' altra, malgrado l' austerità sua, vorrà apporre per così dire il suo marchio a un principio di lega manifestamente inferiore agli altri da essa impiegati. Il principale e anzi unico di questi motivi è il seguente. Osserva egli che la Natura in mille incontri certamente scioglie compiutamente il Problema; ch' essa in niun caso non si mostra mai indecisa. Or se ciò è vero, per qual motivo dovrà esser disdetto alla Meccanica teorica di giugnere a scoprire il valore di quelle pressioni? Forse che non è dessa conforme in tutto alla Meccanica, a cui la Natura obbedisce? che non procede reggendosi su gli stessi principii? Se non vi è giunta per anche, vuol dire che i mezzi da essa posseduti non bastano all' uopo; non vuol dire che l' acquisto di altri mezzi, de' quali appartiene ai Matematici di provvederla non possa metterla in istato a qualche tempo di giugnervi. Questo argomento specioso a prima vista è l' Achille dell' Autore, a cui è giunto ad imporre, sebbene non sia poi tanto formidabile, che osservandolo con occhio riposato, non si scorga senza stento, dove annidi l' equivoco.

È vero che in ogni caso speciale ognuno de' quattro punti del Piano soffre una determinata pressione; ma è vero altresì che il corpo esercita quella determinata pressione con quattro determinati suoi punti, con quelli cioè che in ogni caso speciale combaciano co' quattro punti del piano. È questa una condizione, che non può in ogni incontro non avverarsi. Ma di essa nè si fa motto, nè si tien conto nel Problema, qual se lo propongono i Meccanici, che prescindendone si arrestano nella considerazione de' quattro punti o fulcri, che sostengono il Corpo; della posizion loro rispettiva; e di quella pure del centro di gravità del corpo sostenuto. Or potendo questo collocarsi su quattro punti del Piano in più guise e diverse e per modo che agli stessi quattro punti del Piano corrispondano ad ogni nuova posizione quat-

tro

tro nuovi punti del corpo senza che per questo cangi luogo il centro di gravità; o ciò, che torna allo stesso, essendo lecito di concepire che altri ed altri corpi pesanti come il primo, e il centro di gravità de' quali coincida pure con quello del primo, ma diversamente conformati e voluminosi vengano allo stesso sostituiti, è manifesto che per siffatte sostituzioni potrà cangiarsi la distribuzione della carica totale sopra i sostegni, che soffriranno cariche diverse, sebbene la somma ne rimanga sempre la stessa. I Meccanici in una parola propongonsi un Problema astratto, e la Natura scioglie problemi concreti. Però non è a stupire che la soluzione, a cui giungono, lo dichiari indeterminato. Nè per questo debb' essa sbagliarsi per difettosa. Essa ha tutta l' esattezza, che le compete, se colla indeterminazione, in cui lascia il Problema ne avvisa ed informa del numero indefinito de' Problemi concreti in esso rinchiusi. E a gran torto certamente l' Analisi e la Meccanica conosciute si biasimano di ciò, di che loro piuttosto debbesi saper grado, avverandosi anche in questo incontro, come in tanti altri che il simbolico loro linguaggio adegua l' ampiezza illimitata della Natura.

Ma quì a taluno potrebbe affacciarsi un dubbio non molto fondato, e cui non pertanto mi giova sciogliere nella lusinga di svolgere alquanto la metafisica di questa specie di ricerche meccaniche; la qual Metafisica, comechè non abbiavi Matematico di qualche polso, che non conosca, pur temo che qualche volta venga dimenticata. Dirà forse taluno. Convengo che il Problema, qual i Meccanici lo si propongono guidi ad uno scioglimento indeterminato. Ma se venga esso modificato un tal poco, se cerchisi per mo' di esempio, qual pressione una forza applicata ad un punto di un piano sostenuto da più di tre fulcri immobili faccia sorgere in cadaun d'essi, com' è che anche questo Problema rimansi fra le mani de' Matematici indeterminato? direm noi ch' esso fra quelle della Natura sia tale? Oh che è troppo manifesto che la Natura non rimane mai indecisa. Resta dunque che s' inferisca non essere per anche il nodo sciolto compiutamente; abbisognar tuttavia probabilmente la Meccanica di nuovi soccorsi;

si; e adoperar saggiamente que' Matematici, che pensano ad arricchirnela.

Non mi arresto attorno a questo dubbio che all' oggetto di palesare ognora meglio l' origine di quella indeterminazione, che giudico inevitabile ed essenziale a questa sorta di problemi. A motivo di chiarezza scelgo l' esempio sopra ogni altro semplice di tre fulcri posti in linea retta, sopra de' quali attraverso a una verga rigida stesa su di essa agisca una forza applicata a un punto di detta verga. A scoprire il valore delle tre pressioni sofferte dai tre fulcri non ci si presentano che due equazioni, offerta l'una dall' eguaglianza, che passar debbe tra la forza applicata alla verga, e la somma delle tre pressioni; tratta l' altra dalla proprietà de' così detti momenti. Attesa la semplicità del caso è manifesto che nella Meccanica teorica e astratta non è possibile di aggiungere niun altro dato ai due, ch' essa possiede. Il Problema è dunque essenzialmente indeterminato. Nè vale il dire che la Natura lo scioglie compiutamente. Essa ne' casi concreti lo scioglie perchè in questi non mancano mai condizioni, e circostanze Fisiche, che tolgon l' indecisione. Di siffatte circostanze fisiche indefinitamente numerose e svariate non può, nè debbe tener conto la Meccanica astratta, o a meglio dire essa le abbraccia tutte, lasciando indeterminata la soluzion del Problema. Che se a qualche Matematico venga per avventura il capriccio di renderlo determinato, valendosi di un nuovo dato o principio; se a cagion d' esempio osservi che ponno i tre fulcri concepirsi combinati a due a due, cosicchè ne sorgano tre sistemi di due fulcri cadauno, tra i quali due n' ha sempre, che potrebbero sostenere disgiuntamente l' intera forza; e però si creda lecito d' immaginare, che questa dovendo pur agir sopra entrambi, possa concepirsi divisa fra entrambi egualmente, se, dico, qualche Matematico proceda e riesca all' intento in tal guisa, niuno sarà tanto scortese e salvatico, che negar gli voglia un sì innocente trastullo. Ben non sarà disdetto di avvertirlo ch'ei probabilmente si prende una poco util fatica; che il Problema per lui sciolto non appartiene nè alla Meccanica astratta nè alla reale. Non a quest' ultima, perchè

senza dubbio in ogni caso speciale e concreto non mancano mai dati e condizioni, che combinate co' principii ordinarii della Meccanica pongono la Natura in istato di sciogliere compiutamente; non alla teorica, a cui certamente è disdetto d'introdur principii, de' quali non si possa credere fondatamente che la Natura gli adotti. Or poichè questa può farne senza ottimamente, e che le circostanze fisiche compagne indivisibili e necessarie di ogni caso speciale la mettono in istato di non abbisognarne è manifesto ch' essa nè gl'impiega, nè gli adotta.

Digressione su la controversia, se le leggi della Meccanica sieno necessarie o contingenti.

Sembra lecito di sospettare che que' valentuomini, i quali nell' accesa brama di ottenere una soluzion generale del Problema degli appoggj credon necessario di provveder la Meccanica di nuovi ajuti, intendano che que' principii, a cui essi hanno ricorso, sieno non solo legittimi, ma modellati per così dire nelle stesse forme, da cui uscì, sono omai venti secoli, il principio dell' indifferenza posto dal sommo Archimede alla testa della medesima. Non si tratta forse a parer loro che di allargare questo principio, e di dargli una maggiore estensione. Forse che, dirà taluno, potendo sì l' uno che l' altro di due sistemi di fulcri sostenere un certo peso, e dovendo sostenerlo congiuntamente, non è chiaro che la Natura indifferente a far cader maggior carica piuttosto su l'uno, che sull'altro, sceglierà di caricarli egualmente? Tal' altro pure pretenderà che per lo stesso motivo tutte le volte che la Natura si troverà in circostanze simili, debba essa operar similmente. Ma davvero che queste idee, anzi che allargare il principio dell' indifferenza, temo assai che lo travisino, e lo trasformino in un altro, che potrebbe forse acconciamente appellarsi il principio della convenienza; nome, che volendo introdurlo in una Scienza sì austera, qual è pur la Meccanica, sembra che porti con seco la sua condanna.

Se infatti si penetri alquanto più addentro colla ragione, e

col

col senno nella natura intima di questi oggetti non peneremo forse ad accorgerci che il principio dell' indifferenza confina, e per pochissimo non coincide con quello della contraddizione. Nell' avventurare questa proposizione io che mi trovo a fronte una folla di Metafisici, quelli, che su le orme del Leibnitz, disputando se le leggi della Meccanica sieno necessarie o contingenti, anzi che dal principio della contraddizione amano di derivarle da quello della ragion sufficiente; e ad esse però rifiutano quella inflessibile autorità, che loro si accorda da quelli, che le appoggiano al primo de' detti principii. Senza entrar di proposito in una quistione sì ardua, non mi credo disdetto di osservare che forse non è poi tanto certo ciò, che a favore della contingenza delle leggi meccaniche recasi dal Sig. Beguelin in una Memoria inserita ne' volumi dell' Accademia di Berlino, laddove dice ch' esse partono manifestamente dal principio della Ragion sufficiente, i diritti del quale non si estendono che su le verità contingenti. Ei crede di provarlo coll' osservare che nel caso semplicissimo della Leva; su cui a distanze uguali dal fulcro agiscano forze uguali, essendo essa indifferente a muoversi piuttosto in un senso che in un altro, però sta ferma, e le forze si bilicano, perchè non avvi ragion sufficiente, che la tolga da quello stato. In tal guisa pare che il principio dell' indifferenza coincida con quello della Ragion sufficiente. Ma se si interpreti la cosa alquanto diversamente; se dicasi che però la leva resta immobile, perchè non potrebbe moversi senza che delle due potenze l' una superasse l' altra, ossia senza che fossero esse a un tempo eguali, e disuguali, il che è impossibile, scorgesi con bastevol chiarezza, che il principio della indifferenza coincide con quello della contraddizione: la qual conseguenza, ove venga accordata renderebbe le verità meccaniche certe e necessarie di una certezza e necessità assoluta ed eterna quanto le geometriche. Nell' adottare infatti questo concetto della certezza propria delle verità meccaniche consentono omai i Matematici più reputati sì nostri che esteri; tra i quali alcuni per altro accoppiano allo stesso idee, che, se non erro, vengon con esso palesemente a contrasto. Come a cagion

gion d' esempio accade al famoso Sig. d' Alembert, il quale dopo aver recato alcune prove a favore della necessità delle leggi meccaniche aggiugne, o s' infinge almeno di credere, ch' esse avrebber potuto esser diverse da quel che sono.

E parimente, affine di frapporre un' altra osservazione suggeritami dal filo delle idee, di cui mi occupo, dalla supposizione che le verità meccaniche nella certezza sostengano il confronto delle geometriche, sembra lecito d' inferire che lodevoli riguardo al fine, ma non egualmente forse riguardo all' esito sieno gli sforzi del Maupertuis inteso a stabilire la prima verità della Teologia naturale sopra un certo minimo, ch' ei chiama di azione, e che interviene ne' casi qualunque di cambiamento di stato de' corpi condotti ad agire gli uni su gli altri. È manifesto che quel minimo partecipando della necessità assoluta, che nella detta ipotesi il principio della contraddizione diffonde su tutta la serie delle verità meccaniche, e conseguentemente non avendo potuto riguardo allo stesso essere luogo a scelta, non può gran fatto servire all' uso, a cui si destina. Di che per altro non ha quella nobilissima Scienza motivo di molto dolersi; giacchè a stabilire l'augusta verità, di cui parlo, possiede argomenti sì vittoriosi che può sdegnare ogni maniera di prove esposte a qualche eccezione.

Ma troncando omai una digressione forse soverchio dilicata, si lasci pure indecisa, questa nobilissima controversia su la necessità, o contingenza delle leggi della Meccanica. Rimanga pur dubbio a quale de' due principii o della contradizione, o della Ragion sufficiente abbia la Natura raccomandata e sospesa la catena delle verità meccaniche, malgrado questa incertezza par manifesto che non convenga a un Matematico l'introdurre in questa Scienza principii, de' quali sia impossibile lo sciogliere in ultima analisi nel principio della contraddizione. Or a questa eccezione è visibilmente esposto il principio del Sig. Lorgna, essendo manifestissimo che la distribuzion disuguale della forza di un Corpo fra due sistemi di fulcri atti egualmente a sostenerla non involve contraddizione tutte le volte che ne turba l'uguaglianza,

che

che passar debbe tra la forza stessa e la somma delle pressioni sofferte dai fulcri; nè parimente altera il luogo e il punto, in cui, coincidendo col centro di gravità del corpo, cade la così detta resultante delle pressioni medesime. Siffatti principii non ponno sperare d' essere accolti in una Scienza, che aspira al grado di quell' assoluta certezza, cui raggiungono le dottrine geometriche, e a cui non può dessa pretendere salvo che procedente collo stesso assoluto rigore. Ben pare anzi che non possa essa adoperare altrimenti; mentre valendosi ad ogni momento delle verità geometriche, di cui si rinforza ed assoda, e che incorpora e fonde ne' suoi ragionamenti, non può non adottare i principii, che loro servon di base. Senza ciò essa si esporrebbe al risico di non poter più rappresentar degnamente il piano e sistema quanto magnifico altrettanto solido adottato in Meccanica dalla Natura; nè più le competerebbe quel grande ed unico privilegio, per cui mercè le applicazioni numerosissime, che riesce a fare, de' suoi teoremi e delle sue verità astratte alla natura corporea e ai fenomeni di questa, in essa ci si offre una specie per così dire di ponte di aperta e sicura comunicazione fra il Mondo intellettuale e il Mondo reale.

Dubbii proposti ai Chiarissimi Sigg. Delanges e Malfatti.

Anche i dottissimi miei Colleghi Delanges e Malfatti hanno voluto intorno al Problema degli Appoggi esperimentare le loro forze proporzionate senza dubbio ad ogni più ardua intrapresa, e nel tentar questo guado mostrano qualche lusinga di riuscire ad evitare gli scogli, ne' quali urtò e ruppe l' Eulero. Su i tentativi loro chieggo rispettosamente licenza di movere, o più veramente di assoggettare al loro imparziale giudizio alcuni pochi miei dubii.

E facendomi prima dal Sig. Delanges, questi si mostra persuaso che il Problema degli appoggi nel caso anche nel quale il corpo posa su tre soli punti, non debba confondersi con quello, per cui data una potenza applicata normalmente a un piano, e a un da-

pato punto di questo, e considerandola come la resultante di tre altre, si tratti di determinare il valore di queste dipendentemente dalla notizia de' luoghi e punti del Piano, a cui esse pure si concepiscono normalmente applicate. Di questo secondo Problema ei concede, che sia di pertinenza della dottrina delle potenze parallele del primo non già. Intorno a ciò si degni il mio rispettabilissimo Collega di soddisfare alla seguente domanda, ch' io gl' indirizzo al solo fine di essere tratto di un inganno, da cui confesso che s' ei non si compiace d'assistermi non mi è possibile di uscire. Suppongasi che il Corpo posto su tre punti del Piano immobile ed inflessibile venga sostenuto non più da questo, ma da un Piano rigido soltanto, e a un tempo nè immobile nè pesante. Ad impedire che questo Piano non ceda, nè sia strascinato al basso, basterà senza dubbio l' applicare al disotto dello stesso nel punto direttamente opposto al centro di gravità del corpo una forza, che agisca dal basso verso l' alto uguale precisamente al peso del corpo. Questa forza applicata nel modo supposto non solo impedirà la discesa del piano, ma non permetterà nè anche che in esso sorga niun movimento rotatorio. Infatti essa se fosse senza l'interposizion del Piano applicata immediatamente al Corpo, passando pure pel suo centro di gravità, non ha dubbio ch'esso rimarrebbesi equilibrato in tutti i sensi; dunque esso questo stesso Corpo concepito sul Piano esercita pressioni incapaci di far sorgere in esso movimenti rotatorii nell' atto che la forza applicata, come è detto, di sotto in su ne impedisce la discesa; dunque le pressioni corrispondono con assoluta uguaglianza a forze applicate agli stessi punti, e che avessero per resultante una forza uguale al peso del Corpo, e applicata al punto corrispondente al centro di gravità dello stesso. Dunque la ricerca di dette pressioni è un Problema identico a quello della ricerca di queste ultime forze; nè avvi niuna essenzial differenza fra l' uno e l' altro, e sì l' uno che l' altro dipende dalla dottrina delle potenze parallele.

Dal concetto che il Sig. Delanges si è formato nell' animo della natura del Problema partono le eccezioni da lui date alle so-

soluzioni recatene da altri, a cagion d'esempio a quella, che ha per vero dire tutti i caratteri di legittima, a cui nel caso de' tre punti, evitando ogni indeterminazione, giugne il Bossut. Il raziocinio, a cui questi appoggia la sua soluzione può, ritenendo la teoria delle potenze parallele, esporsi in questo modo. Qualunque sieno (Fig.ª 1.ª) le pressioni sofferte dai punti A, B, può concepirsi senza dubbio che alle forze, che si bilicherebber con esse, sia sostituita una resultante. Or questa dove caderebbe? Certamente nella linea AB, e cadendo in questa non potrebbe non essere uguale alla loro somma. E in qual punto inoltre di questa linea caderebbe? Certamente in un punto D tale, che guidando da esso una retta al punto C in questa rimanesse compreso il punto P, che corrisponde al centro di gravità, ossia quello, in cui cade la resultante di tutte e tre le pressioni. Questa considerazione guida il Sig. Bossut alla determinazione delle tre pressioni; ed essa basta all' uopo, e per giugnervi si può prescindere dalla considerazione del Vette; la teoria del quale emana per altro da quella delle potenze parallele sì vicinamente e necessariamente, che forma un tutto con essa. Procedendo con questo metodo, vale a dire attenendosi e impiegando la dottrina delle potenze parallele, almeno fino a tanto che il Sig. Delanges non abbia mostrato concludentemente che il Problema degli Appoggi pende da un'altra teoria, si scorge subito il motivo per cui nel caso de' tre punti se ne ottiene una soluzione determinata. Questa si ottiene, perchè come si è veduto e mostrato non può non essere determinato il punto D, che non può non ritrovarsi nel concorso delle due rette AB, CP prolungata fino a tagliare la prima. È questa singolarità, propria del caso de' tre appoggi, quella che scancella ogni indeterminazione; la qual sorge tosto che, come immagina il Sig. Delanges, i tre appoggi vengono trasportati su la stessa linea retta. In questa ipotesi svanisce il punto D, e con esso svanisce, risponderebbe il Sig. Bossut, l' eccezione data dal Sig. Delanges alla mia soluzione.

Per simil modo l' Eulero non penerebbe forse a rinvenir risposte e difese contro gli attacchi mossigli dal nostro egregio Col-

Ie-

lega. In lui al saper sommo accoppiavasi il più puro amore del vero. Ei non esiterebbe a riconoscere la forza irresistibile dell' opposizione contro il principio per lui adottato mossa dal Sig. Paoli e da me sviluppata. Ma de' dubbii propostigli dal nostro Collega egli avvertirebbe che l'uno si riduce ad una semplice asserzione, dell' altro può sospettarsi che parta da un equivoco. Nel primo si dice che la soluzione recata dall' Eulero non è determinata, perchè se fosse tale, ove suppongasi (Fig.ª 2.ª) che il centro O di gravità del Corpo cada in un altro punto O' della linea OQ parallela alla AB, e che il sostegno B si trasporti in B' dovrebbero cangiar le pressioni sofferte da cadaun punto, e non già quelle de' soli punti A, B, come resulta dalla soluzione Euleriana, secondo la quale, malgrado il concepito trasporto, il punto C ritiene la pressione di prima. E bene, quale sconcio ha in ciò? direbbe l' Eulero. Come prova egli il Sig. Delanges che tutte e tre le pressioni dovrebber cangiare? Ei si contenta di asserirlo. Infatti impiegando alla soluzion del Problema la teoria delle potenze parallele i supposti trasporti non alterano punto la pressione in C; e questa conseguenza ci è pure offerta dal riflettere che la relazione fra i due triangoli ACB', AO'B' esprimente quella, che passa fra il peso totale del Corpo, e la pressione in C, è uguale a quella degli altri due triangoli ACB, AOB, che la esprimevano dianzi. Dell' altro dubbio si può temere, come ho avvertito, che consista in un equivoco. Si oppone in esso che nel caso anche, in cui il centro di gravità cadesse fuori del triangolo, agli angoli del quale son posti i fulcri; nel qual caso il Corpo dovrebbe senza dubbio rotolare, secondo la soluzione euleriana esso eserciterebbe pressioni, come in quello, in cui ne è sostenuto. Risponderebbe l'Eulero che in simil caso la pressione di uno di quelli appoggi, per esempio quella di A, (Fig.ª 3.ª) divien negativa. Io la stabilisco, esso direbbe $= G \times \left(1 - \frac{AP}{AB} - \frac{AQ}{AC}\right)$ che per chiarezza maggiore può trasformarsi in questa $G \times \left(\frac{AB \times AC - AP \times AC - AQ \times AB}{AB \times AC}\right)$. Or supponendo che per trasporto di B in B' il centro O cada su

a

be la linea CB', questa formola, cangiato in essa AB in AB' a motivo della somiglianza de' triangoli AB'C, PB'O, per cui AB' $\times$ AC è = AP $\times$ AQ + AE $\times$ AB' diviene = o. Donde si vede che se per un trasporto ulteriore dell'appoggio B in B'' il centro di gravità cada fuori del triangolo, l'anzidetta pressione diverrà negativa, ossia che il punto A dovrà considerarsi siccome spinto all' insù; il che è lo stesso che il dire che il Corpo dovrà rotolare.

Conforme a questo può sospettarsi che sia un altro equivoco preso nell'applicazione delle formole esprimenti la pressione esercitata dal Corpo sopra tre punti del Piano al caso, in cui questi cadano nella stessa linea retta. Modificando queste formole, come a parer del nostro Collega richiede il nuovo uso, a cui le rivolge, ei crede di assicurarsi che due soli punti soffran pressione, quelli cioè, fra cui cade il centro di gravità; il terzo ne rimanga sgravato. Nel giugnere a questa conclusione gli è, per quanto sembra, sfuggito di tener conto del cambiamento essenziale, che nel passaggio di un caso all' altro sopravviene alle equazioni, da cui ricavansi quelle formole. Nel caso, in cui (Fig.ª 4.ª) il fulcro B situato fra gli altri due A, e C diviene il centro del movimento del peso totale concepito in G, e denominato g, e di due forze, che in direzione opposta a quella del peso si concepiscano agire ne' punti A, C, chiamando queste a, c, e le distanze loro dal fulcro o centro del moto B, f, m; e b quella del peso totale raccolto in G, l' equazione offerta dalla teoria de' momenti non è già, com' ei suppone $bg = fa + mc$; ma sibbene $bg = fa - mc$. Infatti in questo caso il peso posto in G, e la forza applicata in C si accordano a far nascer rotazione in senso opposto a quello, in cui tende a produrla la forza applicata in A. Debbe dunque aversi $fa = bg + mc$; ossia $bg = fa - mc$. Se il Sig. Delanges si compiacerà d'introdurre questa necessaria riforma in quella equazione, ei non penerà ad avvedersi che, accoppiandola colle altre i valori delle pressioni resultano $= \frac{0}{0}$, cioè indeterminati.

Mi accosto ora al dottissimo Sig. Malfatti e istantemente lo prego a permettermi ch' io m' intertenga per poco con lui sul

tentativo di soluzione di questo stesso Problema, di cui ha egli arricchiti i Volumi della nostra Società; e per farmi strada cominci dall' aprirgli un mio timore, del quale ho dato qualche cenno in altro incontro.

Temo assai che ai Valentuomini, che sonosi esercitati intorno a questo Problema siasi sottratta una osservazione semplice al segno che potrebbe darsi che la stessa sua somma semplicità fosse concorsa a tenerla loro nascosta. Tengono essi fiso lo sguardo su i punti del Piano dati e noti, che sorreggono il corpo, e trascurano di por mente ai punti del Corpo, che combacian co' primi. Eppure non ha dubbio, che non debba tenersi conto anche di questi. Ponno agli stessi punti del Piano corrispondere altri ed altri punti del Corpo, ove questo cangi di posizione; e dipendentemente da questi cambiamenti cariche ognor diverse potranno sorgere su gli stessi punti del Piano. Or quì si osservi che nel caso di tre soli punti del Piano ogni cambiamento di posizione del Corpo, per cui cangino i punti ad essi corrispondenti del Corpo stesso, e assiem con questi cangin le cariche, sposta irreparabilmente il centro di gravità, e il punto, in cui una normale condotta da esso cade sul Piano: laddove nel caso di un numero di punti superiore al tre pel cambiamento di posizione del Corpo il centro di gravità può rimanere, ma può anche non rimanere spostato. Asseri il primo l' Eulero, e si dimostra facilmente che un Corpo (Fig.ª 5.ª) appoggiato a tre punti A, B, C, e il cui centro di gravità corrisponda al punto O, se concepiscasi che il suo peso intero sia rappresentato dall'aja del triangolo ABC, la carica del punto A sarà espressa dal triangolo OBC; quella del punto B dal triangolo OAC; e quella del punto C dal triangolo OAB. Quinci si vede subito che cangiando le cariche dovrà spostarsi il punto O.

Se poi il Corpo sia posto sopra i quattro punti a, b, c, d, (Fig.6) cangiandone la posizione potrà agevolmente accadere che la resultante delle tre cariche a, b, c cada in un punto p tale, che una retta condotta da esso al punto d passi pel punto O corrispondente al centro di gravità del Corpo; e potrà pure avverarsi che questa stessa resultante stia alla carica del punto d come

me *do* a *po*; nel qual caso il centro di gravità, malgrado il cambiamento di posizione, riterrà il luogo di prima. O io molto m' inganno, o è questa l' essenzial differenza fra il caso de' tre appoggi, e quello di un numero superiore al tre; e questa differenza è pur quella, che rende nel primo caso determinato il Problema, indeterminato irreparabilmente nell' altro.

Ma qui opporrà per avventura taluno. Accordo, dirà egli, che sia invincibilmente indeterminato il Problema, qual fu da prima proposto, ma chi ne obbliga a concepire che quello che si enuncia al presente dal Professore Malfatti sia identico al primo! Chi vieta ai Matematici di metter da parte la considerazione di un Corpo appoggiato con alcuni de' suoi punti a un Piano immobile e di restringersi piuttosto e cercar le pressioni, che una certa forza applicata a un punto di un Piano sostenuto da più fulcri fa sorgere in cadauno di questi? Esso presentato in questo aspetto forse che non merita che i Matematici se ne occupino? Eh ch' esso lo merita certamente, e ben ce ne assicura lo stesso nobil lavoro, con cui il Sig. Malfatti è giunto a sciogliere compiutamente. Forse che, si aggiugnerà, non è desso alquanto diverso dal primo? A buon conto è manifesto che ad esso non competono le eccezioni per le quali si mostra indeterminato il primo, tratte dal concepire che il Corpo rotando attorno al suo centro di gravità presenti combinazioni ognor nuove de' proprii punti ai punti del Piano; ed è pur manifesto ch' esso tollera l' applicazione del nuovo principio introdotto dal Professore Ferrarese. In fatti se concepiscasi che nel bel mezzo di un Piano quadrato sostenuto agli angoli da quattro fulcri venga applicata una data forza, come può egli seriamente dubitarsi, che non giungano a cadauno di que' fulcri pressioni uguali! Or che altro è il dir ciò salvo che l' ammettere come principio opportuno a servir di base alle discussioni meccaniche che la Natura posta in circostanze simili opera similmente? E parimente se concepiscasi che sia applicata una forza ad un punto *p* di una linea, da cui venga tagliato in mezzo precisamente (Fig. 7) il Bomisco *abcd* retto da fulcri posti ai suoi quattro angoli, è chiaro che qualun-

que pressione faccia essa sorgere nel punto a ne farà pur sorgere una eguale nel punto b. E se ciò è pur forza accordarlo, non è egli per ultima conchiusion manifesto che questa uguaglianza mette in mano all' Analista una condizion nuova, e un dato di più, che aggiunto agli altri rinchiusi nella enunciazion del Problema gli offre il modo di ottenere una soluzione determinata? Mi lusingo che a questo concetto, ch' io mi sono formato nell' animo delle mire e dello scopo del Chiarissimo Professor Ferrarese ei non rifiuterà la sua approvazione; e s' ei mi è di tanto cortese, confido pure che non vorrà adontarsi ch' io persista nell' opinion mia, e non cessi di dubitar fortemente che di qualunque tentativo diretto a sciogliere il Problema interpretato anche conformemente a questo concetto possa la Meccanica avvantaggiarsi di molto, e riporre i cosiffatti sforzi, e le soluzioni con essi ottenute fra le conquiste degne che se ne faccia conserva.

Rappresenti il Bomisco $abcd$ un Piano rigido posto sopra i fulcri immobili a, b, c, d. Si concepisca applicata al punto p, preso nella normale qr condotta fra i due punti r, q, posti a uguale distanza l' uno da a e b; l' altro da c e d, la forza F. Si cerca se si abbia diritto di concepire e di ammettere come principio che questa forza F faccia sorgere pressioni uguali ne' due punti a, b; e parimente pressioni diverse dalle prime, ma uguali fra loro ne' due punti c, d. Non esito a dir che ne dubito. Nella Meccanica teorica e astratta la forza F applicata al punto p rappresenta a cagion d' esempio e tien luogo tanto di due forze applicate ai punti m, n della linea rq eguali cadauna alla metà della forza F e poste quinci e quindi a eguale distanza dal punto p; quanto di due altre forze eguali alle prime e poste similmente, ma su la linea $q'r'$, e applicate ai punti m', n' di questa.

Or queste ultime farebbero bensì sorgere ne' fulcri a, b, c, d pressioni, che nella loro somma adeguerebbero la forza F; ma non è mica certo che cadaun fulcro sarebbe premuto come dianzi, quando le due forze agivano su i due punti m, n della rq. In fatti al Piano $abcd$ (Fig. 7) si concepiscano sostituiti i vetti inflessibili ab, ad, bc, cd; e in un caso stendasi su i vetti ab,

cd

cd il vette *rq*, nell' altro su i vetti *ab*, *ad* il vette *r' q'*. È manifesto che nel primo caso il vette *rq* recherebbe ai due punti *r*, *q* pressioni, che caricherebbero egualmente quinci i due fulcri *a*, *b*; quindi i due *c*, *d*. Ma è chiaro per simil modo che pel vette *q' r'* non potrebbero giugnere a niun fulcro pressioni eguali a quelle di niun altro; e che de' due fulcri *c*, *d*, il primo non sosterrebbe pression niuna. Ma il Piano *abcd* rappresenta sì l' uno che l' altro di questi sistemi di vetti, e anzi infiniti altri; e quando il Meccanico teorico immagina una forza applicata al punto *p* implicitamente tutti gli abbraccia; dunque, ov' egli pur voglia attenersi ai suoi principii, non ponno non rimanere indeterminate le pressioni sofferte da quattro punti. In queste ultime parole intendo di rinchiudere la risposta a chi per avventura si facesse ad ammonirmi che nel mio discorso io non ho ritenuta pura, com' io doveva, l'ipotesi del Professore di Ferrara. Questi, mi si dirà, già non immagina che sul punto *p* del suo Bomisco cada una resultante, ma sibbene che una certa forza per esempio un certo peso agisca realmente contro quel punto. Va bene, ed io insisto, e chieggo; con questo peso, che tende a spingere tutto il Piano all' ingiù, e così fa sorgere pressione ne' fulcri, qual forza potrebbe bilicarsi ed eliderla, ed annientarne gli effetti? Una forza senza dubbio eguale a quel peso, e applicata, contro quel punto in direzione opposta? Or questa forza si bilicherebbe per simil modo, ed eliderebbe, e annienterebbe ogni effetto su i fulcri *a*, *b*, *c*, *d* de' corpi *m* e *n*; e de' corpi *m'*, *n'*, e così vie discorrendo di qualunque delle infinite combinazioni di pesi, che concepiti sul Piano avessero a resultante una forza, che corrispondendo al punto *p* adeguasse il peso, che si è supposto collocato realmente su quel punto. Dunque il Problema, qual la Meccanica teorica se lo propone, abbraccia tutti questi casi; cadaun de' quali, giova ripeterlo, costituisce un Problema concreto e tale che tra le mani della Natura, a cui non si presentano salvo che problemi concreti, ammette una soluzione determinata.

Os-

Osservazioni sopra alcuni pochi luoghi di un' Opera intitolata = Della Dinamica *libri tre* = *Pavia*.

Anche con un nuovo Atleta, e quanto niun altro robusto, il mio assunto mi obbliga ad entrare in lizza con forze troppo disuguali. Un altro mio illustre Collega e Professore emerito dell' Università di Pavia in una sua eccellente opera in cui con molta estensione e accuratezza sono esposte le dottrine dinamiche, annunzia l'opinione che il Problema generale degli appoggi non sia in tutto indomabile. A parer suo esso probabilmente resiste alle industrie tutte dell' Analisi; ma giova sperare che a qualche tempo cederà a quelle della Sintesi; cui egli in fatti mette alle prove nel caso de' tre fulcri posti in linea retta, e in alcune poche e speciali combinazioni di quattro. Non gli rincresca che su questi tentativi e queste speranze io gli proponga alcuni pochi miei dubbii.

E riguardo al primo caso ei confessa che l' Analisi, impiegando la dottrina delle potenze parallele ne lascia irreparabilmente indeterminata la soluzione. Ma di questa egli opina che tra le mani della Natura riesca determinata, perchè de' tre fulcri posti sotto il corpo, o uno solo, cioè quel di mezzo ne regge l' intero peso; il che accade quando a questo fulcro corrisponde il centro di gravità, o due soli, quelli vale a dire fra i quali cade detto centro: il terzo ne rimane sgravato. È questo un punto di Statica intorno a cui, malgrado la sua semplicità, è d' uopo dire che, per una cotal nebbia, che lo intorbida e appanna penino i Meccanici a riunirsi nello stesso parere. Arrestiamoci coll' Autore sull' ipotesi sopra ogni altra semplice di un Prisma regolarissimo ed omogeneo steso sopra tre fulcri immobili posti l' uno precisamente sotto il punto di mezzo, gli altri ai due estremi del Prisma. Ei sostiene che il fulcro di mezzo regge tutto il peso, gli altri due non se ne accorgono. A provarlo ei fa il seguente ragionamento, cui giova trascrivere colle sue stesse parole = Imperciocchè (Fig. 8) qualunque parte del peso tu vogli che si ca-

carichi sopra B sia essa Π'; è evidente che equilibrandosi intorno a B le porzioni $\frac{\Pi'}{2}$, $\frac{\Pi'}{2}$ del peso de' segmenti OA, OC, gli estremi A, C non tendono a scendere in virtù del peso Π'; e quindi per rispetto agli appoggi A, C è lo stesso, come se il peso Π' alla trave mancasse. Supponendo dunque l' appoggio B già caricato del peso Π' noi siamo precisamente nel caso, in cui sopra gli appoggi A, B, C fosse collocata la trave LC della specifica gravità $\frac{\Pi-\Pi'}{LC}$; laonde il sostegno B dovrà pur reggere una parte di questo peso $\Pi-\Pi'$. Sia questa Π''. Siccome pel peso Π'' non tendono a scendere i punti A, C, di nuovo sarem nel caso, in cui fosse sopra i tre appoggi collocata la trave della specifica gravità $\frac{\Pi-\Pi'-\Pi''}{LC}$. Si rinnovi fino all' infinito questo raziocinio, e si conchiuderà che tutto il peso Π si carica sopra B, e nulla sopra A, C ne viene distribuito. Ma alcuno potrebbe volgere questo argomento così. Se da principio si supporrà che i due appoggi A, C sostengano la porzione Π' del peso totale, rispetto a B sarà come se essa mancasse, e però come se sopra i tre appoggi fosse collocata la trave $\frac{\Pi-\Pi'}{LC}$; onde col raziocinio stesso poco sopra adoperato verrebbesi a conchiudere che anche sugli appoggi A, C si viene tutto il peso a caricare. Chi però così rivolgesse l' argomento non conchiuderebbe nulla. Sebbene si volesse supporre che gli appoggi A, C reggessero il peso Π, questo medesimo con tutta la sua efficacia agirebbe per fare scendere il punto B della trave, ossia il suo centro di gravità, e però quel peso s' avrebbe a caricare sopra B; laonde non si può supporre ch' esso sia retto dagli appoggi estremi A, C. =

Confesso che la risposta, con cui si cerca di eludere l' eccezione data dall'Autore stesso al suo ragionamento non mi sembra in tutto soddisfacente. Suppongasi (Fig. 8) che dai punti L, M della trave prismatica partano verso l' alto in direzione verticale due corde ravvolte attorno a due pulegge, e che ne' loro estremi sostengano due pesi eguali, che presi assieme adeguino per esem-

pio

pio un terzo del peso della trave, e conseguentemente non bastino a sostenerla, e ad impedire ch' essa non discenda tratta al basso dagli altri due terzi del proprio peso privo di sostegno. Ad impedir questa discesa pongasi sotto il punto medio un fulcro. Direm noi che questo sosterrà una pressione eguale al peso intero? Eh che niuno nol dirà mai. Tutti scorgono che il fulcro non ne sosterrà che i due terzi; altrimenti converrebbe supporre che l' altro terzo premesse il fulcro a un tempo, e a un tempo pur sostenesse i due pesi, co' quali si bilica, pendenti dalle corde. Sostituiscansi ne' punti A, C a due pesi due forze, che agiscano dall' ingiù all' insù eguali cadauna al peso corrispondente. Proseguirà il fulcro B a sostenere una pressione eguale ai due terzi del peso della trave. A queste due forze per ultimo sostituiscansi ne' punti A, C due fulcri immobili, cosicchè si possano levar le forze senza che il terzo del peso cessi d' essere sostenuto. Tutto visibilmente rimarrà come prima. Or chi mi vieta di concepire che i due pesi pendenti dalle corde raggirantisi attorno alle puleggie per successivi aumenti crescano a tale da sostener tutta la trave? il peso della quale per le accennate sostituzioni potrà dunque concepirsi che venga trasportato e rivolto a caricare i due fulcri estremi A, C; cosicchè ne rimanga sgravato il medio. Sembra dunque che il ragionamento dell' Autore possa ritorcersi, e che sussista l' eccezione da lui stesso proposta.

Sembra eziandio che la via per lui detta sintetica, ch' ei s' ingegna di battere, non possa guidar meglio allo scopo dell' analitica. Sarebbevi mai dubbio ch' ei desse al centro di gravità più realità di quella, che i Meccanici comunemente ravvisano in questo punto? Pare ch' ei creda raccolta in esso realmente la gravità tutta di un corpo, quando a rigore può dessa soltanto in più incontri concepirsi in esso raccolta. Fra le altre espressioni sue movono in me questo dubbio le seguenti = I pesi de' segmenti OA, OC si equilibrano intorno a B, e tutto il peso tende a scendere nella verticale che passa per B non altrimenti che se fosse un punto pesante nella stessa verticale collocata. Pertanto il solo appoggio B porta il peso della trave = Io mo confesso, e fin-

finchè non mi si mostri concludentemente l'opposto, riterrò fermamente che ogni punto de' segmenti OA, OC tenda a scendere per la verticale a cadaun d' essi corrispondente, e nella direzion di questa premer possa gli ostacoli, che sono in istato di vietarne la discesa. Certo che un fulcro immobile posto sotto il punto di mezzo di una trave prismatica può, quando è solo, sostenerla ottimamente; ma perch' esso può sostenerla, non ne segue già che in ogni incontro lo faccia, e renda inutili due altri fulcri immobili quanto esso, posti agli estremi della trave. Nè serve il dire che senz' altro questi due fulcri sono inutili, perchè le due metà del Prisma, che co' loro estremi gli toccano, gli toccano solo, ma non si appoggiano; sostenendosi esse scambievolmente. Sostengansi pur quanto possono, ma per ciò che risguarda la tendenza loro a discendere, e a premere conseguentemente gli ostacoli qualunque, che incontrano; questa verrà distrutta dal fulcro medio, se questo, come fa quando è solo, sostenga di per se tutto il corpo. Ma ciò è appunto di che si disputa.

Concepiscasi il Prisma steso orizzontalmente sopra una superficie inflessibile, e non pesante. Questa sarà pure premuta dal Prisma ne' punti tutti del mutuo loro combaciamento. Si ponga sotto essa corrispondentemente al punto medio del Prisma un fulcro immobile. Cesserà essa per questo di essere come dianzi premuta? E di questa pressione da essa estesamente sofferta e che tende a spingerla al basso perchè non potranno accorgersi due altri fulcri posti quinci e quindi agli estremi?

Se può dubitarsi fondatamente della solidità del discorso dell' Autore nel caso del Prisma sostenuto in mezzo e agli estremi; diviene pur vacillante l' altro in cui trattasi di un Prisma steso sopra tre fulcri disposti in modo, che fra due de' medesimi cada il centro di gravità. Certo che questi bastano a sostener tutto il peso, e a sgravarne il terzo. Ma ne segue egli per questo, che ne lo sgraveranno? La porzione della Trave, o del Marmo a cagion d' esempio prismatico, che si allunga oltre il fulcro di mezzo è pur grave? tende pure a discendere? Questa tendenza potrebbe anzi esser tale che a motivo della lunghezza della

Trave o del Marmo prismatico, se non gli si sottoponga un terzo fulcro, il Prisma si spezzasse. Direm noi che su questo terzo fulcro si appoggierà e adagierà il Prisma nell' accorgersi del pericolo di spezzarsi; fuori di questo pericolo si restringerà a toccare il fulcro senza premerlo?

Ma tornando anche per un momento alla trave prismatica sostenuta nel mezzo, e ai due estremi; e cercando di penetrare anche alquanto più addentro in questo affare, forse non m' inganno nel sospettare che l' equilibrio concepito dall' Autore tra le due metà del Prisma reale senza dubbio venga da lui impiegato con soverchia estensione. Questo equilibrio si oppone al movimento rotatorio del prisma, cui esso impedirebbe quand' anche il fulcro di mezzo per la sua cedenza non bastasse a sostenere il Prisma, che discenderebbe senza rotare. A questa discesa, su cui non ha influsso quell' equilibrio, come può opporsi un semplice fulcro posto nel mezzo, così ponno opporsi i tre fulcri, che potranno dunque concorrere a sostenere la trave, il cui peso si distribuirà fra essi con una certa proporzione dipendente dalla lor posizione. Intorno a che parmi assai probabile che nel caso attuale il fulcro di mezzo sostenga la metà di quel peso, rimanendo l' altra metà egualmente divisa fra gli altri due. Suppongasi che la Trave per una sezione verticale corrispondente appuntino al fulcro di mezzo sia segata e divisa in due eguali sostenute cadauna quinci dal fulcro di mezzo, e quindi l' una dal fulcro destro, l' altra dal sinistro. È manifesto che in siffatta ipotesi i fulcri saranno premuti nella proporzione accennata. Vengano ora ad incollarsi e riunirsi in una sola trave le due metà dianzi divise. Questo cambiamento affatto estraneo al modo, con cui agisce la gravità non potrà produr niuna differenza, nè niun cambiamento nella distribuzione delle pressioni; che però rimarranno eguali alla metà del peso nel fulcro di mezzo; all' altra metà negli altri due presi assieme. Mi si additi di grazia, dove in questo discorso si rappiatti il paralogismo.

Ho detto che il nostro dottissimo Collega non contento di esperimentar le forze della Sintesi nel caso de' tre punti posti in li-

linea retta, studiasi anche di giovarsene in alcune speciali combinazioni di più di tre punti. Si fissi l' occhio su la Fig. 9, che ci offre una di queste combinazioni. Si tratta in essa di determinar la pressione che giugne ai punti o fulcri A, B, C, D; su i quali sono stese le verghe AB, CD, a motivo di un peso posto nel punto O di una verga MN, o di un'altra *mn*. Diverse sono le pressioni, che reca a que' fulcri la verga MN da quelle, che giungono ad essi per la verga *mn*. Ei ne inferisce che il Problema è indeterminato tutte le volte, che la posizione degli strumenti, che servono al trasporto delle pressioni non è data. Quando questa è data si mostra disposto a credere il Problema determinatamente solubile. Giugne anzi ad affermare che se il grave posa sur un Piano retto da quattro fulcri, il Problema è determinato, poichè il Piano stesso fa le veci di quattro verghe, che dal luogo del peso vadano a caricare immediatamente i fulcri suddetti. Anche quì mi corrono all' animo alcuni dubbii. Confesso che dubito assai che basti all' uopo la notizia della posizione degli strumenti. È inoltre necessario a mio avviso che il Problema possa trasformarsi in altri compresi nel caso di un numero di punti minore di quattro. Nella combinazione rappresentata dalla Fig. 9, se sia data la posizione della verga MN, non si tratta più che di assegnar le pressioni sofferte da due punti; prima de' punti M, N; poi, scoperte queste, da quella di M ottener quelle di A e B; da quella di N quelle di C e D. Or non par questo il Problema, che i più de' Meccanici dichiarano indeterminato. Il confonder l' uno coll' altro sembra un equivoco conforme a quello a un dipresso che prenderebbe un Analista, il qual pretendesse le equazioni del quinto grado algebraicamente resolubili, perchè ponno alcune nella soluzione di qualche Problema incontrarsene divisibili in equazioni di grado inferiore. Esse in siffatto incontro non sono quelle, di cui parlano gli Analisti, e delle quali l' illustre Ruffini gli ha costretti a deporre omai ogni speranza di giugnere a sciogliere.

Confesso pure ch' io dividerei con lui la lusinga di vedere sciolto il Problema compiutamente nel caso di un grave posto so-

pra di un Piano retto da quattro fulcri, se avessi veduto, ch' ei si fosse provato, e fosse pure riuscito ad ottenere una soluzione determinata nel caso e nella combinazione rappresentata dalla Fig. 9 quando il grave posto nel punto O agisce congiuntamente su le due verghe MN, *mn*; cioè ad assegnar le pressioni, che giungono non ai quattro punti A, B, C, D; ma sibbene ai quattro punti M, *m*, N, *n*. Finchè non veggo questa soluzione lo prego a permettermi di dubitare ch' essa possa ottenersi determinata. Veggo abbastanza palesemente che in qualsiasi modo si spezzi il peso O fra le due verghe, di quella porzione dello stesso, che per la verga MN si distribuirà fra i punti M, N, non potrà non avverarsi che le pressioni da essi sofferte sieno in ragione inversa delle distanze MO, NO; che lo stesso si verificherà dell' altra porzione qualunque di peso che la verga *mn* recherà e distribuirà fra i punti *m*, *n*. Non veggo altro, nè scorgo i mezzi, onde scoprire come quel peso si spezzi, e qual porzione ne tocchi all' una, quale all' altra di dette verghe.

Di una riduzione conforme alla sopra mentovata parmi suscettibile un' altra combinazione presentataci dalla Fig. 10 in cui a quattro fulcri posti agli angoli del parallelogrammo ABCD giugne pressione per parte di un grave posto in O, e recata agli stessi dalle verghe PR, ES parallele l' una alle verghe AD, BC; l' altra alle verghe AB, CD stese su i fulcri. L' Autore trova e determina con assoluta esattezza quelle quattro pressioni. Ma quì pure un facile calcolo ci assicura che, se il peso posto in O agisce su que' quattro fulcri, rimossa la verga PR, col solo soccorso della verga ES; oppure, rimossa questa, col solo soccorso della PR, sorgerebbero ne' detti punti le stesse pressioni e identiche a quelle, ch' ei trova valendosi di entrambe le verghe congiuntamente. Vuol dire che il grado del Problema è di due soli punti; che non si tratta, impiegando a cagion d' esempio la verga PR, che di assegnar le pressioni fofferte dai punti P, R; poi scoperte queste di assegnar quelle quinci de' punti A, B; quindi de' punti C, D. Quì pure ha luogo il desiderio che il chiarissimo Collega tenti le forze della sintesi su questa combinazione soltanto un tal po-

poco alterata; vale a dire col semplice trasporto de'fulcri dai punti A, B, C, D ai punti P, R, E, S. Forse quest' altra combinazione gli offrirà ostacoli gravi assai, e chi sa che non anche insormontabili.

Riflessioni generali e Conchiusione.

Non esito a dire che fin ora mi sta fitto nell' animo che il Problema tosto che il numero de' punti premuti dal Corpo sovrapposto al Piano; o ciò che è lo stesso il numero de' fulcri reggenti un Piano, a un punto del quale concepiscasi applicata una potenza, sorpassa il tre, che questo Problema dico, sia non già relativamente ai principii meccanici ed analitici fin ora impiegati, ma per propria indole ed essenzialmente indeterminato. Suppongasi che questo numero sia a cagion d' esempio di quattro. Per questo aumento di numero de' punti dai tre ai quattro non pare che a sciogliere il Problema possano impiegarsi salvo che que' mezzi, che bastano all' uopo nel caso de' tre punti, e che soltanto sia lecito di aggiugnere ad essi il nuovo dato offertoci appunto dalla soluzione ottenuta nel caso de' tre punti. Se ci prenderemo la sicurtà d' introdurre qualche altro principio, ci esporremo al risico di travisare il Problema, di alterarne l' essenza; perchè questo nuovo principio, se legittimo ne è l' uso, avrebbe potuto impiegarsi anche nel caso de' tre punti; nel quale o sarebbe desso compreso ne' noti comuni principii della Meccanica, o no: Nella prima ipotesi non si potrebbe trar da esso niun vero vantaggio, nell'altra, esso renderebbe il Problema nel caso di tre punti più che determinato, cioè tale che non sarebbe solubile fuori che in certe determinate posizioni de' tre punti; mentre tutt' all' opposto è desso solubile qualunque sia la lor posizione; pur che sia data. Saranno forse queste riflessioni mere sottigliezze; esse per altro mi sembran conformi a quelle, a cui in molti incontri Matematici di gran merito e credito non isdegnano di abbandonarsi.

Se in questo discorso ha qualche ragionevolezza, sarà dunque

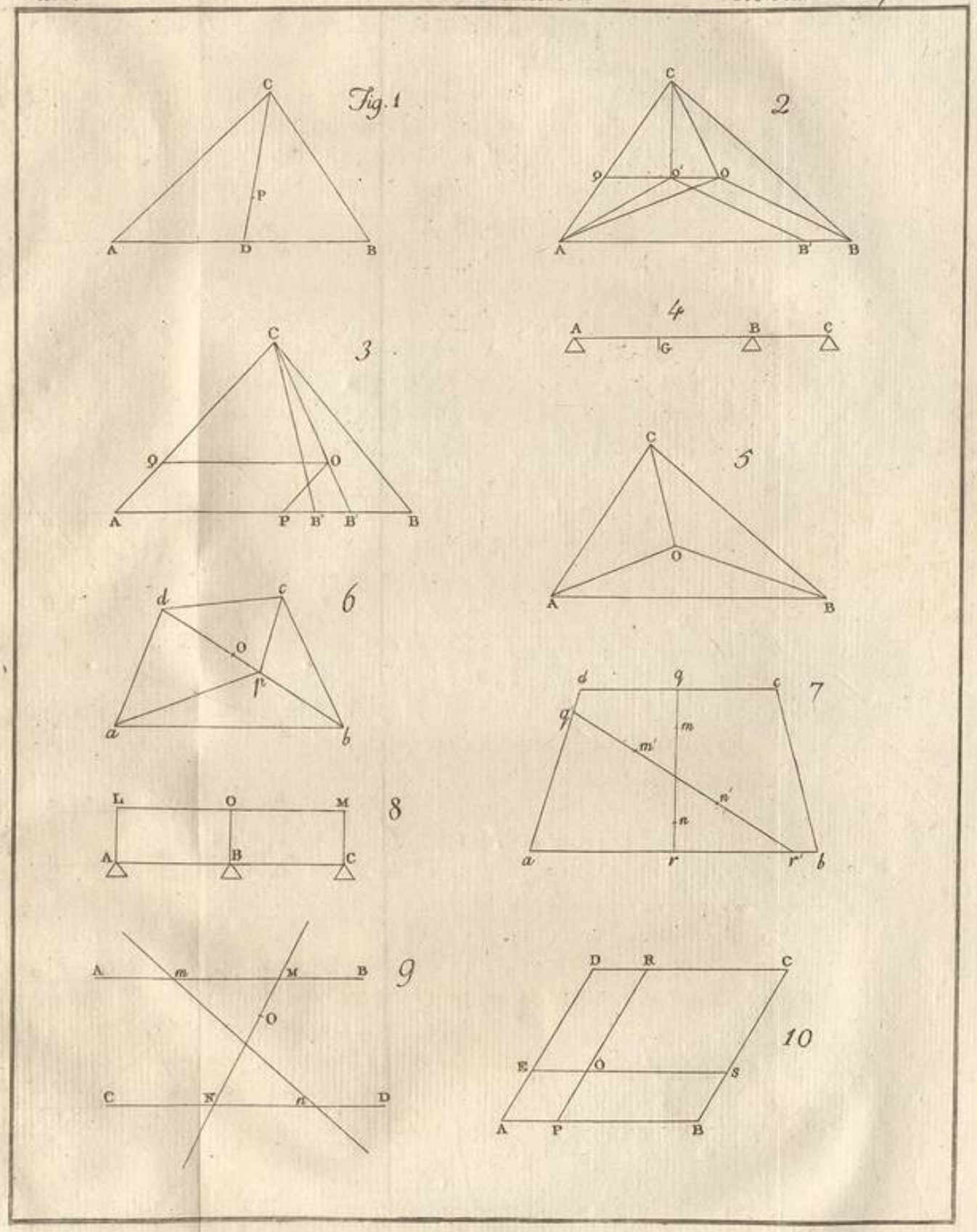
Fig. 1
C
P
A
D
B
2
C
o
o'
o
A
B'
B
4
A
G
B
C
3
C
o
o
A
P
B'
B
B
5
C
O
A
B
6
d
c
o
p
a
b
7
d
q
c
q'
m
m'
n'
n
a
r
r'
b
8
L
O
M
A
B
C
9
A
m
M
B
O
C
N
n
D
10
D
R
C
E
O
S
A
P
B

que lecito di sospettare che non sieno in tutto fondate le speranze, alle quali pare che non chiudano in tutto l' animo alcuni insigni uomini, come il Sig. d' Alembert, laddove dichiara il Problema, tosto che il numero de' fulcri sorpassa il tre, inaccesso ai principii della Meccanica conosciuta fin ora. Tenendo un linguaggio tale pare che non disperi in tutto che la Scienza possa a qualche tempo riuscire a domarlo. Io mo ritengo i miei dubbii; e tornando per un momento al caso di un Corpo posto su quattro soli punti di un Piano avverto di nuovo che in ogni caso speciale e reale con que' quattro punti combaciano quattro determinati del Corpo; che di questo può concepirsi che ruoti attorno al suo centro di gravità senza spostar questo centro, presentando combinazioni ognor nuove di quattro de' suoi punti ai punti del Piano, e recando a questi cariche ognor diverse a norma del suo vario volume, della configurazion sua, della omogeneità o eterogeneità delle sue parti, dati tutti, che rendono tra le mani della natura determinato il Problema; ma che non essendo, nè potendo esser compresi nella enunciazion sua lo lasciano fra quelle della Meccanica teorica invincibilmente indeterminato.

Torno pure per un momento al caso anche più semplice di un Corpo retto da tre punti posti nella stessa linea retta. Della indeterminazione propria anche di questo caso niuno a mio avviso dovrà prender meraviglia, nè credersi tenuto, come di un vero difetto, a liberar la Meccanica. Forse che questa non ce ne offre più esempii, senza che niuno abbia fin ora creduto di dover travagliarsi intorno ai mezzi di scancellarnela? Se sopra un dato punto agiscano due forze espresse nella quantità e direzion loro da due date linee, non si pena a rinvenirne l' equivalente nella diagonale del Parallelogrammo avente per lati le due date linee. Se contro a un dato punto agisca una forza espressa nella sua quantità e direzione da una data linea, e si cerchino due forze capaci di bilicarsi con essa, ove non si assegni la lor direzione il Problema sarà indeterminato; ove sia data e nota, determinato. Se suppongasi che sopra e attorno lo stesso punto con una data forza e similmente espressa debbano bilicar-

si

si tre forze delle quali sia pur nota la direzione, malgrado questa notizia, il Problema, in cui si cerchi il valore di dette forze, sarà indeterminato, se la direzioue di tutte e tre cade nello stesso Piano; determinato all' opposto, se le direzioni non cadono tutte nel Piano stesso. Io ravviso una manifesta analogia tra quest' ultimo Problema, e quello, in cui cercasi qual pressione un dato peso eserciti sopra tre dati punti di un Piano. Come è determinato quest' ultimo, quando i tre punti non appartengono alla stessa linea retta; così resulta determinato l' altro, quando le date direzioni delle tre forze non cadono su lo stesso Piano; e per simil modo l' indeterminazione s' introduce nell' uno e nell' altro, quando i tre dati punti, e le tre date direzioni trovansi gli uni nella stessa retta, le altre nello stesso Piano.

DEL-