PRINCIPJ DI STATICA

PER I TETTI, PER I PONTI E PER LE VOLTE

Di Paolo Delanges

Ricevuti il dì 24 Agosto 1802.

INTRODUZIONE.

Quantunque possa sembrare il presente soggetto di non difficile accesso, esso però si annovera tra i più agitati da'Geometri nel secolo decorso. Vi fu chi non ebbe riguardo a dire „ n'est il pas surprenant que tandis que nous calculons les forces nécessaires à rétenir dans leurs orbites des masses immenses qui circulent dans les Cieux bien au dessus de nos têtes, n'ayons pas encore calculé éxactément ce qu'il faut opposer pour que la charpente de nos maisons ne renverse les supports, et proscrir entiérement le tatônement dans la construction de nos combles ordinaires? „ Con non minore filosofica franchezza si disse inoltre „ È cosa a dir vero umiliante, che un problema semplicissimo quale è quello di ritrovare la spinta d'una stanga o verga appoggiata ad un muro sia stato e sia tutta via pietra d' inciampo per parecchi Geometri di prima sfera ec. „ Due principj furono posti in uso, cioè quello della composizione e della risoluzione delle forze, e l' altro delle velocità virtuali ossia delle azioni, nè era da dubitarsi che dall' applicazione di essi sortir dovessero risultati discordi fra loro, ed in conseguenza dubbj ed incerti: eppure così nacque di fatto, come ora è necessario a vedersi.

AR-

ARTICOLO I.

Soluzioni col principio della composizione e della risoluzione delle forze.

Prendasi in considerazione il problema elementare in siffatta indagine, e sia AB (Fig. I.) una verga pesante inclinata tra il piano orizzontale BD ed il verticale AD; si cerca lo sforzo che esercita alla sua estremità B, e quindi lo sforzo orizzontale con cui, facendo astrazione d'ogni resistenza di attrito, tende a strisciare e distendersi sul piano orizzontale BD per la nota legge de' gravi.

I.ª

Dal centro di gravità C della verga AB si conduca la verticale CF, che s'incontri in F coll'orizzontale AF menata dal punto A, e congiunta la BF si compia il parallelogrammo FGCH. Quindi prodotta BF in I, sicchè BI sia uguale ad FG, si conduca la perpendicolare IE al piano orizzontale DB. Rappresentando CF il peso P della verga, sarà FG lo sforzo di essa alla sua estremità B, ed essendo BI uguale ad FG, sarà BE lo sforzo orizzontale con cui cerca di strisciare lungo il piano orizzontale DB (Couplet. *Hist. de l'Acad. de France an.* 1731, e L. Salimbeni. *Società Italiana tom.* 4.).

II.ª

Risoluto il peso o la forza totale CF (Fig. II.) della verga AB nello sforzo CG perpendicolare, e nel GF parallelo ad essa, dividasi CG ne' due A*f* B*g* in ragione reciproca delle distanze AC CB. Condotta *fr* perpendicolare all' orizzontale AC ,, s' impiegherà *fr* a premere verticalmente il piano AD, e sarà A*r* la forza orizzontale con cui è premuto

in

in A. „ Fatta poi B*b* in direzione della verga eguale a GF, si compia il parallelogrammo B I, e si conduca la perpendicolare IE „ e sarà la forza IE premente verticalmente il piano orizzontale B D, e B E la forza orizzontale intesa a spingere l'ostacolo al punto B. „ (Lorgna. *Saggi di Statica e Meccanica pag.* 1.).

III.ª

Lo stesso Autore quando due sono le verghe uguali in opposizione, come dimostra la Fig. III., divisa la forza CG nelle due, come s' è detto, *Af*, Bg, ed essendo *Ah* quella che appartiene al punto A per parte della verga A L, tirata l' orizzontale *lhfe*, e compiuto il parallelogrammo *lhr*A, pone B*b* eguale alla somma delle F G A*l*; e così mediante il parallelogrammo Bgl*b* determina la pressione verticale IE nel punto B, e lo sforzo orizzontale BE che esercita la verga AB nel punto medesimo.

IV.ª

„ Si risolva la forza verticale CF (Fig. IV.) nella orizzontale CG, e nella CH. La forza CH si impiega a premere il punto B in direzione della verga, e viene rappresentata da BQ = C H. Si abbassi la verticale PQ, nasce dalla forza BQ la spinta orizzontale BP. La forza poi orizzontale CG trasferisce in A la spinta orizzontale AS $= \frac{BC}{AB} . CG$, ed in B, BO $= \frac{AC}{AB} . CG$. Laonde la spinta orizzontale in B, sarà BP—BO. „ (P. Gregorio Fontana. *Società Italiana tom. III. Ricerche analitiche sopra diversi soggetti*.) Altra soluzione propose lo stesso Autore, mediante la somma d' una serie, ma che, come venne dimostrato dal Salimbeni (*luogo citato*) porta un risultamento eguale a quello della precedente. Non conviene inoltre nelle due seguenti soluzioni V. e VI., sebbene, come egli osservò, conformi a quanto ritrovano Gio.

Bernoulli (*opere tom.* 4. *p.* 189.), e Kaestener nella sua Memoria *Tigni ad parietem inclinati reperire pressiones* (*Atti dell' Acc. di Erfurt. an.* 1778.)

V.°

La forza CF della verga (Fig. V.) si risolva nella FG perpendicolare e nella CG in direzione di essa. Si divida la FG nelle due A*f*, Bg in reciproca ragione delle distanze AC BC, e fatta B*b* in direzione della verga uguale a CG, sia BI la forza equivalente alle due Bg B*b*. Menata la perpendicolare IE, sarà IE la pressione che esercita la verga nel punto B sul piano orizzontale BD, e BE la spinta orizzontale ec.

VI.°

Divisa la forza verticale CF della verga (Fig. VI.) nelle due A*f* Bg pure verticali ed applicate alle sue estremità A B in reciproca ragione delle distanze AC CB, si cali la perpendicolare *f*G, e sarà la forza A*f* risoluta nella G*f* o AH normale alla verga nel punto A, e nella AG in direzione di essa. Si faccia BI uguale alla AG, e si abbassi la perpendicolare IE; sarà BE la spinta orizzontale al punto B ec.

VII.°

Risoluta la forza CF della verga AB (Fig. VII.) nella perpendicolare CG e nella GF parallela ad essa, si porti GF o CH in BI sulla direzione della verga medesima, e calata la perpendicolare IE, sarà BE la spinta orizzontale al punto B. (Krafft. *tom.* 4. *novi comm. Accad. Scient. Imperialis Petropolitanae. ad annum* 1752. 1753.)

La soluzione del P. Frisi (*Instituzioni di Meccanica ec. Milano* 1787. *pag.* 64.) è conforme intieramente alla riferita di Krafft che senza ragione ha creduto di dichiararla difettiva.

AR-

ARTICOLO II.

Soluzione col principio delle azioni.

L' Abate Mascheroni (*nuove ricerche sull' equilibrio delle volte. Bergamo. anno* 1785.) usando di siffatto principio diede la seguente soluzione.

„ Se la verga AB (Fig. VIII.) che in G porta il peso G, possa coll' estremità A scorrere la linea perpendicolare AF, mentre coll' estremità B scorre l' orizzontale BF, e BFP sia una corda, che scorrendo sulla carrucola F porta un peso P, trovare la ragione delle due forze.

Il peso G si porti in g intanto che A si porta in a, B si porta in b, e P in p, sarà $Bb = Pp$. Alle linee ab Bb si tirino le parallele aV BV, si tirino le perpendicolari Gn gm, e l' orizzontale gy. Essendo $ba = BA$, anche BV sarà uguale a BA, e tirando la AV l' angolo BAV sarà retto. Saranno dunque simili i due triangoli AaV, BFA, e sarà pP $(= bB = aV) : aA = AF : BF$; $aA = \frac{pP.BF}{AF}$. Ora $Gn = \frac{AF.BG}{BA}$, e $gm = \frac{aF.bg}{ba} = \frac{(AF - aA)BG}{BA}$. Sarà dunque $Gy = Gn - gm = \frac{aA.BG}{BA} = \frac{pP.BF.BG}{AF.BA}$, e la ragione de' pesi $P.pP : G.Gy = P : G.\frac{BF.BG}{AF.BA} = P : G.\frac{Bn}{AF}$. Dunque la spinta orizzontale in $B = G.\frac{Bn}{AF}$. „

ARTICOLO III.

Risultamenti delle riferite soluzioni.

Chiamando la lunghezza della verga (Fig. VII.) $AB = a$,

la parte AC $= b$, l' angolo d' inclinazione col piano orizzontale ABD $= \phi$, il raggio $= 1$, ed il peso totale di essa rappresentato dalla CF $= p$: si ricava che le soluzioni I. III. e IV. derivate dal principio della composizione e della risoluzione delle forze (Art. I.), non meno che la soluzione fondata sul principio delle azioni (Art. II.), danno espressa la spinta orizzontale all' estremità B della verga dalla formula (A).

$$p\left(\frac{(a-b)\cos.\phi}{a\,.\,\text{sen}.\phi}\right) \ldots\ldots (A)$$

Delle altre poi dedotte dal principio della composizione e della risoluzione delle forze, si rileva che le soluzioni II. V. e VI. (Art. I.) somministrano nella formula (B) il valore della spinta ricercata.

$$\frac{p}{a}(a-b)(\text{sen}.\phi\ \cos.\phi) \ldots\ldots (B)$$

E finalmente la VII. colla formula (C)

$$p\,.\,\text{sen}.\phi\ \cos.\phi \ldots\ldots (C)$$

I due valori somministrati dalle formule (A) (B) dipendono, e dall'angolo ABD d' inclinazione che ha la verga AB sul piano orizzontale, e dalla situazione insieme del suo centro di gravità C. Il valore dato dalla terza (C) non dipende che dall' angolo predetto. Mentre poi la formula (A) dimostra che la spinta orizzontale della verga alla sua estremità B è nulla nello stato verticale, e va crescendo fino a che diventa infinita ridotta orizzontale; le altre due formule (B) (C) fanno scorgere che nulla è tale spinta in ambedue le posizioni della verga verticale ed orizzontale.

Le soluzioni pertanto finora proposte del problema in questione riduconsi a tre, e siccome la ricercata spinta orizzontale viene diversamente determinata da esse, egli è evidente che o una soltanto deve esser vera, oppure che tutte e tre conducono in errore. Comunque sia passerò presentemente ad esporre una nuova soluzione che con esattezza sod-

dis-

disfa alle due condizioni insieme, proprie ed essenziali del problema, la prima cioè che nulla è la spinta della verga tanto se insiste perpendicolarmente, o se giace distesa sul piano orizzontale, e la seconda che il suo valore dipender deve e dall' angolo d' inclinazione che fa col piano orizzontale, e dalla situazione del suo centro di gravità.

ARTICOLO IV.

Soluzione del problema fondamentale pel calcolo della spinta de' tetti, de' ponti, e delle volte.

LEMMA

Se da qualsivoglia punto E (Fig. IX.) della curva ellittica AEDB s' inclini la EF uguale al semiasse conjugato CD, che concorra col trasverso BA, prolungato se abbisogna, nel punto F; dico che prolungata FE finchè concorra col semiconjugato CD, anche esso prolungato se occorre, in G; sarà l' intercetta EG uguale al semitrasverso AC.

Imperocchè si conducano dal punto E le EH EK ordinate agli assi AB CD.

Pertanto essendo come il quadrato dell' ordinata KE alla differenza de' quadrati delle DC CK, così il quadrato della AC al quadrato della CD, e le DC CK sono uguali alle FE EH, l' una all' altra; sarà dunque come il quadrato della KE alla differenza de' quadrati delle FE EH, cioè il quadrato della FH, così il quadrato della AC al quadrato della CD; ma come il quadrato della KE al quadrato della FH, così il quadrato della GE al quadrato della EF: dunque il quadrato della GE al quadrato della EF, così il quadrato della AC al quadrato della CD; il quadrato poi della EF è uguale al quadrato della CD; quindi il quadrato della GE è uguale al quadrato della AC, e perciò la GE è uguale alla AC; il che ec.

Si-

Similmente, se da qualsivoglia punto E (Fig. X.) della circonferenza del semicerchio AEDB s'inclini la EF uguale al raggio CA che concorra col diametro BA, prolungato se abbisogna, nel punto F, e si prolunghi la FE finchè concorra col raggio CD perpendicolare al diametro BA, anche esso prolungato se occorre in G, si dimostrerà l' intercetta EG uguale al raggio CA.

PROBLEMA I.

Sia AB (Fig. XI.) una verga pesante da tenersi sotto un dato angolo d' inclinazione ABD in equilibrio poggiando coll'estremità B sul piano orizzontale BD, e coll'altra estremità A contro il piano verticale AD: si cerca lo sforzo orizzontale ossia la resistenza orizzontale da applicarsi in B, lo sforzo che esercita in A contro il piano verticale AD, e come sia sostenuto il peso totale della verga.

Il centro di gravità della verga AB cada nel punto C, per la legge de' gravi, astraendo dall' attrito, se fosse lasciata libera a se stessa, striscierebbe radendo coll' estremità A il piano verticale AD, e coll'altra estremità B il piano orizzontale BD accostando sempre più ad esso il centro di gravità C. Quindi, per il Lemma, descritta l' Ellissi FCE di cui il semiasse trasverso FD sia uguale al segamento CA della verga; ed il semiconjugato DE all' altro BC, nel predetto strisciamento percorrerà il centro di gravità C l' arco ellittico CF. Posto ciò condotta al punto C la tangente CH all' ellissi, egli è manifesto che volendosi rattenere la verga AB nell' angolo ABD in equilibrio, il suo peso raccolto in C agirà come se poggiato fosse sul piano inclinato CH.

Ora tirata la normale CN, e rappresentando la perpendicolare CG il peso della verga, compiuto il parallelogrammo C*h*G*n*, pel noto principio della composizione e della risoluzione delle forze, al peso CG della verga equivaleranno le due forze C*h* C*n* l' una all' altra perpendicolare. Gli effetti

per-

pertanto di queste due forze dovendo essere reagiti ne' punti B A, e non reagendo i piani BD AD che in direzione ad essi perpendicolare: divisa dunque la forza C*h* nella verticale *hm* e nell' orizzontale C*m*, ovvero fatta BL parallela ed uguale a C*h*, sicchè la perpendicolare LM sia uguale alla *hm*, e l' orizzontale BM alla C*m*, sarà C*m* o BM la spinta orizzontale che esercita la verga in B, ed *hm* o LM la parte del suo peso che per conto della forza C*h* agisce perpendicolarmente sul punto B: così divisa la forza C*n* nell' orizzontale C*r* e nella verticale *nr*, la prima sarà reagita nel punto A dal piano verticale AD, e la seconda dal piano orizzontale BD nel punto B: dunque BM o C*m* sarà lo sforzo orizzontale o la forza da impiegarsi in B per ritenere in equilibrio la verga AB, C*r* uguale alla stessa C*m* sarà lo sforzo che esercita in A contro il piano verticale AD, e le forze verticali LM o *hm* ed *nr*, che insieme prese uguagliano il peso CG della verga, saranno sostenute in B dal piano orizzontale BD. Il che ec.

PROBLEMA II.

Determinare il valore analitico della spinta orizzontale esercitata da una data verga AB (Fig. XI.), dato l' angolo d' inclinazione ABD che fa col piano orizzontale BD, e poggiando coll' altra sua estremità A al piano verticale AD.

Sia il segamento AC della verga, o il semiasse trasverso DF $= m$, l' altro BC, o il semiconjugato DE $= n$, l' angolo d' inclinazione ABD $= \varphi$, il seno tutto $= r$, ed il peso della verga AB $= p$.

E poichè il triangolo C*h*G è simile al triangolo CHG, così è manifesto che indicando CH in vece di CG il peso della verga, gli sforzi C*h*, *h*G saranno rappresentati dalle CG GH. Ciò posto avremo dal triangolo BCG le due analogie

$$r : \text{sen.}\varphi = n : CG$$
$$r : \cos.\varphi = n : BG$$

e pe-

e però $CG = \frac{n \,.\, \text{sen}\,\varphi}{r}$, e $BG = \frac{n \,.\, \cos.\varphi}{r}$. Ma $BC : CA = BG : GD$, cioè $n : m = \frac{n \,.\, \cos.\varphi}{r} : GD$; dunque $GD = \frac{m \,.\, \cos.\varphi}{r}$. Essendo poi nell'Ellissi la sottangente $GH = \frac{DF^2}{DG} - DG$, sarà $GH = \frac{m \,.\, \text{sen.}^2\varphi}{r \,.\, \cos.\varphi}$; e quindi $CH = \frac{\text{sen.}\varphi}{r \,.\, \cos.\varphi} \sqrt{(n^2 . \cos.^2\varphi + m^2 . \text{sen.}^2\varphi)}$. Per il problema antecedente denotando CH, come s' è supposto il peso p della verga AB, si ha che la spinta orizzontale al punto B è $p \,.\, \frac{CG \,.\, HG}{CH \,.\, CH}$: dunque fatte le convenienti sostituzioni, la formula (D) darà il valore de' la ricercata spinta orizzontale BM.

$$p \cdot \left(\frac{mn \,.\, \text{sen.}\varphi \,.\, \cos.\varphi}{m^2 . \text{sen.}^2\varphi + n^2 . \cos.^2\varphi} \right) \ldots . \text{(D)}$$

Il che ec.

Scolio.

Per confrontare il valore somministrato dalla nostra formula (D) con quelli che danno le surriferite formule (A) (B) (C) (Art. III.), si faccia $m + n = a$, $m = b$, e perciò $n = a - b$, e si cangerà la formula (D) nella (E) dotata delle stesse denominazioni colle tre suddette

$$p \left(\frac{(a - b)\, b \,.\, \text{sen.}\varphi \,.\, \cos.\varphi}{b.^2 \text{sen.}^2\varphi + (a - b)^2 . \cos.^2\varphi} \right) \ldots . \text{(E)}$$

cui manifestamente somministra in generale un valore differente de' tre che danno le accennate formule per la spinta ricercata, eccettuato il caso che il centro di gravità fosse nella metà della lunghezza della verga, poichè allora essendo $b = \frac{a}{2}$, si tramuterà la formula (A) in (A')

$$p \cdot \frac{\cos.\varphi}{2 \,.\, \text{sen.}\varphi} \ldots . \text{(A')}$$

la

la (B) in (B')

$$p \cdot \frac{\text{sen.}\phi \cdot \cos.\phi}{2} \ldots (B')$$

la (C) in (C')

$$p \cdot \text{sen.}\phi \cdot \cos.\phi \ldots (C')$$

e la (E) in (E')

$$p \cdot \text{sen.}\phi \cdot \cos.\phi \ldots (E')$$

Donde apparisce che la (E') che proviene dalla nostra (E) è identica colla (C') che proviene dalla (C). Questa combinazione dipende unicamente dalla singolarità del caso in cui tendendo (Fig. XII.) il centro di gravità C di scorrere non più per un arco ellittico, ma per l' arco circolare CF del quadrante F C E descritto col raggio D E o D F uguale alla metà AC o CB della verga AB (Lemma), ne avviene che il triangolo CHG, da cui, come s'è veduto, dipende la determinazione della spinta orizzontale al punto B, è simile al triangolo BCG o ABD, dirigendosi nel cerchio le normali alla circonferenza, come la CD al punto C, al suo centro D. Difatti suppongasi, per esempio, che l' angolo d' inclinazione A B D sia semiretto, e che il centro di gravità non sia sulla metà, ma sulla terza parte della lunghezza della verga, sicchè sia $b = \frac{1}{3}a$, allora mentre la nostra formula (E) somministra pel valore della spinta orizzontale $\frac{2}{5}p$, la (A) dà $\frac{2}{3}p$, la (B) $\frac{1}{3}p$, e la (C) $\frac{1}{2}p$. È da osservarsi in fine che la nostra formula (D) ovvero (E), a differenza delle altre, esattamente soddisfa alle condizioni essenziali del problema già avvertite (Art. III.).

COROLLARJ.

Presa in considerazione la formula (D) oppure l' equivalente (E), si ricava.

I.° Che sotto un dato angolo d' inclinazione facendo $b=o$, ovvero $a-b=o$, cioè supponendo che il centro di gravità della verga cada o in una o nell' altra sua estremità, risulta nulla la spinta orizzontale: di modo che ha luogo un punto nella verga in cui cadendo il centro di gravità, eserciterà nel dato angolo d' inclinazione la massima spinta.

II.° E che supposta costante la situazione del centro di gravità, diventa nulla la spinta orizzontale della verga nelle posizioni verticale ed orizzontale, cioè supponendo $\cos.\varphi = o$, ovvero $\text{sen}.\varphi = o$: e quindi ne segue che esser vi dee l' angolo d' inclinazione in cui nella data posizione del centro di gravità la verga eserciterà la spinta massima.

PROBLEMA III.

Dato l' angolo d' inclinazione ABD (Fig. XI.), trovare il segamento AC, cioè il punto ove cadendo il centro di gravità C della verga, massima sia la spinta orizzontale all' estremità B.

Si differenzj la formula (E) (Prob. II. Scolio) esprimente il valor generale di tale spinta, posta variabile la quantità b, che dinota il segamento AC da trovarsi, e riguardando come quantità costanti la a lunghezza della verga, ed il seno e coseno dell' angolo d' inclinazione ABD col piano orizzontale. Operando in seguito secondo il calcolo de' massimi e minimi, si perverrà a scoprire il valore ricercato di AC

$$AC = b = \frac{a \,.\, \cos.\varphi}{\text{sen}.\varphi + \cos.\varphi}$$

Il che ec.

COROLLARIO.

Risulta dalla ritrovata formula che crescendo l' angolo d' inclinazione della verga per la spinta massima, il segamento AC diventa minore, cioè il centro di gravità C si ac-

co-

costa verso l' estremità A, e viceversa diminuendosi s' accosta verso l' estremità B. Così, a cagion d' esempio, se l' angolo d' inclinazione è semiretto, cioè sia sen.φ = cos.φ, si ha la massima spinta orizzontale essendo $b = \frac{a}{2}$, cioè cadendo il centro di gravità della verga nella metà della lunghezza; se di 60°, sicchè sen.$\varphi = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ e cos.$\varphi = \frac{a}{2}$, la massima spinta accade essendo il segamento $AC = b = \frac{a}{\sqrt{3}+1}$; e se fosse di 30°, e perciò sen.$\varphi = \frac{a}{2}$, e cos.$\varphi = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, per la massima spinta deve essere $b = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$; e chiaro apparisce che mentre $\frac{a}{\sqrt{3}+1} < \frac{a}{2}$, all' opposto è $\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} > \frac{a}{2}$. Per avere inoltre il valore della massima spinta per esempio nel caso dell' angolo semiretto, nella formula generale (E) (Problema III. Scolio) si faccia sen. φ = cos. φ, sicchè si converta in $p\left(\frac{(a-b)b}{b^2+(a-b)^2}\right)$, e posto in questa $b = \frac{a}{2}$, si trova il valore ricercato $= \frac{1}{2}p$. Nella stessa posto b minore o maggiore di $\frac{a}{2}$, si otterrà sempre un valor minore di $\frac{1}{2}p$.

PROBLEMA IV.

Dato il centro di gravità C (Fig. XI.), ossia il sega-

mento AC nella verga AB, trovare l' angolo d' inclinazione ABD col piano orizzontale in cui massima è la spinta all' estremità B.

Tenute le solite denominazioni, sia $AD = x$, il raggio $= r$, e si avrà dell' angolo ricercato il sen.$\varphi = \frac{rx}{a}$, ed il cos.$\varphi = \frac{r\sqrt{(a^2 - x^2)}}{a}$. Surrogando questi valori nella formula (E) (Prob. II. Scolio), si otterrà la seguente espressione pel valore della spinta orizzontale al punto B

$$\frac{(a-b)\,b\,x\,\sqrt{(a^2-x^2)}}{a^3(a-b)^2 + a x^2 (2b - a)}$$

Differenziando e seguendo le regole del calcolo de'massimi e minimi, si scoprirà il valore del seno dell' angolo ricercato rappresentato dall' altezza AD

$$x = a\sqrt{\left(\frac{(a-b)^3}{(a-b)^3 + b^2(a-b)}\right)}$$

Il che ec.

COROLLARIO.

È facile a dimostrarsi che diminuendosi la quantità b, cioè che quanto più si accosta il centro di gravità C all' estremità A, cresce il valore dell' altezza AD, cioè l' angolo d' inclinazione della verga col piano orizzontale per la massima spinta, e viceversa. Il che è conforme a quanto s' è conchiuso nell' antecedente Corollario (Prob. III.). Cadendo il centro di gravità C nella metà della lunghezza della verga AB, onde sia $b = \frac{a}{2}$, si ha $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, cioè che massima è la spinta orizzontale essendo semiretto l'angolo di inclinazione ABD, vale a dire che la spinta della verga in tale supposizione sarà sempre maggiore di quella che eserciterebbe, se inclinata fosse in angolo maggiore o minore del predet-

detto; il che pure è conforme al conchiuso nel Corollario accennato.

PROBLEMA V.

Siano in un piano verticale le due verghe uguali AB, A*b* ugualmente inclinate sul piano orizzontale B*b* trovare le spinte orizzontali alle estremità B *b* (Fig. XIII.), e le forze che agiscono nel punto della loro unione A.

Supponendosi uguali le verghe AB A*b*, i loro centri di gravità C *c* saranno situati ad uguali distanze dalle rispettive loro estremità. E poichè se fossero in libertà le verghe, discenderebbero strisciando ugualmente colle estremità B *b* sul piano orizzontale, mentre il punto di loro unione A discenderebbe per la verticale AD; così descritta l' Ellissi FCE*cf*, di cui il semiasse trasverso FD sia uguale al segamento AC, ed il semiconjugato DC all' altro BC, nello stesso tempo (Lemma) i loro centri di gravità C *c* percorreranno gli uguali archi ellittici CF, *cf*. Quindi è manifesto che l' una e l' altra verga fa le veci di piano verticale, e perciò che ogn' una di esse agisce come se posta fosse tra un piano orizzontale ed uno verticale. Ritrovati adunque (Prob. I.) gli uguali sforzi orizzontali BM AR che esercita la verga AB alle sue estremità A B in istato di equilibrio, e così gli uguali fra se ed ai primi, *bm*, A*r* esercitati dall' altra ugual verga A*b*, si avranno le spinte orizzontali BM *bm* che esercitano le due verghe insieme combinate sul piano orizzontale, ed ancora gli sforzi uguali e direttamente contrarj AR A*r* con cui vicendevolmente si premono nel punto di loro unione A. Il che ec.

PROBLEMA VI.

Alle due uguali verghe AB EF ugualmente inclinate sul piano orizzontale sia soprapposta la terza orizzontale AE, sicchè insieme rappresentino gli assi di tre travi: si cercano

le

le spinte orizzontali alle estremità B F, ed in conseguenza le forze opposte che le verghe B A E F esercitano contro la verga AE secondo la sua direzione orizzontale (Fig. XIV.).

E poichè, non essendovi ostacoli alle estremità B F, striscierebbero le verghe A B EF sul piano orizzontale, e la verga AE, posto che il suo centro di gravità P sia nella metà della lunghezza, discenderebbe mantenendosi parallela a sè stessa, obbligando le estremità A E delle B A E F a discendere per le verticali A D E H; è manifesto che i centri di gravità delle due verghe inclinate BA EF percorreranno nello stesso tempo archi ellittici (Lemma), ed il centro di gravità P della orizzontale AE discenderà per la verticale PQ. Ora siccome in istato di equilibrio il peso della verga AE è sostenuto metà per parte alle estremità A E dalle verghe BA EF; così sia A*a* la metà sostenuta dalla verga AB, ed essendo C il suo centro di gravità, e denotando C*c* il suo peso, si divida il segamento A C in reciproca ragione delle forze A*a* C*c* nel punto G, e le azioni di esse sulla verga AB, applicate ne' punti A C, equivaleranno all' azione della G*g* uguale alla somma loro applicata al punto G. Quindi (Prob. I.) considerandosi la verga A B appoggiata ad un piano orizzontale e ad un verticale, e caricata nel punto G del peso G*g*, si determinerà la sua spinta orizzontale al punto B, e l' uguale al punto A in direzione della verga orizzontale AE. Le stesse spinte verranno esercitate pure dall' altra ugual verga EF ugualmente inclinata. Il che ec.

Scolio.

Se quattro sono le verghe uguali AB BC AE EF considerate per gli assi di quattro uguali travi combinati e disposti, come suol praticarsi per costruire i tetti alla Mansarda (Fig. XV.), e le due superiori BA AE sieno legate insieme mediante la catena orizzontale BE o LR; in tal caso le verghe inferiori BC EF sono aggravate dalle superiori come

se

se ad esse poggiata fosse la verga orizzontale BE dotata del proprio peso o della LR, e delle due BA AE, e perciò la soluzione del problema si riduce a quella dell' antecedente. Ma se le superiori verghe BA AE non sono legate scambievolmente, come s' è detto, e soltanto connesse colle estremità B E delle inferiori BC EF, in guisa di non recare impedimento alla naturale tendenza di tutte e quattro insieme; allora si osserva esperimentando, che lasciando libera l' azione ad esse, mentre il punto A discende per la verticale AD, le due verghe dalla stessa parte AB BC, dovendosi intendere lo stesso per le altre due AE EF, passano successivamente, strisciando la BC sul piano orizzontale DC, nelle posizioni *abc a'b'c'* ec., distendendosi in fine la AB sul piano orizzontale in DG, e la BC in GH. Per risolvere adunque in tale ipotesi il problema, secondo i nostri principj, e determinare, senza alterare la propria sua condizione, gli sforzi che in istato di equilibrio accadono in C, in B, ed in A, dovendosi sostenere già il peso insieme delle due verghe AB BC dal piano orizzontale DC nel punto C, bisogna conoscere la curva B*bb'*G che descrive il punto B, la curva L*ll'*M che descrive il centro di gravità L della verga AB passando dalla posizione AB nelle *ab a'b'* ec. fino alla orizzontale DG, e quindi la curva S*ss'*O che descrive il centro di gravità S della verga BC, passando dalla posizione BC nelle *bc b'c'* ec. fino all' orizzontale CH.

Meno intralciata è la soluzione del problema in cui si suppone che alla verga inferiore BC (Fig. XVI.) sia impedito lo strisciamento orizzontale in C, e soltanto possa girarsi intorno al punto medesimo come centro del cerchio *b*BH descritto col raggio CB, restando allora da conoscere la sola curva L*lm* descritta dal centro di gravità L della verga superiore AB supposta passata dalla prima posizione AB nelle *ab* ec., per farsi quindi a scoprire gli sforzi esercitati dalle due verghe AB BC ne' punti C B ed A. Si può anzi in pratica supporre che il movimento della verga superiore AB si fac-

faccia come se strisciasse coll' estremità A pel piano verticale AD, e coll' altra estremità B pel piano inclinato BR perpendicolare alla verga inferiore BC; il che è tanto più d'ammettersi quanto minore è l'angolo ABE.

Che se la verga inferiore BC fosse verticale, come l'asse d'un pilastro (Fig. XVII.) che cedendo alla spinta d'un tetto sovrapposto e indicato dall' altra verga superiore AB, si dovesse girare intorno al punto C della base, e descrivesse coll' altra estremità B l' arco di cerchio BO; scoperta la curva L*m* che in siffatto movimento descriverebbe il centro di gravità L della verga AB, e conducendo ad essa al punto L la tangente LH e la normale LN, e denotando la verticale LG il peso della verga AB, si compirà il parallelogrammo L*h*G*n*. Quindi menando B*b* uguale e parallela a L*h*, ed A*a* uguale e parallela ad L*n*, e calate le perpendicolari *bc ad* alle orizzontali B*c* A*d*; sarà B*c* lo sforzo orizzontale che esercita il tetto in B contro il pilastro, e A*d* l' uguale sforzo orizzontale che esercita in A o contro un muro verticale AD o contro l' opposta metà di esso, e l' intero peso LG agirà in direzione verticale sullo stesso pilastro, e così potrà determinarsi la sua grossezza per l' equilibrio tra esso e lo sforzo con cui il tetto tende a capovolgerlo. In pratica potendosi supporre che il movimento della verga AB succeda come se poggiata fosse al piano verticale AD e sull' orizzontale EB*c*, singolarmente qualora non vi sia differenza notabile tra la lunghezza AB del tetto e la sua larghezza BE, la curva L*m* diverrà prossimamente un arco ellittico, e la soluzione del problema dipenderà da quella del problema I.

Così, chiamandosi dagli Architetti propriamente tetto alla Mansarda quello che sia quasi piano nel colmo, e quasi a piombo da' lati, come è dimostrato per metà dalla Figura XVIII., fatta DG uguale a BA, e DM ugual ad AL, essendo L il centro di gravità della verga AB, che si suppone cadere nella metà della sua lunghezza, e condotte le BG LM, ed abbassate le perpendicolari BN L*m*, diventano nell'

ipo-

ipotesi suddetta trascurabili gli angoli GBN MLm. Laonde supposte in libero movimento le verghe AB BC può ammettersi che la verga AB discenda parallelamente a se stessa e in direzione orizzontale, cioè che il suo centro di gravità L proceda per la verticale Lm, e che la BC mentre striscia coll' estremità C nel piano orizzontale DC, discenda coll' altra estremità B per la verticale BN, e perciò in tale maniera di tetti possono determinarsi gli sforzi in C, B, ed A, quanto alla pratica, come sonosi determinati que' di tre verghe (Prob. VI.), colla differenza che in questo caso la verga BC è gravata in B dell' intero peso della verga AB.

CONCLUSIONE.

Mentre da ciò che s' è dimostrato apparisce che conviene conoscere primieramente la linea che descrive il centro di gravità della verga, per applicare con esattezza il principio della composizione e della risoluzione delle forze alla soluzione del problema in questione; si dimostrerà ora insufficiente essere tuttavia l' altro principio delle azioni applicandolo come suol farsi alla soluzione del problema medesimo.

Sia AB (Fig. XIX.) la verga appoggiata al piano verticale DE ed al piano orizzontale BD, ed FCE l' ellissi per cui tende a discendere il suo centro di gravità C. Si ponga DG $= x$, AB $= a$, AC $= b$, il peso della verga $= p$, e si avrà (Prob. I.) espresso il valore della spinta orizzontale al punto B dalla formula (F)

$$p\left(\frac{(a-b)\,b\,.\,x\,.\sqrt{(b^2-x^2)}}{b^2\,(b^2-x^2)+(a-b)^2\,.\,x^2}\right) \;.\;.\;.\;.\; (F)$$

formula identica colla (E) (Prob. II. Scolio), surrogando in luogo d' x, $\frac{b}{r}$. cos.φ, ed in luogo di $\sqrt{(b^2-x^2)}$, $\frac{b}{r}$. sen.φ, come risulta tirando CR parallela a DG, e chiamando al solito l' angolo d' inclinazione ABD ossia ACR $= \varphi$, ed il rag-

gio $= r$. Posto ciò per ritrovare presentemente col principio delle azioni la spinta medesima, si supponga strisciata la verga AB in ab, sicchè il centro di gravità C abbia percorso l' infinitesimo arco ellittico Cc, e condotte le ordinate CG, cg e l' orizzontale cn, sia come prima $AB = a$, $AC = b$, $DG = x$, e sia poi $CG = y$, sarà

$$(a-b)^2 (b^2 - x^2) = b^2 y^2$$

l' equazione all' Ellissi $FCEf$; e si avrà inoltre $gG = cn = dx$, $Cn = -dy = \frac{(a-b)\,x\,dx}{b\sqrt{(b^2-x^2)}}$, ed $y = \left(\frac{a-b}{b}\right)\sqrt{(b^2-x^2)}$. Supponendo pertanto doversi impedire lo strisciamento della verga AB da un peso S sospeso ad un filo orizzontale raccomandato all' estremità B e che passi sopra una girella affissa in D, è necessario per determinare secondo il principio delle azioni il peso S equivalente alla ricercata spinta orizzontale, conoscere lo spazietto Bb che percorre l' estremità B della verga nello stesso tempuscolo che il suo centro di gravità C percorre l' archetto Cc, e che discende per lo spazietto verticale Cn; essendo però $DB = x + \sqrt{((a-b)^2 - y^2)}$, sarà differenziando il ricercato spazietto $Bb = dx - \frac{y\,dy}{\sqrt{((a-b)^2 - y^2)}}$: quindi per l' equilibrio tra l' azione della verga AB e la reazione del peso S si avrà l' equazione

$$p(-dy) = S\left(dx - \frac{y\,dy}{\sqrt{((a-b)^2 - y^2)}}\right)$$

da cui, fatte le debite surrogazioni, si ricava il valore della spinta orizzontale all' estremità B della verga, cioè

$$S = p\left(\frac{(a-b)\,x}{a\sqrt{(b^2-x^2)}}\right)$$

valore differente del somministrato dalla superior formula (F) derivata dall' applicazione del principio della composizione e della risoluzione delle forze secondo i nuovi principj, e identi-

tico col rappresentato dalla formula (A) (Art. III.) risultante dalla comune applicazione del principio predetto e di quello delle azioni, che non soddisfa alle naturali condizioni del problema già indicate (Art. III.).

Per applicare il principio delle azioni al problema, coerentemente a' nuovi principj, bisogna ricercare in vece il peso S (Fig. XX.) capace a tenere in equilibrio la verga AB, il quale mediante un filo sia raccomandato al suo centro di gravità C, e passi sopra la girella R, sicchè agisca in direzione della tangente CH. Il peso così ritrovato equivalerà allo sforzo che esercita la verga contro il piano orizzontale in B secondo la direzione CH, e però indicando l' archetto C*c* il detto peso, indicherà *cn* la ricercata spinta orizzontale in B. Passando al calcolo e tenute le solite denominazioni, siccome supposto un minimo movimento nella verga AB, mentre il suo centro di gravità C discende per lo spazietto verticale C*n*, il peso S ascende per uno spazio verticale uguale all' archetto C*c*, così pel principio delle azioni si avrà l'equazione

$$p\,(-dy) = S\sqrt{(dx^2+dy^2)}$$

cioè il peso $S = p\left(\frac{-dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right)$. Posto che l'archetto C*c* rappresenti il peso stesso, si avrà; instituendo come C*c* a *cn*, ovvero $\sqrt{(dx^2+dy^2)} : dx = p\left(\frac{-dy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}\right) : p\left(\frac{-dx\,dy}{dx^2+dy^2}\right)$ che esprimerà la spinta orizzontale della verga nel punto B, nella quale espressione sostituito il valore di *dy* per *dx* ricavato dall' equazione all' Ellissi FCE*f* si ottiene

$$p\left(\frac{(a-b)b\,.\,x\,.\sqrt{(b^2-x^2)}}{b^2(b^2-x^2)+(a-b)^2\,.\,x^2}\right)$$

pel valore della spinta ricercata, identico col superiore (F) risultato dalla nuova applicazione del principio della composizione e della risoluzione delle forze.

Fig. I.

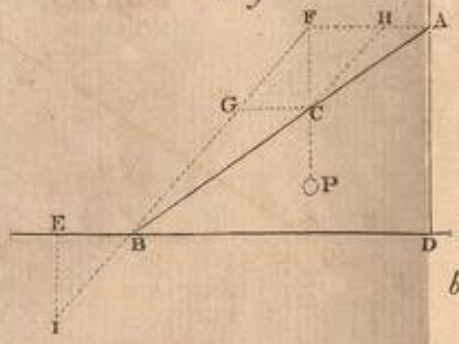


Fig. III.

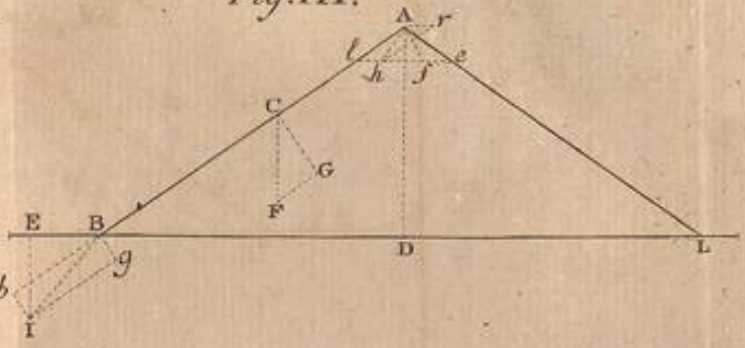


Fig. II.

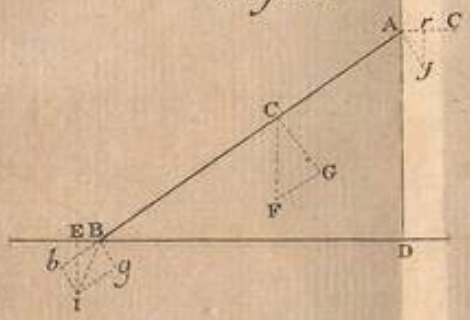


Fig. IV.

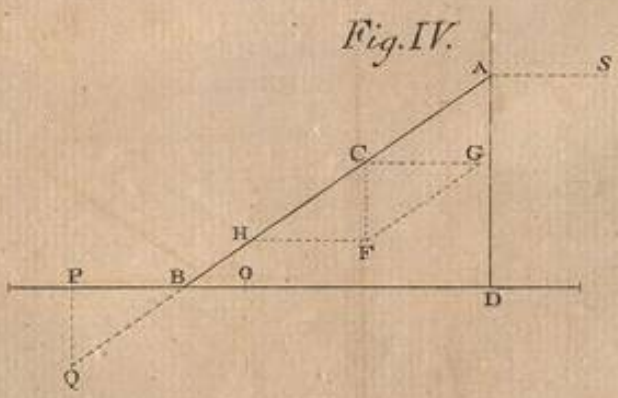


Fig. V.

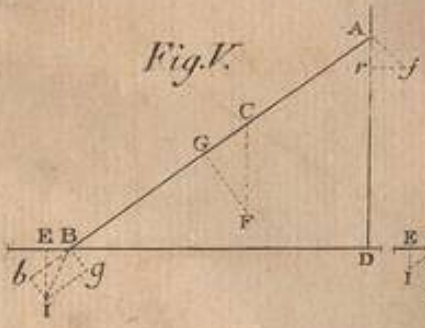


Fig. VI.

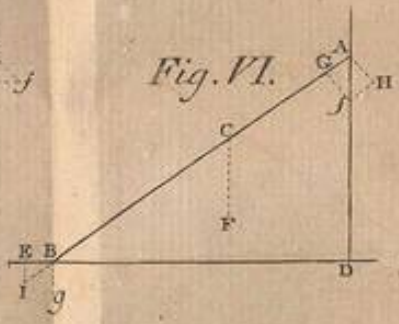


Fig. VII.

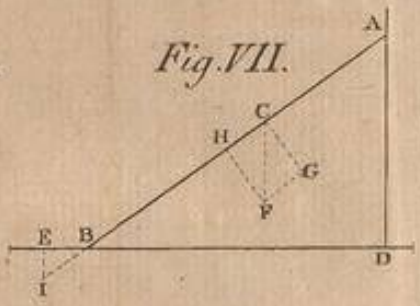


Fig. VIII.

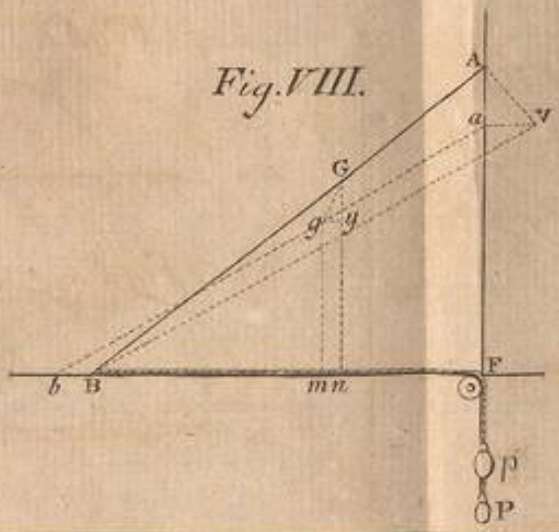


Fig. IX.

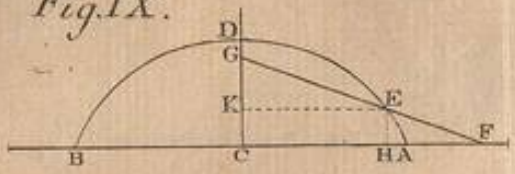


Fig. X.

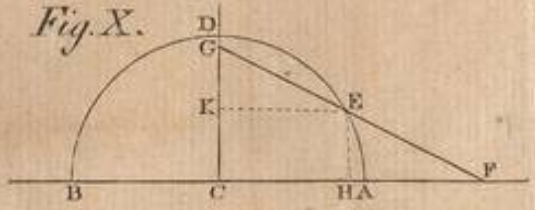


Fig. XI.

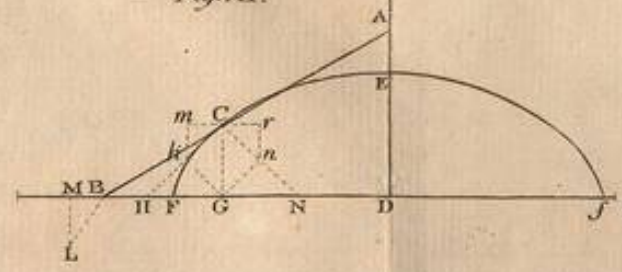


Fig. XII.

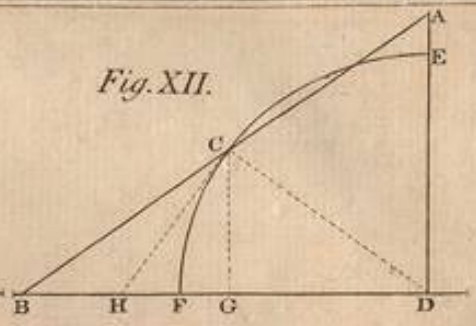


Fig. XIII.

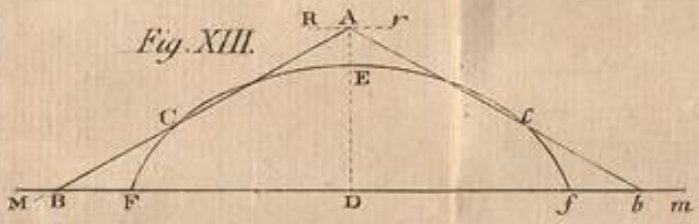


Fig. XIV.

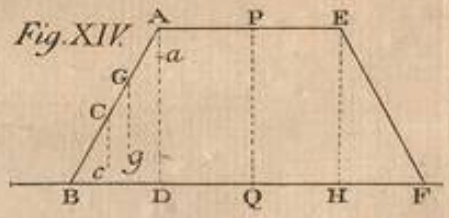


Fig. XV.

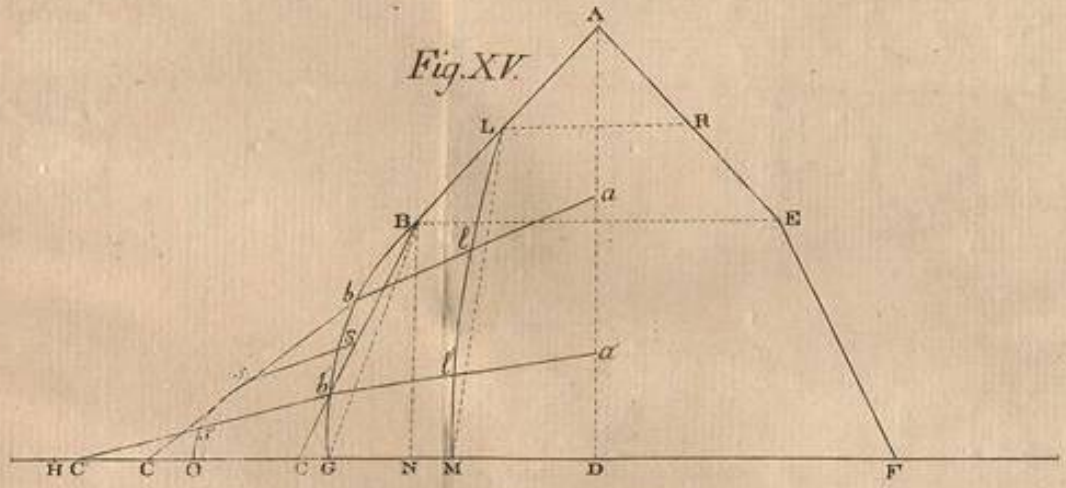


Fig. XVI.

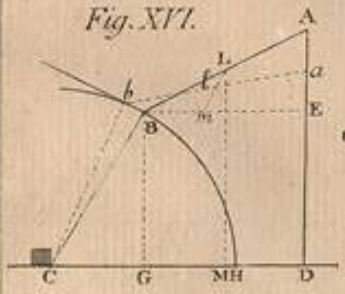


Fig. XVII.

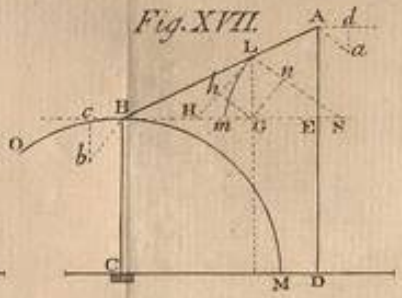


Fig. XVIII.

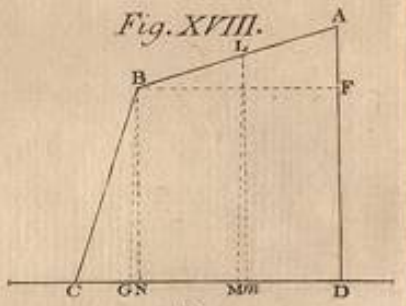


Fig. XIX.

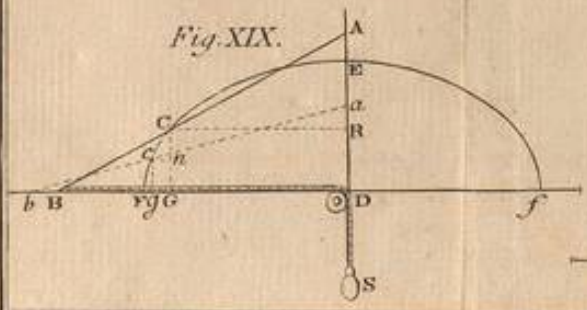
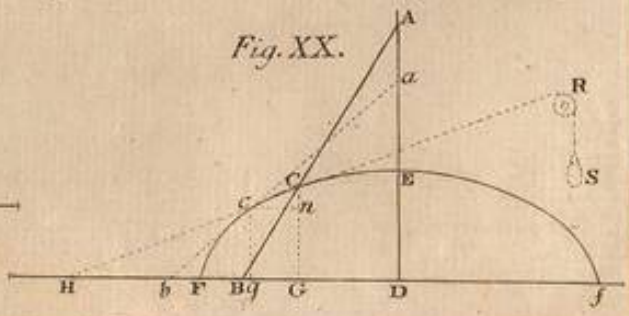


Fig. XX.



Io non intendo di aver indicate se non che le prime tracce di applicazione de' principj esposti, onde usare con sicurezza li comunemente noti della composizione e della risoluzione delle forze, e delle minime azioni negli argomenti fisico-matematici, e di pervenire nella particolare indagine presa in considerazione in questa mia Memoria alla soluzione de' problemi più complicati e conducenti ad iscoprire la legge e la misura degli sforzi ne' diversi punti d' un arco e d' una volta: ricerca che meritò finora l' occupazione de' Geometri, e che alla civile Architettura massimamente importa.

ME-