MEMORIA

SU DIVERSI ARTICOLI SPETTANTI ALL' ANALISI

Di Pietro Franchini

Presentata da ANTONIO CAGNOLI il dì 12. Dicembre 1803.

ARTICOLO I.

Nuovo metodo per completar gli integrali dell' equazioni di 1.° grado, a coefficienti costanti, sì differenziali che a differenze finite, nel caso che l' equazione algebrica ausiliare abbia delle radici eguali.

N.° 1.° Tutti sanno che la semplicissima formola trovata dall' immortale Lagrange, per esprimere l' integrale completo dell' equazioni lineari a coefficienti costanti, sì differenziali che a differenze finite, diviene completa, quando l' equazione algebrica ausiliare, le di cui radici hanno parte nella composizione dell' integrale stesso, comprende alcune radici eguali. Per eludere l' inconveniente di cui si tratta, sino ad ora non si è conosciuto altro ripiego, che quello insegnato dal D'Alembert, per cui si suppone che ciascuna radice uguale, cominciando dalla seconda, veng' accresciuta di una quantità indeterminata, espressa rispettivamente per k, k', k'' ec. La funzione che rappresenta la somma de' termini affetti dalla radice uguale, così viensi a cangiare in una serie ordinata per le potenze della variabile indipendente x, e per le potenze di k, k', k'' ec. secondo che le radici eguali sono due, o tre ec. Tutto si riduce a far sì che le successive potenze

di

di k, k' ec. si adattino al bisogno del calcolatore, il quale nel caso delle radici eguali, vuole tanti termini affetti dalle rispettive costanti arbitrarie, quante sono le radici eguali e non più, per completar con essi l'integrale ottenuto colla formola generale. Per riuscire in questo, D'Alembert suppone indefinitamente piccole le quantità k, k', k'' ec.; nel caso di due radici eguali trascura le potenze di k superiori alla prima; nel caso di tre radici eguali trascura le potenze di k e di k' superiori alla seconda, e così in seguito. Questo metodo a prima vista comparisce inesatto e precario, ma penetrando ben' addentro nello spirito del medesimo si rileva, che dando ai coefficienti c, $c1$, $c2$ ec. spettanti alle radici eguali, certi valori opportunamente modificati con alcune quantità indeterminate e coll' infinito di diversi ordini, si rileva dissi, che il medesimo è sufficientemente conforme ai veri principj dell' Analisi. Non può peraltro negarsi, che in esso incontrisi un non so quale imbarazzo, derivante dalla combinazione degli infiniti e delle quantità evanescenti, e che sia inoltre alquanto indiretto. Per esempio nel caso di tre radici eguali, perchè svaniscano le potenze di k e k' superiori alla seconda, convien porre $c = f - \infty + (k-1)\infty^2$, $c1 = \infty - k\infty^2$, $c2 = \infty^2$, dove k è un' indeterminata, ed f un numero finito.

N.° 2.° Sieno infatti a, $a1$, $a2$ ec. le radici dell' equazione ausiliare, e c, $c1$, $c2$ ec. n costanti arbitrarie. L' integrale completo di un' equazione lineare dell' ordine n, essendo espresso per $y_x = ca^x + c1\,a1^x + c2\,a2^x \ldots\ldots\ldots + c(n-1)\,a\overline{(n-1)}^x$ . . . (A), siccome $a = a1 = a2$, sarà $y = a^x(c + c1 + c2) + c3\,a3^x \ldots + c(n-1)\,a\overline{(n-1)}^x$, dove mancano due costanti arbitrarie. Pongasi $a1 = a + k$ ed $a2 = a + k'$, e siccome si ha $(a+k)^x = a^x(1 + mxk + nx^2k^2 + px^3k^3$ ec.)

$(a+k)^x = a^x(1 + m'xk' + n'x^2k'^2 + p'x^3k'^3$ ec.)

proverrà $y_x = ca^x + c1\,a^x\,(1 + mxk + nx^2k^2 + px^3k^3$ ec.) $+ c2\,a^x\,(1 + m'xk' + n'x^2k'^2 + p'x^3k'^3$ ec.) $+ c3\,a3^x$ ec.

Facciasi $c + c1 + c2 = d$; $mc1k + m'c2k' = d1$, $nc1k^2 + n'c2k'^2$

=

$= d2$, $pc1\,k^3 + p'c2\,k^3 = d3$ ec. Dando a c, $c1$, $c2$, i rispettivi valori esposti di sopra, si vede che d, $d1$, $d2$ risultano quantità finite ed arbitrarie, che risultano infinitesimi di 1°, 2° ec. ordine le successive quantità, $d3$, $d4$, ec. e che i primi tre termini dell' integrale completo, trascurando gli infinitesimi, sono $da^x + d1\,xa^x + d2\,x^2a^x$. In generale, se il num.° delle radici eguali ad a sia m, la formola (A) diviene $y_x = a^x[c + c1 + c2 \ldots + c(m-1)] + c(m)\overline{a(m)}^x \ldots + c(n-1)\overline{a(n-1)}^x$, e D' Alembert per supplire alle $m-1$ costanti arbitrarie che mancano, sostituisce $a^x[d + d1\,x + d2\,x^2 \ldots\ldots + d(m-1)\,x^{m-1}]$ in vece di $a^x[c + c1 + c2 \ldots + c(m-1)]$, e così lo riduce alla forma completa $y_x = a^x[d + d1\,x + d2x^2 \ldots + d(m-1)\,x^{m-1}] + d(m)\overline{a(m)}^x \ldots + d(n-1)\,\overline{a(n-1)}^x \ldots$ (B)

Premesso tutto questo, noi ci proponiamo di giungere ai precedenti risultati ottenuti dal D'Alembert, con un metodo più diretto, generale, rigoroso, e libero poi del tutto dall' imbarazzante idea degli infiniti e delle quantità evanescenti, idea che nel caso attuale non ci sembra esente da qualunque ombra d' inesattezza.

N.° 3. Lemma. Trovare $\Sigma^n z_{x+n}$ espresso per gli integrali successivi $\Sigma^n z_x$, $\Sigma^{n-1} z_x$, $\Sigma^{n-2} z_x \ldots \Sigma z_x$, e per le funzioni successive z_x, z_{x+1}, $z_{x+2} \ldots z_{x+n-n}$.

Soluzione. Si sa che $\Sigma^n z_{x+1} = \Sigma^n z_x + \Sigma^{n-1} z_x$, a motivo che $z_{x+1} = z_x + \Delta z_x$. Ciò posto siccome $\Sigma z_x = z_{x-1} + z_{x-2} + z_{x-3} \ldots + z_0$, $\Sigma z_{x+1} = z_x + z_{x-1} + z_{x-2} \ldots + z^0$, $\Sigma z_{x+2} = z_{x+1} + z_x + z_{x-1} \ldots + z_0$, ec. si avrà

$$\Sigma^2 z_{x+1} = \Sigma^2 z_x + \Sigma z_x$$
$$\Sigma^2 z_{x+2} = \Sigma^2 z_{x+1} + \Sigma z_{x+1} = \Sigma^2 z_{x+1} + \Sigma z_x + z_x = \Sigma^2 z_x + 2\Sigma z_x + z_x.$$
$$\Sigma^2 z_{x+3} = \Sigma^2 z_{x+2} + \Sigma z_{x+2} = \Sigma^2 z_x + 3\Sigma z_x + 2z_x + z_{x+1}.$$
$$\Sigma^2 z_{x+4} = \Sigma^2 z_{x+3} + \Sigma z_{x+3} = \Sigma^2 z_x + 4\Sigma z_x + 3z_x + 2z_{x+1} + z_{x+2}.$$
$$\Sigma^2 z_{x+5} = \Sigma^2 z_{x+4} + \Sigma z_{x+4} = \Sigma^2 z_x + 5\Sigma z_x + 4z_x + 3z_{x+1} + 2z_{x+2} + z_{x+3}.$$

In generale

$$\Sigma^2 z_{x+n} = \Sigma^2 z_{x+n-1} + \Sigma z_{x+n-1} = \Sigma^2 z_x + n\Sigma z_x + (n-1)z_x + (n-2)z_{x+1} \ldots + z_{x+n-2}.$$

Co-

Così . . .

$\Sigma^3 z_{x+1} = \Sigma^3 z_x + \Sigma^2 z_x$.

$\Sigma^3 z_{x+2} = \Sigma^3 z_x + 2\Sigma^2 z_x + \Sigma z_x$.

$\Sigma^3 z_{x+3} = \Sigma^3 z_x + 3\Sigma^2 z_x + 3\Sigma z_x + z_x$.

$\Sigma^3 z_{x+4} = \Sigma^3 z_x + 4\Sigma^2 z_x + 6\Sigma z_x + 3z_x + z_{x+1}$.

$\Sigma^3 z_{x+5} = \Sigma^3 z_x + 5\Sigma^2 z_x + 10\Sigma z_x + 6z_x + 3z_{x+1} + z_{x+2}$.

$\Sigma^3 z_{x+6} = \Sigma^3 z_x + 6\Sigma^2 z_x + 15\Sigma z_x + 10z_x + 6z_{x+1} + 3z_{x+2} + z_{x+3}$.

In generale.

$$\Sigma^3 z_{x+n} = \Sigma^3 z_x + n\Sigma^2 z_x + \frac{n(n-1)}{2}\Sigma z_x + \frac{(n-1)(n-2)}{2} z_x + \frac{(n-2)(n-3)}{2} z_{x+1} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} z_{x+2} \ldots\ldots + z_{x+n-3}.$$

Procedendo nello stesso modo si trova

$\Sigma^4 z_{x+1} = \Sigma^4 z_x + \Sigma^3 z_x$.

$\Sigma^4 z_{x+2} = \Sigma^4 z_x + 2\Sigma^3 z_x + \Sigma^2 z_x$.

$\Sigma^4 z_{x+3} = \Sigma^4 z_x + 3\Sigma^3 z_x + 3\Sigma^2 z_x + \Sigma z_x$.

$\Sigma^4 z_{x+4} = \Sigma^4 z_x + 4\Sigma^3 z_x + 6\Sigma^2 z_x + 4\Sigma z_x + z_x$.

$\Sigma^4 z_{x+5} = \Sigma^4 z_x + 5\Sigma^3 z_x + 10\Sigma^2 z_x + 10\Sigma z_x + 4z_x + z_{x+1}$.

$\Sigma^4 z_{x+6} = \Sigma^4 z_x + 6\Sigma z_x + 15\Sigma^2 z_x + 20\Sigma z_x + 10z_x + 4z_{x+1} + z_{x+2}$.

In generale . . . .

$$\Sigma^4 z_{x+n} = \Sigma^4 z_x + n\Sigma^3 z_x + \frac{n(n-1)}{2}\Sigma^2 z_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\Sigma z_x + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{2.3.4} z_x + \frac{(n-4)(n-3)(n-2)}{2.3} z_{x+1} \ldots\ldots + z_{x+n-4}$$

Considerando l' analogia che regna ne' risultati precedenti si concluderà che deesi avere

$$\Sigma^m z_{x+n} = \Sigma^m z_x + n\Sigma^{m-1} z_x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Sigma^{m-2} z_x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Sigma^{m-3} z_x \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-2)]}{1.2.3\ldots m(m+1)}\Sigma z_x + \frac{[n-(m-1)][n-(m-2)]\ldots(n-2)(n-1)}{1.2.3.4\ldots m(m-1)} z_x + \frac{(n-m)[n-(m-1)]\ldots(n-3)(n-2)}{1.2.3.4\ldots m(m-1)} z_{x+1} \ldots\ldots + z_{x+n-m} \ldots\ldots (C)$$

Quando $n < m$ l' esposta formola non comprende alcuna delle funzioni z_x, z_{x+1}, ec., comincia z_x ad entrarvi quando

do $n=m$; vi si trovano z_x, z_{x+1} quando $n=m+1$, e così in seguito. Rapporto a' coefficienti si vede, che quelli de' termini affetti dal segno sommatorio, sono per ordine i primi m coefficienti della potenza $n.^{sima}$ del binomio; i coefficienti de' termini z_x, z_{x+1} ec. sono i numeri figurati dell' ordine $m-1$; computando di prim' ordine i numeri naturali, di secondo i numeri triangolari, ec. Per dedurre dalla formola (C) tutte le inferiori fino a Σz_{x+n} inclusivamente, basta fare $\Sigma^0 z_x = 0$ e prendere nelle formole che rappresentano i coefficienti di z_x, z_{x+1}, ec. tanti de' fattori $\frac{n-(m-1)}{1}$, $\frac{n-(m-2)}{1.2}$, ec. quante unità si contengono in m.

N.° 4.° Passando adesso ad esporre il metodo che ci siamo proposti d' investigare, sia per primo esempio l' equazione di terz' ordine ... $y_{x+3}+By_{x+2}+Cy_{x+1}+Dy_x=0$ e suppongasi che l' equazione ausiliare $a^3+Ba^2+Ca+D=0$ contenga due radici eguali. Facendo $y_x=a^x\Sigma^2 z_x$ ottiensi la trasformata $a^{x+3}(\Sigma^2 z_x+3\Sigma z_x+2z_x+z_{x+1})+Ba^{x+2}(\Sigma^2 z_x+2\Sigma z_x+z_x)+Ca^{x+1}(\Sigma^2 z_x \Sigma z_x)+Da^x\Sigma^2 z_x=0$, cioè ..... $(a^3+Ba^2+Ca+D)\Sigma^2 z_x+(3a^3+2Ba^2+Ca)\Sigma z_x+(2a^3+Ba^2)z_x+a^3 z_{x+1}=0$. Ora il coefficiente di $\Sigma^2 z_x$ posto $=0$ equivale appunto all' equazione ausiliare, ed il coefficiente di Σz_x posto $=0$ è la di lei equazione de' limiti; dunque uno stesso valore di a dee verificarle ambedue, e la trasformata precedente dee ridursi a $(2a+B)z_x+az_{x+1}=0$, equazione da cui si ritrae .... $z_x=-\left(\frac{2a+B}{a}\right)^x c$; dunque $y_x=-a^x\Sigma^2\left(\frac{2a+B}{a}\right)^x c$.

Sia l' equazione di quart' ordine $y_{x+4}+By_{x+3}+Cy_{x+2}+Dy_{x+1}+E=0$, e l' equazione ausiliare $a^4+Ba^3+Ca^2+Da+E=0$ contenga tre radici eguali. Si avrà la trasformata ..... $(a^4+Ba^3+Ca^2+Da+E)\Sigma^3 z_x+(4a^4+3Ba^3+2Ca^2+Da)\Sigma^2 z_x+(6a^4+3Ba^3+Ca^2)\Sigma z_x+(3a^4+Ba^3)z_x+a^4 z_{x+1}=0$. I coefficien-

cienti de' primi tre termini svaniranno per la ragione addotta di sopra, in grazia dell' equazione ausiliare stessa: rimarrà $(3a+B)z_x + az_{x+1} = 0$ e l' integrale completo della proposta sarà $y_x = -a^x \Sigma^3 \left(\frac{3a+B}{a}\right)^x c$.

Sia in generale ... $y_{x+n} + By_{x+n-1} + Cy_{x+n-2} \ldots + Uy_x = 0 \ldots$ (D), e l' equazione ausiliare $a^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} \ldots\ldots + U = 0$ contenga m radici eguali. Facendo $y_x = a^x \Sigma^m z_x$ si avrà una trasformata nella quale i coefficienti de' termini sommatorj, posti eguali a zero, daranno altrettante Equazioni de' limiti dell' equazione ausiliare; e perciò si verificheranno unitamente a questa. L' equazione rimanente, cui daremo il nome di equazione *ridotta*, sarà un' equazione dell' ordine $n-m$ a coefficienti costanti, di cui si avrà l' integrale completo mediante la semplice soluzione di un' equazione algebrica del grado $n-m$. Sia (X) questo integrale, e siccome debb' egli contenere $n-m$ costanti, $y_x = a^x \Sigma^m (X)$ sarà l' integrale completo della proposta, ed (X) sarà generalmente della forma $Cb^x + C1b1^x + C2b2^x \ldots + C(n-m-1)\overline{b(n-m-1)}^x$ essendo b, $b1$, $b2$ ec. le radici dell' equazione algebrica ausiliare della ridotta, radici che sono della forma $\frac{\beta}{a}$, $\frac{\beta 1}{a}$, $\frac{\beta 2}{a}$ ec.

N.° 5.° Giova provare intanto che le radici b, $b1$, $b2$ ec. sono generalmente della forma $\frac{\beta}{a}$, $\frac{\beta 1}{a}$, $\frac{\beta 2}{a}$ ec. Proposta l' equazione $y_{x+n} + By_{x+n-1} \ldots + Uy_x = 0$ si faccia $y_x = a^x \Sigma^m z_x$. Trascurati i termini affetti da' segni sommatorj, perchè i respettivi loro coefficienti debbono svanire per ipotesi, avremo la trasformata che segue . . .

$$a^n(B'z_x + C'z_{x+1} \ldots + T'z_{x+n-m-1} + z_{x+n-m}) + a^{n-1}(B''z_x + C''z_{x+1} \ldots + S''z_{x+n-m-2} + Bz_{x+n-m-1}) + a^{n-2}(B'''z_x + C'''z_{x+1} \ldots + R'''z_{x+n-m-3} + Cz_{x+n-m-2}) \ldots$$

$+a^{n-p+1}\left(B^{(p)}z_x+C^{(p)}z_{x+1}\right)+a^{n-p}B^{(p+1)}z_x=0$, dove $n-p=m$. Quindi

$$\left(a^nB'+a^{n-1}B''+a^{n-2}B'''\ldots+a^{n-p}B^{(p+1)}\right)z_x+\left(a^nC'+a^{n-1}C''\ldots+a^{n-p+1}C^{(p)}\right)z_{x+1}$$

$$+\left(a^nD'+a^{n-1}D''\ldots+a^{n-p+2}D^{(p-1)}\right)z_{x+2}\ldots+\left(a^nT'+a^{n-1}B\right)z_{x+n-m-1}$$

$+a^nz_{x+n-m}=0$ cioè . . .

$$z_{x+n-m}+\frac{aT'+B}{a}z_{x+n-m-1}\ldots+\frac{a^{n-m-2}D'+a^{n-m-3}D''\ldots+D^{(n-m-1)}}{a^{n-m-2}}z_{x+2}$$

$$+\frac{a^{n-m-1}C'+a^{n-m-2}C''\ldots+C^{(n-m)}}{a^{n-m-1}}z_{x+1}+\frac{a^{n-m}B'+a^{n-m-1}B'''\ldots+B^{(n-m+1)}}{a^{n-m}}z_x$$

$=0$, equazione la di cui ausiliare essendo . . . .

$$a^{n-m}+\frac{aT'+B}{a}\alpha^{n-m-1}\ldots+\frac{a^{n-m-2}D'+a^{n-m-3}D'''\ldots+D^{(n-m-1)}}{a^{n-m-2}}\alpha^2$$

$$+\frac{a^{n-m-1}C'+a^{n-m-2}C''\ldots+C^{(n-m)}}{a^{n-m-1}}\alpha+\frac{a^{n-m}B'+a^{n-m-1}B''\ldots+B^{(n-m+1)}}{a^{n-m}}=0$$

ha le radici della forma $\frac{\beta}{a}$, $\frac{\beta 1}{a}$, $\frac{\beta 2}{a}$, ec.

N.° 6.° Ora si osservi 1.° che $\Sigma Cb^x=Cb^x+C_1$, $\Sigma^2Cb^x[=\Sigma(Cb^x+C_1)]=Cb^x+C_1x+C_2$; $\Sigma^3Cb^x[=\Sigma(Cb^x+C_1x+C_2)]=Cb^x+C_1x^2+C_2x+C_3$ ed in generale . . . $\Sigma^mCb^x=Cb^x+C_1x^{m-1}+C_2x^{m-2}\ldots\ldots+C_{(m)}$.

Si osservi 2.° che gl' integrali Σ^mCb^x, Σ^mC1b1^x, Σ^mC2b2^x ec. danno dei risultati analoghi e si vedrà che qualunque sia il numero de' termini componenti l' integrale (X) della ridotta, per aver l' integrale completo della proposta non si ha da far altro che prender la somma de' termini Cb^x, $C1b1^x$, $C2b2^x$, ec. ed una sola volta i termini C_1x^{m-1}, $C_2x^{m-2}\ldots C_{(m)}$ e moltiplicar tutto per a^x. Dunque il risultato finale debb' essere

(E)

$$(E) \ldots C\beta^x + C_1\beta_1^x + C_2\beta_2^x \ldots + C(n-m-1)\overline{B(n-m-1)}^x + C_1 a^x x^{m-1} + C_2 a^x x^{m-2} \ldots + C_{(m)} a^x$$

dove β, β_1, β_2 ec. sono le radici dell' equazione ausiliare spettante alla ridotta, moltiplicate per a.

La formola (E) da noi trovata, equivale precisamente alla formola (B) proposta dal D' Alembert, ed è per conseguenza l'integrale completo dell'equazione (D), nell'ipotesi che la di lei equazione ausiliare comprenda m radici eguali.

Per mostrare l' identità della formola (E) *colla formola* (B) *di D' Alembert proveremo che le radici* β, β_1, β_2, ec. *moltiplicate per* a, *sono le radici diseguali dell' equazione ausiliare della proposta.*

Infatti dall' espressione di $\Sigma^m z_{x+n}$ *si deduce, che essendo* $a^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2}$ ec. $= 0$ *l' equazione ausiliare della proposta, quella della ridotta sarà, nel caso di due radici eguali ad* a,

$$b^{n-2} + \frac{2a+B}{a} b^{n-3} + \frac{3a^2+2aB+C}{a^2} b^{n-4} \ldots \text{ec.} = 0$$

nel caso di tre radici eguali ad a,

$$b^{n-3} + \frac{3a+B}{a} b^{n-4} + \frac{6a^2+3aB+C}{a^2} b^{n-5} \ldots = 0$$

nel caso di quattro radici eguali ad a,

$$b^{n-4} + \frac{4a+B}{a} b^{n-5} + \frac{10a^2+4aB+C}{a^2} b^{n-6} \ldots = 0$$

ec. ec.

E dall' osservazione de' coefficienti si scuopre tosto, che le radici di questa equazione moltiplicate per a, *sono precisamente le radici diseguali dell' equazione ausiliare della proposta.*

Ognuno è adesso in grado di confrontare il nostro metodo con quello di D' Alembert.

N.° 7.° Data un' equazione differenziale o a differenze fi-

finite, che sia di primo grado ed a coefficienti costanti, qualunque sia d' altronde il di lei ordine, data per esempio l' equazione (D), per averne l' integrale convien formare prima di tutto l' equazione ausiliare $a^n + Ba^{n-1} + Ca^{n-2} \ldots + U = 0$, convien quindi trovarne le radici a, $a1$, $a2$ ec. e sostituirle nella formola (A). Queste operazioni sono indispensabili, qualunque sia il metodo che si adopera, per completar l' integrale nel caso delle radici eguali, perchè non si può supporre di aver l' integrale di un' equazione, indipendentemente dalle operazioni che son necessarie per integrarla. Quì dunque comincia il metodo di D' Alembert e quello ch' io propongo.

ARTICOLO II.

Sull' integrale dell' equazioni di prim' ordine fra tre variabili, a differenze parziali e differenziali parziali, e dell' equazione di second' ordine.

$$a'_{x,y}\, z_{x+1,y} + b'_{x,y}\, z_{x,y} = \frac{dz_{x+1,y}}{dy} + p'_{x,y}$$

1.° La formola generale dell' equazioni di cui si tratta, se queste sieno affette da coefficienti variabili, è $a_{x,y}\, z_{x+1,y} + b_{x,y}\, z_{x,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy} + p_{x,y} \ldots (m)$, dove $a_{x,y}$, $b_{x,y}$, $p_{x,y}$ sono funzioni date di x,y. Noi ci proponiamo sulle prime l' equazione $a_{x,y}\, z_{x+1,y} + b_{x,y}\, z_{x,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy} \ldots (n)$. Suppongasi $z_{x,y} = \mu_{x,y}\, \nu_{x,y}$, e la trasformata $a_{x,y}\, \mu_{x+1,y}\, \nu_{x+1,y} + b_{x,y}\, \mu_{x,y}\, \nu_{x,y} = \mu_{x,y} \frac{d\nu_{x,y}}{dy} + \nu_{x,y} \frac{d\mu_{x,y}}{dy}$ si divida nelle due

a

$$a_{x,y}\mu_{x+1,y}\,\nu_{x+1,y} = \mu_{x,y}\frac{d\nu_{x,y}}{dy}\ldots(1)\,;\ b_{x,y}\mu_{x,y} = \frac{d\mu_{x,y}}{dy}\ldots(2).$$

Dalla seconda si deduce $\mu_{x,y} = e^{\int b_{x,y}dy+\varphi(x)}$; quindi la prima diviene $a\,e^{\int b_{x+1,y}dy+\varphi(x+1)}\,\nu_{x+1,y} = e^{\int b_{x,y}dy+\varphi(x)}\frac{d\nu_{x,y}}{dy}$

e facendo $a_{x,y}\,e^{\int(b_{x+1,y}-b_{x,y})dy+\varphi(x+1)-\varphi(x)} = a_{x,y}\left[e^{\int\Delta_x b_{x,y}dy+\Delta\varphi(x)}\right]$

$= a\,1_{x,y}$, dove Δ_x indica la differenza per rapporto ad x, tutto si riduce ad integrare $a1_{x,y}\,\nu_{x+1,y} = \frac{d\nu_{x,y}}{dy}\ldots(n1)$, che è l'equazione in cui si cangia la formola (m), quando $b_{x,y} = 0$ e $p_{x,y} = 0$.

Si ponga $x-1$ per x onde avere $a1_{x-1,y}\,\nu_{x,y} = \frac{d\nu_{x-1,y}}{dy}$ e si dedurrà $\nu_{x,y} = \frac{d\nu_{x-1,y}}{a1_{x-1,y}\,dy}$. Si ponga di nuovo $x-1$ per x, e differenziando si avrà $\frac{d\nu_{x-1,y}}{dy} = \frac{d}{dy}\left\{\frac{d\nu_{x-2,y}}{a1_{x-2,y}\,dy}\right\}$ (*):

ma si è trovato $\frac{d\nu_{x-1,y}}{dy} = a1_{x-1,y}\,\nu_{x,y}$, dunque $\nu_{x,y} = \frac{1}{a1_{x-1,y}\,\frac{d}{dy}}$

(*) Scriviamo $\frac{d}{dy}\cdot\varphi$ in vece di $\frac{d\varphi}{dy}$.

$\frac{d}{dy}\left\{\frac{d_{x-2,y}}{a1_{x-2,y}\,dy}\right\}$; ora $\frac{d\nu_{x-2,y}}{dy} = \frac{d}{dy}\left\{\frac{d\nu_{x-3,y}}{a1_{x-3,y}\,dy}\right\}$: dunque $\nu_{x,y} = \frac{1}{a1_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a1_{x-2,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\nu_{x-3,y}}{a1_{x-3,y}\,dy}\right\}\right\}$. In generale si avrà . . . . . .

$$\nu_{x,y} = \frac{1}{a1_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a1_{x-2,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a1_{x-3,y}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left\{\frac{1}{a1_{1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a1\nu_{0,y}}\frac{d}{dy}\nu_{0,y}\right\}\right\}\cdots\right\}\right\}\right\}\cdots\cdots \quad (\theta)$$

dove $\nu_{0,y} = \Psi y$. È questo l' integrale completo dell' equazione $(n1)$. Dunque si dee avere $z_{x,y} = e^{\int b_{x,y}dy + \varphi(x)}$ (θ) cioè . . .

$$z_{x,y} = e^{\int b_{x,y}dy+\varphi(x)}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}\,e^{\int \Delta_x b_{x-1,y}dy+\Delta\varphi(x-1)}}\frac{d}{dy}\right.$$

$$\left.\left\{\frac{1}{a_{x-2,y}\,e^{\int \Delta_x b_{x-2,y}dy+\Delta\varphi(x-2)}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{0,y}\,e^{\int \Delta_x b_{0,y}dy}}\frac{d}{dy}\Psi y\right\}\right\}\cdots\right\}\right\}.$$

Ma tirando fuori successivamente i fattori $\frac{1}{e^{\Delta\varphi(x-1)}}$; $\frac{1}{e^{\Delta\varphi(x-2)}}$, ec. si trova $e^{\varphi(x)}\frac{1}{e^{\Delta\varphi(x-1)}} = e^{\varphi(x)}\cdot\frac{1}{e^{\varphi(x)-\varphi(x-1)}}$

$= e^{\varphi(x-1)}$; $e^{\varphi(x-1)}\cdot\frac{1}{e^{\Delta\varphi(x-2)}} = e^{\varphi(x-1)}\cdot\frac{1}{e^{\varphi(x-1)-\varphi(x-2)}}$

$= e$

$e^{\varphi(x-1)} \cdot \frac{1}{e^{\varphi(x-1)-\varphi(x-2)}} = e^{\varphi(x-2)}$; ec. ec. Dunque

$\frac{e^{\varphi(x)}}{e^{\Delta\varphi(x-1)} \cdot e^{\Delta\varphi(x-2)} \cdot e^{\Delta\varphi(x-3)} \ldots e^{\circ}} = e^{\varphi(1)} = C$: inoltre si ha $e^{\int \Delta_x b_{0,y} dy} = e^{\circ} = 1$; dunque l' integrale completo dell' equazione (n) è finalmente . . . . . .

$$z_{x,y} = e^{\int b_{x,y} dy} \left\{ \frac{1}{a_{x-1} e^{\int \Delta_x b_{x-1,y} dy}} \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{a_{x-2} e^{\int \Delta_x b_{x-2,y}}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \frac{d}{dy} \left\{ \ldots \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{a_{0,y}} \frac{d\Psi_y}{dy} \right\} \ldots \right\} \right\} \right\} \ldots (\theta 1).$$

L' integrale completo dell'equazioni a differenze parziali e differenziali parziali di prim' ordine fra due variabili indipendenti, esige dunque una sola funzione arbitraria, e questa composta della sola variabile indipendente, rapporto a cui si ha nella proposta il differenziale parziale.

2.° Non v' è dubbio, come ha rilevato anche il Ch. Prof. Venturoli in una sua compitissima lettera a me diretta, *che la formola* $(\theta 1)$, *essendo l' integrale dell' equazione* (n), *dedotto con giusto e legittimo calcolo, comprenda e rappresenti gli integrali de' varj casi particolari compresi in detta equazione:* non ostante non sarà fuori di proposito il mostrare, con qual facilità in tutti i casi particolari, si deducano dalla formola $(\theta 1)$ i respettivi integrali.

Sia $a_{x,y} = a_x$. Si avrà $z_{x,y} = \frac{e^{\int b_{x,y} dy}}{[a_{x-1}]^x} \left\{ \frac{1}{e^{\int \Delta_x b_{x-1,y} dy}} \times \right.$

$$\left. \frac{d}{dy} \left\{ \frac{1}{e^{\int \Delta_x b_{x-1,y} dy}} \frac{d}{dy} \left\{ \ldots \left\{ \frac{1}{e^{\int \Delta_x b_{0,y} dy}} \frac{d}{dy} \frac{d\Psi_y}{} \right\} \ldots \right\} \right\} \right\}.$$

Sia $a_{x,y}=a_x$ e $b_{x,y}=b_y$. Risulterà $z_{x,y}=\frac{e^{\int b_y dy}}{[a_{x-1}]^x}\frac{d^x\Psi y}{dy^x}=$ $e^{\int b_y dy-\Sigma\log.a_x}.\frac{d^x\Psi y}{dy^x}$. Restando $a_{x,y}=a_x$ suppongasi $b_{x,y}=b_x$.

Siccome l' equazione ($n1$) si riduce ad . . . . $a_x e^{y\Delta b_x} v_{x+1,y}$ $=\frac{dv_{x,y}}{dy}$ . . . ($n2$), si dedurrà $v_{x,y}=\frac{dv_{x-1,y}}{a_{x-1}e^{y\Delta b_{x-1}}.dy}$; quindi $\frac{dv_{x-1,y}}{dy}=\frac{d}{dy}\left\{\frac{dv_{x-2,y}}{a_{x-2}e^{y\Delta b_{x-2}}.dy}\right\}$ e però $v_{x,y}=\frac{1}{a_{x-1}e^{y\Delta b_{x-1}}}\times$

$\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-2}e^{y\Delta b_{x-2}}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{dv_{x-3,y}}{a_{x-3}e^{y\Delta b_{x-3}}.dy}\right\}\right\}$. In generale...

$$v_{x,y}=\frac{1}{a_{x-1}e^{y\Delta b_{x-1}}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-2}e^{y\Delta b_{x-2}}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-3}e^{y\Delta b_{x-3}}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{d}{dy}\left\{\ldots\ldots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{a_0 e^{y\Delta b_0}.dy}\right\}\ldots\ldots\right\}\right\}\right\}=$$

$$e^{-\Sigma\log.a_x-y\Delta b_{x-1}}.\frac{d}{dy}\left\{e^{-y\Delta b_{x-2}}.\frac{d}{dy}\left\{e^{-y\Delta b_{x-3}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{d}{dy}\left\{\ldots\ldots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi_y}{dy}\right\}\ldots\ldots\right\}\right\}\right\}\ldots\ldots\ldots(k).$$

Dunque $z_{x,y}=e^{b_y y}$ (k) è l' integrale completo dell'equazione $a_x z_{x+1,y}+b_x z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}$. Se $a_{x,y}=a_y$ qualunque sia $b_{x,y}$, è

mol-

molto facile dedurre dalla formola ($\theta 1$) l'espressione degli integrali corrispondenti. Sia dunque $a_{x,y} = a$ ed il rispettivo integrale completo sarà . . . $z_{x,y} = \frac{e^{\int b_{x,y} dy}}{a^x} \left\{ \frac{1}{e^{\int \Delta_x b_{x-1,y} dy}} \times \right.$

$$\left. \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{e^{\int \Delta_x b_{x-1,y} dy}} \frac{d}{dy} \left[\ldots \frac{d}{dy} \left[\frac{d\Psi_y}{dy} \right] \ldots \right] \right] \right\}$$

dove per $b_{x,y}$ potrà mettersi successivamente b_x, b_y, b, o. Per esempio quando $b_{x,y} = o$, si ha $z_{x,y} = a^{-x \frac{d^x \Psi_y}{dy^x}}$. Nell' ipotesi di $a_{x,y} = 1$ e di $b_{x,y} = o$, si avrebbe $z_{x,y} = \frac{d^x \Psi}{dy^x}$, integrale completo dell' equazione . . . $z_{x+1,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$. Distribuendo per ordine i casi precedentemente considerati, ed aggiungendo quei che mancano, si vedrà che possono tutti riunirsi sotto quattro classi nella maniera seguente. Posto 1.° Che il coefficiente del primo termine sia $a_{x,y}$, quello del secondo può avere una di queste espressioni, $b_{x,y}$, b_x, b_y, b, o. 2.° Ciascuna ipotesi relativa al coefficiente del secondo termine può coesistere coll' ipotesi che sia $a_{x,y} = a_x$. 3.° Può coesistere coll' ipotesi che sia $a_{x,y} = a_y$. 4.° Può coesistere coll' ipotesi che sia $a_{x,y} = a$. Ecco una tavola in cui trovasi alla destra d' ogni equazione il respettivo integrale.

T A V O L A

$$a_{x,y}z_{x+1,y}+b_{x,y}z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{\int b_{x,y}dy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}e^{\int\Delta_x b_{x-1,y}dy}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}e^{\int\Delta_x b_{x-2,y}dy}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a_{x,y}z_{x+1,y}+b_xz_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{b_xy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}e^{y\Delta b_{x-1}}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}e^{y\Delta b_{x-2}}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{a_{0,y}dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a_{x,y}z_{x+1,y}+b_yz_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{\int b_ydy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{a_{0,y}dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a_{x,y}z_{x+1,y}+bz_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{by}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{a_{0,y}dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a_{x,y}z_{x+1,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=\frac{1}{a_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{a_{x-1,y}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{a_{0,y}dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}$$

$$a_xz_{x+1,y}+b_{x,y}z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{\int b_{x,y}dy-\Sigma\log.a_x}\left\{\frac{1}{e^{\int\Delta_x b_{x-1,y}dy}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{e^{\int\Delta_x b_{x-2,y}dy}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a_xz_{x+1,y}+b_xz_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{yb_x-\Sigma\log.a_x}\left\{\frac{1}{e^{y\Delta b_{x-1}}}\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{e^{y\Delta b_{x-2}}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a_xz_{x+1,y}+b_yz_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{\int b_ydy-\Sigma\log.a_x.\frac{d^n\Psi y}{dy^n}}$$

$$a_xz_{x+1,y}+bz_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{by-\Sigma\log.a_x.\frac{d^n\Psi y}{dy^n}}$$

$$a_xz_{x+1,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=e^{-\Sigma\log.a_x}\frac{d^n\Psi y}{dy^n}$$

$$a\,z_{x+1,y}+b_{x,y}\,z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=\frac{e^{\int b_{x,y}dy}}{a^x}\left\{\frac{1}{e^{\int\Delta_x b_{x-1,y}dy}}\cdot\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{e^{\int\Delta b_{x-2,y}dy}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{dy}\right\}\cdots\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}$$

$$a\,z_{x+1,y}+b_x\,z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=\frac{e^{yb_x}}{a^x}\left\{\frac{1}{e^{y\Delta b_{x-1}}}\cdot\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{e^{y\Delta b_{x-2}}}\cdot\frac{d}{dy}\left\{\frac{1}{e^{y\Delta b_{x-3}}}\frac{d}{dy}\left\{\cdots\cdots\cdots\frac{d}{dy}\left\{\frac{d\Psi y}{dy}\left\{\cdots\cdots\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$a\,z_{x+1,y}+b_y\,z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=\frac{e^{\int b_ydy}}{a^x}\frac{d^n\Psi y}{dy^n}$$

$$a\,z_{x+1,y}+b\,z_{x,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=\frac{e^{by}}{a^x}.\frac{d^n\Psi y}{dy^n}$$

$$a\,z_{x+1,y}=\frac{dz_{x,y}}{dy}\Big\}\; z_{x,y}=a^{-x}\frac{d^n\Psi y}{dy^n}$$

Gli integrali che si riferiscono all' ipotesi di $a_{x,y} = a_y$ sono manifestamente compresi e rappresentati dalla formola (θ 1).

3.° Eccoci ad integrare la formola generalissima (m) cioè

$$a_{x,y}\, z_{x+1,y} + b_{x,y}\, z_{x,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy} + p_{x,y} \cdots (m)$$

Pongasi $z_{x,y} = \mu_{x,y}\, v_{x,y}$ come al n.° 1.°, e la trasformata

$$a_{x,y}\, \mu_{x+1,y}\, v_{x+1,y} + b_{x,y}\, \mu_{x,y}\, v_{x,y} = v_{x,y} \frac{d\mu_{x,y}}{dy} + \mu_{x,y} \frac{dv_{x,y}}{dy} + p_{x,y},$$

si divida nelle due

$$b_{x,y}\, v_{x,y} = \frac{d\, v_{x,y}}{dy} \cdots (1); \quad a_{x,y}\, \mu_{x+1,y}\, v_{x+1,y} = v_{x,y} \frac{d\mu_{x,y}}{dy} + p_{x,y} \cdots (2)$$

Limitandoci a soddisfare alla prima, giacchè abbiamo veduto (n.° 1.°) che è superfluo integrarla completamente, troviamo $v_{x,y} = e^{\int b_{x,y} dy}$; quindi l'equazione (2) diviene . . .

$$a_{x,y}\, e^{\int b_{x+1,y} dy}\, \mu_{x+1,y} = e^{\int b_{x,y} dy} \frac{d\mu_{x,y}}{dy} + p_{x,y}.$$ Facciasi . . .

$$a_{x,y}\, e^{\int (b_{x+1,y} - b_{x,y})\, dy} \left(= a_{x,y}\, e^{\int \Delta_x b_{x,y} dy} \right) = a1_{x,y}.$$

$$p_{x,y} - e^{\int b_{x,y} dy} = p1_{x,y}$$ e l' equazione da integrarsi sarà

$$a1_{x,y}\, \mu_{x+1,y} = \frac{d\mu_{x,y}}{dy} + p1_{x,y} \cdots (m1).$$ Noi dedurremo successivamente . . . . . .

$$\mu_{x+1,y} = \left(\frac{d\mu_{x,y}}{dy} + p1_{x,y} \right) : a1_{x,y}; \quad \mu_{x,y} = \left(\frac{d\mu_{x-1,y}}{dy} + p1_{x-1,y} \right) : a1_{x-1,y};$$

$$\mu_{x-1,y} = \left(\frac{d\mu_{x-2,y}}{dy} + p1_{x-2,y} \right) : a1_{x-2,y}; \quad \frac{d\mu_{x-1,y}}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\frac{d\mu_{x-2,y}}{dy} + p_{1x-2,y}}{a1_{x-2,y}} \right)$$

$\mu_{x,y}$

$$\mu_{x,y} = \left\{ \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\frac{d\mu_{x-2,y}}{dy} + p1_{x-2,y}}{a1_{x-2,y}} \right\} + p1_{x-1,y} \right\} : a1_{x-1,y};$$

ma $\frac{d\mu_{x-2,y}}{dy} = \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\frac{d\mu_{x-3,y}}{dy} + p1_{x-3,y}}{a1_{x-3,y}} \right\}$; dunque

$$\mu_{x,y} = \left\{ \frac{d}{dy} \left\{ \frac{\frac{d}{dy} \left\{ \frac{\frac{d\mu_{x-3,y}}{dy} + p1_{x-3,y}}{a1_{x-3,y}} \right\} + p1_{x-2,y}}{a1_{x-2,y}} \right\} + p1_{x-1,y} \right\} : a1_{x-1,y}.$$

In generale $\mu_{x,y} = \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} \left(\ldots \frac{d}{dy} \left(\frac{d\Psi_y}{dy} + p1_{0,y} \right) : a1_{0,y} + p_{1,y} \right) : a1_{1,y} \ldots \right) : a1_{x-3} + p1_{x-2,y} \right) : a1_{x-2,y} + p1_{x-1,y} \right) : a1_{x-1,y} \ldots (k1).$

Dunque $z_{x,y} = e^{\int b_{x,y}\, dy (k1)(k2)}$ è l'integrale completo dell' equazione (m).

N.° 4.° Per ot tener l'integrale in tutti i casi particolari basta far successivamente le ipotesi che seguono. Supposto 1.° che il coefficiente del primo termine sia $a_{x,y}$, si ponga successivamente $b_{x,y}$, b_x, b_y, b, o per $b_{x,y}$; e $p_{x,y}$, p_x, p_y, p, o, per $p_{x,y}$. Ripetansi le stesse ipotesi nella supposizione che abbiasi a_x od a_y, od a, o zero per $a_{x,y}$. Per non diffonderci soverchiamente ci occuperemo soltanto di alcuni casi.

Sia $a_{x,y} = a_x$, $b_{x,y} = b_x$ e però $a1_{x,y} = a1_x$. Si avrà

$$\mu_{x,y} = e^{-\Sigma \log. a1_x} \frac{d^x \Psi_y}{dy^x} + e^{-\Sigma \log. a1_x} \frac{d^{x-1} p1_{0,y}}{dy^{x-1}} +$$

e^{-}

$$e^{-\Sigma\log.a1_{x-1}} \cdot \frac{d^{x-2}p1_{1,y}}{dy^{x-2}} + e^{-\Sigma\log.a1_{x-2}} \cdot \frac{d^{x-3}p1_{2,y}}{dy^{x-3}} \cdots\cdots$$

$$+ e^{-\Sigma\log.a1_{x-(x-2)}} \cdot \frac{dp1_{x-2,y}}{dy} + e^{-\Sigma\log.a1_{x-x-1}} \frac{d^{0}p1_{x-1,y}}{dy^{0}} \cdots (p),$$

dove, $p1_{x,y} = \frac{p_{x,y}}{e^{b_x y}}$. Dunque $z_{x,y}\left(=\mu_{x,y}\psi_{x,y}\right) = e^{b_x y}\mu_{x,y} = e^{b_x y}(p)$

è l' integrale completo dell' equazione . . . . . .

$$a_x\, z_{x+1,y} + b_x\, z_{x,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy} + p_{x,y}.$$

Se $a_{x,y} = 1$, e $b_{x,y} = b_y$, risulta $a1_{x,y} = 1$ e si ha

$$\mu_{x,y} = \frac{d^x\,\Psi_y}{dy^x} + \frac{d^{x-1}p1_{0,y}}{dy^{x-1}} \cdots + p1_{x-1,y};$$ quindi . . .

$$z_{x,y} = e^{\int b_y dy}\left[\frac{d^x\Psi_y}{dy^x} + \frac{d^{x-1}\,p1_{0,y}}{dy^{x-1}} \cdots + p1_{x-1,y}\right]$$ è l' integrale completo dell' equazione . . . . . .

$$z_{x+1,y} + b_y z_{x,y} = \frac{d\,z_{x,y}}{dy} + p_{x,y}.$$

Se $a_{x,y} = 1$, e $b_{x,y} = 0$, si trova $z_{x,y} = \frac{d^x\Psi_y}{dy^x} + \frac{d^{x-1}p_{0,y}}{dy^{x-1}} \cdots + p_{x-1,y}$,

integrale completo dell' equazione $z_{x+1,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy} + p_{x,y}$.

Questo integrale può mettersi anche sotto la forma seguente:

$z_{x,y} = \frac{d^x\Psi_y}{dy^x} + \sum \frac{d^u p_{x-u-1}}{dy^u}$, purchè si prenda l' integrale finito fra i limiti $u = 0$ ed $u = x - 1$.

Il

Il risultato precedente combina con quello che il Ch. Professor Paoli ha trovato con un ingegnoso artifizio (Soc. Ital. t. cit.)

N.° 5.° Vediamo come s' integrino le formole (n), (m), nell' ipotesi che sia $\Delta x = -1$.

Siccome la formola (n) conduce all' equazione ausiliare $a1_{x,y}\, v_{x-1,y} = \frac{dv_{x,y}}{dy}$, dove $a1_{x,y} = a_{x,y}\, e^{\int (b_{x-1,y} - b_{x,y})\, dy}$, equazione che corrisponde all' equazione $(n2)$, si può dedurre successivamente

$$\left.\begin{array}{l}
v_{x,y} = \int a1_{x,y}\; v_{x-1,y}\, dy + \varphi(x) \\
v_{x-1,y} = \int a1_{x-1,y}\, v_{x-2,y}\, dy + \varphi(x-1) \\
v_{x-2,y} = \int a1_{x-2,y}\, v_{x-3,y}\, dy + \varphi(x-2) \\
v_{x-3,y} = \int a1_{x-3,y}\, v_{x-4,y}\, dy + \varphi(x-3) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_{1,y} = \int a1_{1,y}\, v_{0,y}\, dy + \varphi(1)
\end{array}\right\} \cdots\cdots (A)$$

Dunque $v_{x,y} = \int a1_{x,y} \int a1_{x-1,y} \int a1_{x-2,} \cdots \int a1_{1,y}\, \Psi_y\, dy^x +$
$+ \varphi(1) \int a1_{x,y} \int a1_{x-1,y} \cdots \int a1_{2,y}\, dy^{x-1} + \varphi(2) \int a1_{x,y} \int a1_{x-1,y}$
$\cdots \int a1_{3,y}\, dy^{x-2} \cdots + \varphi(x-2) \int a1_{x,y} \int a1_{x-1,y}\, dy^2 +$
$\varphi(x-1) \int a1_{x,y} dy + \varphi(x) \cdots (q)$, e però $z_{x,y} = e^{\int b_{x,y} dy}$ (q').

Se $a1_{x,y} = a1_x$ si ha . . . . . .

$v_{x,y}$

$v_{x,y} = [a1_x]^x \int^x \Psi_y dy^x + \varphi(1) [a1_x]^{-1} \int^{x-1} dy^{x-1}$
$+ \varphi(2) [a1_x]^{x-1} \int^{-2} dy^{x-2} \ldots\ldots + \varphi(x-3) [a1_x]^3 \int^3 dy^3$
$+ \varphi(x-2) [a1_x]^2 \int^2 dy^2 + \varphi(x-1) [a1_x]^1 \int dy + \varphi(x)$; ovvero, mutando l' ordine de' termini ed effettuando le integrazioni . . . $v_{x,y} = [a1_x]^x \int^x \Psi_y dy^x + \varphi(x) + \varphi(x-1)[a1_x]^1 y +$
$\varphi(x-2) [a1_x]^2 \frac{y^2}{2} + \varphi(x-3) [a1_x]^3 \frac{y^3}{2.3} \ldots\ldots\ldots$
$+ \varphi(1) [a1_x]^{x-1} \frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} \ldots$ (r) formola che quando $a1_x = 1$ diviene . . . $v_{x,y} = \int^x \Psi_y dy^x + \varphi(x) + \varphi(x-1) y$
$+ \varphi(x-2) \frac{y^2}{2} + \varphi(x-3) \frac{y^3}{2.3} \ldots + \varphi(1) \frac{y^{x-1}}{2.3\ldots(x-1)} \ldots$ (s) integrale completo dell' equazione $v_{x-1,y} = d_{x,y}$ e però si ha $z_{x,y} = e^{\int b_y dy}$ (s) per l' integrale completo dell' equazione $z_{x-1,y} + b_y z_{x,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$.

N.° 6.° Negli integrali precedenti abbiamo soppressa la funzione arbitraria d' x che ha parte nell' espressione di $\mu_{x,y}$, perchè due funzioni arbitrarie sono sufficienti per completare l' integrale cercato. La ragione poi per cui l' integrale dell' equazione (n) nell' ipotesi di $\Delta x = -1$ esige due funzioni arbitrarie, deriva dalla natura stessa dell' equazione proposta. Infatti ella non è altro che un caso particolare della formola, che rappresenta generalmente l' equazioni a differenze parziali e differenziali parziali di second' ordine, cioè della formola

$a_{x,y}$

$a_{x,y} z_{x+2,y} + b_{x,y} z_{x+1,y} + c_{x,y} z_{x,y} = \frac{dz_{x+1,y}}{dy} + d_{x,y} \frac{dz_{x,y}}{dy}$ $+ e_{x,y} \frac{d^2 z_{x,y}}{dy^2}$, dove basta fare $a_{x,y} = 0$, $d_{x,y} = 0$ ed $e_{x,y}$ $= 0$ per avere . . . . . $b_{x,y} z_{x+1,y} + c_{x,y} z_{x,y} = \frac{dz_{x+1,y}}{dy}$ cioè $c'_{x,y} z_{x-1,y} + b'_{x,y} z_{x,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$ che è la formola (n) quando $\Delta x = -1$.

Ecco una difficoltà fattaci da un valoroso Geometra il quale persuaso che l'equazioni $z_{x\pm1,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$ sieno dello stess'ordine, vorrebbe che anche l'integrale completo di $z_{x+1,y}$ $= \frac{dz_{x,y}}{dy}$ esigesse due funzioni arbitrarie. Si riduca, dic'egli, l'equazione $z_{x+1,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$ alla forma $z_{x,y} = \frac{dz_{x-1,y}}{dy}$: integrando si avrà $z_{x-1,y} = \int z_{x,y}\, dy + \varphi(x)$, e prendendo l'integrale finito s'introdurrà una funzione arbitraria d'y; dunque ec. Oltre di questo egli aggiunge: io veggo che $z_{x,y} = \frac{d^x \Psi y}{dy^x} + \varphi(x) + y\varphi(x+1) + \frac{y^2}{2}\varphi(x+2) \ldots + \frac{y^x}{2.3\ldots x}\varphi(1)$ soddisfa esattamente all'equazione proposta.

Rispondiamo 1.° che il calcolo da noi fatto per ottener l'integrale della formola (n), prova a giudizio nostro il contrario (n.° 1.°) 2.° che $\int z_{x,y}\, dy = z1_{x,y}$ essendo una funzione diversa da $z_{x,y}$, l'equazione $z_{x-1,y} = \int z_{x,y}\, dy + \varphi(x)$ non è un'equazione a differenze finite, e non sembra lasciar luogo alla conclusione sopra esposta. 3.° Volendo dedurre l'espressione di $z_{x,y}$ dall'equazione $z_{x-1,y} = \int z_{x,y}\, dy + \varphi(x)$, si pon-

ponga successivamente $x = 1 = 2 = 3$ ec. e siccome risulta $z_{0,y} = \int z_{1,y}\, dy + \varphi(1)$; $z_{1,y} = \int z_{2,y}\, dy + \varphi(2)$; $z_{2,y} = \int z_{3,y}\, dy + \varphi(3)$, ec. si avrà . . . . .
$z_{0,y} = \int^2 z_{2,y}\, dy^2 + \varphi(2) \int dy + \varphi(1)$; $z_{0,y} = \int^3 z_{3,y}\, dy^3 + \varphi(3) \int^2 dy^2 + \varphi(2) \int dy + \varphi(1)$, ec. ec., ed in generale $z_{0,y}$ ovvero $\Psi y = \int^x z_{x,y}\, d y^x + \varphi(x) \int^{x-1} d y^{x-1} + \varphi(x-1) \int^{x-2} dy^{x-2} \ldots\ldots + \varphi(2) \int dy + \varphi(1)$. Si differenzi x volte per rapporto ad y, e dividendo per dy^x si dedurrà $z_{x,y} = \frac{d^x \Psi y}{dy^x}$ come al n.° 2.°.

Rispondiamo 4.° che dal discorso del Professore prelodato, ne seguirebbe che il numero delle funzioni arbitrarie competenti all' integrale completo della proposta, esser dovesse $= n$, giacchè può ella trasformarsi egualmente in $z_{x+n,y} = \frac{d^n z_{x,y}}{dy^n}$, il di cui integrale completo esige n differenti funzioni arbitrarie d'x. Per vedere come $z_{x+1,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$ si trasformi in $z_{x+n,y} = \frac{d^n z_{x,y}}{dy^n}$, basta osservare che da $z_{x+1,y} = \frac{dz_{x,y}}{dy}$ si deduce successivamente $\frac{dz_{x+n-1}}{dy} = z_{x+n,y}$, $\frac{dz_{x+n-1,y}}{dy} = \frac{d^2 z_{x+n-2,y}}{dy^2} \ldots \frac{d^{n-2} z_{x+2,y}}{dy^{n-2}} = \frac{d^{n-1} z_{x+1,y}}{dy^{n-1}}$, $\frac{d^{n-1} z_{x+1,y}}{dy^{n-1}} = \frac{d^n z_{x,y}}{dy^n}$.

N.° 8.° Trattandosi della formola (m), l' equazione ausiliare nell' ipotesi di $\Delta x = -1$ è $a 1_{x,y}\, \mu_{x-1,y} = \frac{d\mu_{x,y}}{dy} + p 1_{x,y} \ldots (m3)$, e corrisponde all' equazione ($m2$) del n.° 4.°. In questo caso si ha

$\mu_{x,y}$

$$\left.\begin{array}{l}
\mu_{x,y} = \int\left(a1_{x,y}\mu_{x-1,y} - p1_{x,y}\right) dy + \varphi(x) \\
\mu_{x-1,y} = \int\left(a1_{x-1,y}\mu_{x-2,y} - p1_{x-1,y}\right) dy + \varphi(x-1) \\
\mu_{x-2,y} = \int\left(a1_{x-2,y}\mu_{x-3,y} - p1_{x-2,y}\right) dy + \varphi(x-2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu_{1,y} = \int\left(a1_{1,y}\mu_{0,y} - p1_{1,y}\right) dy + \varphi(1)
\end{array}\right\}$$

e si deduce successivamente

$$\mu_{x,y} = \int\left(a1_{x,y}\left(\int a1_{x-1,y}\mu_{x-2,y} - p1_{x-1,y}\right) dy + \varphi(x-1)\right)$$
$$- p1_{x,y}\Big) dy + \varphi(x)$$

$$\mu_{x,y} = \int\left(a1_{x,y}\left(\int a1_{x-1,y}\int a1_{x-2,y}\mu_{x-3,y} - p1_{x-2,y}\right) dy + \varphi(x-2)\right)$$
$$- p1_{x-1,y}\Big) dy + \varphi(x-1)\Big) - p1_{x,y}\Big) dy + \varphi(x)$$

$$\mu_{x,y} = \int\Big(a1_{x,y}\Big(\int a1_{x-1,y}\Big(\int a1_{x-2,y}\Big(\int a1_{x-3,y}\,\mu_{x-4,y} - p1_{x-3,y}\Big) dy$$
$$+\varphi(x-3)\Big) - p1_{x-2,y}\Big) dy + \varphi(x-2)\Big) - p1_{x-1,y}\Big) dy + \varphi(x-1)\Big) - p1_{x,y}\Big) dy + \varphi(x)$$

ed in generale . . . . . (σ) . . . . . .

$$\mu_{x,y} = \int\Big(a1_{x,y}\Big(\int a1_{x-1,y}\Big(\int a1_{x-2,y}\cdots\Big(\int a1_{1,y}\mu_{0,y} - p1_{1,y}\Big) dy + \varphi(1)\Big)\ldots -$$
$$p1_{x-2,y}\Big) dy + \varphi(x-2)\Big) - p1_{x-1,y}\Big) dy + \varphi(x-1)\Big) - p1_{x,y}\Big) dy + \varphi(x)$$

Quindi $z_{x,y} = e^{\int b_{x,y}\,dy}$ (σ).

Se $a1_{x,y} = a1_x$, lo che succede quando $b_{x,y} = b_y$, ed $a_{x,y} = a_x$, la formola (σ) si cangia in

$$\mu_{x,y} = \left[a1_x\right]^x \int^x \Psi_y dy^x + \varphi(x) + \varphi(x-1)\left[a1_x\right]^1 \int dy - \left[a1_x\right]^1 \int p1_{x,y} dy$$
$$+ \varphi(x-2)\left[a1_x\right]^2 \int^2 dy^2 - \left[a1_x\right]^2 \int^2 p1_{x-1,y} dy^2 \ldots\ldots$$
$$+ \varphi(1)\left[a1_x\right]^{x-1} \int^{x-1} dy^{x-1} - \left[a1_x\right]^{x-1} \int^{x-1} p1_{2,y} dy^{x-2} - \left[a1_x\right]^{x-1} \int^x p1_{1,y} dy$$
$$\ldots (\sigma 1)$$

e si ha $z_{x,y} = e^{\int b_y dy}$ $(\sigma 1)$. In questo caso il prelodato Professore con porre $z_{x,y} = \mu_{x,y} \int^x dy^x \nu_{x,y}$ ha trovato questa elegante formola . . . . . .

$$z_{x,y} = e^{\Sigma \log a_{x+1} + \int b_y dy} \left\{ \int^x dy^x \Psi_y - \int^x dy^x \sum e^{-\Sigma \log a_{x+2}} \right.$$
$$\frac{d^x e^{-\int b_y dy}}{dy^x} \frac{p1_{x+1,y}}{} + \varphi(x) + \varphi(x-1)y + \varphi(x-2)\frac{y^2}{2}$$
$$\left. + \varphi(1) \cdot \frac{y^{x-1}}{2 \cdot 3 \ldots (x-1)} \right\}.$$

Noi osserveremo che la formola $(\sigma 1)$ in pratica è sempre limitata, perchè in ogni caso particolare, nella serie a cui si riferisce l' equazione proposta, convien fare x eguale ad un numero determinato, d' altronde le operazioni ch' essa esige sono molto semplici . Se nella formola $(\sigma 1)$ si fa $p1_{x,y} = 0$ si ritrova, come dee succedere, la formola (r) del numero 5.°

La sostituzione di $\mu_{x,y} \nu_{x,y}$ per $z_{x,y}$ serve dunque assai vantaggiosamente per ottenere l' integrale completo di tutte l' equazioni a differenze parziali e differenziali parziali di prim' ordine fra due variabili indipendenti, ed inoltre serve per integrare l' equazioni di second' ordine, comprese nella formola $a'_{x,y}\, z_{x+1,y} + b'_{x,y}\, z_{x,y} = \frac{dz_{x+1,y}}{dy} + p'_{x,y}$.

L' u-

L' uniformità del metodo da noi tenuto ci è sembrata degna di qualche considerazione, ed abbiamo creduto che i risultati (θ1), (k2), malgrado la singolarità della loro forma, non dovessero rigettarsi, specialmente perchè si prestano con tanta semplicità alla derivazione di tutti gli integrali sino ad ora noti, e di cui l'Analisi è debitrice all' insigne geometra Pietro Paoli. Pronti a ricrederci se c' inganniamo, sottoponiamo i piccioli nostri tentativi al profondo giudizio di chi può decidere in queste sfuggevoli ed astruse materie.

ARTICOLO III.

Sull' integrazione dell' equazioni differenziali esatte, i di cui coefficienti sieno funzioni delle sole variabili comprese nell' equazioni stesse.

N.° 10. Per supplire ad alcuni difetti della mia Memoria *Sur l'intégration des équations*, stampata tre anni sono in Parigi da *Duprat*, difetti che provennero dall' omissione tipografica di alcune postille essenziali, presento in ristretto il metodo che allora intesi di pubblicare sull' articolo quì sopra divisato. Questo articolo abbraccia un estesissimo ramo di equazioni differenziali, e merita tutta la considerazione de' geometri.

N.° 1.° Sia $Qdx^2+Rdxdy+Sdy^2+Td^2y=0$ l'equazione generale di 2.° ordine, nella supposizione da noi fatta. Paragonando il differenziale del suo integrale ipotetico $Adx+Bdy=cdx$, si deduce $Q=\frac{dA}{dx}$, $R=\frac{dA}{dy}+\frac{dT}{dx}$, $S=\frac{dT}{dy}$, $T=B$. Dalle due prime $A=\int\left[Qdx+\left(R-\frac{dT}{dx}\right)dy\right]$; ma $\frac{dR}{dx}=\frac{dQ}{dy}+\frac{d^2T}{dx^2}$ in virtù delle condizioni d' integrabilità; dunque $\int\left[Qdx+\left(R-\frac{dT}{dx}\right)dy\right]$ è un' espressione esatta, e

dx

$dx\int\left[Qdx+\left(R-\frac{dT}{dx}\right)dy\right]+Tdy=cdx$ è l'integrale primo completo della proposta.

N.° 2.° Per l'equazioni a tre variabili, la di cui formola è ...
$Qdx^2+Rdxdy+Sdxdz+Tdy^2+Vdydz+Zd^2y+Ydz^2+P(1)d^2z=0$
si ha $B=Z$, $C=P(1)$, $Q=\frac{dA}{dx}$, $R=\frac{dA}{dy}+\frac{dZ}{dx}$, $S=\frac{dA}{dz}+\frac{dP(1)}{dx}$, $T=\frac{dZ}{dy}$, $V=\frac{dZ}{dz}+\frac{dP(1)}{dy}$, $Y=\frac{dP(1)}{dz}$; Dunque $A=\int\left[Qdx+\left(R-\frac{dZ}{dx}\right)dy+\left(S-\frac{dP(1)}{dx}\right)dz\right]$, integrale sempre possibile in termini esatti, perchè in virtù delle condizioni d'integrabilità, si sa essere $\frac{dQ}{dy}=\frac{dR}{dx}-\frac{d^2Z}{dx^2}$, $\frac{dQ}{dz}=\frac{dS}{dx}-\frac{d^2P(1)}{dx^2}$, e queste equazioni danno $\frac{dR}{dz}-\frac{d^2Z}{dxdz}=\frac{dS}{dy}-\frac{d^2P(1)}{dxdy}$. Dunque l' integrale primo completo della proposta è

$$dx\int\left[Qdx+\left(R-\frac{dZ}{dx}\right)dy+\left(S-\frac{dP(1)}{dx}\right)dz\right]+Ydy-P(1)dz=cdx.$$

N.° 3.° Data l' equazione generale a quattro variabili
$Qdx^2+Rdxdy+Sdxdz+Tdxdu+Vdy^2+Zdydz+Ydydu+P(1)d^2y+Q(1)dz^2+R(1)d^2z+S(1)dzdu+T(1)du^2+V(1)d^2u=0$
si trova collo stesso metodo il suo integrale primo completo sotto la forma . . . . . $dx\int\left[Qdx+\left(R-\frac{dP(1)}{dx}\right)dy+\left(S-\frac{dP(1)}{dx}\right)dz+\left(T-\frac{dV(1)}{dx}\right)du\right]+P(1)dy+R(1)dz+V(1)du=cdx$, dove il coefficiente di dx è sempre una funzione finita.

N.° 4.°

N.° 4.° In generale sia R il coefficiente del rettangolo $dxdy$, R_1 il coefficiente del rettangolo $dxdz$, R_2 il coefficiente del rettangolo $dxdu$ . . . . R_{n-2} il coefficiente del rettangolo $dxd\varphi$, φ essendo la variabile n^{sima}. Sia Z il coefficiente di d^2y, Z_1 il coefficiente di d^2z, Z_2 il coefficiente di d^2u . . . . Z_{n-2} il coefficiente di $d^2\varphi$; e trattandosi di un' equazione di 2.° ordine fra n variabili, si avrà l' integrale primo completo sotto la forma seguente . . . . .

$$dx\int\Big[Qdx+\Big(R-\frac{dZ}{dx}\Big)dy+\Big(R_1-\frac{dZ_1}{dx}\Big)dz+\Big(R_2-\frac{dZ_2}{dx}\Big)du\ldots$$
$$+\Big(R_{n-2}-\frac{dZ_{n-2}}{dx}\Big)d\varphi\Big]+Zdy+Z_1dz+Z_2du\ldots+Z_{n-2}d\varphi=cdx\,.$$

N.° 5.° Passando all' equazioni di 3.° ordine, la formola generale di quelle che sono fra due variabili è $Qdx^3+Rdx^2dy+Sdxd^2y+Tdxdy^2+Vdyd^2y+Zdy^3+Yd^3y=0$. Suppongo che il suo integrale primo completo sia . . . . . .
$Adx^2+Bdxdy+Cdy^2+Dd^2y=cdx^2$, A, B, C, D essendo funzioni d' x, y, ec. costanti, ed ottengo

$$Q=\frac{dA}{dx},\ R=\frac{dA}{dy}+\frac{dB}{dx},\ S=B+\frac{dD}{dx},\ T=\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dx},$$
$$V=2C+\frac{dD}{dy},\ Z=\frac{dC}{dy},\ Y=D.\ \text{Dunque } D=Y,\ C=$$
$$\frac{1}{2}\Big(V-\frac{dY}{dy}\Big),\ B=S-\frac{dY}{dx},\ A=\int\Big[Qdx+\Big(R-d\Big(S-\frac{\frac{dY}{dy}}{dx}\Big)\Big)dy\Big],$$

espressione finita perchè le condizioni d' integrabilità danno ...
$\frac{dR}{dx}=\frac{dQ}{dy}+d^2\Big(S-\frac{\frac{dY}{dx}}{dx^2}\Big)$; perciò l' integrale primo completo risulta . . . $dx^2\int\Big[Qdx+\Big[R-d\Big(S-\frac{\frac{dY}{dx}}{dx}\Big)\Big]dy+$

[S—

$$\left[S-\frac{dY}{dx}\right]dxdy+\frac{1}{2}\left(V-\frac{dY}{dy}\right)dy^2+Yd^2y=cdx^2.$$

N.° 6.° Proposta l' equazione generale a tre variabili ... $Qdx^3+Rdx^2dy+Sdx^2dz+Tdxd^2y+Vdxd^2z+Zdxdy^2+Ydxdz^2+P(1)dxdydz+Q(1)dyd^2y+R(1)dyd^2z+S(1)dy^3+T(1)dydz^2+V(1)dy^2dz+Z(1)d^2ydz+Y(1)d^3y+P(2)dz^3+Q(2)dzd^2z+R(2)d^3z=0$, si rappresenti il suo integrale primo completo per $Adx^2+Bdxdy+Cdxdz+Ddy^2+Edydz+Fd^2y+Gdz^2+Hd^2z=cdx^2$. Formati i respettivi rapporti, ne risultano per li coefficienti A, B ec. l' espressioni seguenti

$$A=\int\left[Qdx+\left[R-d\left(T-\frac{dY(1)}{dx}\right)\right]dy+\left[S-d\left(V+\frac{dR(2)}{dx}\right)\right]dz\right]$$

$$B=T-\frac{dY(1)}{dx},\ C=V-\frac{dR(2)}{dx},\ D=\frac{1}{2}\left(Q(1)-\frac{dY(1)}{dy}\right),$$

$$E=Z(1)-\frac{dY(1)}{dz},\ F=Y(1),\ G=\frac{1}{2}\left(Q(2)-\frac{dR(2)}{dz}\right),$$

$H=R(2)$. Siccome l' espressione di A è generalmente finita, perchè dalle condizioni d' integrabilità risulta

$$\frac{dR}{dx}=\frac{dQ}{dy}+d^2\left(T-\frac{dY(1)}{dx}\right),\ \frac{dS}{dx}=\frac{dQ}{dz}+d^2\left(V-\frac{dR(2)}{dx}\right)$$

ne segue che l' integrale primo completo della proposta sia ...

$$dx^2\int\left[Qdx+\left[R-d\left(T-\frac{dY(1)}{dx}\right)\right]dy+\left[S-d\left(V-\frac{dR(2)}{dx}\right)\right]dz\right]+$$

$$\left[T-\frac{dY(1)}{dx}\right]dxdy+\left[V-\frac{dR(2)}{dx}\right]dxdz+\frac{1}{2}\left[Q(1)-\frac{dY(1)}{dy}\right]dy^2$$

$$+\left[Z(1)-\frac{dY(1)}{dz}\right]dydz+Y(1)d^2y+\frac{1}{2}\left[Q(2)-\frac{dR(2)}{dz}\right]dz^2+$$

$$R(2)d^2z=cdx^2.$$

N.° 7.° Sia la formola generale dell' equazioni di 3.° ordine

dine fra quattro variabili $Qdx^3 + Rdx^2dy + Sdx^2dz + Tdx^2du + Vdxd^2y + Zdxd^2z + Ydxd^2u + P(1)dxdy^2 + Q(1)dxdz^2 + R(1)dxdu^2 + S(1)dxdydz + T(1)dxdydu + V(1)dxdudz + Z(1)dyd^2y + Y(1)dyd^2z + P(2)dyd^2u + Q(2)dy^3 + R(2)dydz^2 + S(2)dydu^2 + T(2)dydudz + V(2)dy^2dz + Z(2)dy^2du + Y(2)d^2ydz + P(3)d^2ydu + Q(3)d^3y + R(3)dzd^2z + S(3)dzd^2u + T(3)d^2zdu + V(3)dz^2du + Z(3)dzdu^2 + Y(3)dz^3 + P(4)d^3z + Q(4)dud^2u + R(4)du^3 + S(4)d^3u = 0$ e posto che il suo integrale primo completo sia $Adx^2 + Bdxdy + Cdxdz + Ddxdu + Edy^2 + Fdydz + Gdydu + Hd^2y + Idz^2 + Ld^2z + Mdudz + Ndu^2 + Od^2u = cdx^2$. Differenziando e paragonando i termini simili si deduce

$$B = V - \frac{dQ(3)}{dx},\ C = Z - \frac{dP(4)}{dx},\ D = Y - \frac{dS(4)}{dx},\ Q = \frac{dA}{dx},\ R = \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx}$$

$$S = \frac{dA}{dx} + \frac{dC}{dx},\ T = \frac{dD}{du} + \frac{dD}{dx}$$ e però . . . . . .

$$A = \int\left[Qdx + \left[R - \frac{d\left(V - \frac{dQ(3)}{dx}\right)}{dx}\right]dy + \left[S - \frac{d\left(Z - \frac{dP(4)}{dx}\right)}{dx}\right]dz\right.$$

$$\left.\left[T - \frac{d\left(Y - \frac{dS(4)}{dx}\right)}{dx}\right]du\right]$$ espressione esatta, perchè dalle condizioni d' integrabilità risulta

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dQ}{dy} + \frac{d^2\left(V - \frac{dQ(3)}{dx}\right)}{dx^2},\ \frac{dS}{dx} = \frac{dQ}{dz} + \frac{d^2\left(Z - \frac{dP(4)}{dx}\right)}{dx^2},$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dQ}{du} + \frac{d^2\left(Y - \frac{dS(4)}{dx}\right)}{dx^2}.$$

In seguito si trova $E = \frac{1}{2}\left(Z(1) - \frac{dQ(3)}{dy}\right)$, $F = Y(1) - \frac{dP(4)}{dy}$, $G = P(2) - \frac{dS(4)}{dy}$, $H = Q(3)$, $I = \frac{1}{2}\left(R(3)d - \frac{P(4)}{dz}\right)$, $L = P(4)$,

$M = S(3) - \frac{dS(4)}{dz}, N = \frac{1}{2}\left(Q(4) - \frac{dS(4)}{du}\right), O = S(4)$. Dunque l'integrale richiesto è $dx^2 \int \Big[Qdx + \Big[R - d\frac{\left(V - \frac{dQ(3)}{dx}\right)}{dx} \Big] dy +$

$$\Big[S - d\frac{\left(Z - \frac{dP(4)}{dx}\right)}{dx} \Big] dz + \Big[T - d\frac{\left(Y - \frac{dS(4)}{dx}\right)}{dx} \Big] du \Big] +$$

$$\Big[V - \frac{dQ(3)}{dx} \Big] dxdy + \Big[Z - \frac{dP(4)}{dx} \Big] dxdz + \Big[Y - \frac{dS(4)}{dx} \Big] dxdu +$$

$$\frac{1}{2}\Big[Z(1) - \frac{dQ(3)}{dy} \Big] dy^2 + \Big[Y1 - \frac{dP(4)}{du} \Big] dydz + \Big[P(2) - \frac{dS(4)}{dy} \Big] dydu$$

$$+ Q(3) d^2y + \frac{1}{2}\Big[R(3) - \frac{dP(4)}{dz} \Big] dz^2 + P(4) d^2z + \Big[S(3) - \frac{dS(4)}{dz} \Big] dudz$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[Q(4) - \frac{dS(4)}{du} \Big] du^2 + S(4) d^2u = cdx^2 .$$

N.° 3.° Per avere una formola generale ch' estendasi all' equazioni di 3.° ordine fra n variabili, sia R il coefficiente di dx^2dy, R_1 il coefficiente di dx^2dz, R_2 il coefficiente di dx^2du ... R_{n-2} il coefficiente di $dx^2d\phi$.

Sia V il coefficiente di dxd^2y, V_1 il coefficiente di dxd^2z, V_2 il coefficiente di dxd^2u . . . . . V_{n-2} il coefficiente di $dxd\varphi$:

Sia Q(3) il coefficiente di d^3y, $Q(3)_1$ il coefficiente di d^3z, $Q(3)_2$ il coefficiente di d^3u . . . . $Q(3)_{n-2}$ il coefficiente di $d^3\varphi$.

Sia Y(1) il coefficiente di dyd^2z, $Y(1)_1$ il coefficiente di dyd^2u . . . $Y(1)_{n-3}$ il coefficiente di $dyd^2\varphi$.

Sia S(3) il coefficiente di dzd^2y, $S(3)_1$ il coefficiente di dzd^2u . . . . $S(3)_{n-3}$ il coefficiente di $dzd^2\varphi$.

. . . . . .

Sia finalmente Z(1) il coefficiente di dyd^2y, $Z(1)_1$ il coef-

fi-

ficiente di dzd^2z, $Z(1)_2$ il coefficiente di dud^2u . . . $Z(1)_{n-2}$ il coefficiente di $d\varphi d^2\varphi$.

Si osservi che la parte negativa del coefficiente di $d\varphi$ nell' espressione di A, è il coefficiente di $dxd\varphi$ nell' integrale primo, φ essendo una variabile n^{sima} qualunque, e si vedrà che la formola generale cercata è . . . . .

$$dx^2 \int \Big[Qdx + \Big[R - \frac{d\left(V - \frac{dQ(3)}{dx}\right)}{dx} \Big] dy + \Big[R_1 - \frac{d\left(V - \frac{dQ(3)_1}{dx}\right)}{dx} \Big] dz +$$

$$\Big[R_2 - \frac{d\left(V_2 - \frac{dQ(3)_2}{dx}\right)}{dx} \Big] du \ldots + \Big[R_{n-2} - \frac{d\left(V_{n-2} - \frac{dQ(3)_{n-2}}{dx}\right)}{dx} \Big] d\varphi \Big] +$$

$$\Big[V - \frac{dQ(3)}{dx} \Big] dxdy + \Big[V_1 - \frac{dQ(3)_1}{dx} \Big] dxdz + \Big[V_2 - \frac{dQ(3)_2}{dx} \Big] dxdu \ldots$$

$$+ \Big[V_{n-2} - \frac{dQ(3)_{n-2}}{dx} \Big] dxd\varphi + \Big[Y(1) - \frac{dQ(3)_1}{dy} \Big] dydz +$$

$$\Big[Y(1)_1 - \frac{dQ(3)_2}{dy} \Big] dydu \ldots + \Big[Y(1)_{n-3} - \frac{dQ(3)}{dy} \Big] dyd\varphi +$$

$$\Big[S(3) - \frac{dQ(3)_2}{dx} \Big] dzdu + \Big[S(3)_1 - \frac{dQ(3)_3}{dx} \Big] dzdt \ldots + $$

$$\Big[S(3)_{n-4} - \frac{dQ(3)_{n-2}}{dx} \Big] dzdy + \frac{1}{2} \Big[Z(1) - \frac{dQ(3)}{dy} \Big] dy^2 +$$

$$\frac{1}{2} \Big[Z(1)_1 - \frac{dQ(3)_1}{dz} \Big] dz^2 + \frac{1}{2} \Big[Z(1)_2 - \frac{dQ(3)_2}{du} \Big] du^2 \ldots +$$

$$\frac{1}{2} \Big[Z(1)_{n-2} - \frac{dQ(3)_{n-2}}{d\varphi} \Big] d\varphi^2 + Q(3)d^2y + Q(3)_1 d^2z + Q(3)_2 d^2u$$

$$\ldots + Q(3)_{n-2} d^2\varphi = cdx^2.$$

In pratica basta fare le sostituzioni respettive nelle serie seguenti R, R_1, R_2 . . . R_{n-2}; V, V_1, V_2 . . . V_{n-2}; $Z(1)$, $Z(1)_1$, $Z(1)_2$ . . . $Z(1)_{n-2}$; $Y(1)$, $Y(1)_1$, $Y(1)_2$ . . $Y(1)_{n-3}$; $Q(3)$, $Q(3)_1$, $Q(3)_2$ . . . . $Q(3)_{n-2}$; $S(3)$, $S(3)_1$, $S(3)_2$ . . . $S(3)_{n-2}$; ec. Il metodo è generale, e puossi estendere all' equazioni di qualunque ordine.

SUL-