PARALELLI E PRINCIPIO UNICO E SEMPLICE DELLE DUE TRIGONOMETRIE

Di Pietro Ferroni

Ricevuti il dì 16 *Maggio* 1805.

Come la Trigonometria rettilinea è un derivato agevolissimo della sferica, così quest' ultima apertamente nasce dalla contemplazione d'un solo caso particolare delle Piramidi tetraèdre, o per dir meglio dei Triangoli piramidali (1). Mentre difatto si concepisca tal Piramide triangolare che sia iscrittibile dentro d' un Cono retto e colla cima comune, i tre supremi angoli rettilinei delle tre faccie circoscriventi e componenti l' angolo solido della cima predetta vengono misurati o rappresentati dai tre lati d' un Triangolo sferico, e le mutue inclinazioni delle tre faccie medesime sono i tre angoli piani dell' immaginato Triangolo. L' origine vera e naturale perciò delle proprietà dei Triangoli e Poligoni sferici (e, per semplice corollario, dei rettilinei), da cui dipende la loro congrua risoluzione, deve a ragione desumersi dalla natura geometrica di quelle speciali Piramidi. Siffatta sorgente, sebbene avvertita da molti, non ispiegata nè estesa abbastanza, come facilmente potevasi, per quanto io sappia, da alcuno, rende tosto non solo contezza mercè delle Proposizioni elementari antichissime intorno gli angoli solidi (2), perchè i lati d'un Triangolo o Poligono sferico convesso presi insieme sieno sempre minori d'un' intera circonferenza di Circolo massimo della Sfera, ma con egual lume discopre le due di già note ed uniche formule fondamentali trigonometriche, *binomia* e *trinomia*, le quali (come insegnarono primi Mauduit, Euler, e Degua (3)) in ogni combinazione possibile de' VI. elementi danno l'analisi de' Triangoli sferici obliquangoli, e di cui sono una conseguenza immediata le speciali *binomie* concernenti i rettangoli. E tutti quanti quei paragoni elegantis-

tissimi, che massimamente negli ultimi anni Legendre, Delambre, e Lagrange hanno rilevato in proposito de' Triangoli sferici o finiti o infinitesimi riportati ai rettilinei loro corrispondenti (4), insieme con varj dei paralelli meno conosciuti o men ovvj, sono altrettante derivazioni facili dal Principio medesimo comparativo dei divisati Triangoli piramidali e Prismi retti dotati della stessa base ma d' altezza infinita. Anzi quella nascosa *ellitticità* (se può così nominarsi) che disvelò non ha guari Goudin nell' equazioni generali *trinomie* della Trigonometria sferica (5), riceve la sua etiologia o spiegazione diretta dal fondamento geometrico delle rammentate Piramidi, a differenza delle moltiplici analogie o derivative o sussidiarie (tra le quali le rinomate di Napier o Neper), che si risolvono in artificj di calcolo più o men composti, onde le formule primigenie così trasformate si rendano adattabili e pronte all' uso comodo dei *logaritmi*.

Mio proponimento è pertanto quello di richiamare ad un Principio solo l' una e l' altra Trigonometria, e mostrarne, se non la smarrita, almen l' obbliata provenienza comune. Il Principio geometrico, in qualità di causa prima, debb' essere generalissimo; e mal s' apporrebbe chi cominciasse l' assunto dai Triangoli rettangoli per quindi scendere mediante loro all' analisi degli obliquangoli, o dalla Trigonometria rettilinea coll' ajuto della medesima passasse alla sferica, com' è l' usanza nei corsi ordinarj. Non bisogna confondere la Sintesi didascalica, che dimostra i Teoremi e costruisce i Problemi andando gradatamente dal semplice al composto, colla Trigonometria filosofica e comparativa, alla quale s' aspetta per avventura di seguitare il metodo inverso, e far partire da un tronco primario tutte le ramificazioni diverse che compongon l' insieme di questa Scienza. Se poi alla Geometria elementare de' Greci s' unisca il facile ritrovato del Girard o del Cavalieri (6) risguardante l' area di qualunquesiasi Triangolo sferico, null' altro fa di mestieri per arrivare allo scioglimento di tutti i Triangoli data la conoscenza sola di III. de' VI. loro elementi, e per rintracciarne eziandio le varie appartenenze e misure d' ogni maniera. Imperciocchè tocca all' Algebra, e prin-

cipalmente a quella parte di calcolo che considera le *funzioni* del Circolo, l'incarico di stabilire sopra il suggerito saldissimo fondamento l'edifizio intero trigonometrico, spartirlo, decorarlo, nobilitarlo, ed osservare le regole di simetria, comodo, e convenienza, onde appresentarlo in ciascuna parte dicevole al fine ed allo scopo propostosi dall' architetto nell' ideato disegno. Ora questo è l' ufficio meramente subalterno e non mai etiologico della Scienza, come lo sarebbe di pari se dopo avutosi l' accorgimento di fare scaturir dalla Retta l'Iperbola, e dalla Periferia circolare l' Ellissi ch' ha per suo ultimo *limite* la Parabola, si ricavassero quindi mediante il soccorso più o meno ingegnoso dell' Aritmetica universale le più astruse recondite proprietà delle Coniche (7).

Contuttociò quantunque volte l' argomento ch' io tratto m' aprirà il campo a parlar brevemente d' alcuni dei principj secondarj trigonometrici e delle loro più o meno pregievoli derivazioni, quali si leggono, per tacer d' altri, nei Trattati di Maupertuis, Lagrive, Cagnoli, Carnot, ec. (8), o in alcuni articoli dell' *Enciclopedia metodica*, o nella *Cristallografia* d' Haüy (9) massime pel modo più acconcio di considerare gli angoli solidi o piani, e ricavarne le rispettive misure, non lascierò, senza citazioni speciali, d' aggiungere all' uopo le mie riflessioni indirizzate soltanto a mostrare o la più chiara origine di certe formule che sono più in uso nella Teoria de' Triangoli, o la semplificazione d' altre espressioni della Lingua del calcolo, o le conseguenze dedotte dalla comparazione delle medesime, o finalmente preordinate a spiegare come mai si conciliino ed anzi siano precisamente equivalenti quelle regole classiche della Dottrina Sferica in apparenza discrepanti e ch' avrebber sembiante d' antinomie.

Frattanto seguitando il costume degli Analisti, i III. angoli d'ogni Triangolo o sferico o rettilineo verranno intesi sotto A, B, C, mentre *a*, *b*, *c* rappresenteranno rispettivamente i III. lati ai medesimi opposti.

TEOREMA I.

In una Piramide triangolare iscritta o iscrittibile dentro d'un Co-

Cono retto a base circolare e d'apice comune, son sempre proporzionali alle aree delle tre faccie equicruri situate intorno la cima tanto i *seni* degli angoli delle medesime *a*, *b*, *c*, attorno della cima predetta, quanto i *seni* degli angoli opposti A,B,C delle tre faccie suddette; il che vale a dire i *seni* dei primi angoli costantemente proporzionali ai *seni* degli ultimi, o viceversa.

Perocchè 1.° in sì fatte Piramidi (Fig.ª 1.) essendo, per ipotesi, eguali fra loro i tre lati o spigoli DG, DE, DF, le aree delle tre faccie triangolari equicruri GDE, EDF, FDG hanno la proporzione medesima delle perpendicolari condotte dai punti E, F, G, vertici dei tre angoli della base GEF, sopra i lati predetti DG, DE, DF; e queste perpendicolari, in virtù di *definizioni*, tengono la ragione istessa dei *seni* degli angoli prenominati GDE, EDF, FDG circoscriventi la punta dell' angolo solido D. Oltre di che in 2.° luogo, se (per esempio) dal vertice E d' uno degli angoli della base GEF conducasi EO normale al piano della faccia opposta FDG, e dal punto d' incontro ossia piede O la perpendicolare OI a DG e l'altra OP a DF, insegnano gli *Elementi* d' Euclide (10) che condotte le rette EI, EP, son esse altresì rispettivamente perpendicolari su i lati o spigoli DG, DF; e perciò EIO, EPO (o in altri casi i loro *conseguenti*) sono gli angoli piani delle due faccie FDG, DGE, e dell'altra coppia GFD, FDE, i *seni* dei quali due angoli stanno tra loro come $\frac{EO}{EI} : \frac{EO}{EP} :: EP : EI$ :: *seno* EDF : *seno* EDG. Così proverebbesi nel paragone degli altri.

Corollario I.

Si verifica in tutte le Piramidi triangolari l'istesso Principio elegante geometrico, perchè, qualunque elle sieno, vi si possono sempre segnare su i loro spigoli, o prolungati o troncati, tre punti egualmente (o poco o molto) distanti dal vertice, rimanendo così sempre fermi i tre angoli intorno alla cima e quelli de' piani delle tre faccie che finiscon nell' apice della Piramide.

Corol-

Corollario II.

Dalla considerazione adunque d' un Triangolo piramidale nasce naturalmente (previa la sola impreteribile definizione dei *seni*) il Teorema cattolico della Trigonometria sferica, cioè $\frac{\text{Sen. } a}{\text{Sen.A}} = \frac{\text{Sen. } b}{\text{Sen.B}} = \frac{\text{Sen.} c}{\text{Sen.C}}$, che come equazione *binomia* s' applica subito ai *logaritmi*, racchiude la proprietà de' Triangoli equicruri ossia dell' eguaglianza degli angoli opposti ai lati eguali, ed è in sostanza il gran Canone negli scaleni, dei *seni* de' lati proporzionali ai *seni* degli angoli opposti, che i Geometri han finadora dedotto o a rovescio da separare i Triangoli obliquangoli in due rettangoli *sussidiarj*, o con somma finezza di studio dalla teoria delle *funzioni simetriche*, mercè della quale le due fondamentali Formule trigonometriche (Teor. I. e II. seg.) si convertono in una sola (11).

Corollario III.

Il Teorema cattolico pe' i Triangoli sferici obliquangoli somministra adesso come suo particolare il subalterno per i rettangoli, cioè, posto A l' angolo retto, $\text{Sen.}a = \frac{\text{Sen.}b}{\text{Sen.B}} = \frac{\text{Sen } c}{\text{Sen.C}}$ e così degli altri: equazione *binomia* derivativa che abbraccia sempre però (compreso l' angolo retto) IV. soli de' VI. elementi del Triangolo, ed a paragone della sua generatrice è ancora più acconcia all' uso immediato delle Tavole *logaritmiche*.

Corollario IV.

Se in vece d'una, due faccie della Piramide si dispongano col pian della terza in maniera che formin due angoli retti, ciò non puote accadere giammai, conforme insegnano gli *Elementi* (12), senza che un delli spigoli della Piramide istessa sia perpendicolare

ad

ad un tempo su i due rimanenti, ch' è quanto dire se non quando sien retti i due angoli al vertice di due de' Triangoli. Mentre poi tutte tre le faccie siano perpendicolari vicendevolmente tra loro lo saranno eziandio per la medesima ragione i tre spigoli. Ed ecco l' origine de' Triangoli sferici equicruri *birettangoli* a due quadranti, o *trirettangoli* necessariamente equilateri perchè a tre quadranti.

Corollario V.

Ricavasi oltre di ciò da un Teorema *elementare* d'Euclide (13) che i tre angoli piani delle faccie d'una Piramide triangolare presi insieme superan sempre il valor di quelli della sua base; e dalla natura della Piramide istessa si fa manifesto che mentre s' annulli la di lei altezza DQ, ed il Triangolo piramidale si converta perciò in Triangolo piano, ossia il Triangolo sferico in Emisfero del raggio QE, l'altro *limite* della *somma* dei tre angoli è di sei angoli retti: così che tra II. e VI. retti venga ad esser sempre compreso il valor coacervato dei III. angoli di qualunque siasi Triangolo sferico.

Corollario VI.

Anco a sì fatto *limite* del decremento possibile della Piramide trasmutatasi nel Triangolo rettilineo GEF, o del Triangolo sferico trasformatosi nell' emisferica Superficie e terminato dalla circonferenza del Circolo *massimo* circoscritto al primo Triangolo, appartiene quella medesima legge stabilita dal precedente Teorema; ed è che sebbene *evanescenti* o *nascenti* o per dir meglio *nulli* i *seni* dei tre angoli in E, F, G (ciascheduno di 180°) formati dagli archi circolari o lati di questo *limite* estremo de' Triangoli sferici, contuttociò sieno d' essi malgrado la lor *nullità* proporzionali alle faccie opposte, o sivvero (come nel celebre Teorema statico o centrobarico dei tre *appoggi* (14)) proporzionali alle aree dei Triangoli rettilinei FQG, QGE, EQF giacenti nel medesimo piano, o ai *seni* degli opposti angoli al centro Q che fa

la

la vece di vertice in quest' ultima combinazione o accidente della Piramide.

Corollario VII.

Havvi l' altro *limite* per il contrario dell' accrescimento indefinito dell' altezza della Piramide, ed allora questa si cambia in un Prisma retto triangolare d' altezza infinita avente per base il Triangolo inscritto GEF: da siffatto Prisma deriva la proprietà concernente i Triangoli rettilinei, cioè dei *seni* degli angoli E, F, G, formati dalle tre faccie, proporzionali alle faccie medesime rettangolari opposte infinite, le quali stanno fra loro come le basi o lati opposti FG, GE, EF; il che è quanto dire, con maggior compendio, $\frac{a}{\text{Sen.A}} = \frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ negli obbliquangoli (scaleni, equicruri, equilateri), ed $a = \frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ nei rettangoli; nè manca di far conoscere ancora quì, come sopra, la semplice Geometria, che tra i *seni*, quantunque *nulli* (o da considerarsi per tali in confronto del *raggio* infinito), dei tre angoli delli *spigoli* equidistanti o non-concorrenti passavi l' istessa proporzionalità pari a quella dei tre lati opposti finiti FG, GE, EF; nè tampoco lascia di suggerire che unico essendo il caso dell' altezza QD infinita per ogni Triangolo piramidale, unica e ferma altresì debba essere la trasformazione di ciascun Triangolo sferico nel suo *specifico* Triangolo rettilineo, i cui tre angoli componendo sempre il valor di due retti (vedasi lo *Scolio* seguente), sarà questo il *limite* sempre e *limite* costantemente inferiore, dopo del quale principia tosto a ricrescere sino a VI. retti il valor della *somma* degli angoli d'un qualunque Triangolo sferico (*Corol.* V.); in che consiste la differenza potissima ed insieme l' anello d' unione delle due divisate categorie di Triangoli sferici e rettilinei.

Corollario VIII.

Tra le *varietà* infinite delli sferici obbliquangoli una si conta as-

assai degna d' osservazione speciale, come distinta dai più valenti Geometri; e quella si è d' un Triangolo sferico divisibile in due equicruri o isosceli a pari del rettilineo ortogonio. La vera e lucida origin sua rilevasi tosto con tutta evidenza dal Triangolo piramidale, la cui faccia (Fig.ª 2.ª) FDG passi per un dei diametri innumerabili del Circolo sottoposto; poichè comunque s' inclinino l' altre due, vien sempre il primo ad essere separato da un piano secante centrale DEQ in due Triangoli equicruri piramidali GDEQ, FDEQ, ove (atteso l'evidente situazione *euritmica* d' ognuna delle faccie eguali delle due Piramidi parziarie attorno lo *spigolo* o altezza DQ) è l'angolo piano delle due faccie QGD, GDE eguale a quello delle due QDE, DEG, e l' altro delle faccie QDF, DFE eguale al correspettivo delle due FDE, DEQ rimanenti. Da ciò risulta l' angolo (sempre ottuso sino a II. retti) contenuto dalle due faccie GDE, DEF eguale alla *somma* degli angoli intorno alli spigoli restanti DG, DF, come nel Prisma retto triangolare ortogonio, superiore suo *limite*; un *maximum* l' area del Triangolo sferico di due lati dati attorno E, non altrimente che quella del rettilineo rettangolo *limite*; *massime* l' aree dei Poligoni sferici *isoperimetri* (e perciò le solidità dei settori poligoni o Piramidi sferiche, le grandezze degli Angoli solidi, ec.) mentre si verifichino le *condizioni* medesime, le quali hanno luogo pe' i rettilinei; inscrittibile la serie immensa dei primi Triangoli ottusangoli sferici, tutti diversi di forma su differenti Sfere secondo il più o meno dell'altezza DQ, come l'altro lor *limite* rettilineo rettangolo, dentro del medesimo Semicircolo, il cui centro costante Q. Di quì si deriva eziandio la formula nota $\text{Sen.}\frac{2a}{2} = \text{Sen.}\frac{2b}{2} + \text{Sen.}\frac{2c}{2}$ (dedotta da $(2\text{Sen.})^2 \frac{1}{2} a = (2\text{Sen.})^2 \frac{1}{2} b + (2\text{Sen.})^2 \frac{1}{2} c$, ossia $\text{Cord.}^2 a = \text{Cord.}^2 b + \text{Cord.}^2 c$), non meno che comparisce palpabilmente l'estremo inferior *limite* del Triangolo sferico dell' istess' indole, quando D cada in Q, trasformantesi in un *Fuso* eguale al quarto della superficie della Sfera del raggio minimo QG, cioè in questo caso pareggiante il valore *assoluto* medesimo

mo dell' area dell' altro *Fuso* compreso tra il prolungamento dei suoi lati, e l' istesso valor *relativo* (oltre la comun *somma* di IV. retti) dell'area di ciascheduno dei *complementi* integrali dei *Fusi* provenienti dalla protrazione dei lati di tutti gli altri suddivisati Triangoli sferici posti o descritti su varie Sfere.

Corollario IX.

Gioverà molto alla pratica della classazione de' Polièdri cristallini o salini (suddivisibili generalmente in Piramidi triangolari equicruri), quando non fossero di figura regolare (15) o Prismi retti, i cui angoli piani sarebber gl' istessi dei rettilinei delle lor basi, misurarne da prima con tutta agevolezza mediante una *scala* o *goniometro* di facile concepimento i tre angoli rettilinei intorno del vertice ed un solo degli angoli piani delle tre faccie; giacchè così, pel Coroll. II.°, conseguirebbonsi le misure *relative* dell' aree delle faccie medesime insieme coll' *assolute* degli angoli caratteristici rimanenti, conforme esigono il metodo ed ordine adoperato dai recenziori Naturalisti.

SCOLIO.

Oltre della verità geometrica nitidissima riguardante la *somma* degli angoli d'un Triangolo rettilineo, e quindi di qualunque siasi rettilinea Figura ch'abbia i suoi angoli tutti *salienti* o parte *salienti*, e nel rimanente *rientranti*, di null' altro ha bisogno l'Analisi trigonometrica eccetto che della Teoria *elementare* de' Triangoli *simili*, come quella dalla quale dipende la prova del *Teorema* universale dell'*Ipotenusa*, che dicesi Pitagorico, avvengachè la Critica dotta lo suggerisca anteriore d' assai all' età in cui fiorì il Filosofo rinomatissimo, institutore della Scuola Italica di Crotone. Il rapporto $\frac{a}{\text{Sen.A}} = \frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ nei Triangoli ret-

rettilinei ognun vede (Fig. 1) esser espresso da $\frac{GF}{\frac{1}{2}GF} = 2\,GQ$ ossia al diametro del Circolo circoscritto al Triangolo, e vale a dire (16) al prodotto dei tre lati dell' istesso Triangolo diviso pel doppio della sua area S, cioè $= \frac{abc}{2S}$, espressione parimente geometrica del rammentato diametro; dalla *simetrica* forma della qual' espressione rispetto a ciascuno dei lati a, b, c apparisce in conferma l'identità di quei tre rapporti. E come la proprietà del Triangolo rettilineo ortogonio è conseguenza dell' affezione generalissima (della quale gli antichi non n' ebbero accorgimento (17)) spettante al Triangolo piramidale *trirettangolo* (Coroll. IV), d' onde nasce la dimensione analitica di tutte le Superficie possibili; così quell' ultima formula è inerente nell'altra più universale che riguarda ogni Triangolo piramidale a faccie equicruri. Perocchè $\frac{\text{Sen.}a}{\text{Sen.A}} = \frac{\text{Sen.}b}{\text{Sen.B}} = \frac{\text{Sen.}c}{\text{Sen.C}} = \frac{\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{6\,\Sigma}$ (posta Σ la solidità del Triangolo) $= \frac{3.\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{6P}$ (nominata P la solidità del Prisma egualmente alto) $= \frac{\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{2P}$; formula analoga, *simetrica* anch'essa, e che non finora appieno considerata si converte manifestamente nell' altra proporzionale $\frac{\text{Sen.}a.\text{Sen.}b.\text{Sen.}c}{2S} = \frac{abc}{2S}$, come sopra. Consimile *paralello* scaturisce altresì dal paragone che voglia farsi della solidità di quel Triangolo piramidale equicrure colla solidità del Prisma dell' istessa base ed altezza, quando questa diventi *infinita*. Difatto

$$\Sigma = \frac{d^3}{3}\sqrt{\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}.\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}},$$ supponendo d lo spigolo o lato; e perciò

$$P = d.S = d^3\sqrt{\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}.\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}},$$

o siv-

o sivvero $S = \sqrt{\left(d.\text{Sen.}\frac{a+b+c}{2}.d.\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.d.\text{Sen.}\frac{a+c-b}{2}.d.\text{Sen.}\frac{c+b-a}{2}\right)}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(c+b-a)}$, ch'è la formula nota (e poco analoga alla celebre di Lhuillier Tang. $\frac{1}{4}\Sigma$ ec. (18)) dell' area d' ogni Triangolo rettilineo (senz' analogia o *paralello* vero adattabile all' altra non ridotta Tang. $\frac{\Sigma}{2}$ ec. confrontata da Lagrange (19) in proposito dell' area Σ del Triangolo sferico), dalla quale ricavansi tosto i due *raggi* del Circolo circoscritto ed iscritto, presupposta la conoscenza dei soli lati.

Conseguenza del medesimo nesso tra quei Triangoli piramidali ed i rettilinei lor *limiti* è la comunione degli istessi attributi d'eguaglianza o identità, quando questi si partono dal gran principio intuitivo di soprapposizione e *combaciamento*. Gli antichi Scrittori e Greci ed Arabi *Sphaericorum* n' hanno diffusamente parlato; ma non posso concorrere nel sentimento dei moderni Geometri, dove trattando dei Triangoli sferici *simetrici* (Fig. 3) giudicarono che ivi mancasse, per la prova dell' eguaglianza, l' appoggio della *coincidenza*, quale compete visibilmente, rivoltandoli, ai Triangoli rettilinei. Perchè rivoltati di pari gli sferici (siccome altrove ho notato (20)), e posto e fatto passeggiare il convesso dell' uno sull' omologo convesso dell' altro o il concavo sopra il concavo, tutti i punti degli archi respettivamente eguali di Cerchj *massimi* innumerabili segnati nell' area del primo caderanno un su l' altro e combineranno si insieme per soprapposizione *successiva* (egualmente evidente come la *simultanea*) qual' orlo di ruota su quello di ruota eguale, d' onde nasce il *combaciamento* di tutte le parti o *elementi*, e delle superficie intere comprese tra i contorni medesimi dei due Triangoli.

Nè mi persuade tampoco la differenza, che la massima parte dei Trigonometri incontrano ogni volta che scendono alla soluzione del *caso* o modo di rintracciare i tre lati di un Triangolo conosciuti i tre angoli, chiamando il Problema *indeterminato* nei

nei rettilinei e viceversa *determinato* nei sferici. Egli è questo per il contrario suscettibile di soluzioni infinite, cioè d' una serie di Triangoli innumerabili, tutti tra loro *simili*, sì negli uni, come negli altri; e siffatto *caso* in entrambi *determina* solamente la *specie* e non mai la *grandezza* di quel Triangolo o sferico o rettilineo. Gli archi difatti del Triangolo sferico, che ne risultano, espressi in *gradi*, *minuti*, ec., sono, anco sopra una medesima Sfera (quantunque non sembri andarne sempre d' accordo Legendre (21)) grandezze *relative* e non *assolute*, ed appartengon di più ad innumerevoli Sfere, tutte diverse di *raggio*, come *relativi* son parimente i valori *tavolari* dei tre *seni* degli angoli opposti, che somministrano i rapporti dei lati d' innumerabili Triangoli rettilinei della medesima *specie*. Si direbbe con più precisione che tagliata la Piramide della Fig. 1., o il di lei prolungamento mediante un piano paralello alla base, tutti gli innumerevoli Triangoli piramidali equicruri, che ne nascerebbero, e le loro basi o *limiti* o basi de Prismi respettivi, rappresentassero i primi gli innumerabili Triangoli sferici *simili*, le seconde gl' innumerabili rettilinei parimente *simili*, cioè non diversi se non se di *grandezza*; la quale diversità non può mai perquotere gli angoli o lineari o piani o solidi, perchè appartengono alla *situazione*, ma i soli lati o spigoli o faccie e lor dipendenze, che unicamente si riferiscono alla grandezza delle figure e dei figurati.

E quì mi piace riflettere che nella serie infinita dei Triangoli *simili* o dati di *specie*, posto che ancora, indipendentemente dalle Piramidi, si volessero considerare i rettilinei sulle superficie delle Sfere, vi sarebbero sempre due differenti maniere d'imaginarli: la prima come *infinitesimi* di data *specie* sopra una Sfera *finita*; la seconda come *finiti* di data *specie* sopra una Sfera di raggio *infinito*. Ora imaginandoli della prima maniera, è facile accorgersi come l' area di quel Triangolo *differenziale* pe' i ritrovati Cavaleriani essendo eguale alla superficie d' un Semifuso sferico $A+B+C-2D$ (nominato D un angolo retto), e dovendo ad un tempo considerarsi qual *limite* od *elemento* della superficie

ficie d' ogni *finito* Triangolo sferico, somministri subito $A+B+C-2D=0$, cioè $A+B+C=2D$; ch'è appunto la proprietà caratteristica dei Triangoli rettilinei a differenza degli sferici, e dall' *infinitesimo*, di qualunque *specie* esso sia, trasportasi subito al *finito* suo *simile*, considerandolo nella seconda maniera sopra la sferica Superficie *infinita*. Coll' area di quel Triangolo-*limite* combina mirabilmente la formula dell' area del Triangolo sferico $\frac{2\,\text{Sen.}\frac{a}{2}.\text{Sen.}\frac{b}{2}.\text{Sen.}\frac{c}{2}}{\text{Sen.}\Phi}$ stabilita da Lagrange, come l' altra della solidità della corrispondente Piramide equicrure centrale $\frac{2\,\text{Sen.}\frac{a}{2}.\text{Sen.}\frac{b}{2}.\text{Sen.}\frac{c}{2}}{3\,\text{Tang}\,\Phi}$ (22): perocchè la prima (Φ distanza dal *polo* del Circolo circoscritto, il cui raggio $\text{Sen.}\,\Phi=\Upsilon$, diventando allora un arco *differenziale*) convertesi in $\frac{2\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\right)}{4\Upsilon}=\frac{abc}{4\Upsilon}$; mentre la seconda si cambia in $\frac{2\left(\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\right)}{3\,\frac{\text{Sen}\,\Phi}{\text{Cos.}\Phi}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{abc}{4\Upsilon}$, rendendosi manifesto in tal caso $\text{Cos.}\Phi=1$, altezza della divisata Piramide. E la *metamorfosi* del Triangolo sferico nel rettilineo *elementare* (e *finiti* suoi *simili*) scuopresi chiaramente dalla versione della volgar formula *simetrica* (Corollarj II. e VII.) $\frac{\text{Sen.}a}{\text{Sen.A}}=$ $2\,\text{Tang.}\Phi.\text{Cos.}\frac{a}{2}.\text{Cos.}\frac{b}{2}.\text{Cos.}\frac{c}{2}=2.\frac{\text{Sen.}\Phi}{\text{Cos.}\Phi}.\text{Cos.}\frac{a}{2}.\text{Cos.}\frac{b}{2}.\text{Cos.}\frac{c}{2}=$ (nel *limite*) $\frac{2\Upsilon}{1}.1.1.1=2\Upsilon=\frac{a}{\text{Sen.A}}$, come ho provato di sopra.

Del resto può adesso con tutta verità assicurarsi 1.° che in virtù delle *definizioni* ordinarie ed indispensabili delle *Linee* trigonometriche non v' ha formula resolutiva dei Triangoli sferici e rettilinei, la quale non possa esprimersi con un' *equazione* composta di *cognite* e soli *seni* e *coseni* (o soli *coseni*) mercè del Teo-

re-

rema dell' *Ipotenusa*, ossia de' Triangoli equiangoli o *simili*; 2.° che tutte le conversioni delle poche formule *primitive* in altre più comode *equipollenti*, o son risultanze di *sostituzioni* adoprate e condotte a fine per mero meccanismo di calcolo, o più presto s' appoggiano all' unica ricerca del *seno* della *somma* o *differenza* di due angoli, la quale, anco senza dedurla dai Triangoli *simili*, dipende da un Teorema *elementare* del Quadrilatero o Tetragono inscritto dentro d' un Circolo (23), che per il meno risale sino all' epoca di Tolomeo, Geografo e Astronomo di Alessandria d' Egitto, o meglio (24) dal Corollario VII. antecedente e dalla prova poco innanzi motivata, ed a mio parere semplicissima e nuova, della *somma* degli angoli di un Triangolo rettilineo eguale sempre a due *retti*.

TEOREMA II.

Come da considerar le due rette EP, EI (Fig. 1.) nacque l' Equazione *binomia* trigonometrica; così dalla considerazione delle altre due OP, OI nasce l' universale *trinomia*, che sola abbraccia tutta intera l' *analisi* d' ambedue le Trigonometrie.

Ed in vero ripreso il solito Triangolo piramidale equicrure, avente per *limite* il rettilineo, argumentasi dalle cose già dette e dalla *definizione* de' *seni* ec. essere OP=EP.Cos.C=*d*.Sen.*b* Cos.C, non meno che OI = EI.Cos.B = *d*.Sen.*c*.Cos.B. Ma visibilmente nel *limite* (cioè quando la Piramide diventi Prisma) OP + OI = FG, ch'è quanto dire, *d*.Sen.*b*.Cos.C + *d*.Sen.*c*.Cos B = *d*.Sen.*a*, ovvero Sen.*a* = Sen.*b*.Cos.C + Sen.*c* Cos.B. Ecco dunque frattanto la *forma* della cercata Equazione *trinomia* tra V. (e non più IV.) *elementi*. All' effetto di generalizzarla ed estenderla a tutti i *casi*, salvo la *forma* oramai trovata, vi si debbono aggiungere *coefficienti* in *coseni* (*Scol.* prec.) a due qualunque dei termini suoi; poichè tornerebbe l' istesso, come l'Algebra o Aritmetica insegna, aggiungendoli a tutti tre, dei quali è composta. Evvi però una *condizione* immancabile da satisfare, che come *criterio* o riscontro di verità, all' Analista dee servi-

vi-

vire di guida nell' assegnazione specifica de' *coeffic ienti* predetti. Quella si è che la formula universale fa di mestieri che combini coll' altra particolare, cui condurrebbe per rapporto al Triangolo equicrure - piramidale rettangolo. Ora (Cos.b)Sen.a = (Cos.a)Sen.b.Cos.C + Sen.c.Cos.B, posto il *caso* di B angolo retto, cambiasi evidentemente in $\frac{\text{Sen.}a}{\text{Cos.}a} \times \frac{\text{Cos.}b}{\text{Sen.}b} = \text{Cos.C}$ cioè $\frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}b} = \text{Cos C}$, o sivvero 1 : Cos.C : : Tang.b : Tang.a; il che è come scrivere EP : PO = EM : GM (perchè allora il punto O cade in G) : : Tang. EDM : Tang. GDM ossia Tang. b : Tang.a. Rimane perciò al paragone verificata appieno la formula che investigavasi, e nella qual si concentrano tutta la Scienza e la pratica *trigonometrica*.

Corollario I.

Da quest' unica *Equazione* classica tra V. *elementi* concernente i Triangoli piramidali o sferici obliquangoli si deducono, mediante il Calcolo delle *sostituzioni* e col soccorso dell' Equazione *binomia* somministrata dal I. *Teorema*, altre tre composte di IV. *elementi*, le quali in sostanza insiememente colla ritrovata son una (25).

I. Cos.b Sen$a$ = Cos.a Sen.bCos.C + Sen.c Cos.B

II. Cos.c = Sen.b Sen.a Cos.C + Cos.b Cos.a

III. Cot.b Sen.a = Cot.B Sen.C + Cos.a Cos.C

IV. Cos.C = — Cos.B Cos.A + Sen.B Sen.ACos.c.

E l' ultima coincide colla seconda [data da De Gua come cardine o perno di tutta la Trigonometria (26)] mutando soltanto gli archi o lati in angoli di *supplemento* (misurati da archi ancor dessi), e viceversa, per mezzo de' Triangoli sferici *supplementi* o *polari*, di tal maniera che così sviluppate non son altro che sole III. Equazioni fondamentali *trinomie* tra V. o IV. *elementi* comunque disposti d'un Triangolo sferico obliquangolo, nelle *quattro* combinazioni varie tra le *quindici*, che apparterrebbero in generale a tutti i *quadernarj* possibili di *sei* parti integranti, le quali

li combinate a *quaderne* conducono allo scioglimento de' VI. *casi* proponibili alla sagacità del Geometra.

Corollario II.

Nascono da quelle tre Formule [giacchè la IV., come s'è detto, è una *replica* inutile per la Trigonometria rettilinea, ove *dati* due, non che tre angoli, vien subito dato dalle *Tavole* de' *seni* anco il rapporto dei lati (*Scol.* preced.)] le III. analoghe parimente *trinomie* relative ai Prismi-*limiti* o ai Triangoli rettilinei; ed abbracciando V. *elementi* per ciascheduna sono, a parer di Carnot (27), la chiave di tutti *quattro* i *casi* possibili dell'*analisi* degli obliquangoli. Anzi non altramente che nei Triangoli piramidali le *tre* si riducono ad *una*; ed è quella OP + OI = FG di già prenotata (Dimostraz. del *Teor.* II.), che si può dire la sola *generatrice* di tutte, compresa come *limite* nella I. del Corollario precorso sul punto od istante dell' *evanescenza* degli angoli a, b della divisata Piramide. Imperciocchè si conseguisce in tal circostanza, a motivo di Sen. $a = a$, Sen. $b = b$, Sen. $c = c$, Cos. $b = 1$, Cos. $a = 1$,

I. $a = b\text{Cos.C} + c\text{ Cos.B}$; e permutando le *specie*
II. $b = a\text{Cos.C} + c\text{Cos.A}$
III. $c = a\text{Cos.B} + b\text{Cos.A}$.

Nè far dee meraviglia se nei rettilinei obliquangoli abbiansi IV. soli *casi* diversi a confronto de' VI. degli sferici; perchè uno, in virtù della riflessione premessa, rimane escluso mercè dell' indole dei Triangoli; ed i II. *casi* degli sferici d' un lato e due angoli *dati*, o entrambi *adjacenti*, o un *adjacente* e l'altro *opposto*, fanno un *caso* solo nei rettilinei, ove d' intima loro natura *dati* due angoli sempre conoscesi il terzo. E la preposta *Equazione* trigonometrica tanto più ha da riputarsi classica ed originale in quanto che ella s' estende, partendo dall' istesso principio e *mutatis mutandis*, a tutti i Poligoni (sian essi nel medesimo pia-

no o no come i *gauches*), non meno che ai Poliedri, chiamate lati le loro faccie.

Corollario III.

Ma anche la II. Equazione de' Triangoli sferici, come *derivata* dalla I. (*Corol.* I.), conduce a quelle particolari attenenti ai Triangoli rettilinei. Cercando difatto il *limite* di $\text{Cos}.c = \text{Sen}.b\ \text{Sen}.a\ \text{Cos}.C + \text{Cos}.b\ \text{Cos}.a$, avremo tosto $1 - \frac{c^2}{2} = ba\,\text{Cos}.C + \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)$, ovvero $1 - \frac{c^2}{2} = ba\,\text{Cos}.C + 1 - \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, cioè $2ba\,\text{Cos}.C = b^2 + a^2 - c^2$; Equazione fondamentale trigonometrica tra IV. *elementi*, che appoggiata ad un *Teorema* d' Euclide (28) è l' unica base di tutta la Trigonometria rettilinea, ed acquista per la *permutazione* le tre speciali *forme* seguenti

I.ª $2ba\,\text{Cos}.C = b^2 + a^2 - c^2$
II.ª $2bc\,\text{Cos}\,A = b^2 + c^2 - a^2$
III.ª $2ac\,\text{Cos}.B = a^2 + c^2 - b^2$

Sommate queste *forme* speciali a due per due, procedono l'Equazioni a V. *elementi* del Corollario passato; così che tanto l'une che l' altre respettivamente si copiano, e mostrano chiara la loro origine comune. Per esempio la I.ª colla III.ª fan nascere $2a\,(b\text{Cos}.C + c\text{Cos}.B) = 2a^2$, o sivvero $b\text{Cos}.C + c\text{Cos}.B = a$; e l' istesso delle rimanenti intravviene. In proposito poi del significato della III.ª Equazione del *Coroll.* I., da verificarsi come *limite* anch' essa ne' Triangoli rettilinei, giova brevemente avvertire, che $\text{Cot}.b\ \text{Sen}\,a = \text{Cot}.B\ \text{Sen}.C + \text{Cos}.a\ \text{Cos}.C$ allora trasmutasi in $\frac{a}{b} = \frac{\text{Cos}.B}{\text{Sen}.B}\text{Sen}.C + \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\text{Cos}.C$, cioè $\frac{a}{b}\,\text{Sen}.B = \text{Cos}.B\ \text{Sen}.C + \text{Cos}.C\ \text{Sen}.B - \frac{a^2}{2}\text{Cos}.C\ \text{Sen}.B = \text{Sen}.(B + C) - \frac{a^2}{2}\text{Cos}.C\ \text{Sen}.B = \text{Sen}\,(180° - B - C) - \frac{a^2}{2}\text{Cos}.C\ \text{Sen}.B =$

Sen.

Sen.A $- \frac{a^2}{2}$ Cos.C Sen.B , onde proviene per *limite* ultimo $\frac{a}{b}$ Sen.B = Sen.A, o sivvero $\frac{a}{b} = \frac{\text{Sen.A}}{\text{Sen.B}}$, che riconduce in circolo mirabilmente d' accordo l' Equazione *binomia* già nota del Corollario VII. del I. *Teoréma* (colla *permuta* delle *specie*, suddivisibile in III. fra IV. *elementi*), e manifesta ad un tempo ch' ell' era , com' è difatti (29), contenuta *virtualmente* nella III. *generale* predetta .

Corollario IV.

Le IV. Formule del *Corollario* I. (ossia l' unica *universale*) somministrano facilmente l' Equazioni *binomie* per l' *analisi* de' Triangoli sferici ortogonj e lor dipendenti , cioè isosceli , aventi un lato eguale a un *quadrante*, o la *somma* di due lati agguagliantesi ad una *semicirconferenza*, o ciò ch' è l' istesso, quella degli angoli opposti pari a due *retti* (30), come dall' altre del *Corollario* II. si derivano le *binomie* pe' i rettangoli rettilinei . Così i VI. *casi* della risoluzione de' Triangoli rettangoli sferici dipendono dall' adoprare le *sei* consecutive Equazioni .

1.° Posto B angolo retto , si cambia la I. in $\frac{\text{Cos.}b}{\text{Sen.}b} = \frac{\text{Cos.}a}{\text{Sen.}a}$ Cos.C, cioè , Cot.b = Cot.a Cos.C ;

2.° Posto C angolo retto, si cambia la II. in Cos.c = Cos.b Cos.a;

3.° Posto C angolo retto, si cambia la III. in Cot.B = Cot.b Sen.a;

4.° Posto C angolo retto, si cambia la IV. in
Sen.B Sen.A Cos.c = Cos.B Cos.A, ossia, Cos.c = Cot.B Cot.A;

5.° Posto B (ovvero A) angolo retto , si cambia l' istessa IV. in
Cos.C = Sen. A Cos.c, ovvero, = Sen. B Cos. c ;

6.° Posto B angolo retto, e combinata la 1.ª colla 5.ª s' ottiene Cot. b = Cot. a Sen. A Cos.c, ossia, $\frac{\text{Cos.}b}{\text{Sen.}b} = \frac{\text{Cos.}a}{\text{Sen.}a}$. Sen. A Cos.c , ovvero , Sen. b = $\frac{\text{Sen.}a \text{ Cos.}b}{\text{Cos.}a \text{ Sen.A Cos.}c} = \frac{\text{Sen.}a}{\text{Sen.A}}$ in virtù della 2.ª, che riconduce a quella del *Corollario* III.° del I.° *Teorema* , l' avvalo-

lora ad un tempo, e dimostra d' essere intimamente racchiusa nell' espressione *generica* trovata pe 'l mezzo del presente *Teorema* II.° E queste VI. Formule, tutte *binomie*, ognun vede che sono acconcie a subire immediatamente il computo *logaritmico*.

Corollario V.

Molto più agevole è la deduzione delle *regole* particolari pe' i IV. *casi* diversi dell'*analisi* de' Triangoli rettilinei parimente ortogonj da ciascuna delle III. Formule generali del *Corollario* II.° Conciossiachè

1.° Se B sia un angolo retto, la I.ª trasmutasi in $a = b$ cos. C.

2.° Nella medesima ipotesi, a motivo di $C + A = 90°$, la I.ª convertesi in $a = b$ Sen. A (Coroll. VII.°).

3.° Fatto l' istesso supposto, e ricavato dalla III.ª $b = \frac{c}{\text{Cos.A}}$, proviene dall' ultima $a = c \frac{\text{Sen.A}}{\text{Cos.A}} = c$ Tang. A.

4.° E finalmente nell' istessa supposizione, e per il motivo non ha guari accennato, $a = c$ Cot. C:

Equazioni tutte *binomie*, che del pari deriverebbonsi da quelle del *Corollario* III.°, e si risolvono senz' altro presidio coi *logaritmi*.

Corollario VI.

Delle due coppie di rette del Triangolo piramidale e del rettilineo suo *limite*, cioè EP, EI considerate nel *Teorema* I.°, ed OP, OI contemplate in questo II.°, l' appoggio unico o tronco comune, da cui si partono, è l' altra retta EO perpendicolare al piano della faccia della Piramide opposta ad E, ossia FDG, e quindi al lato FG dopo cambiatasi la detta Piramide in Prisma. Or questa retta EO è molto significativa per rapporto all'*analisi* praticata de'Triangoli obliquangoli sì sferici che rettilinei, quantunque proceda direttamente, come abbiam visto, dall' *elementar* Geometria. Imperocchè il pian del Triangolo DEO taglia visi-

sibilmente il Triangolo piramidale equicrure obliquangolo (o sivvero lo sferico) in due parziarj Triangoli piramidali equicruri rettangoli; e nel *limite* la retta EO taglia perpendicolarmente il lato FG, e divide perciò il Triangolo rettilineo (o Prisma retto) obbliquangolo in due parziarj rettangoli. Di quì prendono origine la soluzione *indiretta* degli obliquangoli collo spartirli in rettangoli, la dipendenza dei primi dagli ultimi per mezzo d'un angolo di soccorso o *sussidiario* e dello spartimento in due *segmenti* del lato opposto, quantunque volte fia d' uopo prolungato a proposito, e finalmente la riduzione delle formule trigonometriche a due simultanee *binomie*, adattabili al maneggio dei *logaritmi*. E che sia così, vien ciò confermato mirabilmente dall' accordo del calcolo di Lagrange (31) coll' analogia discoperta nel passato *Scolio* dell'aree dei Triangoli sferici e rettilinei. Difatto la normale $EO = 2\sqrt{\left(\frac{\frac{a+b+c}{2}\,\frac{a+b-c}{2}\,\frac{a+c-b}{2}\,\frac{c+b-a}{2}}{a}\right)}$ nei rettilinei, per li *Elementi*; laonde in virtù del *paralello* provato, il *seno* EO dell' arco perpendicolar negli sferici (rimontando dal *limite*) $= 2\sqrt{\left(\frac{\frac{(\text{Sen.}\,a+b+c)}{2}\,\frac{(\text{Sen.}\,a+b-c)}{2}\,\frac{(\text{Sen.}\,a+c-b)}{2}\,\frac{(\text{Sen.}\,c+b-a)}{2}}{\text{Sen.}\,a}\right)}$, come s' avvera arrivandovi per altro metodo. E non che il *paralello* sussista nei soli Triangoli ortogonj, s' estende egualmente ai Trapezj *birettangoli* e sferici e rettilinei, perchè il *limite* dell' espressione analitica dell'area Σ d'un Trapezio sferico, cioè Tang. $\frac{\Sigma}{2} = \frac{\text{Sen.}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\text{Cos.}\frac{\beta-\gamma}{2}}$.Tan.$\frac{A}{2}$ diventa $\frac{\Sigma}{2} = \frac{\frac{\beta+\gamma}{2}}{1}\cdot\frac{A}{2} = \frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{A}{2}$. ovvero $\Sigma = \frac{\beta+\gamma}{2}$. A per l' area d' un Trapezio *infinitesimo* rettilineo; ch' è quanto dire l' istessa Formula rappresenterà l' area d' un Trapezio *simile finito birettangolo* rettilineo, e l' Agrimensura *sferica* di tutti i Poligoni segnati sopr' una Sfera sarà in perfetta armonia colla *piana*. Anzi in quei pochi *casi*, ne' quali l' *analisi logaritmica* dei Triangoli si conseguisce senz'arco o angolo *sussidiario*, le due *Rego-*

go-

gole rinomate di *Neper*, che vi conducono (l'altre due rimanenti non essendo che *repliche* delle prime tradotte ai Triangoli *polari*), sono strettamente connesse col Teorema notissimo *elementare* Euclidèo (32) delle *secanti* d'una circonferenza di Circolo, dipendente dai Triangoli *simili*, o se si faccia a meno di loro, dal *Coroll.* VII.° del I.° *Teorema*; stante che Tang. $\frac{A+B}{2}$. Tang. $\frac{C}{2}$ = Cos. $\frac{a-b}{2}$, e Tang. $\frac{A-B}{2}$. Tang. $\frac{C}{2}$ = $\frac{\text{Sen.}\frac{a-b}{2}}{\text{Cos.}\frac{a+b}{2}}$ danno insiem combinate, Tang. $\frac{A+B}{2}$: Tang. $\frac{A-B}{2}$: : Sen. $\frac{a+b}{2}$ $\times$ Cos. $\frac{a-b}{2}$: Sen. $\frac{a-b}{2}$ $\times$ Cos. $\frac{a+b}{2}$; laonde nel *limite* o Triangolo rettilineo *infinitesimo* (perciò ancora nel *finito* suo *simile*) Tang. $\frac{A+B}{2}$: Tang. $\frac{A-B}{2}$: : $\frac{a+b}{2}\times 1$: $\frac{a-b}{1}\times 1$, ossia $a+b : a-b$: : Tang. $\frac{A+B}{2}$: Tang. $\frac{A-B}{2}$, ch' è il vero modello originale o prototipo geometrico delle poscia scoperte Formule *Neperiane*. E per non tornare a discorrere questo argumento, osservo che sparisce nei rettilinei Tang. $\frac{C}{2}$, ed i V. *elementi* sferici si riducono a IV. perchè *dati* A e B, il terz' angolo C è allor sempre *noto*, essendo eguale 180° — A — B, nè vi può essere in conseguenza mai luogo a farne soggetto di particolar ricerca analitica. Lo confermano infatti le medesime espressioni di *Neper*: imperocchè la I.ª si cambia in Tang. $\frac{A+B}{2}$. Tang. $\frac{C}{2}$ = $\frac{1}{1}$ = 1, cioè Tang. $\frac{C}{2}$ = Cot. $\frac{A+B}{2}$, onde procede $\frac{C+A+B}{2}$ = 90°, e quindi Tang. $\frac{A-B}{2}$ $\times$ Cot. $\frac{A+B}{2}$ = $\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}}$, cioè Tang. $\frac{A+B}{2}$: . . . . Tang. $\frac{A-B}{2}$: : $a+b : a-b$, come sopra. Di più nel Problema di rintracciare qualunque degli angoli d'un Triangolo sferico o rettilineo

lineo, di cui *diansi* i tre lati, anco più chiaro si manifesta il *paralello* delle due Formule conducenti al valore dell' angolo *incognito* A, essendo che Tang. $\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\text{Sen.}\frac{a+b-c}{2}.\text{Sen.}\frac{a-b+c}{2}}{\text{Sen.}\frac{b+c+a}{2}.\text{Sen.}\frac{b+c-a}{2}}}$ diventa appunto nel *limite* Tang. $\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}}$, coerentemente alla conosciuta espressione analitica derivata da $\frac{\text{Sen.}\frac{1}{2}A}{\text{Cos.}\frac{1}{2}A}$, ed applicabile ai *logaritmi* (33).

Corollario VII.

Chiunque rifletta alla varia composizione di tutte le precedenti Formule universali e particolari, ne ricaverà tosto il *criterio* per saper distinguere i *casi*, nei quali l' *analisi* de' Triangoli o sferici o rettilinei porti, o portar possa se certe *condizioni* speciali manchin nei *dati*, ad una doppia soluzione; e questo accade tutte le volte che l' *elemento* incognito, o angolo o lato ch' ei sia, dipenda da un *seno*, e non da altra *funzione*, come *coseno*, *tangente*, *cotangente*, ec., la quale involva linee trigonometriche, cambianti *segno* per rapporto agli angoli o lati *supplementari*. Le medesime Formule insegnano quali sien anco i *casi* o combinazioni non ammissibili, ossiano di soluzione *impossibile* in Trigonometria; e possono facilmente riscontrarsi nel I.° Capitolo della precitata *Memoria* le belle e istruttive *Tavole combinatorie* di Goudin, compilate da lui a sì fatto proposito. Quella incertezza però che contengono le due soluzioni, vien tolta o dai *dati* del Problema da sciogliersi, o dalle *elementari* proprietà dei Triangoli relative alle concomitanti *specie* dei lati e degli angoli. E taluna volta anche i *seni*, per dipendenza dai *dati*, importan unica soluzione; come sarebbe tra l' altre l' elegantissima Formula dell' area S di un Triangolo rettilineo, non dimostrata da Legen-

dre

dre (34), e ch' io provo nel modo seguente. Perchè $S = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. $\frac{\text{Sen.A Sen.B}}{\text{Sen.(A}-\text{B)}}$ è l'istessa cosa che $\frac{1}{2}(a+b)(a-b)\frac{\text{Sen.A Sen.B}}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} =$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(\text{Sen A}+\text{Sen.B})(\text{Sen.A}-\text{Sen.B})}{\text{Sen.(A}-\text{B)}}\,ab \text{ (Coroll. VII. del I. } \textit{Teorema} \text{) } =$$

$$\frac{1}{2}ab\,\frac{(\text{Sen.}^2\text{A}-\text{Sen.}^2\text{B})}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} = \frac{1}{2}ab\,\frac{\left((1-\frac{1}{2}\text{Cos.2A})-(1-\frac{1}{2}\text{Cos.2B})\right)}{\text{Sen.(A}-\text{B)}}$$

$$= \frac{1}{2}ab\,\frac{\left(\frac{1}{2}\text{Cos 2A}-\frac{1}{2}\text{Cos.2B}\right)}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} = \frac{1}{2}ab\,\frac{(\text{Sen.(A}+\text{B) Sen.(A}-\text{B))}}{\text{Sen.(A}-\text{B)}} =$$

$$\frac{1}{2}ab.\text{Sen.(A}+\text{B)} = \frac{1}{2}ab.\text{Sen.(180}^\circ-\text{(A}+\text{B))} = \frac{1}{2}ab.\text{ Sen. C},$$

ch' è appunto la superficie *triangolare* derivata dalla conoscenza dei due lati e dell' angolo contenuto.

Corollario VIII.

Segue presso a poco l' istesso nella Formula celebratissima trigonometrica, mercè di cui, indipendentemente dalle Regole analoghe alle *Neperiane*, l' *analisi* d' un Triangolo rettilineo, mentre sian *conosciuti* due lati insieme coll' angolo contenuto, si conseguisce per via di Serie-infinite; intorno all' origine e sviluppo delle quali si distinser cotanto o mediante l' Algebra de' *finiti* o con quella degli *infinitesimi* Legendre e Delambre, e più generalmente Lagrange, che primo ridusse ϕ (Sen.A, Cos.A) quando la Sigla ϕ rappresenti una *funzione razionale* qualunquesiasi, ad una Serie di *seni* d' archi multipli di A in progressione *naturale* aritmetica. Somministrasi immediatamente dagli *Elementi*, in virtù della normale M (Fig.ª 4.), la Formula Tang. C $= \frac{c\text{Sen.A}}{b - c\text{Cos.A}}$, la quale coincide, sott' altro aspetto, con $\frac{b}{\text{Sen.B}} = \frac{c}{\text{Sen.C}}$ (Coroll. VII.° del *Teorema* I.°), giacchè l'Equazione $\frac{\text{Sen.C}}{\text{Cos.C}} = \frac{c\text{Sen.(B}+\text{C)}}{b + c\text{Cos.(B}+\text{C)}}$, a motivo di $A = 180^\circ - (B + C)$, si converte in

b.Sen.C

$b\,\text{Sen.}C + c\,\text{Sen.}C\,\text{Cos.}(B+C) = c\,\text{Cos.}C\,\text{Sen.}(B+C)$, cioè $b\,\text{Sen.}C = c(\text{Cos.}C\,\text{Sen.}(B+C) - \text{Sen.}C.\,\text{Cos.}(B+C)) = c\,\text{Sen.}((B+C)-C) = c\,\text{Sen.}B$; ma niuno ha fino ad ora provato ch' essa conduca alla medesima conclusione dell' allegata nel precedente *Corollario* VI.°, o sivvero $b + c : b - c :: \text{Tang.}\frac{B+C}{2} = \text{Cot.}\frac{A}{2} : \text{Tang.}\frac{B-C}{2}$ ch' è quanto dire $\text{Tang.}\frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c}.\,\text{Cot.}\frac{B-C}{2}$. Ciò tuttavia si dimostra colla massima facilità, ed è uno dei molti esempj d'espressioni analitiche di sembianza affatto diversa, avvenga che sostanzialmente le stesse. Perocchè $\text{Tang.}C = \text{Tang.}\left(\frac{(B+C)}{2} - \frac{(B-C)}{2}\right) =$

$$\frac{\left(1-\frac{(b-c)}{b+c}\right)\text{Tang.}\frac{(B+C)}{2}}{1+\frac{(b-c)}{b+c}\text{Tang.}^2\frac{(B+C)}{2}} = \frac{2c.\text{Sen.}\frac{(B+C)}{2}}{\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}} = \frac{2c.\text{Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{(b+c)\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}+(b-c)\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}}$$

$$\frac{2c.\text{Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{\frac{b+c+(b-c)\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}}{\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}}}$$

$$= \frac{2c.\text{Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{b\left(\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}+\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}\right)+c\left(\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}-\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}\right)} =$$

$$\frac{2c.\text{Sen.}\frac{(B+C)}{2}\text{Cos.}\frac{(B+C)}{2}}{b+c\left(\text{Cos.}^2\frac{(B+C)}{2}-\text{Sen.}^2\frac{(B+C)}{2}\right)} = \frac{c\,\text{Sen.}(B+C)}{b+c\,\text{Cos.}(B+C)} = \frac{c\,\text{Sen.}A}{b-c\,\text{Cos.}A},$$ in conseguenza di $B + C + A = 180°$ (*Scolio* preced.); d' onde ricavasi un nuovo *nesso*, inosservato sino al presente dagli Analisti e senza dipendenza alcuna dai Triangoli *simili* (*Coroll.* V.°), tra la Geometria *elementare* ed i IV. Canoni *Neperiani*.

Scolio.

Quantunque volte piacesse dedurre il passato *Teorema* II.° e tutti i suoi *Corollarj* dal Triangolo piramidale equicrure col non pren-

prendere a scorta l' *analogia* nè tampoco la dottrina dei *limiti*, potrebbe farsi ciò agevolmente, adattando il discorso geometrico allo sviluppo in piano dell' angolo solido al vertice della Piramide, disegnato da Legendre nella *Figura* 198 della *Tavola* IX. de' di lui divulgati *Elementi di Geometria*. Conciossiachè, se nel Quadrilatero, in A, C *birettangolo*, SAOC imagineremo da A condotta una normale sopra SC, ed altra sopra CO, si vedrà subito colla *definizione* sola dei *seni* ec., che SC = SA. Cos. CSA + AO. Sen. CSA, onde $\frac{AO}{AB'} = \text{Cos.}C = \frac{SC - SA.\text{Cos.}CSA}{AB'.\text{Sen.}CSA} = \frac{\frac{SC}{BS'} - \frac{SA}{SB'}.\text{Cos.}CSA}{\frac{AB'}{SB'}.\text{Sen.}CSA}$

$= \frac{\text{Cos.}CSB' - \text{Cos.}ASB'\text{Cos.}CSA}{\text{Sen.}ASB'.\text{Sen.}CSA} = \frac{\text{Cos.}c - \text{Cos.}a\text{Cos.}b}{\text{Sen.}a\text{Sen.}b}$; e tale è appunto la seconda Formula o Equazione *cattolica* riportata nel *Corollario* I.° prossimo antecedente, *simetrica* rapporto agli angoli *a*, *b*, ed oltrediciò complessiva e chiave unica di tutta la Trigonometria, sebben quì riprodotta da un Principio sì facile e luminoso, com' è quello della linea retta SC eguale insieme alle due di lei parti *integranti*.

Erano di già cognite (ed ognuno se lo rammenta) ai Geometri dell' antichità più rimota entrambe le affezioni di qualunquesiasi Triangolo rettilineo, che consistono nell' incontrarsi in un punto comune (centro del Circolo inscritto nel 1.° caso e di *gravità* nel secondo) le tre rette partite dai vertici degli angoli e dividenti per metà i tre angoli medesimi del Triangolo, come altresì le tre dividenti nel mezzo i suoi lati opposti. Altrove ho provato *sinteticamente* (35) (con assai maggior brevità e senz'ajuto di Triangoli *simili* o proporzioni, conforme taluni avean fatto (36)) che concorrono ancora in un punto medesimo le tre rette condotte perpendicolarmente dalle cime degli angoli su i lati opposti; intorno alle quali rimane sin qui mancante di prova diretta il bel *Teorema* datoci da Carnot (37), della *somma* cioè delle tre rette, che dall' ultimo punto vadano agli apici di tutti gli angoli, eguale alla *somma* dei due *diametri* del Circolo inscritto

e

e circoscritto al Triangolo. Ma gettando l'occhio sulla Figura 5.ª e rammemorandosi le più ovvie Proposizioni della Geometria *elementare*, abbiamo in primo luogo da queste che le tre perpendicolari intere AL, BN, CM sono tra loro nella ragione inversa dei lati BC, CA, AB, ai quali appartengono; come pure eguali infra loro i tre rettangoli AD. DL, BD.DN, CD. DM; quelli di ciascheduno *binario* intorno agli angoli BA.AM, CA.AN, ec., e perciò i *seguenti* AM, AN in ragion reciproca dei lati cui spettano; eguali gli angoli ABN, ACM delle perpendicolari coi lati, ec., ec. (verità tutte evidenti, sebbene da niuno affacciate, che derivan dall' area triangolare e dagli angoli retti in L, N, M immediatamente); ed abbiamo oltrecciò la verificazione facile del *Teorema* allor quando il Triangolo fosse equilatero, ed il punto di concorso D centro comune di grandezza e dell' inscritta e circoscritta concentrica circolare Circonferenza, stante che in sì fatto particolare DA + DC = *diametro* del Circolo circoscritto, e DB = 2DL = *diametro* del Circolo inscritto. Di pari accade nell' ortogonio equicrure, ov' eccentriche sono, come in tutti gli altri Triangoli fuori dell'equilatero, l'inscritta e circoscritta Periferia, e le *tre* distanze riduconsi a *due* (poichè la terza AD s' annichila in A): infatti sappiamo dagli *Elementi* che diviso per metà l' angolo ABC mediante BO, la quale incontri l'altezza AS in O, e da questo punto condotta OT normale ad AB, si ha BA = BT + TA = BT + TO = SB + OS, cioè BA + AC (che son le due sole distanze residue BM, CN) = 2SB + 2OS, ossia alla *somma* dei due preaccennati *diametri*. Più di lontano si stacca la dimostrazione del *Teorema* medesimo per tutti i Triangoli in genere, colla diversità procedente dalla nota *correlazione* delle *Figure* tra gli ortogonj ed ambligonj, mentre negli ultimi la *somma* delle tre rette indicate, a motivo dei *negativi*, cangiasi in *differenza* fra la *somma* di due e la restante, come disposta in direzione contraria rispetto a quella degli acutangoli. Le tre normali suddividono il Triangolo BAC in tre Quadrilateri *birettangoli*. Uno di questi AMDN ha per lati intorno all'angolo A i due *segmenti* AM, AN, cioè, *b* Cos. A, *c* Cos. A; laonde, in virtù d' una Proposizione *elementare* (38), la diagonale

$$AD = \sqrt{\frac{b^2 Cos.^2 A + c^2 Cos.^2 A - 2bc Cos.^3 A}{Sen.A}} = \frac{Cos.A}{Sen.A}\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\,Cos.A}$$

$= \frac{a}{Sen.A} . Cos.\,A$ (oppure a Cot.A), per gli *elementi* geometrici (39). Dunque valendo l' istesso discorso in rapporto agli altri due Quadrilateri BMDL, CNDL, ricavasi $DA + DB + DC = \frac{a}{Sen.A} . Cos.A + \frac{b}{Sen.A} . Cos.B + \frac{c}{Sen.C} . Cos.C$, ovvero (Coroll. VII.° del *Teorema* I.°) $\frac{a}{Sen.A}$ (Cos.A+Cos.B+Cos.C), ossia (*Scolio* del I.° Teor.°), posto R il *raggio* del Circolo circoscritto al Triangolo, 2R (Cos.A+Cos.B+Cos.C): Formula elegantissima e nuova da aggiungersi alle già conosciute trigonometriche. Ora (40) $Cos.A + Cos.B + Cos.C = \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) + \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$

$$= \frac{ba^2+bc^2-b^3+ab^2+ac^2-a^3+ca^2+cb^2-c^3}{2abc} = \frac{2abc+(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc}$$

$= 1 + \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{2abc} = 1 + \frac{r}{R}$, segnando *r* il *raggio* del Circolo inscritto (41). Quindi è che $DA+DB+DC = 2R\left(1+\frac{r}{R}\right) = 2R+2r$, quanto appunto mi proponeva mostrare; e si consegui-sce di più per ogni Triangolo rettilineo (salvo i *segni*) il preclaro *Teorema* non avvertito che „ Il *raggio* del Circolo inscritto al „ *raggio* dell' inscritto sta sempre come il *seno-tutto* alla *diffe-* „ *renza* tra la *somma* de' *coseni* dei suoi tre angoli ed il medesi- „ mo *seno-tutto*. „

Giova adesso d' aggiungere l' illustrazione di quella Formula celebre che determina l' area Σ di qualunque Triangolo sferico, conoscendone due lati *a*, *b*, e l'angolo C dai medesimi contenuto; poichè per mezzo di lei si deducon di nuovo colla massima facilità fecondissimi risultati d' *analogia* manifesta tra i Triangoli sferici e rettilinei. Dessa Formula, ben diversa dall'altra accennata nello *Scolio* del I.° Teorema, è così concepita $Cot.\frac{1}{2}\Sigma = \frac{Cot.\frac{1}{2}a . Cot.\frac{1}{2}b + Cos.C}{Sen.C}$. Spicca ancor quivi con tutto

ciò

ciò luminosamente il *limite* della Formula trasportata a rappresentare la superficie del Triangolo sferico *infinitesimo*, cioè (per lo *Scolio* pred.°) del Triangolo *simile* rettilineo *finito;* essendo che allora $\frac{\text{Cos.}\frac{\Sigma}{2}}{\text{Sen.}\frac{\Sigma}{2}} = \frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}a.\ \text{Cos.}\frac{1}{2}b}{\text{Sen.}\frac{1}{2}a\ \text{Sen.}\frac{1}{2}b} + \frac{\text{Cos.C}}{\text{Sen.C}}$ si muta nell' espressione $\frac{1}{\Sigma}\Big/\frac{1}{a}$ $= \frac{\frac{1}{\frac{1}{2}a}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}b}\cdot + \text{Cos. C}}{\text{Sen.C}} = \frac{1}{\frac{ab}{4}}\cdot\text{Sen.C}$ (in virtù di a, b *evanescenti*); ed è quanto dire $\Sigma = \frac{ab}{2}\cdot\text{Sen.C}$, come insegnano gli *Elementi*, e s'è già visto nel Corollario VII. antecedente. Nè havvi discrepanza veruna tra la detta Formula universale e l'altra dimostrata da Lagrange con tutta chiarezza

$$\text{Tang.}\frac{\Sigma}{2} = 2\sqrt{\frac{\text{Sen.}\frac{(a+b+c)}{2}\text{Sen.}\frac{(a-b+c)}{2}\text{Sen.}\frac{(a+b-c)}{2}\text{Sen.}\frac{(-a+b+c)}{2}}{1+\text{Cos.}a+\text{Cos.}b+\text{Cos.}c}}:$$

imperciocchè facilmente si prova mediante il calcolo di Legendre (42) che rovesciando la prima e cambiandola in $\frac{1}{\text{Cot.}\frac{1}{2}\Sigma} = \text{Tang.}\frac{1}{2}\Sigma$, procede l' ultima puntualmente, e con mirabile accordo quelle due *frasi* analitiche appariscono ad evidenza, come non di rado intravviene, equipollenti o *sinonime*.

TEOREMA III.

Si vuol dimostrare che tutta la Trigonometria (posto il *raggio* = 1) concentrasi in un' Equazione *trinomia* semplicissima di questa *forma* $\text{Cos.}z \pm g\ \text{Sen.}z \mp h = 0$, e che siffatta Equazione, non meno che il di lei scioglimento hanno per loro propria ed intima etiologia l' *Ellissi* conica o Apolloniana.

A senso dello *Scolio* antecedente l' Equazione *unica* tra IV. *elementi*, dalla quale tutto il resto dipende, è $\text{Cos}\ c = \text{Cos.}a\ \text{Cos.}b + \text{Cos.C Sen.}a\ \text{Sen.}b$. Ma se facciasi $b = z$ (direi l' istesso di a), quel-

quella diventa $\text{Cos.}z + \frac{\text{Cos.C Sen.}a}{\text{Cos.}a}.\text{Sen.}z - \frac{\text{Cos}\,c}{\text{Cos.}a} = 0$, ossia, quando $c < a$, trovato con una prima *analogia* trasportabile in *logaritmica* $\text{Cos.}\beta = \frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a}$, e per mezzo d' una seconda consimile $\text{Cos.C.Tang.}a = \text{Tang.}\,k$, ovvero, mentre $c > a$, trovata $\text{Sec}\,\beta = \frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a}$, si conseguisce tosto la ridotta $\text{Cos.}z + \text{Tang.})\,{}^{k'}_{k}\,\text{Sen.}z - {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\,\beta = 0$. Varrebbe lo stesso il rispetto all'altra Equazione *supplementare* ch'è *replica* della prima, $\text{Cos.C} = -\text{Cos.A Cos.B} + \text{Cos.}c\,\text{Sen.A Sen.B}$ (Corollario I.° del *Teorema* II.°), solo che si facessero, come sopra, $B = z$, e l'Equazioni *sussidiarie* $\frac{\text{Cos.C}}{\text{Cos.A}} = {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\,\beta$, $\text{Cos.}\,c.\,\text{Tang.A} = \text{Tang.}\,k$, onde convertirla in $\text{Cos.}z - \text{Tang.})\,{}^{k'}_{k}\,\text{Sen.}z + {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\,\beta = 0$. Nè meno agevole è il modo di trasmutare la III., cioè $\text{Cot.}b\,\text{Sen.}a = \text{Cot.B Sen.C} + \text{Cos.}a\,\text{Cos.C}$: perchè posto $C = z$, e fatta $\text{Cot.}\,b\,\text{Tang.}a = {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\,\beta$, $\frac{\text{Cot.B}}{\text{Cos.}a} = \text{Tang.}k$, s' ottiene $\text{Cos.}z + \text{Tang.})\,{}^{k'}_{k}\,\text{Sen.}z - {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\beta = 0$, coincidente rapporto ai *segni* con quella esposta in principio. E quando nell' ultima si nominasse $a = z$, egli è manifesto egualmente che mediante le due Formule *ausiliari* $\frac{\text{Cot.}b}{\text{Cos.C}} = \text{Tang.}k$, $\text{Cot.B Tang.C} = {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\,\beta$, nascerebbe $\text{Cos.}z - \text{Tang.})\,{}^{k'}_{k}\,\text{Sen.}z + {}^{\text{Cos.}}_{\text{Sec.}})\,\beta = 0$, analoga quanto ai *segni* all' Equazione seconda. Ora, mercè le cose premesse, queste IV. Equazioni sono, 1.° unica per la *forma*; 2.° due per la combinazione dei *segni*; 3.° quattro guardando, oltr' i *segni*, al valore dell' ultimo *termine*, se *coseno* o *secante*, cioè se minore o maggiore dell'*unità* o *raggio* trigonometrico; 4.° finalmente hanno tutte per *limite* il *caso* di $\beta = 90°$, cioè del terzo *termine* $= 1$, ossia (*Corollario* II.° seg.) de' Triangoli equicruri o isoscèli.

Ecco dunque l' Equazioni predette riconcentrate, cui tutta riducesi (secondo Goudin) la sferica Trigonometria.

I.°

I.° $\text{Cos}.z + \text{Tang}.k\ \text{Sen}.z - \text{Cos}.\beta = 0$

II.° $\text{Cos}.z + \text{Tang}.k'\ \text{Sen}.z - \text{Sec}.\beta = 0$

III.° $\text{Cos}.z - \text{Tang}.k\ \text{Sen}.z + \text{Cos}.\beta = 0$

IV.° $\text{Cos}.z - \text{Tang}.k'\ \text{Sen}.z + \text{Sec}.\beta = 0$

Dimostriamole adesso (ciò che non ha fatto l'Autor Francese) insieme colle lor *sussidiarie* inerenti alla *locale* proprietà dell'Ellissi riportata ad entrambi i suoi *fochi* ed alle laterali *tangenti*, e proviamone oltrediciò dipendente la soluzione dagli angoli o archi correspettivi della circonferenza del Circolo *eccentrico* o circoscritto, come nel famoso *Problema* di Kepler. E non potrebbe mai essere diversamente subito che tanto i piani in cui sono le rette EP, EO, ed EI, EO considerate nel *Teorema* I.°, quanto gli stessi delle rette combinate OP, PE, ed OI, IE, d'onde nacque il *Teorema* II.°, vengono ad essere inclinati rapporto al pian della base, e perciò genererebbero Ellissi tagliando il Cono circoscritto al Triangolo piramidale equicrure, quando questo fosse ancora *rettangolo* (posto che cadesse O in F o G), mentre all' incontro trasformatosi quel Triangolo piramidale in Prisma retto, e lo sferico in rettilineo, l'Ellissi *conica* diventerebbe Circolo circoscritto all'istesso Triangolo rettilineo, *limite* delli sferici, tutto allora giacente in un piano; e da tal connessione del Circolo col Triangolo rettilineo sogliono ricavarsi i metodi ordinarj per dimostrare l' *analisi* dei rettilinei Triangoli d' ogni maniera.

Sia dunque (Fig.ª 6.) la Semiellissi conico-cilindrica BKGF circoscritta dalla circolare Semicirconferenza generatrice BHF, e sul perimetro della prima preso a piacimento qualunque punto K, e condotta la tangente della Curva IKL, che incontri in A il protratto *asse* trasverso o maggiore FB, nel quale vengan segnati i due *fochi* C, E onde abbiasi l' *eccentricità* intera (che Goudin chiama *mezza*) $CD = DE = \text{Cos}.\beta$ riportata a $DB = CG = DH = GE = DF = DL = DI$ (per la costruzione e gli *Elementi conici*) = 1 *raggio* trigonometrico, e perciò il *semiasse* conjugato o minore $DG = \text{Sen}.\beta$, l'angolo $GCD = GED = \beta$, mentre i due raggi *vettori* sono CK, EK, l' uno e l' altr' angolo KCF, $KEF = z$ (valor *duplice*) l' angolo $FAI = k$, l' angolo $CKA = EKI = k'$,

co-

come i loro *supplementi*, in virtù delle *Coniche*, insegnano le medesime esser CL, EI perpendicolari alla tangente IKLA, esser DL paralella al raggio *vettore* EK, siccome DI a CK, e per conseguenza $KCF = z = IDF$, $KEF = z' = LDF$, $CKE = z' - z = IDL$, e finalmente, menate KV normale all' Ellissi e DPT alla tangente, $\frac{z'-z}{2} = CKV = EKV = LDP = IDP$, conforme rilevasi dagli *Elementi* testè rammentati.

Costruita così la *Figura*, immediatamente ne nascono VII. *Equazioni* speciali.

Diffatti condotte all'*asse* maggiore le perpendicolari IQ, LS, e tenute ferme le denominazioni di sopra, ognun vede che stante $\text{Tang.}k = \frac{DB.CL}{AL} = \frac{DB.EI}{AI}$, $\text{Sen.}z = IQ = LS$, $\text{Cos.}z = DQ = DS$ (senz' attendere per ora al *segno* sottintesovi (43)), proceda

$$\text{Cos.}z + \text{Tan.}k\ \text{Sen.}z = DB \begin{cases} DQ + \frac{EI}{AI} . IQ \\ DS + \frac{CL}{AL} . LS \end{cases} = DB \begin{cases} DQ + QE \\ DS + CS \end{cases}$$, per causa dei Triangoli, AIE, ALC entrambi ortogonj, ch'è quanto scrivere $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z = \begin{cases} \text{Cos.}z + \text{Cos.}z + \text{Cos.}\beta \\ \text{Cos.}z + \text{Cos.}z - \text{Cos.}\beta \end{cases}$, cioè

1.ª $\text{Cos.}z - \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z + \text{Cos.}\beta = 0$, ossia prendendo col suo vero *segno* del *coseno* (sin quì contemplato nel *supplemento* angolare di z) l'angolo z.

$\text{Cos.}z + \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$; e passando nell' una e nell' altra al *supplemento* di k,

$\text{Cos.}z + \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z + \text{Cos.}\beta = 0$

$\text{Cos.}z - \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$; le quali due ultime *Equazioni* (accennate e non scritte da Goudin (44)) altro non sono in sostanza fuorchè la *replica* delle due prime.

Ma quando in vece dell' angolo k sostituiscasi k' nell' Equazioni di già stabilite, cioè si surroghi all'angolo della *tangente* col maggior *asse* quello della medesima col raggio *vettore*, la figura ed indole dei Triangoli mostrano $k = z - k'$. Quindi n' avviene (operando sulla seconda Formula, perchè s'è pocanzi veduto esse-

ser ella la *matrice* di tutte) $\text{Cos}\, z + \text{Tang.}\,(z - k')\,\text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$, ovvero $\text{Cos.}z + \left(\frac{\text{Tang.}z - \text{Tang.}k'}{1 + \text{Tang.}z\,\text{Tang.}k'}\right)\text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$, cioè $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z - \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z + \frac{\text{Sen.}^2 z}{\text{Cos.}z} - \text{Cos.}\beta - \text{Tang.}k'\,\frac{\text{Sen.}z}{\text{Cos.}z}\,.\,\text{Cos.}\beta = 0$, ch' è quanto scrivere $\text{Cos.}^2 z + \text{Sen.}^2 z - (\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z)\,\text{Cos.}\beta = 0$, ossia $1 - (\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\text{Sen.}z)\,\text{Cos.}\beta = 0$, e finalmente $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\text{Sen.}z - \frac{1}{\text{Cos.}\beta} = 0$, d' onde derivano la

II.ª $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\text{Sen.}z - \text{Sec.}\beta = 0$, e le conseguenti o *identifiche* pe' i *supplementi* di z, k'

$$\text{Cos.}z - \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z + \text{Sec.}\beta = 0$$
$$\text{Cos.}z + \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z + \text{Sec.}\beta = 0$$
$$\text{Cos.}z - \text{Tang.}k'\,\text{Sen.}z - \text{Sec.}\beta = 0.$$

È ancora più agevole la prova delle *binomie-ausiliari*, computabili per *logaritmi*. Imperciocchè $\text{Cos.}k : \text{Cos}k' :: \frac{\text{AI}}{\text{AE}} : \frac{\text{IP}}{\text{ID}} :: \text{ID} = \text{CE} : \frac{\text{AE.IP}}{\text{AI}} = \text{DE} :: 1 : \text{Cos.}\beta$; laonde

III.ª $\text{Cos.}\beta\,\text{Cos.}k - \text{Cos.}k' = 0$.

Di più, introducendo l'arco o angolo ϕ dell' *Eccentrico* astronomico-Kepleriano, cioè BDR, abbiamo $\text{Sen.}k : \text{Sen}\,k' :: \text{DI} : \text{DA}$ (Coroll. VII.° del I.° *Teorema*) $:: \text{DB} : \text{DA} :: \text{DO} : \text{DB}$ (per le *Coniche*) $:: \text{Cos}\,\phi : 1$; e quindi

IV.ª $\text{Sen.}k'\,\text{Cos.}\phi - \text{Sen.}k = 0$.

Oltrediciò dagli *Elementi conici* si deduce essere $1^2 : \text{Tang.}^2\beta :: \text{CD}^2 = \text{BD}^2 - \text{DG}^2 : \text{DC}^2 :: \text{RO}^2 - \text{OK}^2 = \text{LK.KI}\ (45) : \text{OK}^2 :: \frac{\text{LK}}{\text{LC}} \cdot \frac{\text{KI}}{\text{IE}} : \frac{\text{OK}^2}{\text{DG}^2} :: \text{Cot.}^2 k' : \frac{\text{RO}^2}{\text{DH}^2} = \text{Sen.}^2\phi$; e per risultanza la

V.ª $\text{Tang.}\beta\,\text{Cot.}k' - \text{Sen.}\phi = 0$.

Segue coll' istessa facilità l' altra Proporzione *geometrica* $\text{Cot.}^2 k : \text{Tang.}^2\phi :: \frac{\text{AI}}{\text{IE}} \cdot \frac{\text{AL}}{\text{LC}} : \frac{\text{RO}^2}{\text{DO}^2} = \frac{\text{RA}^2}{\text{DR}^2}$ (poichè RA è *tangen-*

te del Circolo) : : $\frac{FA.AB}{DG^2} : \frac{RA^2}{DB^2} : : \frac{RA^2}{DG^2} : \frac{RA^2}{DB^2} : : DB^2 : DG^2 : : 1^2 :$ Sen.$^2\beta$ (mercè delle *Coniche* e della *Proposizione* XXXVI. del Libro III.° d' *Euclide*); d' onde proviene

$$\text{VI.}^a \ \text{Cot.}k \ \text{Sen.}\beta - \text{Tang.}\,\phi = 0 .$$

Ed in ultimo luogo riceve origine dalla dottrina medesima dell'Ovale comune l'Equazione *binomia* resolutiva dell'Equazioni I.ª e II.ª, ossia il valor *duplice* dell'arco o angolo incognito z: perocchè riferita all'uno od all'altro *foco* la Curva, havvi tra i raggi *vettori* e le *funzioni* degli angoli al *foco* predetti la relazione già ovvia presso degli *elementari* Analisti (46) $\begin{pmatrix} CG(EK+EO)=EB.FO \\ CG(CK+CO)=CF.BO \end{pmatrix}$, dalla quale deriva $\left(\frac{CG.KO}{CG(EK+EO)} = \frac{CG}{EB} \cdot \frac{KO}{FO} = \frac{DG}{EB} \cdot \frac{RO}{FO}\right)$. Ora

$$\left(\frac{CG.KO}{CG(CK+CO)} = \frac{CG}{CF} \cdot \frac{KO}{BO} = \frac{DG}{CF} \cdot \frac{RO}{BO}\right)$$

(non attendendo ai *segni*) Tang.$z' = \frac{KO}{EO}$, Tang.$z = \frac{KO}{CO}$, e per conseguente (47) Tang.$\frac{1}{2}z' = \frac{KO}{EK+EO}$, Tang.$\frac{1}{2}z = \frac{KO}{CK+CO}$, Tang.$\beta = \frac{DG}{CD}$, Tang.$\frac{1}{2}\beta = \frac{DG}{CG+CD} = \frac{DG}{FC} = \frac{DG}{EB}$, Tang.$\Phi = \frac{RO}{OD}$, Tang.$\frac{1}{2}\Phi = \frac{RO}{RD+OD} = \frac{RO}{FO}$, oltre EB.CB=FC.CB=DG^2=Sen.$^2\beta$: laonde Tang $\frac{1}{2}z' =$ Tang.$\frac{1}{2}\beta \times$ Tang.$\frac{1}{2}\Phi$, Tang.$\frac{1}{2}z = \frac{DG}{CF} \cdot \frac{RO}{BO} = \frac{DG}{EB} \cdot \frac{FO}{RO}$ (48) $=$ Tang.$\frac{1}{2}\beta \times$ Cot.$\frac{1}{2}\Phi$; e perciò in generale

$$\text{VII.}^a \ \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}z - \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\beta \cdot \begin{cases} \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\Phi \\ \text{Cot.}\,\tfrac{1}{2}\Phi \end{cases} = 0.$$

Lo scioglimento pertanto dell' Equazione *cattolica* trigonometrica nell' una e nell' altra *forma*

$$\text{Cos.}z + \begin{matrix} \text{Tang.}k \\ \text{Tang.}k' \end{matrix}\Big) \text{Sen.}z - \begin{cases} \text{Cos.}\beta \\ \text{Sec.}\beta \end{cases} = 0$$

si conseguisce subito coll' artificio della doppia *ausiliare* $\left.\begin{matrix} \text{V.}^a \\ \text{VI.}^a \end{matrix}\right\}$ e VII.ª, adattatissime all' uso delle *Tavole dei logaritmi* o Neperiano-

no-iperboliche o Briggiano-iperboliche, $\left.\begin{matrix}\text{Tan.}\\ \text{Sen.}\end{matrix}\right\}\Phi = \begin{matrix}\text{Cot.}k\ \text{Sen.}\ \beta\\ \text{Cot}\ k'\ \text{Tang.}\beta\end{matrix}\Big|$

$\text{Tang.}\frac{1}{2}z = \text{Tang.}\frac{1}{2}\beta\left\{\begin{matrix}\text{Tang.}\\ \text{Cot.}\end{matrix}\right.\frac{1}{2}\Phi$; dove son manifesti in ciascheduna delle due *forme* i due valori diversi di z, ossiano le due *radici* d' ognuna delle divisate *Equazioni*.

COROLLARIO I.

Se in vece di KEF $= z'$ pongasi il suo *supplemento* KEB (lo che è l' istesso, indipendentemente dai *segni*, pel valore *assoluto* delle *funzioni* circolari delle *radici*) n' avviene KCF $= z =$ AKC + KAC $= k' + k$, e $z' =$ IKE $-$ KAE $= k' - k$, onde $\frac{z+z'}{2} = k'$, $\frac{z-z}{2} = k$: nuovo metodo di ricerca dei due valori distinti dell' *incognita* nella I.ª Equazione o nella II.ª senza l' *eccentrico* Φ, ma mediante il *nesso* somministrato dalla III.ª Equazione. La familiar conoscenza della Curva *ellittica* non lascia dubbio sulla corrispondenza d' un valor *unico* sì di k, come di k' ai *due* di z; nè manca tampoco di suggerire 1.° che la III.ª preaccennata Equazione Cos. β Cos. k Cos. k' assume la *forma* di Cos. $\beta =$ Cos. $k =$ Cos. $(z - k)$, ovvero di Cos. β Cos. $(z - k') =$ Cos. k', d'onde procedono le dipendenze scambievoli delle IV. *funzioni* indicate e vicendevolmente connesse e determinabili; 2.° che la V.ª e VI.ª Equazioni trasformansi in $\text{Cot.}\left(\frac{z+z'}{2}\right) = \frac{\text{Sen.}\Phi}{\text{Tang.}\beta}$, $\text{Cot.}\left(\frac{z-z'}{2}\right) = \frac{\text{Tang.}\Phi}{\text{Sen.}\beta}$, e vale a dire $\text{Cot.}\left(\frac{z+z'}{2}\right) : \text{Cot.}\left(\frac{z-z}{2}\right) :: \text{Sen.}\ \beta\ \text{Sen.}\ \Phi : \text{Tang.}\ \beta\ \text{Tang.}\ \Phi :: \text{Cos.}\ \beta\ \text{Cos.}\ \Phi : 1^2$; 3.° che nella I.ª Equazione *cattolica* l' arco o angolo k, la cui *funzione* è *coefficiente* del secondo *termine*, pareggia sempre la *semidifferenza* delle due *radici*, e k' viceversa la *semisomma* nel *coefficiente* del secondo *termine* della II.ª Equazione.

COROLLARIO II.

Mentre la I.ª Equazione $\text{Cos}.z + \text{Tang}.k\ \text{Sen}.z - \text{Cos}\ \beta = 0$ a motivo di $\beta = 0$, s' appresentasse nella seguente maniera $\text{Cos}.z + \text{Tang}.k\ \text{Sen}.z = 1$, e perciò combinasse colla II.ª, perchè allora anco $\text{Sec}\ \beta = 1$, onde acquistassero entrambe la *forma* $\text{Tang}\begin{cases} k \\ k' \end{cases} = \frac{1 - \text{Cos}.z}{\text{Sen}.z} = \text{Cosec}.z - \text{Cot}.z = \text{Tang}.\frac{1}{2}z$, ed in conseguenza $k = k' = \frac{z}{2}$, cioè $z' = 0$, sì fatto *limite*, nel quale concorrono e s'immedesimano le due Equazioni *cattoliche*, e non ammettono fuor d' una sola *radice*, svanendo l'altra, coincide per la costruzione di quella col mutamento dell'Ellissi *scalena* in Parabola Apolloniana. Allora difatti $DG = \text{Sen}\ \beta$ s' annulla in paragone di $DB = 1$; rimane un sol *foco* C, e l' altro a cagione dell' immensa *eccentricità* si perde nell'infinito; uno degli angoli d' un raggio *vettore* coll' asse, cui è paralello, viene ad essere *infinitesimo*, e l'altro diventa sempre doppio dell' angolo formato dalla *tangente* coll'*asse* e dal secondo raggio *vettore* colla *tangente* medesima o dal primo con essa, come apparasi dalle *Coniche*. Quest' affinità trigonometrica della Parabola, un dei *limiti* dell' Ellissi il qual fraternizza colla Linea retta ov' egualmente $\text{Sen}.\beta = 0$, $\text{Cos}.\beta = 1$, si verifica tutte le volte che nella Trigonometria Sferica accade il particolare della soluzione od *analisi* d' un Triangolo equicrure o *isoscèle* (divisibile in due ortogonj identifici, o parte integrante d'uno spicchio (*fuseau*) sferico intero insieme con altro equicrure) conforme rilevasi dai preliminari del *Teorema* poco innanzi provato $\frac{\text{Cos}.c}{\text{Cos}.a} = 1$, $\frac{\text{Cos}\ C}{\text{Cos}\ A} = 1$, $\text{Cot}.b\ \text{Tang}.a = \frac{\text{Tang}.a}{\text{Tang}.b} = 1$, $\text{Cot}.B\ \text{Tang}.C = \frac{\text{Tang}.C}{\text{Tang}.B} = 1$, stando gli *scaleni* racchiusi entro della Formula generale.

CO-

COROLLARIO III.

Altro *limite* della serie-infinita dell' Ellissi *scalene*, o medio termine tra le *allungate* e le *compresse*, è anche il Circolo o Ellissi *equilatera*. Questo avviene allor quando i due *fochi* si confondono in uno col *centro*; si soprappongono i due raggi *vettori* ed i due angoli eguali z, z'; diventano Cos β ossia l' *eccentricità* $= 0$, Sen.$\beta = 1$, Sec.$\beta = \infty$; e la prima Equazione *cattolica* prende la semplicissima *forma binomia* di Cos.z + Tang.k Sen.$z = 0$, cioè — Tang.z = Cot.k, ossia — Tang. (RDF) = Tang. (RDA) = Cot (RAD); lo che vuole apertamente significare DRA angolo retto, siccome abbiamo dagli *Elementi*. A tale accidente conduce o il Triangolo sferico che sia rettangolo, o quello ch' abbia un de' suoi lati eguale al *quadrante* (il quale si scioglie in simil maniera, avendo per *supplementare* o *polare* un rettangolo): ed è veramente mirabile, oltre al *criterio* che così se n' acquista, la connessione *grafica* dei Triangoli rettangoli sferici (e loro dipendenti *quadrantali*, *isoscèli*, o che avesser la *somma* di due lati eguale alla *semicirconferenza* d' un Circolo, o di due angoli pari a due *retti*) co' i rettangoli rettilinei, non meno che la concordia delle ultime Formule colle da prima mostrate. Conciossiachè essendo in questo caso $c = 90°$, e Tang.k = Tang.a Cos.C, per le denominazioni assunte in principio del passato *Teorema*, avremo — Tang.z = — Tang.b = $\frac{1}{\text{Tang.}a\text{Cos.C}}$; ovvero — Cos.C = Cot.$a$. Cot b, cioè, nel Triangolo *polare* rettangolo, — Cos.$(180° - c)$ = Cot.$(180° - A)$ Cot.$(180° - B)$, ch' è come dire Cos.c = Cot.A. Cot.B, conforme porta il Num.° 4.° del *Corollario* IV.° del II.° *Teorema*. Parimente accade rispetto alla III.ª Equazione Cos.z — Tang.k Sen.$z = 0$, (Tang.(RDA) = Cot.(RAD)), dove, stante z = B, e Tang.k = Cos. c.Tang.A, e C angolo *retto*, abbiamo Tang.B = $\frac{1}{\text{Cos.}c\text{Tang.A}}$, vale a dire Cos.$c$ = Cot.B.Cot.A, come sopra, e come debb'essere in un Triangolo immediatamente orto-

go-

gonio. Ricondnce altresì alle di già ritrovate espressioni analitiche anco la seconda ipotesi relativa alla I.ª Equazione, e sempre appoggiata, come tutte l'altre, al Triangolo rettilineo ortogonio DRA; perocchè Cos.z + Tang.k Sen.z = o in questa supposizione, che stabilisce z = C, Tang.$k = \frac{\text{Cot.B}}{\text{Cos.}a}$, Cot.$b$.Tang.$a$ $= 0 = \frac{\text{Tang.}a}{\text{Tang.}b}$, cioè $b = 90°$, reca il *caso* d'un altro Triangolo sferico ad un tempo avente per lato un *quadrante*, e lo abbraccia col mezzo di — Tang.C = Cos. a. Tang.B, ossia — Cos.$a = \frac{\text{Tang.C}}{\text{Tang.B}}$ = Cot.B.Tang.C, siccome conformemente deducesi dall' Equazione III.ª del *Corollario* I.° del II.° *Teorema* (ove Cot.b = Cot.(90°) = o), e dal Triangolo *polare* corrispondente. In ultimo, mentre pongasi $z = a$, Cot.B.Tang.C = o, cioè B = 90°, Tang.$k = \frac{\text{Cot}\,b}{\text{Cos.C}}$, proviene rispetto a sì fatto Triangolo sferico ed ortogonio l' Equazione *binomia* $\frac{\text{Cos.}a}{\text{Sen.}a}$ = Cot.$a = \frac{\text{Cot.}b}{\text{Cos.C}}$, concordante appieno colla 1.ª del *Corollario* IV.° del divisato Teorema. Quanto poi all' altra ipotesi di Sec.$\beta = \infty$, cioè, nelle IV. soppresse Equazioni, di $\frac{\text{Cos.}c}{\text{Cos.}a} = \infty$, $\frac{\text{Cos.C}}{\text{Cos.A}} = \infty$, Cot.$b$.Tang $a = \infty$, Cot.B.Tang.C = ∞, che torna a scrivere a = 90°, A = 90°, a = 90°, C = 90°, dessa non fa che ripetere sopra a, A la 1.ª e 2.ª delle passate *combinazioni* sopra c, C, la 3.ª sopr' a in vece di b, e la 4.ª su C in cambio di B, e ciò sempre a proposito de' soliti Triangoli sferici *rettangoli* o *quadrantali*. Procedono facilmente dall'Equazioni *cattoliche* nei detti casi Tang.$k' = \infty$, e vale a dire k' = 90° = DRA angolo-retto (il che richiama all' istesso Triangolo rettilineo rettangolo), ovvero Tang.$z = \infty$, ossia z = 90° e k = o (ch' è il *limite* del rammentato ortogonio Triangolo rettilineo). Nella prima supposizione Tang.k' = Cos.C.Tang a racchiude l'istessa ipotesi di a = 90°, come Tang.k' = Cos.c.Tang.A

som-

somministra A = ad un angolo *retto*, Tang.$k' = \frac{\text{Cot.B}}{\text{Cos.}a}$ dà $a = 90°$, e finalmente Tang.$k' = \frac{\text{Cot.}b}{\text{Cos.C}}$ suggerisce C = ad un angolo *retto*: tutto in corrispondenza precisa alle di già fatte preparazioni ipotetiche. E nell' altra supposizione avverrebbe $b = 90°$, $B = 90°$, $a = 90°$, $C = 90°$; la quale combinata insiem colla prima reca i Triangoli sferici *birettangoli* o *biquadrantali*, di cui sono un *caso* particolare i *trirettangoli*, o *triquadrantali*, ottava parte di tutta la Sferica superficie o quarta di quella dell' Emisfero.

COROLLARIO IV.

Ma, per compimento di questo *Saggio di Trigonometria Sferico-conica*, quali nascose combinazioni e rapporti colla teoria dei Triangoli averebbe mai il cambiamento dell' Ellissi in Iperbola, dopo esauriti già quelli del Circolo e della Parabola? Ognuno conosce la metamorfosi dell' Ellissi in Iperbola, e sa l' intima cognazione che passa tra queste due Curve congeneri. Prima assai di Carnot, colla guida dell' unica relazione *immaginaria* $\sqrt{+1} : \sqrt{-1}$ (cioè del trasmutamento o passaggio dalla Trigonometria *circolare* all' *iperbolica*, ossia della *variazione* di Cos.$^2\beta = 1 - \text{Sen.}^2\beta$ in Cos.$^2\beta = 1 - (\text{Sen.}\beta\sqrt{-1})^2 = 1 + \text{Sen.}^2\beta$) assegnai la maniera di trasportare l' espressioni *integrali* Euleriane degli *archi* d'un' Ellissi agli *omologhi* dell' Iperbola (49); ed ora manca sol di provare nell' unione o *sistema* di questa ultima Curva ad *assi* eguali col Circolo la proprietà elegantissima (Fig.ª 7.) consistente nell' esser tale e sì stretta la connessione tra l' Ellissi e l' Iperbola entrambe *equilatera*, che condotta qualunquesiasi *secante* FMN dal comun vertice F e le due *corde* dall' altro BM, BN, con più le perpendicolari MA, NT al second' *asse*, provengano sempre *simili* i due Trapezj *birettangoli* BMAD, BNTD, sebbene per l' inversione solita *subcontrarj*. A fine di ciò dimostrare stacchisi dal vertice B la normale all' *asse* o la comun *tangente* BY,

on-

onde l'angolo MBY si manifesta eguale a MFB, come lo è parimente BNΔ per causa di FΔ : ΔN : ΔB $\div$, ed in conseguenza anco NBU. Dunque non solamente NBM è sempre diviso nel mezzo da BY, e si ha in ogni caso BM:BN::MU:UN nel *sistema*, ma oltracciò, mentre nel Circolo si verifica MFB $= 90° -$ MBF, vale l'inverso nell' Iperbola *conica* o sivvero NFB $=$ NBF $- 90°$; e mentre nel primo FM : MB : FU $-$ FM $\div$, all' incontro nell' altra si ha FN : NB : FN $-$ FU $\div$, strettissime *analogie*. E procedendo più avanti, MBD $= 90° -$ MBY $= 90° -$ BNΔ $=$ BNT; laonde ancora BMA $=$ NBD. Finalmente, in virtù dei Triangoli *simili*, BM : BN : : BΓ : BΔ : : MΓ : NΔ : : FΓ:FΔ, che torna a dire FΓ : FB : FΔ *armonicamente* proporzionali (come altresì FM, FU, FN) ossia (50) DΓ:DB:DΔ $\div$, e quindi BM:BN::BD : DΔ $=$ NT; di modo che vien così stabilita senz' alcun dubbio la rammentata *similitudine*. Se poi colla dottrina *conica* si ponga mente all' angolo *k* che fa la *tangente* lateral dell' Iperbola col suo *asse* primario, egli è facilissimo intendere ch' esso non mai diventi minore del semiangolo *asintotico*; lo che esclude Tang.*k* nell' Iperbola dall' universalità della Trigonometria, nè la rende dicevole o acconcia a tal' uso: come eziandio si rileva dal paragone delle due *locali* Equazioni riportate all' uno od all' altro de' *fochi*, Rag.° vett. $= \frac{a^2 - e^2}{a + e \operatorname{Cos}.z}$ (posto *a* il *semiasse-trasverso*, *e* l' *eccentricità*), ove nell' Ellissi il numeratore è *positivo*, nell' Iperbola *negativo* (ch'è quanto dire *immaginario* il *semiasse-conjugato*), ed il denominatore nella seconda puote annullarsi, e difatto s' annulla quando Cos.$z = -\frac{a}{e}$, ossia venendo ad essere il *raggio* paralello all' *asintoto*, o all' estrema *tangente* dell' ultima Curva.

Corollario V.

Tornando all' Ellissi, agevolmente s' affaccia di subito l' angolo *k* eguale al *complemento* di *latitudine* geografica nel *meridiano*

no d' uno Sferoide *compresso;* ben differente dell'*Uovo*, alla quale più presto s' assimila lo Sferoide *oblongato* (51). Quindi è che le prime Formule trigonometriche superiori potrebbero scriversi parimenti con surrogare alla Tang. k la Cot. L, mentre intendasi per questa *sigla* la distanza dall' *Equatore* o l' angolo contenuto tra l' *asse* e la *normale* alla Curva. Delambre col solo *elemento* della *latitudine* (dopo Maupertuis, &c.), quando sia cognita l' *eccentricità* d' un' Ellissi, assegna espressioni forbite e abbondevoli, onde rintracciarne le rimanenti misure. È osservabile tra le altre *formule* quella sommamente elegante, che si riferisce al *raggio* del Circolo *osculatore*, cioè

$\frac{dA}{dL} = (1-e^2)(1-e^2 \text{ Sen.}^2\text{L})^{-\frac{3}{2}}$, da cui poscia l' Autore ricava la novissima *serie* per *rettificare* l' Ellissi conica. Nè puote sopra ciò cader dubbio tostochè gli *Elementi* ci avvisano dL : 1 :: dA : *Raggio osculatore* negli archi *simili* circolari. E presone il *limite* per la parabola d' Apollonio, chiamando D la distanza del *foco* dal di lei vertice principale, il *raggio osculatore* si rappresenta da

$\frac{2D}{(1-\text{Sen.}^2\text{L})^{\frac{3}{2}}} = \frac{2D}{(\text{Cos.}^2\text{L})^{\frac{3}{2}}}$, per motivo di $1-e^2=(1+e)(1-e)=2D$,

non meno che di $e^2=1^2$ subito che viene il *centro* assorbito di là dal confine assegnato alle grandezze *finite*.

Corollario VI.

Applicate l' espressioni medesime del passato *Teorema* ai Triangoli rettilinei, stante che Cos.z nel *limite* $= 1 - \frac{z^2}{2}$, mentre ad un tempo Sen.$z=z$, quelle Equazioni non conservano allora più la sembianza di *trigonometriche* del primo *grado*, ma d' *analitiche* del second' *ordine*, e sono difatto (Coroll. III. del II. *Teorema*) uniformi all'*universale* $z^2-2a\,\text{Cos.C}.z+(a^2-c^2)=0$, che colla *sussidiaria* in essa compresa (52), di cui parla il *Corollario* VII. del Teorema I., o con pari altro artificio (53) si scioglie per mezzo di *logaritmi*. Ed è quì da riflettersi che se una qua-

lunque delle Equazioni del precorso *Teorema* si sviluppasse mediante $\text{Cos.}z = \sqrt{1 - \text{Sen.}^2 z}$, o viceversa, acquisterebbe consimilmente la *forma* medesima di *quadratica*, come per esempio, $\text{Cos.}z + \text{Tang.}k\ \text{Sen.}z - \text{Cos.}\beta = 0$ cambierebbesi allora nella seguente $\text{Sen.}^2 z - 2\left(\frac{\text{Tang.}k\ \text{Cos.}\beta}{\text{Sec.}^2 k}\right)\text{Sen.}z - \frac{\text{Sen.}^2\beta}{\text{Sec.}^2 k} = 0$, cioè $\text{Sen.}^2 z - \text{Sen.}^2 k\ \text{Cos.}\beta\ \text{Sen.}z - \text{Cos.}^2 k\ \text{Sen.}^2\beta = 0$. Non diversamente avverrebbe dell' Equazione *classica* generale $A\text{Cos.}z + B\text{Sen.}z + C = 0$, che riducesi alla più semplice $\text{Cos.}z + A'\text{Sen.}z + B' = 0$: imperciocchè, sostituiti i valori noti *trigonometrici*, ne risulta $\text{Cos.}^2\frac{z}{2} + 2A'\text{Cos.}\frac{z}{2}\text{Sen.}\frac{z}{2} - \text{Sen.}^2\frac{z}{2} + B' = 0$; e scambievolmente da un' Equazione di quest' ultima *forma* (come avverte Goudin) si può sempre discendere di pari alla prima, e risolverla coll' istessa *Teorica* dell' Ellissi.

Corollario VII.

Dipende dalla medesima Equazione fondamentale, e n' è anzi un *caso* più semplice (Coroll. III. dell' ultimo *Teorema*) la ricerca della *parallassi d' altezza* nella Sferica Astronomia, conoscendosi l' *orizzontale* unitamente all' *altezza* apparente o vera dell' *Astro*, e non attendendo alla picciola aberrazione dalla *sfericità* della Terra, di cui Bórda sopra ogni altro Geometra ha dato esatta contezza (54). Basta sol rammentarsi, che posta π la *parallassi* orizontale, h l' altezza *vera*, h' l' *apparente*, z la *parallassi* d' altezza si ha $\text{Sen.}z = \text{Sen.}\pi\ \text{Cos.}h'$, mentre d' altra parte $h' = h - z$, d' onde nasce una facilissima sostituzione e adattata al computo *logaritmico*.

SCOLIO.

A tutta la Scienza trigonometrica così concentrata dee far corona il *Teorema* prestantissimo di Legendre, annunziato da que-

questi nel M. DCC. LXXXVII. (55) e quasi contemporaneamente provato in sul finire del Secolo scorso XVIII.° da esso, da Delambre, e Lagrange (56). „ Un Triangolo *sferico* picciolissimo può considerarsi a tutti i riguardi com' eguale a un „ Triangolo *rettilineo*, ch' abbia i *lati* dell' istessa lunghezza „ di quelli del primo, e ciascuno degli *angoli* minore d' ognuno del primo di quanto importa la terza parte dell' eccesso dei tre su due *retti*, e vale a dire il terzo dell' *area* comune ad entrambi i Triangoli comparati „ (*Scolio* del I. Teorema). Ecco la Proposizione da dimostrarsi, ch' è d' utilità impareggiabile nella Geodesia teorico-pratica, e massime nelle operazioni delicatissime delle misure geografiche degli *archi* de' Meridiani, e perciò di tutto il Sistema *metrico* universale appresentatoci dalla Natura. I prelodati Analisti l' han ricavata da quelle Formule-*limiti*, intorno alle quali s' aggira il Corollario III. del II. *Teorema:* Legendre ha quindi lasciato il suo primo metodo attenendosi a quel di Lagrange, avvengachè fosse non meno facile e chiaro dedurlo dall' espressione $a\text{Sen.B} = b\text{Sen.}(B+C) - \frac{a^2}{2} b\text{Cos.C Sen.B}$; dove si rende osservabile che se il Triangolo-*limite* fosse rettangolo in C, avrebbesi $a\text{Sen.B} = b\text{Cos.B}$, cioè $\frac{b}{a} = \text{Tang.B}$, come nella Trigonometria Rettilinea; e puote ogni Triangolo considerarsi unione o complesso di due ortogonj. Ma in generale quella espressione analitica ridotta all' equipollente $(1 + \frac{ab}{2}\text{Cos.C})\, a\text{Sen.B} = b\text{Sen.}(B+C)$ manifesta con tutta evidenza che la quantità, per cui differisce nel *primo* suo nascimento o nell' *ultimo* suo decremento (*Scolio* suddetto) il Triangolo *sferico* dal *rettilineo*, è di due *gradi* inferiore rispetto all' *evanescente* grandezza dei *lati* dell' uno o dell' altro Triangolo; di tal maniera che torna l'istesso a distribuirla (senza poter mai temerne errore del *primo grado* in linea d' *approssimazione*) o egualmente o disegualmente su ciascheduno degli *angoli*. Da questo riflesso havvi dunque ragion d' inferirne che posto θ l' eccesso della *somma* degli *angoli* A, B, C d'un picciol Triangolo sferico

sopra due *retti*, o ciò ch' è il medesimo, l' *area* (di *second' ordine*) dello sferico o rettilineo di lati respettivamente eguali, gli *angoli* del rettilineo equivalente debbano essere $A - \frac{\theta}{3}, B - \frac{\theta}{3}, C - \frac{\theta}{3}$, e che dipenda dall' istesso principio la soluzione eziandio di quei *finiti* Triangoli sferici, i quali abbiano due piccolissimi *angoli* acuti, perchè diventa piccolissimo allora in tutti i suoi tre *lati* il *supplemento* allo spicchio sferico del Triangolo *polare* correspettivo.

Aveva a buon diritto avvisato nella soggetta materia Lagrange (57) che „ Dans l'Analyse, la perfection consiste à n' employer que le moindre nombre possible de *principes*, & à faire „ sortir de ces *principes* toutes les vérités qu'ils peuvent renfermer, par la seule force de l'Analyse „. Poco dopo parlando Lacroix del metodo più istruttivo, che doverebbe adoprarsi nelle matematiche Discipline, passa a dire (58) „ En général, il „ semble que les Sciences physico-mathématiques doivent toujours se ramener à un Problème unique d'Analyse ou de Géométrie „. Vi sono di fatto in ogni Facoltà del sapere umano alcune eminenti *Proposizioni*, stabilite e dimostrate le quali o colla ragione o coll' esperienza, tutte le verità che rimangono, altro non sono fuori che quelle medesime espresse sotto diversi vocaboli, più o meno trasposte o variamente applicate. L' istrumento del Calcolo serve sovente di valevolissimo ajuto al corto intendimento dell' uomo; ma non di rado intravviene che da semplicissime speculazioni *sintetiche* sorgano sottilissimi risultati. Chi è, per esempio, che esercitatosi al raziocinio immantinenti non giunga ad iscorgere come la *frazione continua* quasi *paralella* o per dir meglio *asintotica*

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m}{m+1-\text{ ec.}}}}}$$

in infinito abbia per suo valor *limite* l' unità, e come dei due suoi *valori* diversi, che somministra l' Equazione *resolutiva*

x

$x = \frac{m}{m+1-x}$, cioè $\frac{m+1}{2} \pm \frac{m-1}{2}$, il valore m sia estraneo all' assunto, ed inerente soltanto alla immancabile ed individua verificazione *analitica* di $m = \frac{m}{m+1-m}$; uguagliandosi per l' istesso motivo i due *valori* o *radici* 1 nell'unico *caso* della *frazione continua* speciale

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\text{ec.}}}}$$

in infinito protratta: E coll' istessa evidenza si fa palese l' istesso *limite* 1 spettante all' altra *Serie-infinita*

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\cfrac{m'''}{m'''+1-\cfrac{m''''}{m''''+1-\text{ec.}}}}}}$$

, sebbene in questa sotto la medesima forma, ma non *periodica* come la prima, le grandezze m, m', m'', m''', m'''', ec. diventassero, viavia crescendo, inassegnabili ed *infinite*: imperciocchè qualunque di loro si rendesse *infinita*, vien ad essere indubitata l' eguaglianza $\frac{\infty}{\infty+1} = 1$, d' onde risalendo quant' occorresse di grado in grado, risulterebbe sempre alla fine $\frac{m}{m+1-1} = 1$. Havvi in un Libro *elementare* pochissimo cognito (59) il bel Teorema *aritmetico* (ma però senza prova) che ,, La *somma* di n quadrati dei numeri *naturali* s'uguaglia al doppio della *somma* di n numeri *triangolari* meno l'ultimo *triangolare*, e la *somma* di n cubi pareggia il quadrato dell' ultimo numero *triangolare* ,, dalla qual proposizione nacquero appunto sul principio del Secolo XVII.° nell' Italia le famose Formule Cavaleriane conducenti alla *quadratura* delle Parabole. Ora ognuno di per se concepisce che $2 \times \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} =$

(n

$\left(\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right)\left(\frac{2(n+2)}{3} - 1\right) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; e con egual chiarezza egli vede che $\left(\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right)^2 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{3n^2}{12}$; espressione dataci dall' ordinario metodo delle *somme* delle *potenze* numeriche, incominciando da 1 e non da 0 la *Serie* (60). Io feci in altro luogo osservare (61) che la *cubatura* esatta e geometrica d' una porzione di sfera conseguivasi mercè d' una *sintesi* agevolissima e scevra d'alcun ricorso al Calcolo *infinitesimale*, diversamente dalla più semplice delle due maniere adoprate da Bossut nel Paragrafo II. dell' *Appendice* ai recentissimi suoi *Trattati* d'Analisi *differenziale* e *integrale*. Sfuggì a sagacissimo Autore (62) un' espression discordante dal puro e terso linguaggio geometrico là dove scrisse, trattando delle irregolarità delle *parallassi* astronomiche, esservi quella tra l' altre „ la quale di„ pende dalla *figura sferoidale* del nostro *Globo*. „ Dalembert nell' *Enciclopedia metodica* avendo in veduta la generalizzazione dell' integrale $Sx^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ anco pel caso di $m = -1$, comincia da far riflettere che $\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ in quella ipotesi particolare diventa $\frac{0}{0}$, laonde colla *Regola* Bernoulliana variandosi l'*esponente m*, ottiene la Formula $dm\frac{(x^{m+1}Lx - a^{m+1}La)}{dm}$, e perciò nell' indicata supposizione $Lx - La$, o sivvero $Lx + C$; mentre senza l'ajuto *indiretto* della detta *Regola* ho altrove mostrato (63) che si giunge *immediatamente* al medesimo fine. Sonovi alcuni che han giudicato *falso* l'accorgimento analitico di Dalembert per arrivare all' *integrazione* dell' Equazioni *differenziali* di prim' ordine o *lineari*: a me pare che, se pur siavi difetto, esso consista non già nel *principio*, coerente a mio senso colla familiar dottrina de' *limiti*, ma piuttosto nell' espressione

$B + B\Pi$, come quella che stante Π *infinitesimo*, debba supporre *infinito* B affinchè $B\Pi = C$ s' ottenga *finito*; quando per il contrario e nelle *Serie ricorrenti* e nel *Calcolo delle differenze* si evita ciò seguitando l' altro artificio *diretto*, avanti di tutti introdotto dal prefato Bossut. Non è tampoco, giusta il mio sentimento, concludente e piena la prova che ad un' Equazione *biquadratica* universale $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$, mancante del secondo *termine*, spettino IV. *radici* tutte *reali*, se s' abbiano a un tempo verificate le due *condizioni* $B < 0$ (cioè *negativo*), $B^2 - 4D > 0$ (cioè *positivo*), o tutte IV. *imaginarie*, se manchi alcuna delle due *condizioni* medesime (che lasciano sempre libero il *segno* e valore di C), qualora non si ricorra a dedurla dall' Equazione *cubica ausiliaria* $z^3 + 2Bz^2 + (B^2 - 4D)z - C^2 = 0$ dov' è per lo meno una *radice* z' *reale* e *positiva*, e dal valor *derivato* di $x = \pm\sqrt{\frac{z'}{2}} \pm \sqrt{\left(-\frac{2B+z'}{2} \mp \sqrt{\frac{(z'^2+2Bz'+B^2-4D)}{2}}\right)}$, il quale evidentemente dimostra la verità delle predette due *condizioni* simultanee e immancabili.

Quello in somma, che in tutte le Scienze *esatte* ha da prendersi singolarmente di mira, si è la lucida derivazione da pochi ed inconcussi *principj* delle verità ormai conosciute, e dell' altre molte che ancora ignoriamo esservi incluse o connesse; perchè l' eccellenza e chiarezza del metodo somministran la via più facile e piana per giungere alle scoperte; e solo allora la mente umana potrebbe dirsi in tutta l' estensione del termine possedítrice del vero sapere. Colla *Formula* unica del *Binomio* di Newton si conseguiscono le *differenze* e i *differenziali* di tutte le *Funzioni* analitiche: per mezzo dei *differenziali* o de' *limiti* si scuoprono facilmente gli elementi, variazioni, e progressi d' ogni grandezza; nè sono i due opposti confini dell' *infinito* ed *infinitesimo* se non che i punti estremi, trascendenti il nostro concepimento, ai quali può sempre accostarsi quantunque piaccia una grandezza *finita*, senza toccarli giammai e molto men trapassarli. Non è dunque altro che l' espressione d' un *Numero inassegna-*

gnabile, a motivo della sua immensa grandezza, la Serie-infinita *paralella* $1+1+1+1+1+1+1+$ ec. $= \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0}$, come si rileva da mantenersi l'istessa $1+1+1+1+1+1+1+\frac{1}{0}$ aggiungendovi l'ultimo avanzo, e dal diventare $m+m+m+m+m+m+m+$ ec. $= m\,(1+1+1+1+1+1+1+$ ec.$) = m\left(\frac{1}{1-1}\right) = \frac{m}{0} = \frac{m}{1-1}$ conformemente alle regole di *proporzione*. Ben lontana perciò quella *Serie* da meritare il predicato di *falsa*, come moderni Analisti han pensato (64), ell'è anzi il prototipo dell'infinita *divisibilità* di qualunque siasi grandezza considerata in astratto, siccome fu concepita dai primi Filosofi della Grecia. Niuna difficoltà poi s'incontra nel render ragione d'una conseguenza legittima, che ha ricavata Legendre (65) dalla Serie-infinita di Lambert (66) $\text{Tang. } x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\cfrac{x^2}{9-\text{ec.}}}}}}$

tutte le volte che facciasi $x = \pi$ *semicirconferenza* d'un Circolo del *raggio* 1: perocchè in questo *caso* speciale non può a men di non essere $-0 = \cfrac{\pi}{1-\cfrac{\pi^2}{0}}$, cioè $0 = 3 - \cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\text{ec.}}}}$ in infinito.

Tutta la Teoria finalmente delle così dette *Funzioni simetriche*, tanto feconda quant'è nelle Matematiche in generale ed in ispecie nella Trigonometria analitica e nella Dottrina dell'Equazioni, si riduce a una facile applicazione di quel *Principio* sommo e intuitivo che i Metafisici appellano *Ragion sufficiente*, come non mancano d'accennarlo in più luoghi gl'Illustratori degli *Elementi d'Algebra* di Clairaut (67). In proposito dei quali *Elementi* giova quì d'avvertire che le due *equazioni* ivi date dapprima $3a^2+2pa+q=0$, $2a^3+pa^2-y=0$, come aventi un *divisore* co-

comune qualora l' Equazione *cubica* $x^3+px^2+qx+r=0$ abbia due eguali *radici* a, conducono al risultato medesimo delle altre somministrate dipoi $3a^2+2pa+q=0$, $a^3+pa^2+qa+r=0$, perchè dalla seconda delle due prime ottenendosi $r=2a^3+pa^2$, e questo valore sostituendolo nella quarta, procede $3a^3+2pa^2+qa$, cioè $3a^2+2pa+q$, come sopra. E le ingegnosissime speculazioni di Landen, mercè delle quali l' Algebra de' *finiti* ha sommamente estesi i suoi antichi confini, sono appoggiate in ultima analisi alla *determinazione* del valor vago e *indeterminato* $\frac{0}{0}$, che potrebb' anco servire di scorta onde togliere dalla classe delle *Serie infinite*, che portano al *falso*, l' elegantissime *trigonometriche* (68)

$$A = 1 - \text{Cos.}A - \frac{1}{3}\text{Cos.}^3A - \frac{3}{40}\text{Cos.}^5A - \text{ec.} = 0,$$

$$A = 1 - \text{Cot.}A + \frac{1}{3}\text{Cot.}^3A - \frac{1}{5}\text{Cot.}^5A + \text{ec.} = 0,$$

posto A un *arco* qualunque di circolare *periferia*; Serie che Jeaurat pubblicò con molt' altre nel declinare del Secolo scorso.

ANNOTAZIONI ALL' ANTECEDENTE MEMORIA.

(1) = Journal Polytechnique, ou Bulletin du travail fait à l' Ecole centrale des Travaux publics, publié par le Conseil d'Instruction & Administration de cette Ecole. Premier Cahier. Mois de Germinal. A Paris, de l' Imprimerie de la République. An. III. = Vedasi alla pag. 1 l' Articolo *Stéréotomie* scritto da Monge, e segnatamente tra i Problemi consecutivi di *Géométrie descriptive* il 12 ^{me} a pag. 13.

(2) = *Euclidis Elementa etc.* = Lib. XI. Prop. XXI.

(3) = Principes d'Astronomie Sphérique, ou Traité complet de Trigonométrie Sphérique etc. Par M. Mauduit, Professeur de Mathématiques. A Paris. Chez H. L. Guerin & L. F. Delatour etc. M. DCC. LXV. = Chap. IV. *De la résolution analytique ou algebrique des Triangles Sphériques* nel. Prob. III. *Scholie* §. 219. pag. 116 Probl. VI. §. 223. pagg. 119-20-21, Probl. VII. §. 224. pagg. 121-22, Probl. IX. *Premier Scholie* pagg. 124-25.-,, Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, pro Anno M. DCC. LXXIX. Pars prior. Petropoli, Typis Academiae Scientiarum. M. DCC. LXXXII. ,, dopo l' Istoria al Titolo *Mathematica* pag. 72. *Trigonometria Sphaerica universa ex primis principiis breviter et dilucide derivata. Auctore L. Eulero* (in §§. 26 sino alla pag. 86. incl., Tab. I. Figg. 7. 8.). Vedansi spezialmente i §§. 4. 5. 9. pagg. 74-5-7, e nell' ultima il §. 12. *Cum igitur tota Trigonometria Sphaerica tribus aequationibus supra inventis innitatur &c.*, e pe' i *logaritmi* il §. 19. pag. 80.) - ,, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année MDCC. LXXXIII. avec les Mémoires de Mathématique & de Physique pour la même Année &c. A Paris, de l'Imprimerie Royale, MDCCLXXXVI. ,, dopo l' *Histoire* alla pag. 291. *Trigonométrie Sphérique, déduite très-brièvement & complétement de la seule solution algébrique du plus simple de ses Problémes généraux, au moyen des diverses transformations dont les rapports des sinus & cosinus, tangentes & cotangentes, sécantes & cosécantes d'un même Arc ou d'un même Angle plan, rendent cette solution susceptible, & comprenant quelques Formules & Observations qu' on croit utiles & neuves. Par M. l'Abbé De Gua* ,, . (Si riscontrino il *Probléme unique* alla pag. 303., la Fig. 1. della *Planche* IV., i VII. Corollarj sino a pag. 318. incl., gli altri sino al XIII. ed alla pag. 335. incl., e finalmente le III. *Observations générales* dalla pag. suddetta alla 343. incl. ch' è il termine della Memoria).

(4) = Eléments de Géométrie, avec des Notes; par M. Legendre Membre de l' Institut National de France, et de la Société Royale de Londres. Cinquiéme Edition. A Paris, Rue de Thionville, N.° 116., chez Firmin Didot &c. An XII. (1804.) *Traité de Trigonométrie* dalla pag 328. sino alla 423., diviso in C. X. §§. — ,, Méthodes analytiques pour la détermination d' un Arc du Méridien; par J. B. J. Delambre, Membre de l' Institut National et du Bureau des Longitudes, l'un des deux Astronomes chargés de la mesure de-

l'Arc compris entre Dunkerque et Barcelonne: précédées d' un Mémoire sur le même sujet, par A. M. Legendre &c. De l' Imprimerie de Chapelet. A Paris, chez Duprat &c., quai des Augustins, près le Pont-Neuf. An VII. ,, - ,, Journal de l' Ecole Polytechnique, ou Bulletin du Travail fait à cette Ecole: publié par le Conseil d' Instruction & Administration de cet Etablissement. Sixième Cahier. Tome II. A Paris, de l' Imprimerie de la République. Thermidor An VII. ,, segnatamente alla pag. 270. *Solutions de quelques Problémes relatifs aux Triangles sphériques, avec une analyse complète de ces Triangles. Par J. L. Lagrange* sino incl. alla pag. 296., la qual Memoria è distinta in 28. paragrafi.

(5) = Mémoire sur les usages de l'Ellipse dans la Trigonométrie Sphérique. Par le Citoyen Goudin. A Paris, chez Régent et Bernard, quai des Augustins, N.° 37. L'An V-1797. ,, (*Chapitre* II. alla pag. 18. e segg.).

(6) = Invention nouvelle en Algébre. Amsterdam, M. DC. XXIX. ,, *Brochure*, in oggi rarissima, d' *Albert Girard Samiélois* (cioè di Saint-Michel, San-Mihel o Samiel *en Barrois*), consistente nel dar la misura degli Angoli-solidi mediante l' arco dei Triangoli-sferici; un Esemplar della quale trovasi nella Biblioteca dei Re di Francia. — Vedansi in oltre la Nota (zz) de' miei *Pensieri Geometrici* nel Tomo X. di questa Raccolta alla pag. 673. e la precitata Opera di Mauduit (Nota (3)) al Capo V. Tav. III. Fig. 33., dopo la V. Sezione ed il IV. Esempio, nel §. 298. pag. 168-69. ov' è *Problème* al termine dell' istesso Capitolo, intitolato (§. 247. pag. 140.) *Des Analogies différentielles des Triangles sphériques & rectilignes quelconques*.

(7) = Mio MS. diviso in IV. Libri o Sezioni, e tuttavia inedito, sebben lo adoperi come *Prelezione* sintetica universale delle curve o Linee di second' *ordine*.

(8) = Oeuvres de M. De Maupertuis. Nouvelle Edition corrigée & augmentée. A Lyon, chez Jean-Marie Bruyset, Libraire, grand Rue Merciere, au Soleil. M. DCC. LVI. Tome quatrième. *Astronomie Nautique, ou Elémens d' Astronomie, tant pour un Observatoire fixe, que pour un Observatoire mobile. Imprimé au Louvre en* M. DCC. XLIII. *et en* M. DCC. LI., dalla pag. 95. alla 186. inclusivamente. ,, — ,, Manuel Trigonométrique de M. l'Abbé De la Grive. ,, — ,, Trigonometria Piana e Sferica di Antonio Cagnoli; Edizione seconda notabilmente ampliata. In Bologna, per i Fratelli Masi e Comp. M. DCCC. IV. ,, — ,, De la Corrélation des Figures de Géométrie. Par L. N. M. Carnot, Membre de l' Institut National. De l' Imprimerie de Crapelet. A Paris, chez Duprat, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins. An. IX = 1801. ,,

(9) = Encyclopédie Méthodique ,, — *Mathématiques* —, par MM. d' Alembert, l' Abbé Bossut, de la Lande, le Marquis de Condorcet, Charles, etc. ,, Tome III. A Paris, chez Panckoucke etc. M. DCC. LXXV. ,, (Vedasi *Sinus* (Géométrie) dalla pag. 37. Col. 2. sino alla pag. 53. 2. Col. incl. — ,, Traité de Mineralogie; par le Citoyen Haüy, Membre de l'Institut National des Sciences & Arts, et Conservateur des Colle-

ctions Mineralogiques de l'Ecole des Mines. Publié par le Conseil des Mines etc. De l'Imprimerie de Delance. A Paris, chez Louis Libraire, Rue de Savoye, N.° 12. An X (1801) ,, . Vedasi specialmente il Capo II.°).

(10) Prop. XI. Lib. XI.

(11) Legendre *Traité de Trigonométrie* precitato, al §. LXXVII. pagg. 389-90. — Lagrange nella Dissertazione accennata dalla Nota (4), al §. 15. pagg. 281-82. confrontato col §. 3. pagg. 271-72.

(12) *Euclidis &c.* Prop. IV. Lib. XI.

(13) *Elementa Geometriae* Lib. I. Prop. XXI.

(14) Volume X. di questa Raccolta alla p. 571. ov'è il *Corollario* VI. del Teorema dell' Articolo I. de' miei *Principj della Meccanica richiamati alla massima semplicità ed evidenza*. (Fig. 54.).

(15) = Essai d'une Théorie sur la structure des Cristaux, appliquée à plusieurs genres de substances cristallisées; par M. l'Abbé Haüy, de l'Académie Royale des Sciences, Professeur d'Humanités dans l'Université de Paris. A Paris, M. DCC. LXXXIV. ,, — ,, Journal de l' Ecole Polytechnique &c. Tome III. ,, — ,, Eléments de Géométrie &c. par A. M. Legendre etc. ,, *Appendix aux Livres* VI. *et* VII. *Les Polyédres reguliers.* Proposition III. Problême, alle pag. 236-7 — (*Goniométre* di Garangeau negli ,, Elementi di Chimica ,, del Brugnatelli).

(16) Legendre l. c. *Livre* III. Corollario della Prop. XXXII. alla pag. 92., Fig. 134. della Tavola V.

(17) Vedasi lo *Scolio* del Teorema dell' Articolo I. (Fig. 63.) dei *Principj della Meccanica* sopraccitati (Nota (14)), alla pag. 584.

(18) = *Note* X. degli ,, Eléments de Géométrie ,, di Legendre, in fondo del Problema I. pag. 320. *Cette Formule très-élégante est due à Simon Lhuillier*.

(19) Memoria citata nella *Nota* (4), al §. 10. pagg. 277-78.

(20) Si riscontri il Proemio dei di già rammentati *Principj della Meccanica &c.*, alla pag. 481.

(21) Basta confrontare lo *Scolie* della Prop. XVIII. alle pagg. 217-18. del Libro VII. degli ,, Elementi di Geometria ,, di Legendre colla *Note* (1) in principio del suo *Traité de Trigonométrie* alla pag. 328.

(22) Memoria Trigonometrica precitata, e nominatamente nel §. 7. alle pagg. 274-75.

(23) = Claudii Ptolemaei Pelusiensis Alexandrini omnia quae extant Opera, praeter Geographiam, &c. Basileae. In Officina Henrichi Petri, Mense Martio, M. D. LI. ,, *Magnae Compositionis Cl. Ptolemaei Alexandrini Libri* (XIII.) *à Georgio Trapezuntio è Graeco conversi* ,, ed ivi alla pag. 7. Lib. I. Caput IX. *De quantitate rectarum linearum, quae in Circulo perducuntur*, ed il Teorema (colle *Additiones Gaurici*), ed il Testo e Figura in legno alla pag. 9. Col. 1. e 2. *Si Quadrilaterum inscriptum Circulo &c.* — Carnot Op. cit. (Nota (8)) *Problême* II. §. 137. alle pagg. 95-96-97. ,, Tracer une Figure qui represente les principaux rapports existans entre les sinus & cosinus de deux angles proposés; les sinus & cosinus de leur somme, & les sinus & cosinus de leur différence ,, dal §. 127. al 141., e dalla p. 84. a 101. incl.

(24) Vedasi la precitata *Trigonometria* di Cagnoli al Capo III. pagg. 16-17. §§. 88-89. Figg. 2-3. della Tav. I., e Capo IV. §§. 93-100. incl. dalla pag. 18. alla 19.

(25) Lagrange nella prelodata Memoria ai §§. 14. 15. 16. 17. ed alle pagg. 280-81-82-83. — Legendre *Trigonometria ec.*, §. LXXX. pag. 391. e seguenti.

(26) Si riscontri alla pag. 303. e segg. la Memoria citata nell' antecedente (3) *Nota*.

(27) *Correlation des Figures &c.* Probléme III. dal §. 142. al 165. e dalla pag. 101. alla 117. inclusivamente. „ Trouver les rapports existans entre les côtés d'un Triangle quelconque, les perpendiculaires menées des angles sur les côtés opposés, les segmens formés sur ces côtés et ces perpendiculaires, et enfin les angles résultans de cette construction „.

(28) *Geometriae Elementa* Lib. II. Prop. XII. e XIII.

(29) L. c. nella Nota (52) consecutiva.

(30) Legendre *Eléments de Géométrie &c.* Lib. VII. allo *Scholie* della Prop. XV. pag. 215., e *Traité de Trigonométrie* nella *Remarque* dopo il VI. *Cas*, §. LXXIV. pag. 386.

(31) Dissertazione Trigonometrica precitata, nel §. 12. p. 279. ov' è la Formula Sin. $b = \frac{f}{\text{Sin. } a}$.

(32) *Elementa Geometriae*, Lib. III. Prop. XXXVI. e suo Corollario.

(33) Legendre *Traité de Trigonométrie*, IV. *Cas*, §. LVII. 372-73-74.

(34) Memoria citata nella *Nota* (4), ed ivi *Méthode pour déterminer la longueur exacte du quart du Méridien &c. Note* III. a pag. 2. „ Du Calcul des Triangles „ segnatamente alla pag. 13., e quindi da a pag. 2. alla 6. incl. d'altra numerazione *Observations sur quelques endroits du Mémoire du Cit. Delambre*, divise in V. §§.

(35) Nel Tomo X. delle Memorie della nostra Società Italiana delle Scienze alla pag. 560. Fig. 42.

(36) = Nuovi Elementi di Geometria „ &c. rammentati nella *Nota* seguente (59), che quantunque anonimi si credon d' Arnauld, nel Libro XIII. N. XXIX. pagg. 393-94.

(37) = „ De la Corrélation &c. „ *Problema* II. §. 135. pag. 94.

(38) Legendre *Eléments* de Géométrie &c. alla *Note* V. *Probléme* III. pag. 296. Fig. 5. della Tavole XIII.

(39) Proposizione indicata nella precedente *Nota* 28.

(40) „ Elementi d' Euclide „ nel l. c. di sopra.

(41) Legendre *Eléments de Géométrie &c.* Nota V. *Probléme* I. (Fig. 3. *Planche* 13.) alla pag. 294.

(42) *Notes sur les Eléments de Géométrie*, alla X., *Probléme* I. pagg. 317-18.

(43) Goudin nel citato Opuscolo (ved. *Nota* (5)) al §. 22. pag. 19.

(44) *Chapitre* II. della preindicata Operetta, intitolato *Propriétés de l' Ellipse*, ai §§. 19. 27. 37. 44. 51. pagg. 18-20-25-28-30. paragonati col §. 26. pag. 20.

(45) *Euclidis Elementa* Lib. III. Prop. XXXV.

(46) Vedansi „ *Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine. Par. M. Bezout. A Paris*, M.DCC.LXX. „ Tomo IV. alle pagg. 177-78; e *passim* tutti gli Elementisti.

(47) *Elem. Eucl.* Prop. III. Libro VI.

(48) *Euclidis Elementa* Lib. VI. Prop. VIII.

(49) = *De Calculo Integralium Exercitatio Mathematica &c. Florentiae*. M. DCC. XCII. ,, *Sectio* II. ,, - Carnot *De la Corrélation &c.* al §. 253. pagg. 186-87. (*Planche* IV. Fig. 28. ossia ultima).

(50) = *Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini Libri* VIII. (VI). *Pisauri*. M. DC. II. *Apud Hieronymum Concordiam*. ,, Lib. III. dopo il *Problema* I. *Prop.* V. *Ut Eratosthenes* alla pag. 5., ove a pag. 7. sta scritto *Secundum Problema hoc erat &c.* coll'annessa Figura, d'onde tosto ricavasi il risultato che segue.

(51) Leggansi le molte Memorie e Quistioni insorte a questo proposito nel Secolo scorso tra gli Accademici Parigini.

(52) Legendre *Traité de Trigonométrie* ai §§. XLV. e XLVI. pagg. 364-65-66.

(53) Goudin Op. cit. §. 26. pag. 20. — Legendre *Traité de Trigonométrie* §. LVI. pag. 371.

(54) = Description et usage du Cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques. Par le Chevalier de Borda, Capitaine de Vaisseau, Chef de division, et Membre des Académies Royales des Sciences & de Marine. De l'Imprimerie de Didot l'aîné. A Paris, chez Didot fils-aîné = Jombert jeune, Rue Dauphine, M. DCC. LXXXVII. ,, (Vedansi *Chapitre* III. dalla pag. 33. alla 72. incl. e le due delle XIII. Tavole VII. e VIII.).

(55) ,, Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année M. DCC. LXXXVII. avec les Mémoires de Mathématique & de Physique pour la même Année &c. A Paris, de l'Imprimerie Royale, M. DCC. LXXXIX. ,, dopo l'*Histoire* alla pag. 352. *Mémoire sur les operations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la Terre. Par M. Le Gendre*. (Si consulti nominatamente il §. VI. alla pag. 358. *Théoreme concernant les Triangles Sphériques, dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la Sphère* sino alla pag. 359. incl. mentre il resto della Memoria, corredata d'una Tavola di Num. VII. con 6. Figure incisevi, finisce inclusivamente alla pag. 383.).

(56) Opera citata nella *Nota* (4) al N. III. pag. 12. *Résolution des Triangles Sphériques dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la Sphère*, sino alla pag. 14. inclusivamente. ,, Traité de Trigonométrie ,, *Appendice* &c. ,, al §. V. e §§. di suddivisione CV - VI - VII. dalla pag. 416. alla 420. incl. — ,, Formules & méthodes employées dans les Calculs de la Méridienne de France. Par J. B. J. Delambre &c. ,, nel §. *Calcul d'un Arc du Méridien dans le Sphéroïde elliptique* alla pag. 88. ,, L'excès sphérique a pour expression &c. ,, Preindicata Memoria Trigonometrica (*Nota* (4)) in calce; dal §. 26. pag. 291. all'ultimo 28. ed alla pag. 296. inclusivamente.

(57) Vedasi la prefata Memoria Trigonometrica nel §. 13. pag. 280.

(58) ,, Bibliothèque Française, Ouvrage periodique rédigé par Ch. Pougens &c. Deuxième Année. Paris, Vendémiaire An. X. Octobre 1801. ,, al N. VII. e pag. 67.

(59) ,, Nouveaux Elémens de Géomé-

trie, contenant outre un ordre tout nouveau &c., Seconde Edition. A la Haye. Chez Henry Van Bulderen &c. à l'Enseigne de Mezeray, M. DC. XC. ,, Libro IV. *Problema* IV. N. LV. pag. 134., e *Problema* V. N. LVI. pag. 135.

(60) Allora l' indice *n* nelle conosciute espressioni ordinarie *analitiche* va di pari col numero delle *potenze* sommate.

(61) ,, Pensieri Geometrici ,, nel Tomo X. precitato di questa Collezione Accademica, alla pag. 649. e segg.

(62) ,, Notizie Astronomiche adattate all' uso comune. In Modena, presso la Società Tipografica (T. II. MDCCC.II.) ,, Cap. IX. *Delle Parallassi* (T. I.), al §. 216. pag. 156.

(63) ,, *Magnitudinum Exponentialium Logarithmorum, & Trigonometriae sublimis Theoria, nova metodo pertractata. Florentiae,* M. DCC. LXXXII. ,, Capitolo X. intitolato *Calculi Integralis Paradoxon enodatum*, alla pag. 601.

(64) ,, Supplément à l'Algèbre de Clairaut ,, Cap. III. *Des Proportions, des Progressions, des Suites & des Logarithmes*, nel Tomo II. dell' Opera quì sotto citata (*Nota* 67), alle pagine 346. e 47.

(65) Eléments de Géométrie &c. ,, *Note* IV. alla pag. 286., e segnatamente dopo il *Théorème* a pagg. 292-3.

(66) ,, Histoire de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres. Année M. DCC. LXI. A Berlin &c. ,, §. 35. pag. 288.

(67) ,, Elémens d'Algèbre, par Clairaut, cinquième Edition. Avec des Notes & des Additions &c. A Paris, chez Duprat &c. An V (M. DCC. XCVII.) ,, e precisamente nel Tomo II. alle pagine 245-46., e nelle *Additions à la* IV.me *Partie*, Nota 3. rapporto agli Articoli LIV. LV. pagg. 90-99., Nota 4. N. 9. pagg. 112. e 114.

(68) ,, Mémoires de Mathématique & de Physique présentés à l' Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lus dans ses Assemblées. Tome quatrieme. A Paris, de l'Imprimerie Royale M. DCC. LXIII, ove dalla pag. 524. sino a 540. incl. si legge *Mémoire sur le mouvement des Planétes, & moyen de calculer leur équation du centre pour un temps donné. Par M. Jeaurat, Professeur de Mathématique à l'Ecole Royale Militaire*, e s' incontrano nelle pagg. 527-28-29-30. tra l' altre Serie-infinite ancor quelle quivi notate.

ME-

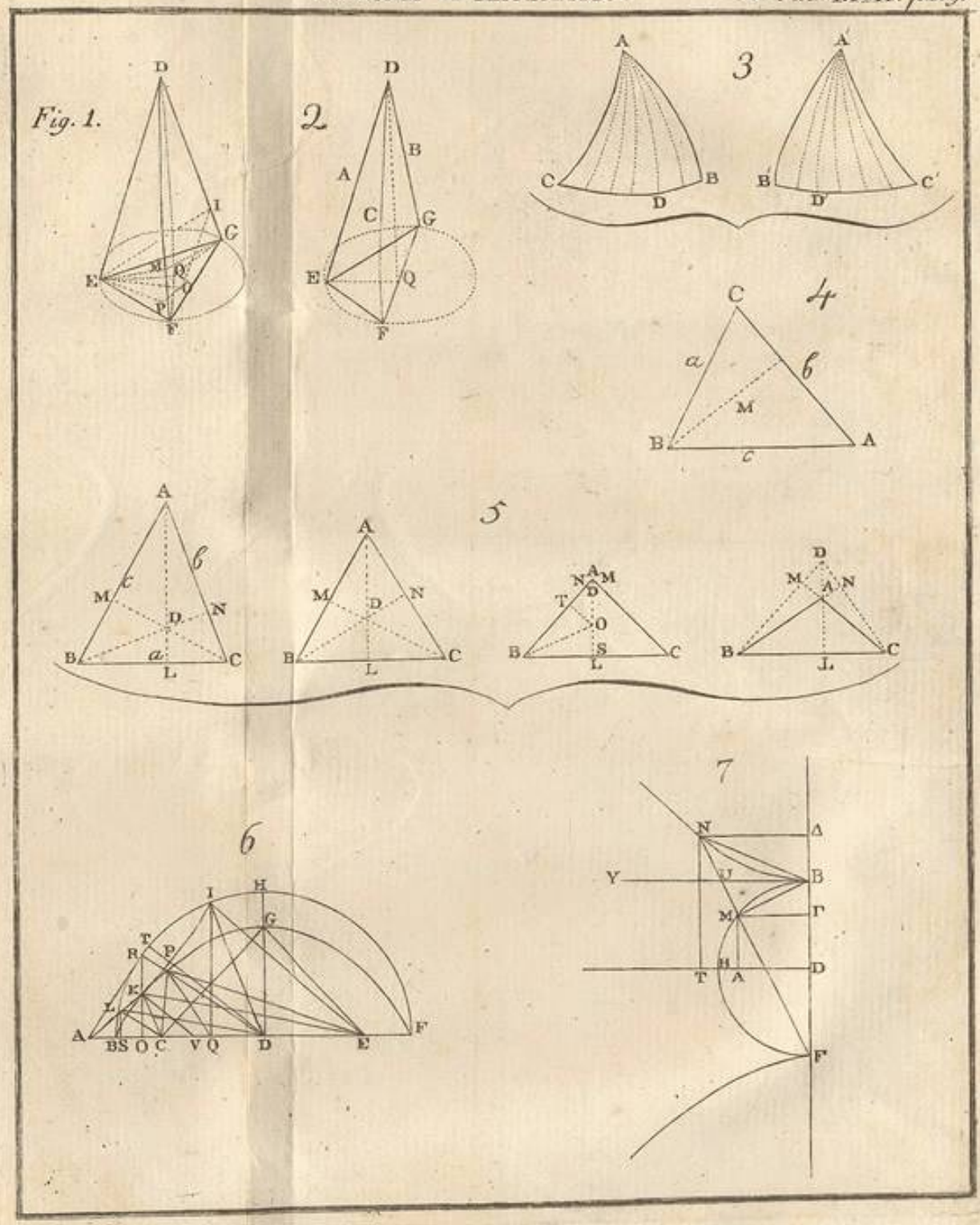
Fig. 1.
2
3
4
5
6
7