SULL' EFFLUSSO PEI TUBI ADDIZIONALI

MEMORIA

Di Giuseppe Venturoli.

Ricevuta li 29 Giugno 1805.

§. I.

Prima il chiarissimo Poleni nell' elegante opuscolo *de Castellis*, poscia il Sig. Michelotti, e l'Ab. Bossut si diedero a rintracciare per via d'esperienze come s'alteri la velocità dell' efflusso, e la portata d'una luce per l'apposizione d' una doccia, o tubo come dicono addizionale. I risultati de' loro esperimenti si ristringono a' seguenti fenomeni, dei quali è la cognizione utilissima.

1.° Un breve tubo cilindrico apposto ad una luce scolpita in lastra sottile diminuisce notabilmente la velocità dell' efflusso; ma insieme ne accresce notabilmente la portata.

2.° Scema la velocità nella ragione di 10:8 prossimamente; ossia di $1:\sqrt{\frac{2}{3}}$; cosicchè non più è dovuta all'altezza dell' acqua sopra del foro, ma soltanto ai due terzi di quell' altezza. La portata poi cresce nella ragione di 10 : 13 prossimamente.

3.° Variando le altezze dell' acqua sopra d'una stessa luce munita dello stesso tubo, le velocità e le portate variano come le radici delle altezze.

§. II.

Quanto più costanti sono, e quanto meglio avverati cotesti fenomeni, tanto più sarebbe desiderabile di poter trarne dai noti principj della Meccanica de' fluidi una spiegazione adeguata. Nel che io non so se alcuno degli Scrittori d'idraulica siasi adoperato con successo. I più si rivolgono alla contrazione della vena sgor-

gante

gante dalla luce del vaso, la qual contrazione per l'apposizione del tubo secondo alcuni (1) vien tolta, secondo altri (2) soltanto scemata. E questi spiegano bensì in qualche modo l'accrescimento della portata, ma non spiegano in modo alcuno lo scemamento della velocità. Oltre di che rimarrebbe tuttavia a sapere, come e perchè resti la contrazione alterata per l'aggiunta del tubo.

Il nostro Consocio Sig. Venturi (3) ha ultimamente cercato di ridurre i fenomeni de' tubi addizionali ad un altro fenomeno più generale, cui diede il nome di comunicazione laterale del movimento ne' fluidi. Ma quand' anche codesta riduzione non incontri difficoltà, resterà sempre da render ragione di questa stessa comunicazione del moto laterale: senza di che non potranno aversi per ispiegati i fenomeni che ne dipendano.

Forse disanimato da tali difficoltà ebbe a dire il Sig. Vince (4) che l' applicazione de' principj e delle Leggi meccaniche al moto de' fluidi o è cosa del tutto vana, ed è mera casualità, se l' esperienza consente talvolta colla teoria, o certamente di molte limitazioni abbisogna, e di molte avvertenze sino a quest' ora sconosciute.

Ma egli è pur certo che l' esperienza non può dalla Teoria discordar mai, se non forse perchè s' ignori o si tralasci nel calcolo alcun elemento che v' abbia sensibile influenza: quindi non è fuor di speranza che un più attento esame di tutti gli accidenti che accompagnano l'eflusso da' tubi addizionali possa appressarne alla spiegazione ricercata. Ho tentata questa indagine non senza lusinga di trarne anche dei lumi sull' efflusso pe' tubi conici, delle cui leggi quelle poche sperienze che abbiamo da Poleni e da Venturi non ne istruiscono quanto basta. Dalle quali leggi dipendendo il conoscer la forma più vantaggiosa degl' incili, e degli

(1) D. Bernoulli Hydrodyn. pag. 63.

(2) Bossut Hydrodyn. (edit. de 1771) Tom. II. pag. 53, 54.

(3) Recherches experim. sur le principe de la communication laterale du mouvement dans les fluides. Paris, 1797.

(4) Phil. Transactions. 1795. Part. I.

gli emissarj, delle bocche di derivazione, o di scolo, ognun vede che questa ricerca è ben lungi dall' essere argomento di sterile curiosità.

§. III.

Giacchè intendiamo di richiamare i fenomeni de' tubi addizionali alle note leggi dell' Idraulica, gioverà esporre succintamente le formole della velocità e della pressione nelle acque correnti per vasi o tubi con moto lineare. Suppongo il moto già renduto permanente, ed il vaso alimentato da perenne influsso, onde si mantenga a livello costante. Si consideri uno strato elementare discosto dal livello del recipiente per l' ascissa verticale x; Sia p la pressione su quello strato, v la velocità, s l' altezza dovuta a questa velocità; la gravità acceleratrice esprimasi per l' unità.

Rappresentandosi adunque per l' unità la forza che sollecita lo strato elementare, sarà $\frac{dv}{dt}$ la parte di questa forza che impiegasi nel produrre l' accelerazione, ed $1 - \frac{dv}{dt}$ l' altra parte che vien distrutta, e che s' impiega nel premere.

Ora la somma delle forze prementi, cominciando dal livello del recipiente, e stendendosi a tutta l' altezza del vaso è nulla; dovendo, siccome è noto, l' intero sistema delle forze perdute equilibrarsi per se medesimo. La medesima somma estesa al tratto indefinito x rappresenta la pressione p. Quindi il valore intero dell' integrale $\int dx \left(1 - \frac{dv}{dt}\right)$, ossia dell' integrale $\int (dx - ds)$ $\left(\text{poichè } \frac{dx}{dt} = v, \text{ ed } vdv = ds\right)$ dev' essere $= 0$; ed il suo valore limitato al tratto x dev' essere $= p$.

Or sia a l' altezza verticale del vaso; P l' altezza che rappresenta la pressione atmosferica; s' l' altezza dovuta alla velocità nella superficie, ove $x = 0$; s'' l' altezza dovuta alla velocità nella luce, ove $x = a$. Il valore dell' integrale $\int (dx - ds)$ per l' in-

l' intera altezza a sarà $= a - s'' + s'$; e lo stesso valore per l' altezza indefinita x sarà $= P + x - s + s'$. Quindi le due equazioni

$$o = a - s'' + s'$$
$$p = P + x - s + s'$$

le quali due vaglion per una sola, giacchè la prima è contenuta nella seconda.

Per far uso di queste equazioni è d'uopo conoscere l' ampiezza delle sezioni suprema ed infima, e di quella intermedia per cui si ricerca la pressione. Allora siccome le altezze dovute alle velocità sono inversamente come i quadrati delle ampiezze delle sezioni, così delle tre lettere s, s', s'' una sola sarà incognita, per esempio la s''. Questa si determina, mediante la prima equazione, e la seconda poi fa conoscere il valore della pressione.

§. IV.

Nulla è più facile che l' estendere queste formole al caso di due vasi fra loro comunicanti: utile ricerca per determinare il moto ne' vasi interrotti da diafragmi. Si disegnino colle lettere grandi le quantità relative al vaso o tronco superiore, e colle picciole quelle che appartengono al tronco inferiore. Sarà l' intero valore dell' integrale

$$\int (dX - dS) + \int (dx - ds)$$

eguale a zero; ed il suo valore indefinito eguale a p come sopra. Quindi nella stessa guisa otterremo le equazioni

$$o = A - S'' + S' \qquad p = P + A - S'' + S'$$
$$+ a - s'' + s' \qquad\qquad + x - s + s'$$

Della stessa forma riuscirebbero le equazioni per tre vasi, o per maggior numero.

Se il tronco inferiore giaccia coll' asse orizzontale, le formole non richieggono altro cangiamento fuorchè l' annullare le altezze a ed x; dovranno farsi negative, se il tronco inferiore sia volto verticalmente all' insù; e si dovranno moltiplicare per

Cos.φ

Cos. φ se esso tronco sia inclinato alla verticale coll' angolo φ. Tutto ciò non ha difficoltà nessuna.

§. V.

Ma trattandosi di vasi interrotti, e discontinui non è da omettere un' avvertenza importante, senza della quale l' esperienza non risponderà al calcolo colla bramata precisione. Ovunque ha discontinuità di sezioni, ivi uno strato fluido della sezione più angusta spandendosi nella più ampia perde repentinamente un grado finito di velocità. Con ciò rimane elisa una sensibil parte della sua forza sollecitante, la quale impiegandosi nel premere il fluido sottoposto, deve accelerarne il movimento.

L' effetto di questa pressione addizionale può valutarsi a questo modo. La velocità dell' acqua nel suo passaggio pel foro del diaframma è $= \sqrt{2S''}$; quella che ritiene nella sezione sottoposta è $= \sqrt{2s'}$. Quindi la velocità estinta è $= \sqrt{2S''} - \sqrt{2s'}$; e la forza perduta dallo strato che nel tempetto dt sottentra ad occupare la prima falda del tronco inferiore è $= \left(\sqrt{2S''} - \sqrt{2s'}\right)\frac{dx}{dt}$; ossia, poichè $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2s'}$, è quella forza $= 2\sqrt{S''s'} - 2s'$.

Pertanto alle formole dell' articolo precedente che rappresentano la somma delle forze perdute dagli strati acquei, vuolsi aggiungere il binomio $2\sqrt{S''s'} - 2s'$. Colla qual correzione esse diverranno, ponendo per abbreviare $K = 2\sqrt{\frac{S''}{s'}} - 1$

$$\left.\begin{array}{ll} o = A - S'' + S' & p = P + A - S'' + S' \\ \quad + a - s'' + Ks' & \quad + x - s + Ks' \end{array}\right\} (E)$$

e daranno per la velocità dell' efflusso un valore alquanto più grande.

§. VI.

Ben è vero che in pratica questo acceleramento mancherà

qualche poco della misura che ne assegnano l' equazioni precedenti . Ed eccone la cagione .

L' effetto dell' acqua affluente nell' affrettare il moto dell' acqua sottoposta dipende da quella parte della velocità dell'efflusso che rimane di subito spenta, e si converte in forza premente . Or quando l'acqua entra nella sezione inferiore sbucando fuori da una sezione notabilmente più ristretta, quella velocità non rimane tutta estinta ad un tratto: parte se ne conserva, e produce moti vorticosi ed irregolari nel fluido sottoposto: e questa parte non contribuisce punto a premerlo ,ed accelerarne il corso regolare. Quanta parte della velocità vada così a disperdersi nel produr questi movimenti parziali, qual ne sia la natura e l'effetto nel ritardare l'efflusso, non sembra veramente potersi determinare per la teoria, trattandosi di movimenti complicatissimi : la sola sperienza potrebbe istruircene .

Daniello Bernoulli non curò di calcolare l' effetto dell' efflusso, nella persuasione che per lo più vada smarrito quasi del tutto pel motivo ora accennato, *totumque impendi in motum aliquem excitandum intestinum , qui mox absorbetur sine alio effectu* (1). Riconosce per altro che in certi casi quest' effetto può esser molto valutabile, e poca parte se ne perde: *sed si foramen* (del diafragma) *rationem habuerit ad amplitudinem tubi ,veluti ut* $\sqrt{2}$ *ad* 1 *,vel ut* 2 *ad* 1, *aut circiter major paullulum erit motus quam qui ex ista hypothesi sequitur , quia tunc notabilem impetum faciunt aquae irruentes, nec is omnis per rei naturam perditur* (2) .

Frattanto all' uopo nostro giova avvertire alle cose sin qui notate, onde non avere a maravigliarci, se il valore della velocità dell' efflusso calcolato dalle equazioni (E) si trovasse mai peccare alquanto in eccesso .

§. VII.

Ma egli è omai tempo di considerare lo sbocco dell' acqua dal

(1) Hydrodyn. pag. 145. | (2) Ibid. pag. 133 .

dal lume d'un vaso munito di tubo addizionale. E qui prima d' ogni altra cosa assumo che dentro il tubo e precisamente alla sua imboccatura la vena che sgorga dal vaso si contrae nè più nè meno di quello che fa quando sbocca nell' aria libera. Nè mi rimove l' opinione di quelli, i quali hanno creduto (§. I) che per l' apposizione del tubo la contrazione dell' acqua sboccante fuori del vaso venga tolta, o scemata. Giacchè nè essi arrecano veruna ragione del loro sentimento, ed anzi la ragione e l' esperienza concorrono a mostrarne il contrario.

Egli è pur certo che le particelle d' acqua s' affacciano alla bocca del vaso con direzioni oblique, e convergenti tra loro, tendendo a formare la sezione angusta della vena contratta. Ora la resistenza che provano dall' acqua che riempie il tubo non può deviarle sensibilmente; poichè hanno velocità considerabile, e l' acqua del tubo movendosi essa pure, e sottraendosi al loro impeto non può opporvi notabile resistenza. Ond' è palese sussistere la contrazione nell' interno de' tubi egualmente che negli sbocchi liberi con nessuna o pochissima differenza.

Una sperienza del Sig. Venturi (1) ne porge un altro argomento assai concludente. Al lume d' un vaso adattò egli un tubo cilindrico avente alla sua origine una strozzatura che ne ristringeva l'ampiezza nella proporzione dell'area del foro alla vena contratta; ed osservò quant' acqua uscisse in un dato tempo. Levò indi quella strozzatura, e trovò uscire nel medesimo tempo la medesima quantità d' acqua. Da che si deduce che la contrazion della vena produce naturalmente nell'imboccatura de' tubi lo stesso ingombro, che vi produrrebbe un diafragma forato nel mezzo con un pertugio eguale all' area della vena contratta.

Può dunque il sistema formato dal vaso e dal tubo apposto riguardarsi come interrotto da un diafragma. E saranno applicabili a questo sistema le equazioni (E). Se ne traggono le due Proposizioni seguenti, le quali comprendono l' intera Teoria dell' efflusso pe' tubi addizionali.

 §. VIII.

(1) L. c. pag. 10, 11.

§. VIII.

Proposizione I. Sia A l'altezza verticale del vaso; a quella del tubo; l'ampiezza della luce del vaso $= n$; quella della bocca esterna del tubo $= g$. Dico che l'altezza s'' dovuta alla velocità dell' efflusso per la bocca del tubo, sarà prossimamente espressa dalla formola seguente

$$s'' = \frac{A + a}{1 + \frac{4}{g} \cdot \frac{g^2}{n^2}}$$

Riprendasi la prima delle equazioni (E) che è

$$0 = A - S'' + S'$$
$$+ a - s'' + Ks'$$

Dicasi α il rapporto della vena contratta all'area del foro; sarà αn la sezione del diaframma cui figuriamo apposto all' imboccatura del tubo. Essendo poi le altezze s reciproche de'quadrati delle sezioni, ed essendo la sezion del vaso amplissima in confronto di quelle del tubo, avremo

$$S' = 0; \quad S'' = \frac{g^2 s''}{\alpha^2 n^2}; \quad s' = \frac{g^2 s''}{n^2};$$

$$K = 2\sqrt{\frac{S''}{s'}} - 1 = \frac{2}{\alpha} - 1$$

Sostituiti questi valori, e fatte le opportune riduzioni, troviamo

$$s'' = \frac{A + a}{1 + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 \frac{g^2}{n^2}}$$

Ora $\alpha = 0,6$ prossimamente, e però $\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = \frac{4}{9}$. Dunque etc.

§. IX.

Scema dunque la velocità dell' efflusso per l'apposizione del tubo, nè corrisponde mai all' intera altezza del recipiente. I tubi divergenti la sminuiscono più che non fanno i convergenti.

Ne'

Ne' tubi cilindrici riesce $s'' = \frac{9}{13}(A + a)$. Questo valore eccede soltanto di $\frac{1}{39}$ quello indicato dalle sperienze, il qual è (§. I) $s'' = \frac{2}{3}(A + a)$. Del quale eccesso non vuol farsi alcun conto, e perchè è picciolissimo, e perchè già ne abbiamo renduto ragione (§. VI).

Cangiandosi le altezze $A + a$, le velocità dell'efflusso variano come le radici di quelle altezze; il che pure è conforme alle sperienze (§. I).

§. X.

Conosciuta l'altezza s'' si conoscerà ancor la portata, o sia l'erogazione dell'acqua nel tempo t la quale è espressa da $gt\sqrt{2s''}$; e paragonando questa formola colle note formole che danno la portata delle semplici luci, si vedrà se il tubo avvantaggi o nò la portata, e di quanto l'avvantaggi.

Per tal modo si troverà che sotto una pari altezza $A + a$, il tubo convergente comincia ad accrescere la portata della luce, così tosto che l'ampiezza dell'esterna bocca diviene eguale ai due terzi dell'ampiezza della luce del vaso. Indi quanto meno converge il tubo, tanto maggior si ha vantaggio; e facendosi il tubo cilindrico, la portata della nuda luce sta a quella della luce armata come 10 : 13 poco più; e facendosi divergente, la portata cresce anche di più, e segue crescendo a misura della divergenza del tubo, per sin che l'acqua può seguirne le pareti, ed empierne tutta la capacità.

§. XI.

La formola $s'' = \frac{A + a}{1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{g^2}{n^2}}$ risponde assai bene, siccome abbiam visto, alle sperienze delle doccie cilindriche. Ove si voglia

glia farne prova sulle doccie coniche, convien por mente alla contrazione cui va soggetta la vena allo sgorgare per la bocca della doccia. N' è cagione l' obbliquità colla quale s' affacciano le particelle allo sbocco, secondando l'andamento de' lati del tubo; obbliquità atta a produrre una qualche contrazione della vena all' uscire da' tubi convergenti, e per l' opposto una dilatazione ne' divergenti. Tenendo conto di questa alterazione, e sostituendo nel calcolo all' ampiezza dello sbocco del tubo la sezione della vena contratta o dilatata, crederei che le sperienze fatte con doccie coniche dovessero corrisponder così bene alla formola, come le cilindriche. Di che mi assicurano i seguenti esempj.

§. XII.

Sono veramente poche le sperienze che abbiamo di questo genere, e poco precise descrizioni ce ne lasciarono gli Sperimentatori. Quelle per esempio di Poleni sulle doccie convergenti (1) abbenchè fatte in grande, appena ponno servire, sì per la grossolana misura dei diametri delle vene ristrette, come per notabil vizio dell' apparato, del quale non si può dubitare, attesa la discordanza delle sue sperienze da quelle dell' Ab. Bossut (2). Schiveremo quanto si può questi inconvenienti col paragonare fra loro i risultati delle due sperienze fatte nelle circostanze le più diverse.

Sboccava l' acqua orizzontalmente sotto l' altezza costante di lin. 256. Nel primo esperimento (3) essendo il diametro all' origine del tubo lin. 33, il diametro allo sbocco lin. 26, il diametro della vena contratta lin. 25; uscirono pollici cubici 73035 in 177". Nel secondo esperimento (4) essendo il diametro all' origine lin. 118, il diametro allo sbocco lin. 26 come prima, il diametro della vena contratta lin. 23, 5 uscì la stessa acqua in 185".

Ora

(1) De Castellis Art. 29 segg.
(2) Bossut l. c. Tom. II. pag. 57.
(3) De Castellis Art. 31.
(4) Ibid. Art. 33.

Ora uscendo la stessa quantità d'acqua per diverse sezioni in tempi diversi, le altezze dovute alla velocità dell'efflusso deggion essere in ragione inversa de' quadrati delle sezioni, ed inversa de' quadrati de' tempi. Perciò il rapporto tra l'altezza dovuta alla velocità dell' efflusso nel secondo esperimento, e l'altezza simile nel primo esperimento fu $\left(\frac{25}{23,5}\right)^4 \left(\frac{177}{185}\right)^2 = 1,17$.

Veggiamo ora quale riesca questo rapporto giusta la formola $s'' = \frac{A + a}{1 + \frac{4}{9} \cdot \frac{g^2}{n^2}}$. Viene pel primo esperimento $s'' = 222,6$ e pel secondo $s'' = 255,82$; onde risulta il rapporto $\frac{255,82}{222,6} = 1,15$ con tenuissimo divario dal valore che ne ha mostrato l'esperienza.

Facciamo anche una prova sulle doccie divergenti; e sia una sperienza di Daniello Bernoulli, che è la settima della Sezione IV della sua Idrodinamica. Sotto l'altezza di lin. 166 l'acqua usciva per un tubetto orizzontale, di lati divergenti, essendo il diametro all'origine lin. 5 ed all'esterna bocca lin. 6,5. Si conobbe la velocità dell' efflusso misurando l'ampiezza del getto parabolico, e trovossi dovuta all'altezza di lin. 58 all'incirca. La vena si allargava allo sbocco, e Bernoulli rilevò il diametro del massimo allargamento, non già coll' attuale misura, troppo soggetta ad errore, ma con altro ingegnoso e sicuro artificio. Era questo diametro di lin. 6,9. Quindi verrebbe per la nostra formola

$$s'' = \frac{166}{1 + \frac{4}{9}\left(\frac{6,9}{5}\right)^4} = 63,5$$

con qualche eccesso sopra il valore mostrato dalla sperienza: eccesso assai lieve, ed assai giustificato per quel che si disse al §. VI.

§. XIII.

§. XIII.

Proposizione II. Rimanendo ferme le solite denominazioni, si cerchi la pressione p in una sezion qualunque del tubo, d'ampiezza z, e lontana dalla sua origine per l'ascissa verticale x. Sarà

$$p = \mathrm{P} + \mathrm{A} + x - (\mathrm{A} + a)\,\frac{\frac{n^2}{z^2} + \frac{4}{9}}{\frac{n^2}{g^2} + \frac{4}{9}}.$$

Prendasi la seconda delle equazioni (E) la quale è

$$p = \mathrm{P} + \mathrm{A} - \mathrm{S}'' + \mathrm{S}' + x - s + \mathrm{K}s'$$

Or quì abbiamo (§. VIII)

$$\mathrm{S}' = 0;\quad \mathrm{S}'' = \frac{g^2 s''}{\alpha^2 n^2};\quad s = \frac{g^2 s''}{z^2};\quad s' = \frac{g^2 s''}{n^2};\quad \mathrm{K} = \frac{2}{\infty} - 1$$

Sostituiti questi valori; messo in luogo di s'' il valor suo (§.VIII); e finalmente fatto $\alpha = 0$, 6 esce il valore di p annunciato nella Proposizione.

§. XIV.

Moltissime conseguenze scendono da questa formola; ma per non divagar troppo, ci ristringeremo a notarne alcune concernenti i tubi orizzontali, pei quali essendo $x = 0$, $a = 0$, riducesi la formola alla seguente

$$p = \mathrm{P} + \mathrm{A}\left\{1 - \frac{\frac{n^2}{z^2} + \frac{4}{9}}{\frac{n^2}{g^2} + \frac{4}{9}}\right\} \text{ ovvero } p = \mathrm{P} + \mathrm{A}.\,\frac{1 - \frac{g^2}{z^2}}{1 + \frac{4}{9}\cdot\frac{g^2}{n^2}}.$$

Quì se il tubo è cilindrico, vien $p = \mathrm{P}$. È dunque in tali tubi la spinta laterale dell'acqua costante, e per tutto uguale alla pressione dell'atmosfera. Aperto un picciol pertugio ne' loro fianchi non ne uscirebbe punto d'acqua, nè pur una bolla vi s'introdurrebbe dell'aria esterna. E ciò pienamente confermasi dall'

espe-

esperienza, quando i tubi sien brevi, quali qui si suppongono (1). Convien però eccettuarne un picciol tratto in vicinanza dell' origine: poichè ivi formandosi la strozzatura in grazia della contrazione (§. VII) la sezion viva *z* riesce minore della sezione *n* o g del tubo, e la pressione divien minore di P. E tale appunto la mostrano le sperienze (2).

Se il tubo è convergente, si ha *p* maggiore di P. La pressione sui lati è dunque maggiore della pressione atmosferica, ed aprendovi un foro, l'acqua ne uscirebbe. Non so che se ne sia fatta la sperienza, ma l' esito non n'è dubbio.

Pel contrario ne' tubi divergenti è *p* minore di P, e le pareti sono più premute dall' aria esterna all' indentro, che non dall' acqua interna all' infuori. Per un pertugio aperto ne' fianchi entra l' aria, e si frammischia alla vena corrente. Di ciò Bernoulli e Venturi si sono con replicate prove accertati (3).

§. XV.

Quest' ultimo caso, cui prima d' ogni altro avvertì il celebre Daniello Bernoulli, è degnissimo d' osservazione, come quello che rende chiara ed adeguata ragione di moltissimi accidenti che la natura ci pone continuamente sotto gli occhi, e che sembrano a primo aspetto maravigliosi e paradossi. Non d' altra cagione trae origine quel fenomeno, cui piacque al Sig Venturi diseguar col nome di comunicazion laterale del moto ne' fluidi, e che nel più volte citato elegantissimo Opuscolo illustrò d' assai belle sperienze e riflessioni. Questo consiste nella proprietà che ha un getto fluido di attrarre, e strascinare con se le particelle d' aria, o d' acqua che gli stanno, o vengono a fianco. Or ciò accade allorquando tale è la forma del getto, che la pression

(1) Bossut l. c. Tom. II. pag. 180, 181.
(2) Venturi l. c. pag. 13, 14 e 37.
(3) Bernoulli Hydrodyn. pag. 275, 276. Venturi l. c. pag. 27.

laterale dell' acqua corrente riesce minore della pressione dell' atmosfera circostante : allora la prevalente pressione dell' atmosfera spinge a forza entro il getto le contigue particelle sia d'aria, sia d' acqua, e queste vengono poi strascinate dalla corrente. La forza colla quale vengono attratte è tanta, quanto è l' eccesso della pressione atmosferica sopra la spinta laterale dell' acqua.

La formola del §. XIII palesa e distingue i casi ne' quali ha luogo questa comunicazion laterale del moto. E già nei getti, o corsi d'acqua orizzontali essa ha sempre luogo, qualora il getto o per le direzioni da principio impresse, o per le resistenze che incontra sul suo cammino rendesi divergente. Nelle cascate verticali la vena cadente tende ad assottigliarsi prendendo la forma di quella conoide iperbolica che fu determinata dal celebre Guglielmini (1). In questa forma di getto la spinta laterale è costante, uguale alla pressione atmosferica, nè darebbe luogo alla comunicazion laterale del moto. Ma la resistenza dell' aria non permette alle particelle dell' acqua di converger tanto; quindi tosto la pression laterale divien minore dell' atmosferica, ed il moto si comunica lateralmente. Nelle cascate molto alte la pressione scema tanto, che diviene negativa; ed è allora che il getto si sparpaglia, dividendosi in minuti spruzzi.

§. XVI.

Soggiungerò per ultimo un' avvertenza circa l' uso del canone idraulico statico di Daniello Bernoulli (2) per misurar la pressione dell' acque correnti. Consiste questo canone nel seguente teorema : la pressione dell' acqua in ogni sezione del tubo o vaso è rappresentato dall' altezza dovuta alla velocità che ivi prenderebbe l' acqua, se il tubo terminasse in quel luogo, meno l' altezza dovuta alla velocità attuale : alle quali altezze vuol-

(1) Mensura aquarum fluentium Lib. V. Prop. 9.
(2) Hydrodyn. pag. 262.

vuolsi certamente aggiungere l' altezza che rappresenta la pressione atmosferica, quantunque Bernoulli non ne faccia espressa menzione.

Or questa regola non è così generale che possa indistintamente a tutti i casi applicarsi. Un facile e sicuro criterio de' casi ne' quali essa vale, lo somministrano le formole precedenti. Abbiamo per un vaso continuo (§. III) $p = P + x - s + s'$. Quì se la superficie del recipiente è amplissima rispetto alla sezione per cui cercasi la pressione, sarà s' piccolissimo in confronto di s e potrà omettersi; onde $p = P + x - s$; che è appunto l' espressione della regola di Bernoulli. Ma nè pur le sezioni di grandezza paragonabile a quella della sezione suprema, nè per le sezioni de' vasi discontinui il valor della pressione mai non può ridursi all' espressione Bernoulliana. Veggano adunque di non estender di troppo la regola di Bernoulli coloro, i quali riguardandola come dimostrata generalmente l' applicano indistintamente non solo a' tubi, ma anche ai canali ed a' fiumi, senza alcun riguardo nè all' ampiezza delle sezioni, nè agl' interrompimenti del moto.