DELLE VIBRAZIONI SONORE DEI CILINDRI.

Del Sig. Conte Giordano Riccati.

I. Di parecchi cilindri di metallo, o di creta si formano certi strumenti, che riescono grati all' orecchio. Di tali corpi mia intenzione si è l' indagare le oscillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diversissime da quelle delle corde cilindriche. Quantunque io abbia preso l' essenzial di questa soluzione dall' Appendice sopra le curve elastiche aggiunta dal dottissimo Sig *Leonardo Eulero* alla sua profonda Opera *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; nulladimeno non isdegnino di leggerla i Matematici, sì perchè ho procurato di rischiarare la materia per sè stessa oscurissima, sì perchè m'è riuscito di farci per entro qualche non dispregevole scoperta, e di notare altresì alcun picciolo neo, che anderò opportunamente segnando, nelle speculazioni per altro sublimi del chiarissimo Autore.

Fig. I

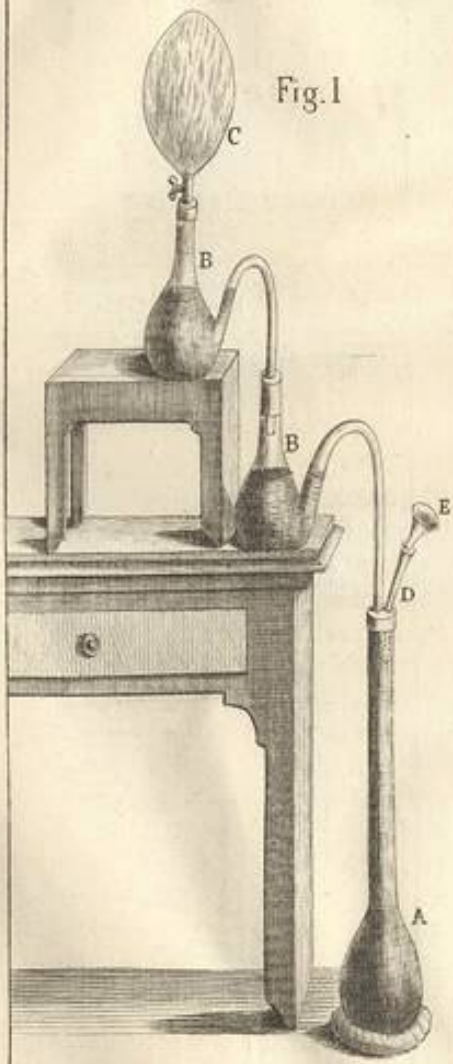
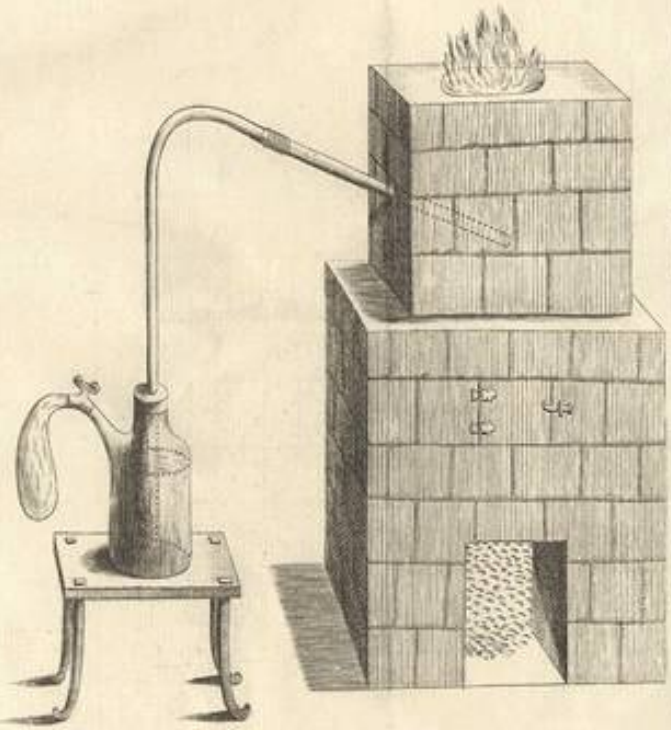


Fig. II



Se nulla distendendosi le lunghezze inferiori di due cilindri, s' allungano solamente le superiori, o a rovescio, e ciò per opera di due forze minime uguali normali alle basi dei cilindri, ed applicate a' punti analoghi de' loro diametri situati ne' piani, in cui giacciono le mentovate opposte lunghezze, gli allungamenti corrispondenti a' punti analoghi de' diametri stessi stanno in ragione composta, diretta delle lunghezze de' cilindri, ed inversa della rigidità della materia, onde sono formati, e delle loro basi, o sia dei quadrati de' loro diametri.

II. Ci sieno (*fig.* 1.) due cilindri *OV*, *ov*, i quali si trovino in tali circostanze, che nulla dilatandosi le lunghezze inferiori *VM*, *vm*, si distendano a grado a grado le superiori, dimodochè gli allungamenti s' eguaglino alle ordinate dei triangoli *MOL*, *mol*. Si fingano totalmente inflessibili le loro basi *MGOI*, *mgoi*, e supponga si, che i mentovati allungamenti sieno cagionati da due forze infinitesime uguali applicate con direzione normale alle dette basi, per esempio all' estremità *O*, *o* dei diametri *MO*, *mo* collocati ne' piani *VL*, *vl*: dico che le distensioni *OL*, *ol* corrispondenti ai punti analoghi *O*, *o* serbano la proporzione composta, diretta delle lunghezze *SO*, *so* dei cilindri, e reciproca della rigidità della materia, onde constano, e dei quadrati dei loro diametri.

Si segnino prima le linee finite *MP*, *mp*, indi le infinitesime *PR*, *pr* proporzionali ai diametri *MO*, *mo*, e si tirino parallele alle lunghezze *VM*, *vm* le linee *KZ*, *NX*; *kz*, *nx*. Per tali coppie di linee passino dei piani normali ai piani *VL*, *vl*, e questi segneranno due parallelepipedi, le cui lunghezze *KP*, *kp*, e le basi *GH*, *gh*. Essendo *MO*: *MP*:: *mo*: *mp*, *MO*: *MP*:: *OL*: *PZ*, *mo*: *mp*:: *ol*: *pz*, si verifica parimente l' analogia

$OL : PZ :: ol : pz$, la quale c' insegna, che gli allungamenti dei due cilindri in siti analoghi abbracciano la medesima proporzione. Vengano le distensioni PZ, pz direttamente effettuate nei solidi KR, kr da due forze minime uguali. Ho dimostrato nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche* al numero IV. dello Schediasma I, che gli allungamenti prodotti da forze infinitesime pari in due corde elastiche, che non sien tese, stanno come le loro lunghezze divise pel prodotto della rigidità della materia, onde sono composte, nelle loro basi: e le dimostrazioni ivi addotte, che non ripeto presentemente, s' adattano interamente ai parallelepipedi KR, kr. Per la qual cosa le distensioni PZ, pz serberanno la nominata relazione: ma le basi GH, gb, che sono porzioni simili delle basi circolari dei cilindri, si riferiscono nella ragione dei quadrati de' diametri MO, mo; dunque le distensioni PZ, pz dei solidi KR, kr, ed altresì quelle di tutte l' altre coppie di solidi fondati su basi simili, e similmente situati, che in pari numero compongono i nostri cilindri, accettano la proporzione delle lunghezze VM, vm divise pel prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri de' cilindri. Si cavi la conseguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati in siti analoghi gli allungamenti, che si riguardano nella mentovata ragione, sono cagionati da forze uguali.

Si restituiscano ora i cilindri per gli spazietti LQ, lq parti infinitesime simili degli spazj OL, ol, ed agevole riuscirà la riflessione, essere $OL : PZ :: QL : YZ :: ol : pz :: ql : yz$, e che perciò gli spazietti analoghi QL, ql; YZ, yz si riferiscono nella stabilita ragione, nella quale altresì si riguarderanno le reazioni menomissime delle forze a coppia a coppia eguali applicate ai punti analoghi Z, z; L, l ecc. Lo stesso rapporto parimente accetteranno gli aggregati di queste reazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io

voglio collocare nei siti L, l due forze equipollenti per le direzioni OL, ol, egli è d'uopo, che alla somma delle reazioni delle forze levate s'eguagli l'unica reazione della forza sostituita. Quindi le reazioni delle due forze surrogate dovranno stare come $QL : ql$; ma le dette forze reagiscono per gli spazj QL, ql; dunque le reazioni sono come gli spazj, per cui resistono le due forze, il che non può verificarsi senon nel caso, che sieno uguali esse forze. Se due forze uguali pertanto normali alle basi dei cilindri OV, ov, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo situati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elastica dei cilindri stessi, le corrispondenti distensioni OL, ol devono serbare la ragione composta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, ed inversa della rigidità della materia, di cui sono formati, e dei quadrati de' loro diametri.

Determinare la forza, la quale, supponendosi applicata per una data direzione in un sito determinato, sia equipollente alla forza elastica d'una menoma porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

III. Sia $AVMF$ (Fig. 2.) la curva di menoma piegatura, a cui vibrandosi si sia adattato un cilindro, ed AC, CM sieno le coordinate l'una all'altra normali. La lunghezza pochissimo incurvata MV della porzione elementare LV del detto cilindro venga combaciata dal circolo MV descritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS pel punto M conduco parallela la retta MO. Potendosi supporre, che nel ripiegarsi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia ricevuta alterazione, si farà egli superiormente dilatato per OL.

Fingasi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo sono parallele alle ordi-

nate MC, le quali fanno equilibrio col cilindretto LV. S' io risolverò questa forza in due, una parallela, e l'altra normale alla direzione MV d'esso cilindro, troverò la prima minima rispettivamente alla seconda; perchè discostandosi infinitamente poco la curva $AVMF$ dalla linea retta AB, la direzione della forza, che si risolve, è pressochè perpendicolare alla linea MV. La forza menomissima parallela ad MV allunga tutto il cilindretto LV egualmente, e la normale rispettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona le distensioni espresse dalle ordinate del triangolo MOL. Ecco adunque, che trascurando l' allungamento comune a tutto il cilindro, siccome operato da una forza adequatamente uguale a nulla, mi è concesso il supporre, che la lunghezza inferiore MV ritenga la sua naturale misura.

Chiamo la lunghezza del cilindro $MV = ds$, il raggio osculatore $DM = R$, il diametro di esso cilindro $ML = D$, la rigidità della materia, che lo compone, $= r$. La similitudine dei triangoli DMV, MLO mi somministra l'analogia

$DM : MV :: ML : LO$

$R : ds :: D : \frac{Dds}{R}$, da cui si ricava $LO = Dds : R$.

Una forza costante $= 1$, che agisse per la direzione OL, allungherebbe il cilindro, come ho dimostrato al numero *II.* per lo spazio proporzionale a $ds : rD^2$, il quale sta in ragione composta, diretta della lunghezza del cilindro, ed inversa del quadrato del diametro, o sia della base del cilindro, e della rigidità della materia, della qual è formato. Essendo pertanto nello stesso cilindro le distensioni come le forze minime, che le cagionano; se l' allungamento come $ds : rD^2$ è prodotto dalla forza $= 1$, ne segue, che per ottenere la dilatazione $LO = Dds : R$ ci vorrà la forza proporzionale a $D^2r : R$.

Si restituisca il nostro cilindro per lo spazio $L\mathcal{Q}$ porzione inassegnabile dello spazio LO, ed il raggio osculatore

latore MD s'allunghi, e divenga uguale ad $MG = R + dR$; troveremo la linea $\mathcal{Q}O = \frac{Dds.}{R+dR}$, la quale sottratta da $LO = Dds : R$, ci dà $L\mathcal{Q} = DdRds : R^2$. Quindi la reazione della forza proporzionale a $D^4r : R$, che per lo spazio $L\mathcal{Q}$ si conserva costante, starà come $D^4rdRds : R^3$. Taglio $MT = 1 : R$, e pel punto T conduco TR parallela ad $L\mathcal{Q}$. Dalla simiglianza dei triangoletti $ML\mathcal{Q}$, MTR deduco l' analogia

$ML : L\mathcal{Q} :: MT : TR$

$D : \frac{DdRds}{R^2} :: \frac{1}{R} : \frac{dRds}{R^3}$, che mi addita il valore di $TR = dRds : R^3$. Voglia collocarsi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che s'è applicata in L, e che per conseguenza faccia equilibrio coll'elasticità del cilindro LV. Se le due forze in L, ed in T hanno ad essere equipollenti, le loro reazioni per gli spazj $L\mathcal{Q}$, TR debbono essere uguali. S'inferisca, che divisa la reazione della prima forza, proporzionale a $D^4rdRds : R^3$ per lo spazietto $TR = dRds : R^3$, per cui reagisce la seconda, ne proverrà la grandezza della forza stessa applicata nel sito T proporzionale a D^4r, cioè a dire in ragione composta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro, che si vibra, e della rigidità della materia, della qual è formato.

Sia M la massa di tutto il cilindro, L la sua lunghezza, g la sua gravità specifica, o densità, e la quantità $M : gL$ esprimerà la base del cilindro, la quale serba la ragione del quadrato D^2 del diametro. Sostituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $M^2 : g^2L^2$ troveremo stare come $M^2r : g^2L^2$ quella forza applicata alla distanza $MT = 1 : R$, che forma equilibrio coll'elasticità del cilindretto LV, la cui minima curvatura $= 1 : R$. Nominata E la detta forza, avremo $KrM^2 : g^2L^2 = E$, ed il coefficiente K sarà costante in tutti i cilindri.

IV. Se col metodo da me tenuto rispettivamente ai cilindri avessi cercato il valore della forza E nelle lamine elastiche, mi sarebbe riuscito di trovarlo in ragione composta della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del cubo della sua grossezza. Alla forza E il Signor *Eulero* dà il titolo di elasticità assoluta della lamina, e senza dimostrarlo, l'asserisce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della grossezza. Questo sbaglio influisce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elastiche determinata dal nostro Autore, la quale non corrisponde ai fenomeni, salvochè nella circostanza, che le diverse lamine sieno di pari grossezza.

Trovare col mezzo degli esperimenti il valore della forza E.

V. Alla muraglia perpendicolare BK sia immobilmente raccomandato il cilindro $AVMF$, il quale prima di essere incurvato teneva la positura HF a squadra della linea FB. Avverto, che la retta HF tocca la curva $AVMF$ nel punto F. Una forza P applicata al punto estremo A con direzione sempre parallela ad FB abbia ripiegato il cilindro nella curva $AVMF$, e formi con esso equilibrio, e con tutti i suoi elementi. Pel punto A si tiri AB parallela ad HF, e dal punto M si lasci cadere l'ordinata MC normale ad AB. Si tagli $ME = AC$, e si conduca la diagonale AM. Chiamo $AB = a$, $BF = b$, $AC = x$, $CM = y$; e giacchè il cilindretto LV sta in equilibrio colla forza P, se supporremo, che invariata rimanga la curvatura del resto del cilindro, e che solamente l'elasticità del cilindretto LV eserciti una menoma azione, a questa dovrà esser uguale la reazione della forza P. In cambio dell'elasticità del cilindro LV io posso sostituire la forza equivalente E applicata in T, ovvero in R, la quale

agiſca per lo ſpazietto RT. Il punto R della linea MR deſcriverà l' archetto RT, ed i raggi $MI=ME$, ed MA ſegneranno gli archi IE, AZ ſimili all' RT. Dal punto Z ſi cali ZN normale ad AB. Eſſendo la direzione della forza P perpendicolare ad AB, reagiſce per lo ſpazio NZ, mentre la forza E agiſce per lo ſpazio RT. Avremo dunque per le leggi dell'equilibrio $P.NZ=E.RT$. I triangoli ſimili MAC, AZN m' inſegnano eſſere $MA:AZ::AC:NZ$; ma per la ſimiglianza dei ſettori MAZ, MIE, $MA:AZ::MI:IE$; dunque $AC:NZ::MI:IE$; e giacchè per la coſtruzione $AC=MI=x$, ſarà parimente $NZ=IE$. Avremo pertanto $P.IE=E.RT$, e ſurrogando in luogo degli archetti IE, RT i raggi proporzionali $MI=AC=x$, $MR=1:R$, $Px=E:R$.

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P riſpettivamente al punto M, e dovendo queſta far equilibrio coll' elaſticità del cilindro, il cui momento $E:R$, ſtabiliſcono l' equazione $Px=E:R$. Ho ſtimato opportuna coſa riſchiarar la materia, deducendo la noſtra formola dall' eguaglianza delle azioni menomiſſime, che mutuamente s' impediſcono, nella quale conſiſte il vero fondamento dell' equilibrio. Fa vedere il progreſſo del mio raziocinio, che le grandezze Px, $E:R$ ſono proporzionali alle azioni eguali, e contrarie, l' una delle quali ſerve all' altra d' impedimento, della forza P, e dell' elaſticità del cilindro LV. Quindi ſiccome rettamente ſi nomina Px il momento della forza P, così $E:R$ ſi dee appellare il momento della forza elaſtica del cilindretto LV, la cui curvatura $1:R$, e per queſta parola momento altro non ſi dee intendere, ſalvochè le mentovate virtuali infiniteſime azioni uguali, e contrarie, o quantità ad eſſe proporzionali.

VII. Dopo queſta forſe non inutile digreſſione torno in ſentiero, e ripigliata per mano l' equazione Px

$= E:R$, offervo che prefo ficcome coftante l' elemento dx dell' affiffa, abbiamo il raggio ofculatore $R = \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2+dy^2)^{3:2}}{-dxddy}$. Ponendo in opera un tal valore, trovo $Px = \frac{-Edxddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, o fia $Pxdx = \frac{-Edx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{3:2}}$, formola, che riceve la feguente integrazione $P.(\frac{1}{2}x^2+f) = \frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, la quale maneggiata mi dà $dy = \frac{-Pdx.(\frac{1}{2}x^2+f)}{\sqrt{(E^2-P^2.(\frac{1}{2}x^2+f)^2)}}$. Si determina la coftante f riflettendo, che nel fito F la tangente HF è parallela all' affiffa AB; laonde $dy:dx = 0$, e perciò $\frac{1}{2}x^2+f = 0$, ovvero $f = -\frac{1}{2}x^2$: ma in queffo cafo $x = AB = a$; dunque $f = -\frac{1}{2}a^2$. Fatto ufo di queffo valore, ed adempiuti i neceffarj calcoli, ci fi preferterà $dy = \frac{(a^2-x^2).dx}{\sqrt{(4E^2:P^2-a^4+2a^2x^2-x^4)}}$.

S' adatti all' eftremità A del cilindro $AVMF$ una forza, o pefo P affai picciolo rifpettivamente alla forza E, dimodochè il cilindro ftefso fi ripieghi per una faetta FB ifficamente menoma, ma che per altro poffa accuratamente mifurarfi. In sì fatta ipotefi la quantità $4E^2:P^2$ farà talmente grande, che fi potrà in riguardo alla pratica trafcurare la grandezza $-a^4+2a^2x^2-x^4$. Avremo pertanto $dy = \frac{(a^2-x^2)dx}{2E:P}$, ed integrando $y = \frac{P.(a^2x-\frac{1}{3}x^3)}{2E}$: ma quando $x = a$, $y = b$; dunque $b = Pa^3:3E$, e finalmente $E = Pa^3:3b$, valore della forza E, che non fi difcofterà dal vero fenfi-

bilmente, purchè la curvatura del cilindro ſia piccioliſſima.

VIII. Avendo dimoſtrato eſſere E come rD^4, ſtarà per conſeguenza rD^4 come $Pa^3 : 3b$, ed r come $Pa^3 : 3bD^4 = E : D^4$. Col mezzo adunque della premeſſa eſperienza ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità delle materie, onde ſono compoſti i cilindri. Stabilirò in progreſſo al numero XXV un altro canone ugualmente ſemplice che ſerve a determinare la detta proporzione.

IX. Nella formola $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{\sqrt{4E^2 : P^2 - a^4 + 2a^2x - x^4)}}$ ſi faccia $2E : P = c^2 - a^2$, e conſeguentemente $4E^2 : P^2 = c^4 - 2c^2a^2 + a^4$. Supponendoſi $2E : P$ una quantità aſſai grande riſpettivamente ad x, e ad a, ſarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccoglieſi dall' equazione aſſunta $2E : P = c^2 - a^2$. Soſtituito in cambio di $2E : P$ il ſuo valore, troveremo $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2 + 2a^2x^2 - x^4)}}$. Se nel denominatore io tralcuro i ſoli due termini $2a^2x^2 - x^4$, la cui ſomma è fiſicamente nulla non ſolo in riguardo a c^4, ma ancora per rapporto a $-2c^2a^2$, mi ſi preſenta la formula $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2)}}$, che s' adegua alla ſeguente $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{c^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{2E : P}$, da cui ricavo $E = Pa^3 : 3b$.

Ma s' io traſando altresì il termine $-2c^2a^2$, ho l' equazione $dy = \frac{(a^2 - x^2) \cdot dx}{c^2}$, la quale integrata mi dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$. Corriſpondendo $y = b$ ad $x = a$, troveremo $b = 2a^3 : 3c^2$, e ponendo in luogo di c^2 il ſuo

valore $2E:P+a^2$, $3b=\frac{2a^2}{2E:P+a^2}$. Dal maneggio di questa formola si ricava $E=\frac{Pa^2.(2a-3b)}{6b}$. Il Signor *Eulero* assegna alla forza E un tal valore, il quale è meno semplice, e meno esatto di quello, che da me è stato determinato.

Determinare l' equazione della curva, a cui s' adatta un cilindro, che si vibra.

X. Tenga il cilindro prima di vibrarsi la positura rettilinea ACB (*fig.* 3), e messo poscia in oscillazione s' adatti alla curva $aEcFb$, la quale si discosti dalla linea retta ACB per minimi spazj. Sia la lunghezza del cilindro acb, ovvero $ACB=L$, la sua massa $=M$, il raggio osculatore in $M=R$, il momento dell' elasticità del cilindro nel sito medesimo $=E:R$. Si chiami inoltre $Aa=b$, $AP=aM=x$, $PM=y$. Effettuando il nostro cilindro nel tempo stesso le sue menome vibrazioni più, o meno estese, dee necessariamente oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo semplice isocrono, e giacchè questo, mentre gli resta da scorrere lo spazio $MP=y$, viene animato dalla forza acceleratrice $y:f$, tale sarà altresì la forza acceleratrice del cilindro nel sito M. La massa d' un elemento d' esso cilindro, la cui lunghezza dx s' eguaglia ad $Mdx:L$, la quale moltiplicata per $y:f$, mi dà la forza sollecitante il detto elemento collocato in $M=Mydx:Lf$. Il cilindro dopo compiuta un' oscillazione si trovi nella positura $aEcFb$, e se in tale istante a tutti i punti d' esso cilindro s' applicheranno le convenienti forze $Mydx:Lf$ con direzioni contrarie, per esempio MH, mb, a quelle delle forze sollecitanti, non seguirà più moto, ed

il cilindro si fermerà in equilibrio. Le forze applicate alla curva aM stanno in equilibrio colla forza elastica del cilindro in M: ed in fatti se questa si minorasse, tutte le dette forze si porrebbero in azione. Quindi l' aggregato dei momenti delle mentovate forze dee pareggiare il momento $E:R$ della forza elastica nel sito M.

Nomino p la somma delle forze applicate alla curva am, e dp per conseguenza sarà la forza, che tira l' elemento mu per la direzione mb. Il momento di essa forza rispettivamente al punto M, mettendo $Ap=q$, s'eguaglia ad $(x-q).dp$. Per trovare la somma desiderata dei momenti delle nostre forze in riguardo al punto M, si considerino per poco il detto punto, e l' assissa $AP=x$ come costanti, prendendo $Ap=q$ in qualità di variabile. Avremo pertanto l' aggregato dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva $am = xp - \int qdp$: ma $\int qdp = qp - Spdq$; dunque la mentovata somma $= xp - qp + \int pdq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q=x$, $dq=dx$. Sostituiti questi valori, troveremo la somma dei momenti per rapporto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro $aM = Spdx$. Ora dovendosi un tale aggregato eguagliare al momento $E:R$ dell' elasticità del cilindro nel sito M, siam pervenuti all' equazione $E:R = Spdx$, e surrogando in vece di p l' eguale grandezza $\int \frac{Mydx}{Lf}$, $E:R = \int\left(dx \int \frac{Mydx}{Lf}\right)$. Nel caso presente, in cui la flussione costante dx dell' assissa s' adegua all' elemento ds della curva, si verifica essere $R = dx^2 : ddy$, e perciò avremo $Eddy:dx^2 = \int\left(dx \int \frac{Mydx}{Lf}\right)$. Prendo le differenze, e trovo $Ed^2y:dx^2 = dx \int Mydx : Lf$, e

nuovamente differenziando $Ed^3y = Mydx^3 : Lf$, equazione alla curva cercata *aEcFb*.

XI. La somma dei momenti rispettivamente al punto *M* delle forze applicate al rimanente del cilindro *MEcFb* esser dee uguale, e contraria alla somma dei momenti delle forze applicate alla porzione *aM*, e l' una e l' altra di queste somme dee pareggiare il momento dell' elasticità $= E : R$ del cilindro nel sito *M*. Così l' elemento di cilindro collocato in *M* sta in equilibrio, essendo preso in mezzo da due aggregati di momenti eguali, e contrarj. Se avessi considerati i momenti delle forze applicate alla parte *MEcFb* del cilindro, fatta la riflessione essere $BP = L - x$, ed il suo incremento $= -dx$, avrei scoperto $Eddy : dx^3$ $= \int\left(-dx \int -\frac{Mydx}{Lf}\right)$, espressione, che ci guida alla formula testè trovata $Edy = Mydx^3 : Lf$.

La premessa avvertenza me ne suggerisce un' altra, cioè che la somma dei momenti rispettivamente ai punti estremi *a*, *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *aEcFb* deve uguagliarsi a nulla, siccome quella, che ha da formar equilibrio coll' aggregato dei momenti delle forze applicate al residuo del cilindro, che ne' due mentovati casi pareggia il nulla. Posta dunque $x = o$, o pure $x = AB = L$, avremo $E : R = Dddy : dx^3$ $= \int\left(\pm dx \int \pm \frac{Mydx}{Lf}\right) = o$. Si cavi la conseguenza essere nulla la curvatura $1 : R$ del cilindro nei siti *a*, *b*, e nullo parimente il momento della sua elasticità.

XII. Le forze *MH* uguali, e contrarie a quelle, che tentano di far reciprocare il cilindro, e spingono i suoi punti, per esempio *M*, verso la linea retta *AB*, debbono trattenere il cilindro stesso nella positura *aEcFb* totalmente immobile, senza che possa in esso seguire o moto progressivo per l' una, o l' altra direzione *Cc*, *cC*,

cC, o moto di giramento intorno qualſivoglia punto. Queſt' ultimo movimento non ſuccederà, quando i momenti delle forze applicate a deſtra, e a ſiniſtra di qualunque punto M ſieno eguali, e contrarj, e che per conſeguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progreſſivo, qualora s' adempia la condizione, che l' aggregato delle forze traenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc. Abbiamo veduto, che la ſomma delle forze applicate alla porzione aMs eguaglia ad $M:LF\int ydx$: ma $\int ydx$ dinota l' aja $auMPA$; dunque la nominata ſomma delle forze applicate alla parte di cilindro aM ſcelta ad arbitrio è ſempre proporzionale alla corriſpondente aja $auMPA$. Dovendo il cilindro eſſer ugualmente tirato per le due direzioni oppoſte cC, Cc, egli è d' uopo che l' aja poſitiva $aEA+bFB$ pareggi la negativa $EFcE$, dimodochè facendo $x=AB=L$, ſi trovi $\int ydx=0$.

Oſſerveremo in progreſſo, che il cilindro AB ſi può oſcillando adattare ad infinite curve, la metà delle quali tagliano l' aſſe AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più ſemplici fra le dette curve ſi veggono eſpreſſe nelle figure 3, e 4. Pretende il Signor *Eulero*, che le curve del ſecondo genere non ſervano per le vibrazioni delle lamine elaſtiche; ma queſta ſua aſſerzione non è conforme alla verità, potendoſi anco riſpettivamente a tali curve determinare le coſtanti aggiunte nelle integrazioni, di maniera che ſieno eguali i momenti delle forze a deſtra, e a ſiniſtra d'un qualunque punto, e che di più ad $x=AB=L$ corriſponda $\int ydx=0$. L' eſperienza favoriſce i miei penſamenti; imperciocchè ſoſtenendo in bilico una lamina con un dito, ed indi percuotendola, ſi ſente chiaro quel ſuono, che rende la lamina ſteſſa, mentre s' uniforma alla curva della figura 4, che non viene punto diſturbata dal dito, il quale tocca la la-

mina nel sito immobile *C*. Il dito applicato in *C* ammortisce la metà dei suoni della lamina, cioè a dire tutti quelli ch' essa produce, mentre s' adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutte al punto *C* (*Fig.* 3, 5, 7 ecc.) si riferisce la massima ordinata *Cc*.

Integrare l' equazione $\frac{ELfd^4y}{M} = ydx^4$, *e determinare i valori delle costanti aggiunte nelle integrazioni.*

XIII. Pongasi $ELf : M = c^4$, onde s' abbia $c^4d^4y = ydx^4$. Il celebratissimo Sig. *Eulero nel Tomo VII. delle Miscellanee di Berlino* ci ha insegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di questo metodo si trova $y = Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ sen. $x:c + D$ cos. $x:c$ (1), in cui e dinota il numero, che ha per logaritmo l' unità nella logistica delle sottotangente $= 1$. I logaritmi presi nella suddetta logistica si chiamano naturali, o iperbolici; perchè si suole con essi esprimere la quadratura dell' iperbola. Il lodato Autore nella sua eccellente Introduzione all' Analisi degl' infiniti ha computato il valore del numero e, che, presa l' unità come protonumero, si suol nominare la base della logistica $= 2, 7182818$. Ci ha dato parimente nello stesso luogo la serie dei logaritmi iperbolici dall' 1 fino al 10. Per i computi, che siam per fare, basta il sapere, che il numero 10 nelle tavole ha per logaritmo 1, 0000000, e nella logistica iperbolica 2, 3025851, e che nella stessa proporzione si deggiono riferire i logaritmi dell' una e dell' altra logistica, che corrispondono allo stesso numero. Coll' ajuto dunque dei logaritmi delle tavole si potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella sovrapposta formola sen. $x:c$, e cos. $x:c$ dinotano il seno, ed il coseno dell' arco $x:c$ preso nel circolo, il cui raggio $= 1$. A, B, C, D sono quattro

costanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è d' uopo assegnare i convenienti valori.

Si prendano nella nostra equazione le prime, ed indi le seconde, le terze, e le quarte differenze, ed avvertendo essere diff. $e^{x:c} = 1:c\, e^{x:c}\, dx$, diff. sen. $x:c = dx:c$ cos. $x:c$, diff. cos. $x:c = -dx:c$ sen. $x:c$, troveremo

$$dy = \frac{A}{c} e^{x:c} dx - \frac{B}{c} e^{-x:c} dx + \frac{C dx}{c} \text{cos.} \frac{x}{c} - \frac{D dx}{c} \text{sen.} \frac{x}{c} \quad (2)$$

$$ddy = \frac{A}{c^2} e^{x:c} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{-x:c} dx^2 - \frac{C dx^2}{c^2} \text{sen.} \frac{x}{c} - \frac{D dx^2}{c^2} \text{cos.} \frac{x}{c} \quad (3)$$

$$d^3y = \frac{A}{c^3} e^{x:c} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{-x:c} dx^3 - \frac{C dx^3}{c^3} \text{cos.} \frac{x}{c} + \frac{D dx^3}{c^3} \text{sen.} \frac{x}{c} \quad (4)$$

$$d^4y = \frac{A}{c^4} e^{x:c} dx^4 + \frac{B}{c^4} d^{-x:c} dx^4 + \frac{C dx^4}{c^4} \text{sen.} \frac{x}{c} + \frac{D dx^4}{c^4} \text{cos.} \frac{x}{c} \quad (5)$$

Se nell' equazione (5) sostituiremo y in cambio del suo valore $Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ sen. $x:c + D$ cos. $x:c$ somministrato dall' equazione (1), torneremo a trovare la formola differenziale $d^4y = ydx^4 : c^4$.

Le cinque notate formule ci guidano alla determinazione delle costanti.

In primo luogo ad $x = 0$ dee corrispondere $y = b$. Essendo in tal caso $e^{x:c} = 1$, $e^{-x:c} = 1$, sen. $x:c = 0$, cos. $x:c = 1$, la prima equazione si trasforma così $b = A + B + D$ (6).

In secondo luogo m' insegna il numero XI, che posta $x = 0$, o pure $x = L$, deve uguagliarsi a nulla rispettivamente ai punti estremi a, b la somma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$, onde s' abbia $Eddy:dx^2 = \int\left(\pm dx \int \pm Mydx : Lf\right) = 0$, ovvero sostituendo c^4 in luogo di $ELf : M$, $c^4 ddy : dx^2 = \int\left(\pm dx \int \pm ydx\right) = 0$. Fatta pertanto nell' equazione (3) $ddy : dx^2 = 0$, e ponendo prima $x = 0$, indi $x = L$, troveremo

$0 = A + B - D$ (7)

$o = Ae^{L:c} + B^{-L:c} - C$ sen. $L:c - D$ cos. $L:c$ (8).

In terzo luogo posta $x = o$, è parimente nulla l'aja $APMa = \int y dx$: ma come s'è stabilito al numero X $ELf : M . d^3y : dx^3 = c^4 d^3y : dx^3 = \int y dx$; dunque uguagliata a nulla nell'equazione (4) la grandezza $d^3y : dx^3$, e mettendo $x = o$, si presenterà

$o = A - B - C$ (9).

Finalmente al numero XII abbiamo stabilito, che ancor nell'ipotesi di $x = L$ esser dee $\int y dx = o$. Quindi ponendo nell'equazione (4) $d^3y : dx^3 = o$, ed $x = L$, si scoprirà

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} - C$ cos. $L:c + D$ sen. $L:c$ (10).

Col mezzo delle cinque notate condizioni s'assegneranno i loro valori alle quantità costanti A, B, C, D, ed alla frazione $L:c$, la quale servirà poi per determinare la lunghezza f del pendolo semplice isocrono al cilindro AB.

Le formole (7), e (9) mi danno $D = A + B$, $C = A - B$, valori che surrogati nelle formole (8), e (10) fanno loro prendere il seguente aspetto

$o = Ae^{L:c} + Be^{-L:c} (-A+B)$. sen. $L:c (-A-B)$. cos. $L:c$,

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} (-A+B)$. cos. $L:c (+A+B)$. sen. $L:c$.

Si deduce da queste

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-L:c} - \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c}{e^{L:c} - \text{sen. } L:c - \text{cos. } L:c} = \frac{e^{-L:c} - \text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c}{e^{L:c} - \text{cos. } L:c + \text{sen. } L:c} \quad (11),$$

e dall'equazione (11)

$o = 2 - e^{L:c}$ cos. $L:c - e^{-L:c}$ cos. $L:c$, o sia

$e^{2L:c} - \frac{2e^{L:c}}{\text{cos. } L.c} = -1$. Si supplisca il quadrato, ed

estratta poscia la radice si troverà

$$e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} \text{ (12)}.$$

Il primo dei due valori, che per la formola (11) competono alla frazione $A:B$, s'eguaglia a $\frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c}$, il secondo a $\frac{-\text{cos. } L:c}{1+\text{sen. } L:c}$.

Giacchè, come ho testè dimostrato $e^{L:c} = \frac{1-\text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$, sarà, sostituendo una tale grandezza in luogo di $e^{L:c}$ nel primo valore di $A:B$ contenuto nella formola

$$(11) = \frac{\frac{-\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c} - \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c =}{\frac{1-\text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} - \text{sen. } L:c - \text{cos. } L:c}$$

$$\frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c}\left(\frac{-\text{sen. } L:c+(\text{sen. } L:c)^2-\text{sen. } L:c \text{ . cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c-\text{sen. } L:c \text{ . cos. } L:c-(\text{cos. } L:c)^2}\right)$$

: ma $1-(\text{cos. } L:c)^2 = (\text{sen. } L:c)^2$; dunque effettuata questa sostituzione nel denominatore,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c} \times \frac{-\text{sen. } L:c+(\text{sen. } L:c)^2-\text{sen. } L:c \text{ . cos. } L:c}{-\text{sen. } L:c+(\text{sen. } L:c)^2-\text{sen. } L:c \text{ . cos. } L:c}$$

$$= \frac{\text{cos. } L:c}{1-\text{sen. } L:c}.$$

Con pari metodo proverò essere

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-L:c} - \text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c}{e^{L:c} - \text{cos. } L:c + \text{sen. } L:c} = \frac{-\text{cos. } L:c}{1+\text{sen. } L:c},$$

e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm \text{cos. } L:c}{1 \pm \text{sen. } L:c}$. Da queſta formola io ricavo

$$B = A.\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\pm \text{cos. } L:c}\right) = A.\left(\frac{\pm 1 - \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}\right)$$

Eſſendo per la formola (9) $C = A - B$, ſcopriremo

$$C = A.\frac{(\text{cos. } L:c + \text{sen. } L:c \mp 1)}{\text{cos. } L:c}$$

L'equazione (7) determina $D = A + \beta$, e quindi troveraſſi

$$D = A.\frac{(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}{\text{cos. } L:c}$$

Dandoci inoltre la formola (6) $b = A + B + D$, e la (7) $D = A + B$, ne riſulta

$$D = b:2 = A.\frac{(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 2)}{\text{cos. } L:c}.$$

I due valori di D mi ſomminiſtrano quello di

$$A = \frac{b \text{ cos. } L:c}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

Or ecco i valori delle quattro coſtanti, i quali ſi renderanno noti, ridotta che ſia a computo la frazione $L:c$ coll'mezzo dell'equazione (12.)

$$A = \frac{b.\text{cos. } L:c}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \mp 1)} = \frac{b.(\pm 1 + \text{sen. } L:c - \text{cos. } L:c)}{4.\text{sen. } L:c} \quad (13.)$$

$$B = \frac{b.(\pm 1 - \text{sen. } L:c)}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)} = \frac{b.(\mp 1 + \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c)}{4\,\text{sen. } L:c} \quad (14.)$$

$$C = \frac{b.(\mp 1 + \text{sen. } L:c + \text{cos. } L:c)}{2.(\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)} = \frac{b.(\pm 1 - \text{cos. } L:c)}{2.\text{sen. } L:c} \quad (15.)$$

$$D = b:2. = \frac{b\,\text{sen. } L:c}{2.\text{sen. } L:c} \quad (16.)$$

Le ſeconde eſpreſſioni delle coſtanti A, B, C ſi provano eguali alle prime con un breve giro di computo, ch'io laſcio all'induſtria di chi legge.

Soſtituiti queſti valori nell'equazione (1), troveremo

$$\frac{y}{b} = \frac{e^{x:c}\cos. L:c + e^{-x:c}.(\pm 1 - \text{sen. } L:c)}{2.(\cos. L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

$$\frac{(\pm 1 - \cos. L:c).\text{sen. } x:c + \text{sen. } L:c.\cos. x:c}{2\,\text{sen. } L:c} \quad (17).$$

Ridurre a forma più ſemplice la formola (17).

XIV. Prendano le aſſiſſe l' origine dal punto medio C (*fig.* 3 e 4), e poſta $CP = z$, ſarà $\frac{1}{2}L - z = x$. Avremo pertanto $e^{x:c} = e^{L:2c - z:c}$, e giacchè per l'equazione (12) $e^{L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\cos. L:c}\right)}$, ſcopriremo

$$e^{x:c} = e^{-z:c}.\sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\cos. L:c}\right)},\ e^{-x:c} = e^{z:c}\sqrt{\left(\frac{\cos. L:c}{1 \mp \text{sen. } L:c}\right)}.$$

Quindi ſarà

$$\frac{Ae^{x:c} + Be^{-x:c}}{b} = \frac{e^{x:c}\cos. L:c + e^{-x:c}.(\pm 1 - \text{sen. } L:c)}{2.(\cos. L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

$$= \frac{(\pm e^{z:c} + e^{-z:c})\sqrt{(\cos. L:c.(1 \mp \text{sen. } L:c))}}{2.(\cos. L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

$$= \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{2.\left(\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}\right)}.$$ Queſt' ultimo valore dipende da ciò, che per la formola (12) $\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\cos. L:c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\cos. L:c}{1 \mp \text{sen. } L:c}\right)}$$

$$= \frac{\cos. L:c - \text{sen. } L:c \pm 1}{\sqrt{(\cos. L:c.(1 \pm \text{sen. } L:c))}}.$$

La Trigonometria c' iſtruiſce eſſere $(\pm 1 - \cos. L:c).\text{sen. } x:c + \text{sen. } L:c.\cos. x:c = \pm\,\text{sen. } x:c + \text{sen.}\left(\frac{L-x}{c}\right)$, e

sostituendo nell' omogeneo di comparazione in cambio di x il suo valore $\frac{1}{2}L - z$, $(\pm 1 - \text{cos.}\, L{:}c)$. sen. $x{:}c + \text{sen.}\, L{:}c \,\text{cos.}\, x{:}c = \pm \text{sen.}\,(L{:}2c - z{:}c) + \text{sen.}\,(L{:}2c + z{:}c)$. Nella formola (17) alle grandezze espresse per x si sostituiscano le uguali espresse per z or ora determinate, e s' avrà

$$\frac{2y}{b} = \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}} \pm \frac{\text{sen.}(L{:}2c - z{:}c) + \text{sen.}(L{:}2c + z{:}c)}{\text{sen.}\, L{:}c} \quad (18).$$

Abbiamo inoltre $\dfrac{e^{L:2c} + e^{-L:2c}}{\text{cos.}\, L{:}c - \text{sen.}\, L{:}c + 1} = \dfrac{\mp 2 \,\text{cos.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{cos.}\, L{:}c}}$ (a),

$$= \frac{\text{cos.}\, L{:}c - \text{sen.}\, L{:}c + 1}{\sqrt{(\text{cos.}\, L{:}c \,.\, (1 - \text{sen.}\, L{:}c))}}$$

$-e^{L:2c}$

(a) L' accennata riduzione si può dimostrare così. Il secondo membro dell' equazione, lasciato da parte il divisore $\sqrt{\text{cos.}\, L{:}c}$, s' eguaglia, alzandolo al quadrato, alla quantità

$$\frac{(\text{cos.}\, L{:}c)^2 - 2\,\text{sen.}\, L{:}c \,\text{cos.}\, L{:}c + (\text{sen.}\, L{:}c)^2 + 2\,\text{cos.}\, L{:}c - 2\,\text{sen.}\, L{:}c + 1}{1 - \text{sen.}\, L{:}c}$$

$$= \frac{2 - 2\,\text{sen.}\, L{:}c + 2\,\text{cos.}\, L{:}c - 2\,\text{sen.}\, L{:}c \,\text{cos.}\, L{:}c}{1 - \text{sen.}\, L{:}c} = 2 + 2\,\text{cos.}\, L{:}c \,.$$

Il noto Teorema trigonometrico ci suggerisce l' equazione $\text{cos.}\, L{:}c = (\text{cos.}\, L{:}2c)^2 - (\text{sen.}\, L{:}2c)^2$: ma $(\text{sen.}\, L{:}2c)^2 = 1 - (\text{cos.}\, L{:}2c)^2$; dunque $1 + \text{cos.}\, L{:}c = 2\,(\text{cos.}\, L{:}2c)^2$, o sia $2 + 2\,\text{cos.}\, L{:}c = 4\,(\text{cos.}\, L{:}2c)^2$. Il perchè sostituito in cambio di $2 + 2\,\text{cos.}\, L{:}c$ lo scoperto valore, estratta la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\text{cos.}\, L{:}c}$, troveremo $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \dfrac{\text{cos.}\, L{:}c - \text{sen.}\, L{:}c + 1}{\sqrt{(\text{cos.}\, L{:}c \,.\, (1 - \text{sen.}\, L{:}c))}}$

$$= \frac{\mp 2\,\text{cos.}\, L{:}2c}{\sqrt{\text{cos.}\, L{:}c}} \,.$$

Nella formola (*a*) i segni del meno, e del più antepoſti a 2 cof. $L:2c$ ſono adattati alle due circoſtanze, quello che cof. $L:2c$ ſia quantità negativa, queſto che cof. $L:2c$ ſia quantità poſitiva. I ſegni più e meno nella formola (*b*), che precedono 2 ſen. $L:2c$, ſervono ai due caſi, che ſen. $L:2c$ ſia negativo, o poſitivo.

La ſurrogazione dei nuovi valori ci ſomminiſtra le due ſeguenti equazioni, che nella più ſemplice forma eſprimono le curve dei due diverſi generi analoghe a quelle, che ſono nelle figure 3, e 4 delineate

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ cof. } L:2c} + \frac{\text{cof. } z:c}{\text{cof. } L:2c} \quad (19)$$

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ ſen. } L:2c} + \frac{\text{ſen. } z:c}{\text{ſen. } L:2c} \quad (20).$$

Secondo ciò, che poco fa ho notato, i ſegni ſuperiori nell' equazioni (19), e (20) ſuppongono cof. $L:2c$, ſen. $L:2c$ grandezze negative, gl' inferiori le ſuppongono poſitive.

XV. Le coſe, che ſono per dire, richiedono, che riſpettivamente alla formola (19) ſi dimoſtri eſſere

$$-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{-1 + \text{ſen. } L:c + \text{cof. } L:c}{\sqrt{(\text{cof. } L:c \cdot (1 - \text{ſen. } L:c))}} = \frac{\mp 2 \text{ſen. } L:2c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}.$$

E primieramente la formola (12) ci dà per riguardo all' equazione (19) $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = -\sqrt{\left(\frac{1 - \text{ſen. } L:c}{\text{cof. } L:c}\right)}$

$+\sqrt{\left(\frac{\text{cof. } L:c}{1 - \text{ſen. } L:c}\right)} = \frac{-1 + \text{ſen. } L:c + \text{cof. } L:c}{\sqrt{(\text{cof. } L:c \cdot (1 - \text{ſen. } L:c))}}$. Provo in ſecondo luogo, che s' avvera l'equazione $\frac{-1 + \text{ſen. } L:c + \text{cof. } L:c}{\sqrt{(1 - \text{ſen. } L:c)}} = \mp 2 \text{ ſen. } L:2c$. Abbiamo dalla Trigonometria 2 ſen. $L:c = 4$ ſen. $L:2c$ cof. $L:2c$, e moltiplicando, e dividendo per $1 -$ ſen. $L:c$,

$\frac{2\text{ſen. } L:c - 2(\text{ſen. } L:c)^2}{1 - \text{ſen. } L:c} = 4$ ſen. $L:2c$ cof. $L:2c$. Pongo in

cambio d' uno de' due quadrati $-(\text{sen. } L:c)^2$ il ſuo valore $-1+(\text{cos. } L:c)^2$, e mi ſi preſenta

$$\frac{-1+2\text{sen.}L:c-(\text{sen.}L:c)^2+(\text{cos.}L:c)^2}{1-\text{sen. } L:c} = 4\,\text{sen. } L:2c\,\text{cos. } L:2c.$$

Dall' annotazione (*a*) ricavaſi $\mp 2\,\text{cos. } L:2c = \frac{1-\text{sen. } L:c+\text{cos.}L:c}{\sqrt{(1-\text{sen. } L:c)}}$. Soſtituiſcaſi queſto valore, e dividendo poſcia per lo ſteſſo, ritroveraſſi $\frac{-1+\text{sen.}L:c+\text{cos.}L:c}{\sqrt{(1-\text{sen. } L:c)}} = \mp 2\,\text{sen. } L:2c$, e perciò $-e^{L:2c}+e^{-L:2c} = \frac{-1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos.}L:c.(1-\text{sen.}L:c))}} = \frac{\mp 2\,\text{sen. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19.) ſi deducono i ſeguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l'aſſiſſa $z=0$, ne riſulterà il valore dell'applicata $y=Cc$ in tutte le curve analoghe alla figura (3.), dalle quali viene l'aſſe AB tagliato in un numero pari di punti. Avremo pertanto $Cc:Aa=y:b=\mp\frac{\sqrt{(\text{cos. } L:c)+1}}{2\,\text{cos. } L:2c}=1:2\,\text{sec. } L:2c\mp\text{sec. } L:c\sqrt{\text{cos. } L:c}$ (*e*).

Dal ridurre a computo riſpettivamente a ciaſcuna curva del genere di quella della figura (3.) la frazione $L:c$ dipende la determinazione del valore della linea Cc.

(*e*) Stando come il ſeno tutto al coſeno, così la ſecante al ſeno tutto, ſi verifica l'equazione $\text{sec. } L:2c=\frac{1}{\text{cos. } L:2c}$, o ſia $\frac{1}{2}\,\text{sec. } L:2c=\frac{1}{2\,\text{cos. } L:2c}$.

Mi riſervo d'inſegnare il metodo d'un tal calcolo al numero XIX, e ſeguenti.

2. Si prendano le differenze nella formola (19.), e ſcopriraſſi $2cdy:bdz$ cof. $z:2c = \frac{(\mp e^{xi} \pm e^{-xi})\sqrt{(\text{cof. } z:c)}}{2}$ $-$ ſen. $z:c$ (21.). Facciaſi $dy:dz = 0$, e le radici dell'equazione $(\mp e^{xi} \pm e^{-xi}).\sqrt{(\text{cof. } z:c)} - 2$ ſen. $z:c = 0$ determineranno i valori delle aſſiſſe z, alle quali corriſpondono le maſſime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella figura (3) delineata. Secondo che queſte curve tagliano l'aſſe AB in 2, 4, 6, 8 punti ecc., i numeri delle predette radici ſaranno 1, 3, 5, 7 ecc. Una delle radici della noſtra equazione ſi è $z = 0$, e perciò nelle curve, di cui parliamo, aſcende al maſſimo l'ordinata Cc corriſpondente al punto medio C del cilindro AB.

3. Fatte $y = 0$, ſi troveranno i punti 2, 4, 6, 8 ecc., nei quali l'aſſe AB vien tagliato dalle curve compreſe nell'equazione (19.). Avremo pertanto $\mp e^{xi} \mp e^{-xi} + 2 \text{ cof. } z:c = 0$. Mentre il cilindro oſcilla, queſti punti reſtano immobili, e quindi ſotto ponendo ai punti per eſempio E, F (*fig.* 3.) due appoggi, non ſono da eſſi traſtornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura eſprime il modo principale, onde ſi vibra il cilindro, rendendo il ſuono fra tutti il più grave. I punti ſtabili E, F diſtano dalle eſtremità A, B del cilindro per le linee EA, FB, che come vedremo al numero XXX. poco calano dalla quarta parte della lunghezza AB. Negli ſtrumenti formati di cilindri i punti E, F ripoſano ſu due ſcannelli, eſſendo riuſcito alla pratica col mezzo di replicati tentativi di accorgerſi d'una proprietà, ſenza della quale non potrebbe la Muſica valerſi dei noſtri corpi ſonori.

4. Differenzio nuovamente la formola (21.), e ſcopro

tiva si riferiscono ordinate uguali, e similmente situate.

Se dee pareggiare il nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto estremo b delle forze applicate al cilindro $aEcFb$, egli è necessario, che le forze, ovvero le ordinate dalla nostra curva ad esse proporzionali sieno parte positive, e parte negative. Il perchè passando fra i due rami cEa, cFb la somiglianza testè descritta, si richiede indispensabilmente, che ciascuno tagli l'asse AB almeno in un punto, come nella figura (3.) succede.

La somma dei momenti in riguardo al punto M delle forze applicate alla porzione di cilindro aM è proporzionale a $ddy:dz^2 = ddy:dz^2$, o sia alla quantità $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c) - 2 \text{ cos. } z:c}$. Taglio $C\mathfrak{Q} = CP$, e scopro l'aggregato dei momenti rispettivamente al punto N delle forze applicate alla parte $aEcN$ del cilindro come $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c) - 2 \text{ cos.} - z:c}$. L'eguaglianza delle ritrovate grandezze mostra, che sono eguali le somme dei nominati momenti: ma l'aggregato dei momenti rispettivamente al punto N delle forze applicate al cilindro $aEcN$ pareggia quello in relazione al punto M delle forze applicate al cilindro $bFcM$; dunque s'eguagliano le somme dei momenti a destra, e a sinistra del punto M preso ad arbitrio, i quali perciò fanno equilibrio e coll'elasticità del cilindro nel sito M, e tra loro, dimodochè non può seguire verun moto di rotazione.

5. Prese le differenze nella formola (22.) avremo $4c^3d^3y:bdz^3 . \text{cos. } L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c) + 2 \text{ sen. } z:c}$ (23.). Dal numero X. raccoglies esser $ELf:M. d^3y:dx^3 = c^4d^3y:dx^3 = \int ydx$. Nel numero XII. ho notato, che la somma delle forze applicate al cilindro aM è proporzionale all'aja $aMPA = \int ydx = \int -ydz$ S'inferisca, che questa somma serba la ragione di $c^4d^3y:dx^3 = c^4d^3y:-dz^3$, o sia per l'equazione (23.) della quantità $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c) - 2 \text{ sen } z:c}$. Qualora

s'abbia $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) \sqrt{(\text{cos. } L:c) - 2 \text{ sen. } z:c} = 0$, s'eguaglierà a nulla l'aggregato delle forze applicate al cilindro *aM*. L'ultima formola ha sempre le tre radici $z = 0$, $z = L:2$, $z = -L:2$. Posta $z = 0$, chiaramente si scopre essere $e^{0:c} \mp e^{-0:c} = \pm 1 \mp 1 = 0$, 2 sen. $0:c = 0$. Questa radice mi addita eguagliarsi a nulla l'aggregato delle forze applicate alla metà *aEc* del cilindro, e che per conseguenza l'aja positiva *aEA* pareggia la negativa *CEc*. L'altre due radici $z = L:2$, $z = -L:2$ mi danno quella $(\pm e^{L:2c} \mp e^{-L:2c}) \sqrt{(\text{cos. } L:c) - 2 \text{ sen. } L:2c} = 0$, questa $(\pm e^{-L:2c} \mp e^{L:2c}) \sqrt{(\text{cos. } L:c) - 2 \text{ sen.} - L:c} = 0$; e giacchè $-2 \text{ sen.} - L:2c = 2 \text{ sen. } L:2c$, trovo in tutti e due i casi $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \pm \frac{2 \text{ sen. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, equazione, che al numero XV. ho dimostrato verificarsi. Dalla radice $z = L:2 = CA$ si ricava, che una somma di forze uguali a nulla s'applica alla porzione *aM* del cilindro, quando essa pareggia il nulla. Finalmente, e questo è quel che più importa, la radice $z = -L:2 = CB$ ci manifesta esser nullo l'aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro *AB*, cioè a dire che le forze negative s'eguagliano alle positive. In sì fatta guisa non potendo il cilindro girarsi intorno qualsivoglia punto *M*, ed essendo egualmente tirato per le direzioni opposte *Cc*, *cC*, viene trattenuto immobile nella positura *aEcFb* dalle forze *MH* uguali, e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, e rimosse esse forze *MH*, non concepisce altro moto, che di sola vibrazione.

XVII. Incontreremo nel corollario 5. dedotto dalla formola (20) l'equazione $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp \text{cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, la di cui verità presentemente dimostro. L'equazione

(12) ci somministra rispettivamente alla formola (20)
$e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1+\text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}\right)} + \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } L:c}{1+\text{sen. } L:c}\right)}$
$= \frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos. } L:c \,.\, (1+\text{sen. } L:c))}}$. Egli è d' uopo adunque provare adempiersi l' equazione $\frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c)}}$
$= \mp 2 \text{ cos. } L:2c$.

Moltiplico, e divido per $1+\text{sen. } L:c$ il primo membro dell' equazione $-2 \text{ sen. } L:c = -4 \text{ cos. } L:2c$, onde s' abbia $\frac{-2\text{sen. } L:c - 2(\text{sen. } L:c)^2}{1+\text{sen. } L:c} = -4 \text{ cos. } L:2c \,.\, \text{sen. } L:2c$.
Il luogo d' uno de' due quadrati $-(\text{sen. } L:c)^2$ colloco il suo valore $-1+(\text{cos. } L:c)^2$, e trovo
$\frac{-1-2\text{sen. } L:c-(\text{sen. } L:c)^2+(\text{cos. } L:c)^2}{1+\text{sen. } L:c} = -4 \text{ cos. } L:2c \,.\, \text{sen. } L:2c$:
ma per l' annotazione $(b) \pm 2 \text{ sen. } L:2c =$
$\frac{-1-\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c}}$; dunque surrogando un tal valore, o dividendo poscia per lo stesso, scopriremo
$\frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. } L:c)}} = \mp 2 \text{ cos. } L:2c$, e conseguentemente sarà $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{1+\text{sen. } L:c+\text{cos. } L:c}{\sqrt{(\text{cos. } L:c \,.\, (1+\text{sen. } L:c))}}$
$= \frac{\mp 2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$.

Corollarj, che si deducono dalla formola (20).

XVIII. Dalla formola (20) ne nascono i corollarj seguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve analoghe

analoghe alla figura (4), che tagliano l' asse AB nel punto medio C. In fatti posta $z = CP = 0$, si trova $y = 0$. Le nostre curve hanno la comune proprietà, che a due assisse uguali CP, $C\mathcal{Q}$, una positiva, e l' altra negativa corrispondono due ordinate uguali una positiva, e l' altra negativa, o a rovescio PM, $\mathcal{Q}N$. Se nell' equazione (20) $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}L:c)}}{2 \text{ sen. } L:2c}$ $+ \frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c}$ cangeremo il segno all' incognita z, scopriremo $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}L:c)}}{2 \text{ sen. } L:2c} + \frac{\text{sen.} - z:c}{\text{sen. } L:2c}$. Il paragone delle due espressioni dimostra, ch' essendo sen. $-z:c = -$ sen. $z:c$, a pari assisse CP, $C\mathcal{Q}$ quella positiva, e questa negativa si riferiscono ordinate uguali PM, $\mathcal{Q}N$, ma affette da segni contrarj. Quindi le due metà di curva $CgEa$, $CkFb$ sono eguali, e simili, ma inversamente collocate e in riguardo all' assisse, e in riguardo all' ordinate. Lo stesso dicasi delle due porzioni di curva $aEgCkN$, $bFkCgM$. Si osservi, che a punti analoghi per esempio g, k di queste porzioni ci vanno applicate forze uguali e contrarie, e che per conseguenza la somma dei momenti rispettivamente ai punti N, M delle forze applicate ad esse porzioni sono fra loro eguali, ma una positiva, e l' altra negativa.

2. Col mettere $y = 0$, si determinano i punti 3, 5, 7, 9 ecc., nei quali le curve contenute nell' equazione (20) tagliano l' asse AB. Una tal ipotesi mi somministra la formola $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos.}L:c)} + 2 \text{ sen. } z:c = 0$, che va sempre fornita della radice $z = 0$. Mentre adunque il cilindro riposa equilibrato sopra un sostegno sottoposto al punto medio C, può ripiegarsi in tutte le curve espresse dall' equazione (20), e rendere i suoni ad esse curve consaccenti, fra' quali il più gra-

ve si è quello, che produce il cilindro, quando si conforma alla curva della figura (4). Se gli appoggi cadono sotto gli altri punti immobili E, F, si sente lo stesso suono. Chi vuol udire un suono chiaro e forte, avverta di non battere il cilindro ne' punti stabili E, C, F. I siti più rimoti dai punti fissi sono i più opportuni per batterlo, e specialmente i due G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. Non riesce molto utile il percuotere il cilindro in vicinanza dei punti estremi A, B; perchè parte della forza s' impiega a far girare il cilindro intorno al più vicino sostegno.

3. Differenzio la formola (20), onde s' abbia $4cdy : -bdz$. sen. $L:2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2 \text{ cos. } z:c$ (24). Le radici dell' equazione $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2 \text{ cos. } z:c = 0$ determinano i punti per esempio G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate saranno 2, 4, 6, 8 ecc., secondo che le curve taglieranno l' asse AB in punti 3, 5, 7, 9 ecc.

4. Prendo di bel nuovo le differenze nell' equazione (24), e trovo $4c^2 ddy : bdz^2$. sen. $L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2$ sen. $z:c$ (25). Essendo la somma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $ddy:dz^2$, serberà altresì la ragione della grandezza $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2$ sen. $z:c$. In que' siti, dove la predetta somma s' eguaglia a nulla, egli è d' uopo che s' adempia l' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos. } L:c)} - 2$ sen. $z:c = 0$. Ha sempre questa le tre radici $z = \pm L:2$, $z = 0$. Posta $z = \pm L:2$, si trova $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\pm 2 \text{ sen. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, secondo a ciò che ho dimostrato nell' annotazione (*b*). La prima radice determina il punto A, e m' insegna, che quando la parte aM del cilindro

pareggia il nulla, ed il punto *M* coincide col punto *a*, è parimente nulla la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto *M*, ovvero *a* delle forze ad eſſa parte applicate. Dalla ſeconda radice, che ci dà il punto *B*, ſi raccoglie uguagliarſi a nulla l'aggregato dei momenti in riguardo al punto *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *agCkb*. La terza radice ſegna il punto *C*, e fa paleſe, che al nulla equivale la ſomma dei momenti per rapporto al punto *C* delle forze applicate alla metà del cilindro *aEgC*. Noto, che nel ſito *C* interviene un fleſſo contrario, e che il numero di tali fleſſi s' eguaglia a quello dei punti, nei quali le curve tagliano l' aſſe *AB*, detratto il binario.

Eſſendo le forze applicate a' punti analoghi delle due metà *aEgC*, *bFkC* del cilindro ſempre uguali e contrarie, egli è manifeſto, che tali pure ſono le ſomme dei momenti delle forze applicate ed eſſe metà riſpettivamente al punto medio *C*. Le dette ſomme frattanto debbono eſſere amendue o poſitive, o negative; perchè hanno da ſtare in equilibrio e tra loro, e colla forza elaſtica del cilindro nel ſito *C*. Le due condizioni, che ſembrano aſſolutamente ripugnanti, ſi conciliano inſieme, quando le mentovate ſomme s' eguagliano a nulla, come effettivamente ſuccede.

E quindi cade in acconcio la rifleſſione, eſſere neceſſario che le noſtre curve taglino l' aſſe almeno in tre punti. Se le forze applicate alla metà *aEgC* del cilindro hanno da formar equilibrio riſpettivamente al punto *C*, fa di meſtieri che ſiano parte poſitive e parte negative, e queſta circoſtanza indiſpenſabilmente richiede, che la curva *aEgC* ſia parte al diſotto, e parte al diſopra dell' aſſe *AB*, e che per conſeguenza l' interſechi almeno in un punto *E*. Lo ſteſſo dicaſi della curva *bFkC*, la quale dee tagliare l' aſſe *AB* almeno in un punto *F*. S' aggiunga il punto *C*, e ſi troveranno tre per lo meno i punti d' interſezione.

Segno $C\mathfrak{Q} = CP$, e cangiato il segno all' incognita z nella formola (25) $4c^3ddy : bdz^3 \text{ sen. } L : 2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos. } L : c) - 2 \text{ sen. } z : c}$, trovo $4c^3ddy : bdz^3 . \text{ sen. } L : 2c = (\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{(\text{cos. } L : c) - 2 \text{ sen. } z : c}$, o sia ponendo in cambio di $-2 \text{ sen. } z:c$ la quantità eguale $2 \text{ sen. } z:c$ $4c^3ddy : bdz^3 . \text{ sen. } L : 2c = (\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos. } L : c) + 2 \text{ sen. } z : c}$. Paragonati insieme gli omogenei di comparazione della formola (25), e dell' ultima, si scoprono eguali, ma uno negativo in riguardo all' altro. Esprime il primo la somma dei momenti rispettivamente al punto qualunque M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro, e dal secondo vien dinotata la somma dei momenti in riguardo al punto N delle forze applicate alla parte di cilindro $aEgCkN$. I predetti aggregati adunque sono eguali, e contrarj: ma altresì eguali e contrarj, come ho notato nel Corollario 1, sono gli aggregati di momenti rispettivamente ai punti N, M delle forze applicate alle porzioni di cilindro $aEgCkN$, $bFkCgM$; dunque passa una perfetta uguaglianza fra le somme dei momenti riferiti al punto M delle forze applicate alle parti di cilindro da esso punto M divise; ed essendo le nominate somme amendue cospiranti, s' equilibrano mutuamente, dimodo che il cilindro non può far moto alcuno di giramento intorno qualsivoglia punto M scelto ad arbitrio.

5. Si differenzj la formola (25), onde s' abbia $4c^3d^3y : -bdz^3 . \text{ sen. } L:2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos. } L:c) + 2 \text{ cos. } z:c}$ (26). La somma delle forze applicate alla porzione di cilindro aM, che ha da essere proporzionale a $d^3y : -dz^3$, dee serbare altresì la ragione della quantità $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cos. } L:c) + 2 \text{ cos. } z:c}$. S' eguaglierà a nulla la detta somma, quando si verifichi l' equazione $e^{z:c} + e^{-z:c} = \frac{\mp 2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, a cui apparten-

gono le due radici $z = \pm L{:}2$. In fatti sostituito in luogo di z prima l' uno, indi l' altro valore, trovo in tutti e due i casi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{ cos. } Lx}}$, formola, che al numero XVII. ho provato esser vera. La radice $z = L{:}2$ m' istruisce, che quando la porzione aM del cilindro eguaglia il nulla, s' applica ad essa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -L{:}2$ ci viene additato, equivalere al nulla la somma delle forze applicate all' intero cilindro AB, il che interviene, qualora le forze negative pareggiano le positive.

Si cavi l' importantissima conseguenza, che ancora quando il cilindro AB s' adatta alle curve del secondo genere, dalle quali l' asse AB viene tagliato in un numero impari di punti, si adempiono le due proprietà, ch' esso non possa rivolgersi intorno qualsivoglia punto M, e che sia del pari tirato da due somme di forze uguali, e contrarie. Quindi le forze MH eguali ed opposte a quelle, che tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel sito $aEgCkFb$, e tolte di mezzo esse forze, altro movimento, salvochè quello di vibrazione, non gli è permesso di poter acquistare.

Ridurre a computo la grandezza, o sia l' angolo L:c.

XIX. Prendo nuovamente per mano la formola (12) $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$, e fatta la riflessione, che tanto $e^{L:c}$, quanto $1 \mp$ sen. $L{:}c$ sono sempre quantità positive, ne inferisco, che sotto tal classe dee parimente riporsi cos. $L{:}c$. Fatto centro in C, col raggio $CA = 1$ (*fig.* 9) descrivasi il circolo $ABab$, il quale dalle linee Aa, Bb venga partito in quattro quadranti. Se il coseno CG dell' angolo ACF, o pure il coseno Cg dell' an-

golo ACf hanno da essere positivi, il che succede, quando la loro direzione è da C verso A, si rende necessario che i lati CF, Cf cadano dentro i quadranti ACB, ACb. Per la qual cosa l' angolo $L:c$ potrà ricevere infiniti valori, i quali staranno o fra l' angolo nulla e l' angolo retto, o fra i tre e i quattro retti, o fra i quattro e i cinque, o fra i sette e gli otto, o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici, o fra i dodici e i tredici ecc. S' esprima colla lettera q l' angolo retto, o sia il quadrante di circolo, il cui raggio $= 1$, e chiamato ϕ quell' angolo minor del retto, per cui l' angolo $L:c$ differisce da un determinato numero di retti, ci si presenteranno le seguenti equazioni

1. $L:c = q - \phi$
2. $L:c = 3q + \phi$
3. $L:c - 5q - \phi$
4. $L:c = 7q + \phi$
5. $L:c = 9q - \phi$
6. $L:c = 11q + \phi$
7. $L:c = 13q - \phi$

ecc.

Le formole, cui stanno a lato i numeri impari, assegnano all' angolo $L:c = ACF$ valori tali, che il lato CF cade sempre dentro il quadrante ACB. Al contrario le formole segnate coi numeri pari attribuiscono all' angolo $L:c = ACf$ quelle grandezze, mercè le quali il lato Cf è costantemente compreso dentro il quadrante ACb.

Al punto A del circolo $ABab$ conduco la tangente indefinita HAb, e diviso per metà ne' punti I, i i due angoli ACF, bCf, ciascun de' quali vien dinotato dalla specie ϕ, delineo le secanti CIH, Cib. Descritte le linee FG, fg parallele a Bb, FN, fn parallele ad Aa, si tirino le rette FB, Fb, fb, fB.

Insistendo sopra lo stesso arco FB i due angoli FbB

alla circonferenza, FCB al centro, si corrispondono nella ragione 1 : 2; ma per la costruzione l' angolo FCB è doppio dell' HCB; dunque passa eguaglianza fra gli angoli FbA, HCB. Si osservi eguagliarsi gli angoli alterni HCB, CHA, e si deduca l' egualità degli angoli FbM, CHA nei triangoli rettangoli FbM, CHA, i quali perciò sono simili, e ci somministrano l'analogia $bM : MF :: HA : AC$. Giacchè $FG = MC$ è il seno dell' angolo $ACF = L:c$, scopriremo $bM = 1 + \text{sen. } L:c$. Abbiamo inoltre $MF = \text{cos. } L:c$, ed altresì $HA = \text{cos. } \frac{1}{2}\phi$, cioè a dire la linea HA eguale alla cotangente dell' angolo BCI metà del $BCF = \phi$. Ecco adunque l' espressione analitica della sovrapposta analogia $1 + \text{sen. } L:c$; $\text{cos. } L:c :: \text{cos. } \frac{1}{2}\phi : 1$, da cui deriva l' equazione $\frac{1 + \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} = \text{cos. } \frac{1}{2}\phi$. Abbiamo superiormente notato, che la formola $e^{L:c} = \frac{1 + \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$ ci guida all'equazione (20) propria delle curve del secondo genere, che tagliano l' asse AB (*fig.* 4) in un numero impari di punti. S' inferisca pertanto, che a tali curve servono gli angoli ACF (*fig.* 9), il cui lato CF cade dentro il quadrante ACB, e che s' eguagliano ad angoli retti 1, 5, 9, 13 ecc. meno l' angolo ϕ.

Collo stesso progresso dimostrerò verificarsi l'analogia $Bm : mf :: bA : AC$. Noto ch' essendo negativo il seno $gf = Cm$ dell'angolo $ACf = L:c$, la linea Bm s'eguaglia ad $1 - \text{sen. } L:c$; e quindi la premessa analogia s' esprimerà così $1 - \text{sen. } L:c : \text{cos. } L:c :: \text{cot. } \frac{1}{2}\phi : 1$, e ne risulterà l' equazione $\frac{1 - \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} = \text{cot. } \frac{1}{2}\phi$. Fatta l' avvertenza, che dall' equazione $e^{L:c} = \frac{1 - \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$ deriva la formola (19)

ſpettante alle curve del primo genere, che interſecano l'aſſe *AB* (*fig.* 3.) in un numero pari di punti; ſi deduca ſervire a ſi fatte curve gli angoli *ACf* (*fig.* 9), il cui lato *Cf* ſta dentro il quadrante *ACb*, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11 ecc. più l'angolo ϕ.

Le coſe dette ci moſtrano a dito adempierſi l'equazione $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} = \text{cot. } \frac{1}{2}\phi$, la quale comprende le curve del primo, e del ſecondo genere. Facendo tranſito dai numeri ai logaritmi, e richiamando a memoria eſſere log. $e = 1$, troveremo $L:c = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$.

XX. Prima di paſſar oltre, egli è d'uopo provare, che il valore $L:c = q - \phi$ non può convenire a veruna curva del ſecondo genere, alla quale ad un cilindro, che oſcilla, ſia conceſſo adattarſi. Eſſendo l'angolo $L:c = q - \phi$ minore del retto, ſcopreſi poſitivo il ſeno dell'angolo $L:2c$. Qualmente ho avvertito al numero XIV. i ſegni inferiori della formola (20.) ſuppongono ſen. $L:2c$ grandezza poſitiva. Nel caſo adunque, che preſentemente ſi eſamina, avremo $\frac{2y}{b} = \frac{(e^{z:c} - e^{-z:c}) \sqrt{(\text{cos. } L:c)}}{2 \text{ sen. } L:2c} + \frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c}$. Poſto $L:c = q - \phi$, non può l'ordinata y pareggiare il nulla, ſalvochè nella circoſtanza, che ſia $z = 0$. Quindi non s'adempirebbe quello, che nel Corollario 4. del numero XVIII. ho dimoſtrato dover ſuccedere, che la curva (*fig.* 4.) *aEgCkFb* interſechi l'aſſe *AB* almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla; e giacchè il maſſimo valore, che poſſa attribuirſi a z, ſi è $L:2$, ci accorgeremo eſſere ſempre poſitivo ſen. $z:c$, ed altresì il termine $\frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c}$. Conciosſiachè $e = 2,7182818$, ſcopriremo le due quantità $e^{z:c}$, $e^{-z:c}$ l'una maggiore, e l'altra minore dell'unità, ed

ed inferiremo, che il termine $\frac{(e^{z:c}-e^{-z:c}).\sqrt{\text{cos. } L:c}}{2 \text{ sen. } L:2c}$ si mantiene positivo costantemente. Conchiudasi, che all' assissa z positiva corrisponderebbe l'ordinata y affermativa; essendo $2y:b$ uguale alla somma di due termini sempre positivi, e che contro la natura della nostra equazione la curva $CgEa$ caderebbe tutta al disotto del semiasse CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C ed A.

In simil guisa dimostrerò, che supponendo z minore del nulla, vale a dire negativa, sarebbe sempre negativa l'ordinata y, e stando tutta la curva $CkFb$ al disopra del semiasse CB, non l' intersecherebbe in verun punto medio fra C e B.

XXI. Escluso il valore $L:c = q - \phi =$ log. cos. $\frac{1}{2}\phi$, registro nella seguente tavola quelli, che sono confaccenti all'equazioni (19) e (20), o sia alle curve del primo, e del secondo genere.

1. $L:c = 3q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
2. $L:c = 5q - \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
3. $L:c = 7q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
4. $L:c = 9q - \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
5. $L:c = 11q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
6. $L:c = 13q - \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$

ecc.

Si trova il logaritmo iperbolico della cotangente d'un qualunque angolo, prendendo il lagaritmo delle tavole, sottraendo il logaritmo del seno tutto, e moltiplicando il residuo per 2, 3025851 (*f*). Per alleg-

(*f*) I logaritmi dei seni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla stessa logistica, e differiscono solo nel protonumero, a cui si assegna il logarit-

gerire una tal fatica, torna in acconcio il nuovamente ricorrere ai logaritmi. Sia u il logaritmo iperbolico della cotangente dell'angolo $\frac{1}{2}\phi$. Prendasi dalle tavole il logaritmo d'essa cotangente, e fatta la detrazione

---

mo nulla. I primi logaritmi hanno per protonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire l'unità divisa pel seno tutto: e quindi all'unità tocca il logaritmo 5, 0000000. I secondi logaritmi accettano siccome protonumero l'unità. Si cavi la conseguenza, che si fa transito da quei logaritmi a questi, scemando per 5, 0000000 i logaritmi delle tavole dei seni.

Si chiamino T, t le cotangenti, l'una presa dalle tavole, e l'altra relativa ad un circolo di raggio $= 1$, ambe corrispondenti allo stesso angolo $\frac{1}{2}\phi$, le quali debbono stare come i raggi 100000, 1. Avremo pertanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, sarà passando ai logaritmi $\log. \frac{1}{100000} + \log. T - \log. 1 = \log t$: ma nelle tavole dei seni $\log. \frac{1}{100000} = 0$, $\log. 1 = 5,0000000$; dunque $\log. T - 5,0000000 = \log. t$. Ho fatta l'osservazione, che si fa passaggio dai logaritmi delle tavole de' seni a quelli dei numeri, minorando i primi per 5, 0000000. Il perchè se $\log. T$ si seguiti a prendere nelle tavole dei seni, e $\log. t$ si prenda nelle tavole dei numeri, avremo $\log. T - 10, 0000000 = \log. 1$.

Tramuteremo i logaritmi comuni in iperbolici premessa la riflessione, che riconoscendo entrambi per protonumero l'unità, i logaritmi d'un qualunque numero serbano la proporzione dei logaritmi d'un numero da-

del logaritmo del seno tutto, quello che avanza si chiami v. Essendo adunque $u = 2, 3025851 . v$, avremo prendendo nelle tavole i logaritmi dei numeri, log. u = log. $v + 0, 36221571$, e giacchè $u = nq \pm \phi$, sarà altresì log. u = log. $(uq \pm \phi)$. Per determinare quest' ultimo logaritmo, l' angolo ϕ deve esprimersi in parti del raggio nella stessa guisa, che parimente in parti del raggio si dinota l' angolo retto $q = 1, 5707963$. Otterremo l'intento, se ridurremo l'angolo ϕ in minuti secondi, e dal logaritmo di cotal numero sottrerremo costantemente $5, 3144251$ (*g*). Così ne risulterà log. ϕ, il quale facendo ritorno ai numeri, ci somministrerà il valore dell' angolo ϕ, da cui dipende quello dell' angolo $L:c = u = nq \pm \phi$. Ho detto, che dal logaritmo del numero dei secondi componenti l' angolo ϕ

---

to. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 sono $1;2,3025851$; dunque facendo

$1 : 2,3025851 :: \log. T - 10,0000000 :$

$(\log. T - 10,0000000) . 2,3025851$, il quarto termine esprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

(*g*) Abbiamo notato essere l' angolo retto $q = 1, 5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo stesso angolo s' eguaglia a secondi 324000. Sia N il numero dei minuti secondi, ond' è composto l' angolo ϕ, e dall' analogia $324000 : 1, 5707963 :: N : \phi$ ricaveremo il valore dell' angolo ϕ espresso in parti del raggio, cioè a dire $\frac{N. 1,5707963}{324000} = \phi$, o facendo transito ai logaritmi

log. N + log. $1, 5707963$ − log. 324000 = log. ϕ : ma log. $324000 = 5, 5105450$, log. $1, 5707963 = 0, 1961199$, e $5, 5105450 - 0, 1961199 = 5, 3144251$; dunque log $N - 5, 3144251 =$ log ϕ, come dovea dimostrarsi.

dee ſottrarſi 5, 3144251. Concioſſiachè nei computi, che ſono per fare, troveremo ſempre il primo logaritmo minore del ſecondo, s' accreſca la caratteriſtica di quello per 10, e fatta poſcia la ſottrazione, ne proverrà un logaritmo, la cui caratteriſtica ſupererà la vera per 10. Queſt' aumentazione ci addita, che in cambio di ſcrivere il numero corriſpondente al noſtro logaritmo nella ſede, che richiede la caratteriſtica riſultante dalla ſottrazione, lo dobbiamo traſportare dieci ſedi all' indietro.

XXII. Fatte queſte neceſſarie avvertenze per agevolare, e dedurre i calcoli rettamente, non ſarà difficile l' aſſegnare col mezzo delle approſſimazioni il valore dell' angolo ϕ riſpettivamente a qualſivoglia ſpecie di oſcillazioni. Imperciocchè attribuendo a ϕ alquanti valori ad arbitrio, e determinando col computo $nq \pm \phi$, e log. cof. $\frac{1}{2}\phi$, ſi ſcopriranno i limiti, dentro de' quali ſta il vero valore dell' angolo ϕ; e ſe tali limiti ſono troppo rimoti, ſe ne troveranno de' più vicini, e da queſti finalmente ſi dedurrà il giuſto valore dell' angolo mentovato. Pongo ſotto gli occhi di chi legge i calcoli ſino al numero 6, e noto eſſer inutile il continuarli più avanti; atteſochè l' angolo ϕ diviene così menomiſſimo, che ſi può fiſicamente ſupporre $L : c = nq$.

Computo pel numero 1. $L:c = 3q + \phi = \log.\cot.\frac{1}{2}\phi$.

$\phi =$	$1^\circ, 0, 40''$	$\phi =$	$1^\circ, 0, 41''$
in min. sec. =	3 640	in min. sec. =	3 641
log. =	3,5611014	log. =	3,5612207
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. ϕ =	8,2466763	log. ϕ =	8,2467956
ϕ =	0,0176472	ϕ =	0,0176521
$3q$ =	4,7123890	$3q$ =	4,7123890
$L:c = 3q + \phi$ =	4,7300262	$L:c = 3q + \phi$ =	4,7300411

$\frac{1}{2}\phi$ =	$30', 20''$	$\frac{1}{2}\phi$ =	$30', 20''\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi$ =	12,0543425	log. cot. $\frac{1}{2}\phi$ =	12,0542232
v =	2,0543425	v =	2,0542232
log. v =	0,3126728	log. v =	0,3126476
aggiungi	0,3622157	aggiungi	0,3622157
log. u =	0,6748885	log. u =	0,6748633
$L:c = u$ =	4,7302984	$L:c = u$ =	4,7300240
errore =	+ 2622	errore =	− 171
altro errore =	− 171		
differenza =	2793.	Differenza =	$1''$

fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $2793 : 2622 :: 1'' : \frac{2622''}{2793} = 0,9388''$, ed il quarto termine s'eguaglierà a quella quantità, che aggiunta a $1^\circ, 0, 40''$ mi dà il vero valore dell' angolo

ϕ =	$1^\circ, 0', 40, 9388''$
in min. sec. =	$3640, 9388''$
log. =	3,5612132
sottra	5,3144251
log. ϕ =	8,2467881
ϕ =	0,0176518
$3q$ =	4,7123890
$L:c = 3q + \phi$ =	4,7300408

grandezza adequatamente giusta dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio = 1.

Computo pel numero 2.

$\phi =$	$0, 2', 40''$
in min. sec. $=$	$1\ 60$
log. $=$	$2,2041200$
sottra	$5,3144251$
log. $\phi =$	$6,8896949$
$\phi =$	$0,0007757$
$sq =$	$7,8539816$
$L{:}c = sq - \phi =$	$7,8532059$

$L{:}c = sq - \phi \log. \cot. \frac{1}{2}\phi.$

$\phi =$	$0, 2', 41''$
in min. sec. $=$	$1\ 61$
log. $=$	$2,2068259$
sottra	$5,3144251$
log. $\phi =$	$6,8924008$
$\phi =$	$0,0007806$
$sq =$	$7,8539816$
$L{:}c = sq - \phi =$	$7,8532010$

$\frac{1}{2}\phi =$	$0, 1', 20''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi =$	$13,4113351$
$v =$	$3,4113351$
log. $v =$	$0,5329244$
aggiungi	$0,3622157$
log. $u =$	$0,8951401$
$L{:}c = u =$	$7,8548897$
errore $=$	$+\ 16838$
altro errore $=$	$-\ 45410$
differenza $=$	62248

$\frac{1}{2}\phi =$	$0, 1', 20'' \frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi =$	$13,4086292$
$v =$	$3,4086292$
log. $v =$	$0,5325798$
aggiungi	$0,3622157$
log. $u =$	$0,8947955$
$L{:}c = u =$	$7,8486600$
errore $=$	$-\ 45410$

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $62248 : 16838 :: 1'' : \frac{16838''}{62248}$ $= 0, 27050''$ quantità da aggiugnersi a $0, 2', 40''$ onde s' abbia il giusto valore dell' angolo

$\phi =$	$0,2',40,27050''$
in min. sec. $=$	$160,27050$
log. $=$	$2,2048536$
sottra	$5,3144251$
log. $\phi =$	$6,8904285$
$\phi =$	$0,0007770$
$sq =$	$7,8539816$
$L{:}c = sq - \phi =$	$7,8532046$

misura fisicamente esatta dell' angolo $L{:}c$ espresso in parti del raggio.

Computo pel numero 3.

$\phi = 0, 0, 6''$
log. $= 0,7781512$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,4637261$
$\phi = 0,0000291$
$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956034$

$L:c = 7q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$
$\phi = 0, 0, 7''$
log. $= 0,8450980$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,5306729$
$\phi = 0,0000339$
$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956082$

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, 3''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 14,8373039$
$v = 4,8373039$
log. $v = 0,6846034$
aggiungi $0,3622157$
log. $u = 1,0468191$
$L:c = u = 11,1383051$
errore $= +$ 1427017
altro errore $= -$ 113529
differenza $=$ 1540546

$\frac{1}{2}\phi = 0, 0, 3\frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 14,7703571$
$v = 4,7703571$
log. $v = 0,6785509$
aggiungi $= 0,3622157$
log. $u = 1,0407666$
$L:c = u = 10,9841553$
errore $= -$ 113529

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $1540546 : 1427017 :: 1'' : \frac{1427017''}{1540546} = 0, 9263060''$ porzione di secondo, che aggiunta a $0, 0, 6''$, mi somministra la misura quanto basta dell' angolo

$\phi = 0,0',6,9263060''$
log. $= 0,8405017$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 5,5260766$
$\phi = 0,0000336$
$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956079$

grandezza fisicamente esatta dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio. Si troverebbe con maggior precisione il valore dell' angolo

$\phi = 6,9202852''$, supponendo $L:c = u = 10,9956079$, ed indi retrocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto, fino a tanto che ci si presenta il valore di $\frac{1}{2}\phi$ espresso in secondi. Nei numeri seguenti a cagione della somma picciolezza dell' angolo ϕ, mi servirò di un tale artificio.

Computo pel numero 4.

$\phi =$	$0, 0, \frac{1}{7}''$
log. $=$	$-0,5440680$
sottra	$5,3144251$
	$-5,8584931$
aggiungi	$10,0000000$
log. $\phi =$	$4,1415069$
$\phi =$	$0,000001385$
$qq =$	$14,137166941$
$L:c = qq - \phi =$	$14,137165556$

$L:c = qq - \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$.

$\phi =$	$0, 0, \frac{1}{7}''$
log. $=$	$-0,4771212$
sottra	$5,3144251$
	$-5,7915463$
	$10,0000000$
log. $\phi =$	$4,2084537$
$\phi =$	$0,000001616$
$qq =$	$14,137166941$
$L:c = qq - \phi =$	$14,137165325$

$\frac{1}{2}\phi =$	$0, 0, \frac{1}{2}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi =$	$16,1595232$
$v =$	$6,1595232$
log. $v =$	$0,7895471$
aggiungi	$0,3622157$
log. $u =$	$1,1517628$
$L:c = u =$	$14,182828217$
errore $=$	$+ 45662661$
altro errore $=$	$- 108489187$
differenza $=$	154151848

$\frac{1}{2}\phi =$	$0, 0, \frac{1}{4}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi =$	$16,0925764$
$v =$	$6,0925764$
log. $v =$	$0,7848010$
aggiungi	$0,3622157$
log. $u =$	$1,1470167$
$L:c = u =$	$14,028676138$
errore $=$	$- 108489187$

Differenza $= 231$ fra i due valori del angolo ϕ espresso in parti del raggio. Facciasi $154151848 : 45662661 :: 231 : 68$ quantità che aggiunta a 1385 mi dà l' aggiustato valore dell' angolo

$\phi = 0,000001453$

$\phi = 0,000001453$ Sottraendo questo da 99, resta
$L:c = 99 - \phi = 14,1371654\overline{88}$. Pongasi adunque

$L:c = u = 14,1371654\overline{88}$
$\log. u = 1,1503623$
sottra $0,3622157$
$\log. v = 0,7881466$
$v = 6,1396921$
$\log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi = 16,1396921$
$\frac{1}{2}\phi = 0,1495316''$
$\phi = 0,2990633''$ grandezza esattissima dell' angolo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 5. $L:c = 11q + \phi = \log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi$.

Riducendo a calcolo nel presente, e nel seguente numero il valore dell'angolo $L:c$, trascuro siccome rispettivamente minimo l'angolo ϕ.

$L:c = u = 17,2787596$
$\log. u = 1,2375125$
sottra $0,3622157$
$\log. v = 0,8752968$
$v = 7,5046691$
$\log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi = 17,5046691$
$\frac{1}{2}\phi = 0,0064618\overline{37}''$
$\phi = 0,0129236\overline{73}''$ misura adequatamente giusta dell' angolo piccolissimo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 6. $L:c = 13q - \phi = \log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi$.

$L:c = u = 20,4203522$
$\log. u = 1,3100632$
sottra $0,3622157$
$\log. v = 0,9478475$
$v = 8,8684449$
$\log. \text{cot.} \frac{1}{2}\phi = 18,8684449$
$\frac{1}{2}\phi = 0,0002791\overline{42}''$
$\phi = 0,0005583\overline{83}''$ valore fisicamente esatto dell' angolo ϕ espresso in parti di minuto secondo.

Diſpongo ordinatamente nella tavola, che ſegue, le ſei determinate grandezze dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio.

Valori dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio $=1$.

(1) $L:c = 3q+\phi =$	4,7300408	log. $=0$, 6748648
(2) $L:c = 5q-\phi =$	7,8532046	log. $=0$, 8950469
(3) $L:c = 7q+\phi =$	10,9956079	log. $=1$, 0412192
(4) $L:c = 9q-\phi =$	14,1371655	log. $=1$, 1503623
(5) $L:c = 11q+\phi =$	17,2787596	log. $=1$, 2375125
(6) $L:c = 13q-\phi =$	20,4203522	log. $=1$, 3100632
ecc.		ecc.

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un Cilindro nel tempo d' un minuto ſecondo riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare.

XXIII. Si chiami m il numero, a cui s' eguaglia l' angolo $L:c$, onde s' abbia $L:c = m$, e conſeguentemente $L = mc$. E concioſſiachè al numero XIII. s' è poſto $c^4 = ELf:M$, ſi ſcoprirà $L^4 = m^4 ELf:M$, e perciò $f = ML^3:m^4 E$. Abbiamo ſtabilito al fine del numero III. $E = KrM^2:g^2 L^3$. Fatta la ſurrogazione d' un tal valore, troveremo $f = L^4 g^2:Km^4 Mr$. Dalla prima equazione eſprimente la lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono impareremo ſerbar eſſa lunghezza la proporzione compoſta, diretta delle maſſe, e del cubo delle lunghezze dei cilindri, ed inverſa del quadrato—quadrato del numero m, e della forza E, il cui valore ſi determina col mezzo degli eſperimenti, qualmente ho inſegnato nei numeri V. VI. e VII. La ſeconda eſpreſſione ci addita, che la lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono ſta in ragione compoſta, diretta della quinta poteſtà delle lunghezze L dei cilindri, e del quadrato della loro gravità ſpecifica g, ed inverſa del quadrato —quadrato del numero m, della maſſa M, e della ri-

gidità r della materia, onde ſono formati. Non ho fatta menzione del coefficiente K, perchè ho già notato al numero III. mantenerſi ſempre coſtante in tutti i cilindri.

Eſſendo la gravità ſpecifica eguale alla maſſa diviſa pel volume, ed eſſendo la baſe d'un cilindro proporzionale al quadrato del ſuo diametro, avremo g come $M:LD^2$, e per conſeguenza M come gLD^2. Soſtituiti nella noſtra ſeconda eſpreſſione della lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono prima in cambio di g, poſcia in cambio di M, i valori proporzionali, troveremo f come $L^3M:m^4D^4r$, f come $L^4g:m^4D^3r$.

Dalle quattro eſpreſſioni generali ſi dedurranno agevolmente le particolari. Se per eſempio due cilindri ſieno compoſti della ſteſſa materia, e ſi vibrino ſimilmente, ripiegandoſi in curve, che taglino l'aſſe in numero eguale di punti; ſaranno coſtanti i valori delle ſpecie g, r, m, e ſi ſcoprirà f come $L^4:D^3$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli ſemplici iſocroni in ragione compoſta, diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed inverſa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia b la lunghezza del pendolo ſemplice, che nel fare una vibrazione c'impiega un minuto ſecondo, dimodochè ſia $b=3,16625$ piedi del Reno, o pure $b=$ piedi 3 linee 8, 57 del piede Reale di Parigi: e giacchè le durate delle oſcillazioni ſerbano la ragione ſudduplicata delle lunghezze dei pendoli, il tempo d'una vibrazione d'un cilindro s'eguaglierà a ſecondi

$\sqrt{f}:\sqrt{b}=\frac{1}{m^2}\sqrt{(ML^3:bE)}=\frac{1}{m^2}\sqrt{(L^4g^2:KbMr)}$. Conſeguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto ſecondo, o ſia il ſuono d'eſſo cilindro, ch'io chiamo $S=m^2\sqrt{(bE:ML^3)}=m^2\sqrt{(KbrM:L^4g^2)}$.

Se nell'eſpreſſione ſeconda in vece di g, o di M ſo-

ſtituiremo i valori proporzionali $M:LD^2$, gLD^2, ci ſi preſenterà S come $m^2\sqrt{(rD^4:ML^2)}$, come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

La formola $S=m^2\sqrt{(hE:ML^2)}$ ſerve per iſcoprire il preciſo numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo d'un minuto ſecondo, potendoſi determinare il valore della forza E col mezzo degli eſperimenti, la grandezza della maſſa M col mezzo del peſo, la lunghezza L con diligente miſura, ed eſſendo cogniti la lunghezza h del pendolo a ſecondi, ed il numero m, qualmente che il cilindro ſi vibra piuttoſto in un modo, che nell'altro.

L'ultima maniera, colla quale ſi dinotano i ſuoni dei cilindri, cioè S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$, ci mette ſotto degli occhi nel ſuo più ſemplice aſpetto la legge, che dà regola ai ſuoni ſteſſi, i quali ſtanno in proporzione compoſta, diretta duplicata del numero m, ſemplice de' diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata delle loro lunghezze L, e dimezzata delle loro gravità ſpecifiche g.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo d'eſprimere i ſuoni dei cilindri s'inferiſcono parecchi corollarj.

1. Cavo ſubito quella conſeguenza, che ha l'aria di paradoſſo, e che da qualcuno non ſi crederebbe, ſe non veniſſe confermata dall'eſperienza, ed è ch' eſſendo il reſto pari, i cilindri ſono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si dileguerà per altro l'apparente ripugnanza qualora ſi rifletta, che la forza elaſtica E creſce all'aumentarſi del diametro D, avendola dimoſtrata proporzionale a D^4r nel numero III. e creſce a proporzione più di quello s'ingrandiſca la maſſa M, laonde nell'ipoteſi, che preſentemente ſi conſidera, abbiamo $S=m^2\sqrt{(hE:ML^2)}$ proporzionale a D.

2. Postochè due cilindri oscillino similmente adattandosi a curve, che intersecano l'asse in numero eguale di punti, sarà costante la specie m, e ne risulterà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

3. Nella stessa supposizione troveremo la rigidità r come $S^2L^4g:D^4$. Col mezzo dei suoni adunque si può scoprire la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, quando i cilindri sieno egualmente lunghi e grossi, accetteranno la ragione S^2g, che si compone della duplicata dei suoni, e della semplice delle gravità specifiche. Queste mie determinazioni si accordano con ciò, che ha dimostrato il Co: *Jacopo Riccati* mio Padre nella sua Dissertazione intorno le leggi delle forze elastiche inserita nel *Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna*, e ristampata nel Tomo III. delle sue Opere.

4. Se due cilindri, che si vibrano similmente, saranno formati della stessa materia, onde sieno egualmente rigidi, ed egualmente gravi in ispezie, o pure se in essi le rigidità staranno come le gravità specifiche, scoprirassi S come $D:L^2$, cioè a dire i suoni in ragione composta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inversa duplicata delle loro lunghezze.

5. Se inoltre i due cilindri saranno simili, avremo S come $1:L$, o pure S come $1:D$, vale a dire i suoni dei cilindri simili si riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Questa legge abbraccia tutti i corpi simili della stessa materia formati, non eccettuate le corde, per l'esatta similitudine delle quali non basta, che i diametri sieno proporzionali alle lunghezze, ma bisogna altresì che le loro particole sieno ugualmente rigide, il che interviene, quando le corde si stendono con forze in ragione delle loro basi. Cosa maravigliosa si è, che si dia un caso, nel quale s'uniscano in un solo i canoni cotanto diversi, donde prendono regola i suoni di varj corpi differenti nella strut-

tura, e nelle circoſtanze, che nelle loro vibrazioni influiſcono.

6. I ſuoni dello ſteſſo cilindro ſi riferiſcono nella proporzione dei quadrati m^2. Eſſendo $m = nq \pm \phi$, ſe gli angoli ϕ foſſero talmente piccioli, che ſi poteſſero totalmente traſcurare, abbraccierebbero i ſuoni il rapporto dei quadrati n^2: e giacchè n s'eguaglia in ſerie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc., i predetti ſuoni ſarebbero come i quadrati di tali numeri, cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 ecc. Meſſi a computo gli angoli ϕ, e principalmente il più grande, che corriſponde al numero (1.), ſi trovano alterate per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log. = 53950, le proporzioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 ecc., nelle quali il ſuono grave 9 paragonaſi cogli acuti. Le altre proporzioni rieſcono preſſochè giuſte; imperciocchè il maggior divario, che modifica la ragione 25 : 49, s'eguaglia in logaritmi a 885 parte 61.ma del comma.

Regiſtro nella ſeguente tavola i ſei ſuoni, che rende un cilindro, mentre oſcillando s'adatta a quelle curve, che tagliano l'aſſe in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i ſuoni acuti col grave, noto le alterazioni dei rapporti 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 ecc., ed oſſervo a quali ſemplici proporzioni ſi accoſtino i mentovati rapporti modificati.

Paragone del suono più grave d' un cilindro coi suoni acuti.

Quantità proporzionale ai suoni.	Loro logaritmi.	
(1) $m^2=(3q+\phi)^2$	log. 1,3497296	
(2) $m^2=(5q-\phi)^2$	log. 1,7900938	$=$ log. $\frac{25}{9}-33333$, suono, che cala dalla Quarta maggiore sopra l' Ottava $\frac{25}{9}$ per qualche cosa più di mezzo Comma, il cui log. $=53950$.
(3) $m^2=(7q+\phi)^2$	log. 2,0824384	$=$ log. $\frac{49}{9}-32448$. Questo intervallo supera la Quarta sopra la doppia Ottava per 57100 quantità poco più grande del Comma.
(4) $m^2=(9q-\phi)^2$	log. 2,3007246	$=$ log. $\frac{12}{9}=$ log. $9-32475$, Seconda maggiore sopra l' Ottava triplicata.
(5) $m^2=(11q+\phi)^2$	log. 2,4750250	$=$ log. $\frac{121}{9}-32475$, Sesta maggiore pressochè giusta sopra la tripla Ottava, crescendo solamente per 3566, parte decimaquinta del Comma.
(6) $m^2=(13q-\phi)^2$	log. 2,6201264	$=$ log. $\frac{169}{9}-32475$, Seconda superflua sopra la quadrupla Ottava, calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6}.16=\frac{56}{3}$ propria d' esso intervallo.

XXVI. In grazia dell' esperimento, che a suo luogo riferirò, metto sotto gli occhi di chi legge la seguente Tavola, in cui, posto che il suono più grave d'un cilindro sia unisono ad una corda, la cui lunghezza 60, dispongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda stessa unisone agli altri suoni d' esso cilindro.

Porzioni della corda 60 *unisone ai suoni acuti d'un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera.*

	Lunghezze delle corde
(1)	60
(2)	21, 75 +
(3)	11, 10 +
(4)	6, 717 —
(5)	4, 496 +
(6)	3, 219 +
ecc.	ecc.

XXVII. Stabilisce rettamente il celebratissimo Signor *Leonardo Eulero*, che rispettivamente alle lamine elastiche sia $S = m^2 \sqrt{(bE:ML^3)}$. Ma asserendo egli alla pag. 269. che la forza elastica E sta in ragione, composta della rigidità r della materia componente le lamine della loro larghezza D, e del quadrato G^2 della loro grossezza, viene ad abbracciare la proporzione S come $\frac{m^2}{L^3}\sqrt{(Gr:g)}$, la quale non si accorda colla verità, ed è riprovata dall' esperienza. Le lamine della stessa materia simili, e similmente vibrantisi, non s' uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi simili, i cui suoni serbano la ragione reciproca dei lati omologhi. Oltre a ciò i suoni delle lamine, che differiscono solo nella grossezza, dovrebbero riferirsi nella proporzione dimezzata delle grossezze, e gli esperimenti c' insegnano, che i suoni si corrispondono nella ragione

ne delle groſſezze. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri ſi dimoſtra, che nelle lamine la forza elaſtica E ſta come rDG^3. Fatto uſo di un tal canone, troveremo S come $\frac{m^2G}{L^2} V (r:g)$, rapporto, che ha il fondamento d' una rigoroſa dimoſtrazione, e coll' eſperienza s' accorda mirabilmente.

Aggiungo l' importante avvertenza, che nella determinazione dei ſuoni delle lamine elaſtiche non ha veruna parte la loro larghezza; dimodochè due lamine, la cui differenza conſiſta ſolo nella larghezza, rendono lo ſteſſo ſuono.

Determinare riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare un cilindro, i nodi, o punti ſtabili intorno ai quali ſi vibra.

XXVIII. Dalle coſe ſopra ſpiegate raccoglieſi, che il numero de' punti immobili s' eguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc. ſecondo che un cilindro ſi vibra o giuſto la prima, o giuſto la ſeconda, o giuſto la terza ecc. ſpecie delle oſcillazioni, che può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà del cilindro, e la ſua poſizione è determinata. Reſterebbe adunque da ſtabilirſi il ſito di due nodi nelle ſpecie di vibrazioni prima e ſeconda, di quattro nodi nelle ſpecie terza e quarta, di ſei nodi nelle ſpecie quinta e ſeſta; ſenonchè ſendo collocati eſſi nodi a coppia a coppia a pari diſtanze dalla metà del cilindro, l' uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra, baſta a determinare un nodo nella prima e nella ſeconda ſpecie, due nodi nella terza e nella quarta ſpecie, tre nodi nella quinta e nella ſeſta ſpecie di oſcillazioni, e così di ſeguito.

Nel ſito del punto immobile è l' ordinata $y = o$, ed in tal ipoteſi abbiamo per i corollari terzo del numero XVI. e ſecondo del numero XVIII. le due equazioni

$e^{z:c} + e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, $e^{z:c} - e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$. Il segno negativo negli omogenei di comparazione è adattato a que' casi, ne' quali sono negative le quantità cos. $z:c$, sen. $z:c$. Se i predetti coseni, e seni si considereranno sempre positivi, qualunque sia la lor direzione, valerà il segno positivo, del quale farò uso costantemente. Servono le due equazioni, la prima pel genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la seconda pel genere di vibrazioni dai numeri pari contrassegnato.

Si stabilisce la positura d'un nodo, assegnando all'angolo $z:c$ quella precisa misura, onde secondo i varj generi di vibrazioni si verifichi o l'una, o l'altra delle premesse equazioni. Troveremo poi la grandezza fisicamente esatta dell'angolo mentovato, ponendo in opera il metodo dei limiti usato al numero XXII. per iscoprire il valore dell'angolo ϕ. Osserverà il Lettore nei seguenti computi, ch' io ristringo la misura dell'angolo $z:c$ fra due confini, che differiscono per un solo minuto secondo, e che dagli errori, nei quali s'incorre abbracciando l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giusto dell'angolo $z:c$.

XXIX. S'esprima in minuti secondi l'angolo $z:c$, e col metodo insegnato al numero XXI. e praticato al numero XXII. in riguardo all'angolo ϕ si trovi il logaritmo dell'angolo $z:c$ espresso in parti del raggio $= 1$. Il logaritmo del numero $e = 2, 7182818$ s'eguaglia a $0, 4342945$, ed il logaritmo di quest'ultimo numero pareggia $- 0, 3622157$, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o sia
log. log. $e = - 0, 3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $z:c$ espresso in parti del raggio il numero $0, 3622157$, ne risulterà una quantità $=$ log. $z:c$ + log. log. e. Si faccia transito coll'ajuto delle tavole dai logaritmi ai numeri, e ci si presenterà il valore della grandezza $z:c$ log. e, e nuovamente passando dai logarit-

mi ai numeri, scopriremo il valore di $e^{z:c}$. Dato questo, riesce facile il ritrovare il valore di $e^{-z:c} = \frac{1}{e^{z:c}}$, e conseguentemente quello di $e^{z:c} \pm e^{-z:c}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, $\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ si determinano col mezzo del seguente artificio. Prendasi dalle tavole il logaritmo del cos. $z:c$, e del sen. $z:c$, ed indi sottratto $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$, dal residuo nuovamente si levi 4, 6989700, e quello che resta s' eguaglierà a $\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$, o pure a $\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ (*b*). I predetti cosени, e seni

(*b*) Chiamo U, V i logaritmi presi dalle tavole dei seni delle quantità cos. $z:c$, cos. $L:c$, e per le cose dimostrate nell' annotazione segnata (*f*), ed inserita nel numero XXI. saranno $U-10,0000000$, $V-10,0000000$ i logaritmi tolti dalle tavole dei numeri, proprj dei cosени relativi al raggio $=1$ degli stessi angoli $z:c$, $L:c$; dimodochè si avrà log. cos. $z:c = U-10,0000000$, log. cos. $L:c = V-10,0000000$: ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui protonumero $=1$ $\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ $=$ log. cos. $z:c$ + log. $2 - \frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$; dunque surrogati nell' omogeneo di comparazione in cambio di log. cos. $L:c$, di log. 2 i loro valori $U-10,0000000$; $V-10,0000000$; 0, 3010300, e ridotti i computi, troveremo $\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = U - \frac{1}{2}V - 4,6989700$;

saranno relativi al raggio = 1, siccome al principio del numero XIII. è stato da me prescritto. Fatto poscia il passaggio dai logaritmi ai numeri, ci si affaccieranno i valori dei due omogenei di comparazione $\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, $\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$.

Determinato col metodo dei limiti il valore sificamente esatto dell' angolo $z:c$ espresso in minuti secondi, e trovato poi il logaritmo del medesimo angolo espresso in parti del raggio = 1, si sottri log. $L:c$, ed il residuo s' eguaglierà a log. $z:L$. I diversi valori, che può avere log. $L:c$ rispettivamente alle varie specie di oscillazioni, gli ho registrati al fine del numero XXII. Aggiungasi log. 2 = 0, 3010300, e ne risulterà il valore di log. $z:\frac{1}{2}L$, col mezzo del quale le tavole ci suggeriranno quello di $z:\frac{1}{2}L$, quantità, che determina la cercata proporzione fra la linea nota $\frac{1}{2}L = CA$ (*fig.* 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc.) e la lunghezza di z uguale per esempio a CE, all' estremità della quale il punto immobile E corrisponde.

XXX. Dopo che ho spiegata la maniera d' istituire i computi passo ad effettuare i computi stessi, che m' hanno costata una lunga fatica, e ch' io continuo fino alla specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

---

il che ecc. La stessa dimostrazione vale per comprovare il valore assegnato a log. $\left(\frac{2. \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$.

Computo per la ſpecie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$74,45',23''$	$z:c=$	$74,45,24''$
in min. ſec.=	$269123''$	in min. ſec.=	$269124''$
log.=	$5,4299508$	log.=	$5,4299524$
ſottra	$5,3144251$	ſottra	$5,3144251$
log. $z:c=$	$0,1155257$	log. $z:c=$	$0,1155273$
ſottra	$0,3622157$	ſottra	$0,3622157$
log. $z:c$+log. log. $e=$	$9,7533100$	log. $z:c$+log. log. $e=$	$9,7553116$
$z:c$ log. $e=$	$0,5666436$	$z:c$ log. $e=$	$0,5666457$
$e^{z:c}=$	$3,6867496$	$e^{z:c}=$	$3,6867674$
$e^{-z:c}=$	$0,2712417$	$e^{-z:c}=$	$0,2712403$
$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	$3,9579913$	$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	$3,9580077$
log. cof. $z:c=$	$9,4198295$	log. cof. $z:c=$	$9,4198218$
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c=$	$4,1233764$	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c=$	$4,1233764$
	$5,2964531$		$5,2964454$
ſottra	$4,6989700$	ſottra	$4,6989700$
$\log.\left(\frac{2\text{ cof. }z:c}{\sqrt{\text{cof. }L:c}}\right)=$	$0,5974831$	$\log.\left(\frac{2\text{ cof. }z:c}{\sqrt{\text{cof. }L:c}}\right)=$	$0,5974754$
$\frac{2\text{ cof. }L:c}{\sqrt{\text{cof. }L:c}}=$	$3,9580665$	$\frac{2\text{ cof. }z:c}{\sqrt{\text{cof. }L:c}}=$	$3,9579964$
errore=+	752	errore=—	113
altro errore=—	113		
differenza=	865		

Facciaſi $865 : 752 :: 1'' :$ $\frac{752''}{865} = 0,8694''$ porzione di ſecondo, per cui va accreſciuto il minor valore dell' angolo $z:c$, onde ſia

$z:c=$	$269123,8694''$
log.=	$5,4299522$
ſottra	$5,3144251$
log. $z:c=$	$0,1155271$
ſottra log. $L:c=$	$0,6748648$
log. $z:L=$	$9,4406623$

aggiun. log.2= 0,3010300

log.z:$\frac{1}{2}$L= 9,7416923

z:$\frac{1}{2}$L = CE:CA= 0,5546364 (*fig.* 3.)

Computo per la ſpecie II. delle vibrazioni dei cilindri

z:c= 165°,32′,5″	z:c= 165°,32′,6″
in min. ſec.= 595925	in min. ſec.= 595926
log.= 5,7751916	log.= 5,7751924
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. z:c= 0,4607665	log. z:c= 0,4607673
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log.z:c+log.log.e= 0,0985508	log.z:c+log.log.e= 0,0985516
z:c log. e= 1,2547317	z:c log. e= 1,2547340
$e^{z:c}$= 17,9775993	$e^{z:c}$= 17,9776945
$e^{-z:c}$= 0,0556248	$e^{-z:c}$= 0,0556245
$e^{z:c} - e^{-z:c}$= 17,9219745	$e^{z:c} - e^{-z:c}$= 17,9220700
log. ſen. z:c = 9,3975807	log. ſen. z:c = 9,3975725
ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ. L:c= 3,4452230	ſottr.$\frac{1}{2}$log.coſ. L:c= 3,4452230
5,9523577	5,9523495
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)$= 1,2533877	$\log.\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)$= 1,2533795
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}$ = 17,9220512	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}$ = 17,9217128
errore = + 767	errore = − 3572
altro errore = − 3572	
differenza = 4339	Facciaſi 4339 : 767 :: 1″ :

$\frac{767''}{4339}$ = 0, 1768″ parte di ſecondo, che deve aggiungerſi al più piccolo valore dell'angolo z:c, onde s'abbia

z:c = 595925,1768″
log.= 5,7751918
ſottra 5,3144251
log. z:c = 0,4607667

sottra log. $L:c$ =	0,8950469
log. $z:L$ =	9,5657198
aggiungi log. 2 =	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L$ =	9,8667498
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ =	0,7357831

(*fig.* 4)

Computo per la specie III. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ =	89°,10′,41″	$z:c$ =	89°,10′,42″
in min. sec. =	321041″	in min. sec. =	321042″
log. =	5,5065605	log. =	5,5065618
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,1921354	log. $z:c$ =	0,1921367
sottra	0,3622157	sottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	9,8299197	log. $z:c$ + log. log. e =	9,8299210
$z:c$ log. e =	0,6759580	$z:c$ log. e =	0,6759600
$e^{z:c}$ =	4,7419617	$e^{z:c}$ =	4,7419836
$e^{-z:c}$ =	0,2008832	$e^{-z:c}$ =	0,2108822
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	4,9528449	$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	4,9528658
log. cos. $z:c$ =	8,1566857	log. cos. $z:c$ =	8,1565394
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ =	2,7628494	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ =	2,7628494
	5,3938363		5,3936900
sottra	4,6989700	sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2\cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}}\right)$ =	0,6948663	$\log.\left(\frac{2\cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}}\right)$ =	0,6947200
$\frac{2\cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}}$ =	4,9529772	$\frac{2\cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}}$ =	4,9513090
errore = +	1323	errore = −	15568
altro errore = −	15568		
differenza =	16891		

Facciasi 16891 : 1323 :: 1″ : $\frac{1323''}{16891}$ = 0, 0783″ porzione di secondo da aggiungersi al minor valore dell' angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c =$ 321041,0783″
log. = 5,5065606
sottra 5,3144251

log. $z:c =$ 0,1921355
sottra log. $L:c =$ 1,0412192

log. $z:L =$ 9,1509163
aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L =$ 9,4519463
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA =$ 0,2831042 (*fig.* 5)

Segue il computo per la ſpecie III. delle virbazioni dei cilindri.

$z:c =$ 255°,30′,6″	$z:c =$ 255°,30′,7″
in min. ſec. = 919806″	in min. ſec = 919807″
log. = 5,9636963	log. = 5,9636967
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,6492712	log. $z:c =$ 0,6492716
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,2870555	log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,2870559
$z:c$ log. $e =$ 1,9366695	$z:c$ log. $e =$ 1,9366713
$e^{z:c} =$ 86,4309940	$e^{z:c} =$ 86,4313519
$e^{-z:c} =$ 0,0115700	$e^{-z:c} =$ 0,0115699
$e^{z:c} + e^{-z:c} =$ 86,4425640	$e^{z:c} + e^{-z:c} =$ 86,4429218
log. cof. $z:c =$ 9,3985507	log. cof. $z:c =$ 9,3985426
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c =$ 2,7628494	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c =$ 2,7628494
6,6357013	6,6356932
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) =$ 1,9367313	log. $\left(\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) =$ 1,9367232
$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} =$ 86,4432869	$\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}} =$ 86,4416733
errore = + 7229	errore = — 12485
altro errore = — 12485	
differenza = 19714	Facciaſi 19714 : 7229 :: 1″ : :

$\frac{7229''}{19714} = 0,3667''$ parte di secondo, che dee aggiungersi al valore più picciolo dell' angolo $z:c$, onde sia

$z:c = 919806,3667''$
log. = 5,9636964
sottra 5,3144251
log. $z:c = 0,6492713$
sottra log. $L:c = 1,0412192$
log. $z:L = 9,6080521$
aggiungi log. 2 = 0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L = 9,9090821$
$z:\frac{1}{2}L = c2E:CA = 0,8111144$ (*fig.* 5.)

Computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 179°,12',50''$	$z:c = 179°,12',51''$
in min. sec. = 645170''	in min. sec. = 645171''
log. = 5,8096742	log. = 5,8096749
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $z:c = 0,4952491$	log. $z:c = 0,4952498$
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. $e = 0,1330334$	log. $z:c$ + log. log. $e = 0,1330341$
$z:c$ log. $e = 1,3584179$	$z:c$ log. $e = 1,3584201$
$e^{z:c} = 22,8253757$	$e^{z:c} = 22,8254913$
sottra $e^{-z:c} = 0,0438107$	sottra $e^{-z:c} = 0,0439107$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 22,7815650$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 22,7816806$
log. sen. $z:c = 8,1373342$	log. sen. $z:c = 8,1371818$
sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c = 2,0806276$	sottra $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c = 2,0806276$
$6,0567066$	$6,0565542$
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = 1,3577366$	$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) = 1,3575842$

$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 22,7890714$ $\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} = 22,7816002$

errore = + 75064 errore = − 804

altro errore = − 804

differenza = + 75868 Facciasi 75868 : 75064 :: 1″ : $\frac{75064''}{75868} = 0,9894''$ porzione di secondo, che va aggiunta al minor valore dell'angolo $z:c$, onde ci si presenti

$z:c = 645170,9894''$
log. = 5,8096748
sottra 5,3144251

log. $z:c$ = 0,4952497
sottra log. $L:c$ = 1,1503623

log. $z:L$ = 9,3448874
aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,6459174
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ = 0,4425042 (*fig. 6*)

Segue il computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ = 345°,30′,15″	$z:c$ = 345°,30′,16″
in min. sec. = 1243815″	in min. sec. = 1243816″
log. = 6,0947558	log. = 6,0947561
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,7803307	log. $z:c$ = 0,7803310
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e = 0,4181150	log. $z:c$ + log. log. e = 0,4181153
$z:c$ log. e = 2,6188764	$z:c$ log. e = 2,6188782
$e^{z:c}$ = 415,7922488	$e^{z:c}$ = 415,7939713
sottra $e^{-z:c}$ = 0,0024050	sottra $e^{-z:c}$ = 0,0024050
$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 415,7898438	$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 415,7915663
log. sen. $z:c$ = 9,3984774	log. sen. $z:c$ = 9,3984693
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ = 2,0806276	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ = 2,0806276
7,3178498	7,3178417

sottra	4,6989700	sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ =	2,6188798	$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ =	2,6188717
$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ =	415,7955024	$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ =	415,7877512
errore = +	56586	errore = −	38151
altro errore = −	38151		
differenza =	94737		

Facciasi $94737 : 56586 :: 1'' : \frac{56586''}{94737} = 0,5973''$ parte di secondo, che aggiunta al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c$ =	$1243815,5973''$.
log. =	6,0947560
sottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,7803309
sottra log. $L:c$ =	1,1503623
log. $z:L$ =	9,6299686
aggiungi log. 2 =	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L$ =	9,9309986
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA$ =	0,8530974

(*fig.* 6)

Computo per la specie V. delle vibrazioni de' cilindri.

$z:c$ =	$89°,57',50''$	$z:c$ =	$89°,57',51''$
in min. sec. =	$323870''$	in min. sec. =	$323871''$
log. =	5,5193707	log. =	5,5103720
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,1959456	log. $z:c$ =	0,1959469
sottra	0,3622157	sottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	9,8337299	log. $z:c$ + log. log. e =	9,8337312
$z:c$ log. e =	0,6819144	$z:c$ log. e =	0,6819165
$e^{z:c}$ =	4,8074458	$e^{z:c}$ =	4,8074690
$e^{-z:c}$ =	0,2080107	$e^{-z:c}$ =	0,2080097
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	5,0154565	$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	5,0154787

log. cos. $z:c$ =	6,7995181
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ =	1,3984804
	5,4010377
sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ =	0,7020677
$\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ =	5,0357912
errore = +	203347
altro errore = −	184235
differenza =	387582

log. cos. $z:c$ =	6,7961645
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ =	1,3984804
	5,3976841
sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ =	0,6987141
$\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ =	4,9970552
errore = −	184235

Facciasi $387582 : 203347 :: 1'' : \frac{203347''}{387582} = 0,5247''$ parte di secondo da aggiungersi al valore più picciolo dell' angolo $z:c$, onde sia

$z:c$ =	323870,5247''
log. =	5,5103714
sottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,1959463
sottra log. $L:c$ =	1,2375125
log. $z:L$ =	8,9584338
aggiungi log. 2 =	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L$ =	9,2594638
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ =	0,1817456 (*fig.* 7)

Segue il computo per la specie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ =	269°,12',45''
in min. sec. =	969165''
log. =	5,9863977
sottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,6719726
sottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	0,3097569
$z:c$ log. e =	2,0405954

$z:c$ =	269°,12',46''
in min. sec. =	969166''
log. =	5,9863982
sottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,6719731
sottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	0,3097574
$z:c$ log. e =	2,0405977

$e^{z:c} =$	109,7982563
$e^{-z:c} =$	0,0091076
$e^{z:c} + e^{-z:c} =$	109,8073639
log. cos. $z:c =$	8,1380961
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	1,3984804
	6,7396157
sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}}\right) =$	2,0406457
$\frac{2 \cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}} =$	109,8109762
errore $=+$	36123
altro errore $=-$	354912
differenza $=$	391035

$e^{z:c} =$	109,7988375
$e^{-z:c} =$	0,0091076
$e^{z:c} + e^{-z:c} =$	109,8079451
log. cos. $z:c =$	8,1379437
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	1,3984804
	6,7394633
sottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}}\right) =$	2,0404933
$\frac{2 \cos. z:c}{\sqrt{\cos. L:c}} =$	109,7724539
errore $=-$	354912

Facciasi $391035 : 36123 :: 1'' : \frac{36123''}{391035} = 0,0924''$ parte di secondo, per cui dee accrescersi il minor valore dell'angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c =$	$969165,0924''$
log. $=$	5,9863978
sottra	5,3144251
log. $z:c =$	0,6719727
sottra log. $L:c =$	1,2375125
log. $z:L =$	9,4344602
aggiungi log. 2 $=$	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L =$	9,7354902
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA =$	0,5438638

(*fig. 7*)

Segue il computo per la specie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c =$	$435°,30',12''$
in min. sec. $=$	$1567812''$
log. $=$	6,1952936

$z:c =$	$435°,30',12''$
in min. sec. $=$	$1567812''$
log. $=$	6,1952939

fottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,8808685
fottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	0,5186528
$z:c$ log. e =	3,3010555
$e^{z:c}$ =	2000,1174574
$e^{-z:c}$ =	0,0005000
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	2000,1179574
log. cos. $z:c$ =	9,3985100
fottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ =	1,3984804
	8,0000296
fottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ =	3,3010596
$\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ =	2000,1363427
errore = +	183853
altro errore = −	295189
differenza =	479042

fottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,8808688
fottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	0,5186531
$z:c$ log. e =	3,3010578
$e^{z:c}$ =	2000,1280516
$e^{-z:c}$ =	0,0005000
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	2000,1285516
log. cos. $z:c$ =	9,3985019
fottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c$ =	1,3984804
	8,0000215
fottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)$ =	3,3010515
$\frac{2 \text{ cos. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$ =	2000,0990327
errore = −	295189

Facciasi 479042 : 183853 :: $1'' : \frac{183853''}{479042} = 0,3838''$ porzione di secondo, che unita al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c$ =	1567811,3838″
log. =	6,1952938
fottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,8808687
fottra log. $L:c$ =	1,2375125
log. $z:L$ =	9,6433562
aggiun. log. 2 =	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L$ =	9,9443862
$z:\frac{1}{2}L = c3E:cA$ =	0,8798045

(*fig.* 7.)

Computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$179°,57',56''$	$z:c=$	$179°,57',57''$
in min. ſec.$=$	$647876''$	in min. ſec.$=$	$647877''$
log.$=$	$5,8114919$	log.$=$	$5,8114926$
ſottra	$5,3144251$	ſottra	$5,3144251$
log. $z:c=$	$0,4970668$	log. $z:c=$	$0,4970675$
ſottra	$0,3622157$	ſottra	$0,3622157$
log.$z:c$+log.log.$e=$	$0,1348511$	log.$z:c$+log.log.$e=$	$0,1348518$
$z:c$ log. $e=$	$1,3641153$	$z:c$ log. $e=$	$1,3641175$
$e^{z:c}=$	$23,1267891$	$e^{z:c}=$	$23,1269063$
$e^{-z:c}=$	$0,0432399$	$e^{-z:c}=$	$0,0432397$
$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	$23,0835492$	$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	$23,0836666$
log. ſen. $z:c=$	$6,7789965$	log. ſen. $z:c=$	$6,7706810$
ſottr. $\frac{1}{2}$log.coſ.$L:c=$	$0,7162924$	ſottr. $\frac{1}{2}$log.coſ. $L:c=$	$0,7162924$
	$6,0627041$		$6,0543886$
ſottra	$4,6989700$	ſottra	$4,6989700$
$\log.\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)=$	$1,3637341$	$\log.\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}\right)=$	$1,3554186$
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}=$	$23,1064981$	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}}=$	$22,6682829$
errore$=+$	229489	errore$=-$	4153837
altro errore $=-$	4153837		
differenza$=$	4383326		

Facciaſi $4383326 : 229489 :: 1'' : \frac{229489''}{4383326} = 0,0524''$ parte di ſecondo da aggiungerſi al minor valore di $z:c$, onde ne riſulti

$z:c=$	$647876,0524''$
log.$=$	$5,8114919$
ſottra	$5,3144251$
log. $z:c=$	$0,4970668$
ſottra log.$L:c=$	$1,3100632$
log. $z:L=$	$9,1870036$

aggiungi log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L$ = 9,4880336

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ = 0,3076335 (*fig.* 8)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ = 359°,12′,45″	$z:c$ = 359°,12′,46″
in min. ſec. = 1293165″	in min. ſec = 1293166″
log. = 6,1116539	log. = 6,1116542
ſottra 5,3144251	ſottra 5,3144251
log. $z:c$ = 0,7972288	log. $z:c$ = 0,7972291
ſottra 0,3622157	ſottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e = 0,4350131	log. $z:c$ + log. log. e = 0,4350134
$z:c$ log. e = 2,7227837	$z:c$ log. e = 2,7227856
$e^{z:c}$ = 528,1821168	$e^{z:c}$ = 528,1825349
$e^{-z:c}$ = 0,0018933	$e^{-z:c}$ = 0,0018933
$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 528,1802235	$e^{z:c} - e^{-z:c}$ = 528,1825349
log. cof. $z:c$ = 8,1380961	log. cof. $z:c$ = 8,1379437
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$ = 0,7162924	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. cof. $L:c$ = 0,7162924
4,4218037	7,4216513
ſottra 4,6989700	ſottra 4,6989700
log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 2,7228337	log. $\left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$ = 2,7226813
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 528,2429440	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$ = 528,0575942
errore = + 627205	errore = — 1249407
altro errore = — 1249407	
differenza = 1876612	

Facciaſi 1876612 : 627205 : : $1'' : \frac{627205''}{1876612} = 0,3342''$ porzione di ſecondo, per cui dee aumentarſi il minor valore di $z:c$, onde ſia

$z:c$ =

$z:c =$ 1293165,3342″
log. = 6,1116540
sottra 5,3144251

log. $z:c =$ 0,7972989
sottra log. $L:c =$ 1,3100632

log. $z:L =$ 9,4871657
aggiun. log. 2 = 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L =$ 9,7881957
$z:\frac{1}{2}L = c2E:CA =$ 0,6140386 (*fig.* 8.)

Segue il computo per la specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c =$ 525°,30′,11″	$z:c =$ 525°,30′,12″
in min. sec. = 1891811″	in min. sec. = 1891812″
log. = 6,2768777	log. = 6,2768779
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log. $z:c =$ 0,9624526	log. $z:c =$ 0,9624528
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,6002369	log. $z:c$ + log. log. $e =$ 0,6002371
$z:c$ log. $e =$ 3,9832440	$z:c$ log. $e =$ 3,9832459
$e^{z:c} =$ 9621,5265487	$e^{z:c} =$ 9621,5685841
sottra $e^{-z:c} =$ 0,0001039	$e^{-z:c} =$ 0,0001039
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$ 9621,5264448	$e^{z:c} - e^{-z:c} =$ 9621,5684902
log. sen. $z:c =$ 9,3985100	log. sen. $z:c =$ 9,3985019
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$ 0,7162924	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$ 0,7162924
8,6822176	8,6822095
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) =$ 3,9832476	$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) =$ 3,9832395
$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} =$ 9621,6061947	$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} =$ 9621,4269912
errore = + 797499	errore = — 1414890
altro errore = — 1414890	
differenza = 2212389	

Facciasi 2212389 : 797499 ::

$1'' : \frac{797499''}{2212389} = 0,3605''$ quantità da aggiugnersi al più picciolo valore dell' angolo $z:c$, onde ci si presenti

$z:c = 1891811,3605''$
log. $= 6,2768778$
sottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,9624527$
sottra log. $L:c = 1,3100632$
log. $z:L = 9,6523895$
aggiungi log. $2 = 0,3010300$
log. $z:\frac{1}{2}L = 9,9534195$
$z:\frac{1}{2}L = C3E:CA = 0,8982961$ (*fig.* 8)

Confermare coll' esperienza la scoperta legge dei suoni dei cilindri.

XXXI. Egli è d' uopo confermare coll' esperienza le verità insegnate dalla teorica. Do principio dal paragonare insieme i suoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri d' acciajo *A*, *B*, *C*, ed ordinai, che i due primi fossero egualmente grossi, e diversamente lunghi in ragione di $\sqrt{2} : 1$. Il primo ed il terzo doveano avere uguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4 : 5. L' Artefice non eseguì esattissimamente la mia intenzione, e le misure dei cilindri furono le seguenti, che da me s' esprimono in linee del piede Real di Parigi.

Misura del cilindro *A*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 86.
Misure del cilindro *B*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 61.
Misure del cilindro *C*. $D =$ lin. $11\frac{1}{2}$, $L =$ lin. 87.

Differendo i due cilindri *A*, *B* solamente nella lunghezza, i loro suoni debbono corrispondersi in ragione inversa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $(61)^2 : (86)^2$, o sia come 3721 : 7396. Questo rapporto s' accosta molto al semplice 1 : 2 proprio dell' Ottava, ed il divario con-

fiſte nella proporzione 7396 : 7442, o ſia nella fiſicamente uguale 161 : 162, metà preſſochè giuſta del Comma 80 : 81. In fatti percoſſi i cilindri A, B, trovai che i loro ſuoni in Ottava un poco calante ſi riferivano.

Giuſta il canone da me ſtabilito i ſuoni dei cilindri A, C debbono ſtare in ragione compoſta, diretta ſemplice dei diametri, ed inverſa duplicata delle lunghezze, vale a dire come $\frac{9}{(86)^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{(87)^2}$. Queſta proporzione riduceſi alla ſeguente 68121 : 85054, la quale diſcorda pochiſſimo dalla ſemplice 4 : 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 8505400 : 8515125, cioè proſſimamente a 875 : 876, undecima parte all'incirca del Comma 80 : 81, minuzia così picciola, che non viene dall'orecchio anche più perito notata. Poſti al confronto i ſuoni dei cilindri A, C, ſi conformarono alla teorica, ed il cilindro più groſſo C reſe un ſuono una Terza maggiore più acuto di quello del cilindro più ſottile A.

XXXII. M'inoltro all'eſame dei ſuoni, che giuſta le varie ſpecie di oſcillazioni un cilindro produce. Feci primieramente tirare con diligenza a martello, e lima un cilindro E d'acciajo, ed indi ne feci gittare un altro F di bronzo, il quale fu poſcia ripulito ſul tornio, e ridotto alla maggior eſattezza, che fu poſſibile. Miſure del cilindro E d'acciajo. D = lin. 6, L = lin. 259. Miſure del cilindro F di bronzo. D = lin. 6, L = lin. 257. $\frac{1}{2}$. Gli volli aſſai ſottili riſpettivamente alle loro lunghezze, e tollerai, che il ſuono loro più grave riuſciſſe muto, perchè ſi rendeſſero ſenſibili i ſuoni acuti, il che non interviene, quando la groſſezza alla lunghezza ha quella proporzione, che ſi ricerca, acciocchè il ſuono principale, e più grave acquiſti corpo, e ſi faccia udire grato al ſenſorio.

Segnai accuratamente i nodi, o punti ſtabili in riguardo alle diverſe ſpecie di vibrazioni, e ſottopoſti a

sì fatti punti i sostegni, si sentirono chiari e distinti i sei primi suoni in ambo i cilindri. Avendo dentro questi limiti ristretto i miei calcoli, non mi sono più oltre dilatato nè pur colle osservazioni. Avverto, che gli scannelli debbono essere rivestiti d'una materia cedente, per esempio di panno. Io mi servj di due funicelle, le quali erano forse un po' troppo dure, e credo che sarebbero meglio riusciti due grossi spaghi. Anche rispettivamente alle corde, mentre si vogliono far suonare divise in parti aliquote, bisogna adoperare degli ostacoli leggeri, e appoggiarli ad uno di que' punti, che separano una parte aliquota dall' altra. Veggasi ciò, che ho scritto in tale proposito ai numeri XX. e XXI. dello Schediasma IV, che tratta *delle vibrazioni delle corde sonore* nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche*.

Accordai all' unisono col suono principale del cilindro *E* d'acciajo una corda divisa in parti 60, ed un' altra corda egualmente lunga, e similmente partita la ridussi all' Ottava alta del suono principale del cilindro *F* di bronzo. Rendeva questo un suono talmente grave, che mettendo con esso all' unisono la predetta corda, avrebbe della sonorità fatto perdita. Per separare dal rimanente quelle porzioni di corda, che sono unisone ai suoni secondo, terzo, quarto ecc. dell' uno, e dell' altro cilindro, ho posto in opera uno scannello, la cui base s' eguaglia ad una porzione sessantesima della corda, ed è distribuita in parti dieci. Con questo artificio s' ottiene la divisione della corda in parti 600.

Nel numero XXVI. ho posto in serie le porzioni della corda 60, che secondo la teorica debbono star all' unisono coi suoni acuti d'un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera. Questa progressione serve pel cilindro *E* d' acciajo, ed in riguardo al cilindro *F* di bronzo, il cui suono principale è unisono alla corda 120, si hanno da prendere porzioni il doppio lunghe delle mentovate.

Le seguenti due Tavole sono formate da tre colonne. I numeri della prima esprimono le specie delle vibrazioni. La seconda contiene le porzioni della corda 60, che giusto la teorica deggiono corrispondere all'unisono coi suoni acuti dei cilindri. Nella terza si comprendono le parti della stessa corda, che messa in opera la maggior attenzione, si sono trovate unisone ai suoni nominati, prestandomi diligente assistenza il Sig. *Domenico Bianchi* valente organista, ed accuratissimo accordatore di gravicembali.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti del cilindro E d'acciajo nella suppossizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 60.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giusto l'esperienza.
I.	60	60
II.	21, 75	21, 75
III.	11, 1	11, 15
IV.	6, 717	6, 9
V.	4, 496	4, 7
VI.	3, 219	2, 9

Porzioni della corda 60. unisone ai suoni acuti del cilindro F di bronzo nella suppossizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 120.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giusto l'esperienza.
I.	120	120
II.	43, 5	43, 5

III.	22, 2	22, 3
IV.	13, 434	13, 6
V.	8, 992	9, 1
VI.	6, 438	6, 7

Per vero dire il cilindro *F* di bronzo era di figura più esatta di quello d'acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, siccome formato per via di fusione. E quindi le sue voci acute con più aggiustatezza di quelle del cilindro *E* d'acciajo s'accomodavano ai tuoni dalla teorica determinati. La maggior differenza in ambo i cilindri s'udiva nel sesto suono, il quale nel cilindro d'acciajo cresceva sopra il corrispondente stabilito dal computo per la ragione 2900 : 3219, o sia prossimamente per qualche cosa meno di 9 : 10, ch'è quanto a dire per un Tuono un poco calante. Al contrario nel cilindro di bronzo il predetto suono calava dall'analogo fissato dal calcolo pel rapporto 6700 : 6438, cioè per una proporzione media fra le due 25 : 24, 26 : 25 esprimente un Semituono minore scarso. I notati opposti divarj danno a conoscere, che se ci fosse un cilindro di perfettissima figura, e composto di materia squisitamente omogenea, renderebbe i suoni esattamente unisoni a quelli, che mi è riuscito di scoprire nella presente Dissertazione.

Determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, dei quali erano composti i cilindri usati nel riferito esperimento.

XXXIII. Non tralascio di determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, ond'erano formati i nostri cilindri. Ho notato nel corollario terzo contenuto nel numero XXV. che mentre due cilindri oscillano similmente, le loro rigidità r stanno come $S^4L^4g:D^2$. Essendo il diametro D costante in amen-

due i cilindri E, F, le maſſe M ſtanno come Lg, e le rigidità r come S^2L^3M. Il cilindro di bronzo era unisono a parti $91\frac{1}{2}$ della corda 60 unisona al cilindro d'acciajo; e quindi i ſuoni S dei due cilindri d'acciajo, e di bronzo ſi riguardavano nella ragione $91\frac{1}{2} : 60$, o ſia $61 : 40$. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L ſerbavano il rapporto $259 : 257\frac{1}{2}$, cioè in numeri interi $518 : 515$. Peſo il cilindro E once 25, il cilindro F once 27, e per conſeguenza le maſſe M ſi riferivano nella ragione $25 : 27$. Soſtituiti in cambio delle ſpecie analatiche i convenienti valori, troveremo le rigidità dell'acciajo e del bronzo componenti i noſtri cilindri come $(61)^2.(518)^3.25 : (40)^2.(515)^3.27$, o ſia ridotti i computi, come $646485758 59 : 29698029000$, proporzione che ſta di mezzo fra le due $24 : 11$, $13 : 6$, avvicinandoſi per altro più alla prima, che alla ſeconda.

Determinare la proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; acciocchè rendano ſuoni del pari forti, e aggradevoli.

XXXIV. Chiudo la mia fatica collo ſtabilire la ragione fra le lunghezze ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; affinchè rendano ſuoni ugualmente forti, e aggradevoli. I cilindri di metallo, o di creta, i quali compongono uno ſtrumento, ſi percuotono con eguali forze vive, e per conſeguenza oſcillando di pari forze vive fanno l'acquiſto. Collo ſteſſo metodo uſato in riguardo alle corde nello Schediaſma VI. della mia Opera ſopraccitata potrei dimoſtrare, che tali cilindri rendono ſuoni ugualmente forti. Queſti ſuoni in oltre debbono riuſcire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi accingo ad indagare preſentemente. Qualche ſtrumento da me veduto non s'eſten-

deva salvo che per due Ottave, ed era formato di cilindri, che differivano solo nella lunghezza. Per verità i cilindri estremi cadevano in difetti opposti; imperciocchè i più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano suoni per dir così senza corpo: ed al contrario i più acuti erano troppo grossi, e poco flessibili, dimodochè i loro suoni si sperimentavano ottusi.

Le masse M, m di due cilindri della stessa materia stanno come $LD^2 : ld^2$, e giacchè sono pari le forze vive MV^2, mv^2, si verifica l'analogia $V : v :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}d}$.

S'assegni alle velocità la legge perfettamente media fra i limiti stabiliti ne' numeri X. e XI. del citato Schediasma VI. onde s'abbia $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{1}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}$, e scopriremo essere $L^{\frac{1}{2}}D : l^{\frac{1}{2}}d :: T^{\frac{1}{4}} : t^{\frac{1}{4}}$, e conseguentemente $L^{\frac{2}{3}}D^{\frac{1}{4}} : l^{\frac{2}{3}}d^{\frac{1}{4}} :: T : t$. C'insegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che se due cilindri formati della stessa materia si vibrano similmente, stanno i loro suoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$; ma i tempi delle vibrazioni accettano la ragione inversa dei suoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ e perciò $L^{2:3}D^{4:3} : l^{2:3}d^{4:3} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ analogia, da cui derivano le due seguenti
$L : l :: D^{7:4} : d^{7:4}$, $D : d :: L^{4:7} : l^{4:7}$. Nel canone de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ si sostituiscano prima in cambio di L, l, indi in cambio di D, d i valori

lori proporzionali, e ſcopriremo, effettuati i neceſſarj calcoli,
$D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$, $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$. Regolate a norma di queſte leggi le dimenſioni dei cilindri, riuſciranno i loro ſuoni egualmente grati all' orecchio.

Stimo bene l' illuſtrare la teorica con un eſempio. Due cilindri ſi corriſpondano in quintupla Ottava, onde ſia $T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$. Fatto uſo di tali valori in luogo dei tempi T, t, ci ſi preſenterà $D : d :: 4 : 1$, $L : l :: \sqrt{128} : 1$, o proſſimamente 11, 3137 : 1.

Aſſai proſſima alla preſcelta ſarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{1:3}} : \frac{1}{t^{1:3}}$, da cui ſi dedurrebbe $D^3 : d^3 :: L : l$, $D : d :: T^{1:3} : t^{1:3}$, $L : l :: T^{3:3} : t^{3:3}$. La ſua maggiore ſemplicità renderebbe le miſure dei cilindri più facili da conteggiare.

XXXV. Concioſſiachè gli ſtrumenti compoſti di cilindri ſieno di poco uſo, e ſe ne lavorino in picciola quantità, non han potuto gl' induſtrioſi Pratici colle replicate ſperienze condurli a quella perfezione, di cui ſono capaci. Giudico adunque opportuna coſa il diſtendere una tavola, che per lo ſpazio di due Ottave contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri ſecondo la più perfetta legge $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$, $D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$. La nominata tavola è formata da ſei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Dieſis, e dal B molle diſpoſte giuſto la ſcala degli uſuali ſtrumenti da taſto, preſa per baſe la lettera C. Nella ſeconda colonna ſtanno diſpoſti i logaritmi dei ſuoni convenienti a ciaſcuna lettera, e temperati ſecondo il metodo da me ſpiegato nel *Saggio ſopra le leggi del Contrappunto* pag. 116. Contiene la terza colonna i logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta ſcala, i quali battuti con forze vive uguali, hanno da produr ſuoni, che rieſcano egualmente grati all' udito.

Si veggono collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze d'essi cilindri. Seguono finalmente le colonne quinta, e sesta, e sono registrati in quella i logaritmi dei diametri dei nostri cilindri, in questa le misure dei diametri stessi. Le colonne principali rispettivamente alle presenti ricerche sono la quarta, e la sesta, in grazia della determinazion delle quali ho posto le colonne seconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto per determinare le colonne quarta, e sesta. Sia l la lunghezza d' un cilindro, d il diametro, t il tempo d'una vibrazione, n il numero delle vibrazioni fatte in tempo dato, o sia il suono d'esso cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIV. dover esser l come $t^{7:10}$: ma t come $= 1:n$; dunque l come $\frac{1}{n^{7:10}}$, e passando dall'analogia all'equazione, $l = \frac{L}{n^{7:10}}$. L è una costante da determinarsi in progresso. Dai numeri faccio transito ai logaritmi, e mi si presenta la formola log. $l = \log. L - 7:10 \log. n$. Serve questa per istabilire il valore della costante L. Il logaritmo del suono n prodotto dal cilindro C base dello strumento s'eguaglia a nulla; dunque in tal caso log. l. $= \log. L$, e per conseguenza $l = L$, cioè a dire la costante L uguale alla lunghezza l del cilindro C base dello strumento, la quale si suppone nella mia tavola divisa in parti 10000. Si troverà pertanto il logaritmo della lunghezza l d'un cilindro detraendo dal log. L, o sia dal logaritmo del numero 10000 le sette decime parti del logaritmo del suono, che il detto cilindro deve produrre. Determinato così log. l, le tavole dei logaritmi mi additano il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimostrato essere d come $t^{2:5}$, come $\frac{1}{n^{2:5}}$. Quindi ne nascono le for-

mole $d = \frac{D}{n^{\frac{2}{5}}}$, log. d = log. $D - \frac{2}{5}$ log. n. D è il diametro del cilindro C baſe dello ſtrumento, che ſuppongo diviſo in parti 1000. Sottratte dal log. 1000 le due quinte parti del logaritmo del ſuono n, che dee rendere il cilindro, ne riſulterà il logaritmo del diametro d, la di cui miſura relativa a quella del diametro D competente al cilindro C verrà reſa nota dalle tavole logaritmiche.

Sarà facile l'ampliare la ſeguente tavola alle tre, alle quattro, alle cinque Ottave, valendoſi della regola del tre. Quella ſteſſa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 10000, a C^4, la cui lunghezza 9640, la ſerba parimente C, la cui lunghezza 3789, a C^4, che poſta in uſo la nominata regola, ſi troverà lungo 3653. Con pari metodo ſi ſcoprirà il diametro del detto C^4 562, e ſi paſſerà poſcia a ſtabilire le dimenſioni di D, di E^4, di E ecc.

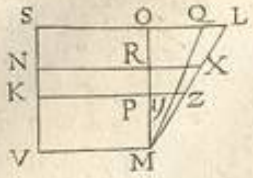
Sebbene poteva baſtare il dilatar la tavola ad una ſola Ottava. Determinato il ſecondo C, che in relazione al primo è lungo 6156, groſſo 758, ſi prendano per date le mentovate miſure, e dividendo la lunghezza in parti 10000, il diametro in parti 1000, chiaramente ſi ſcoprirà, che la diſtribuzione della prima Ottava ſerve altresì per la ſeconda, e per tutte l'altre, che ſeguono.

Per valerſi utilmente della noſtra tavola, fra varj cilindri pari di diametro, e diverſi di lunghezza biſogna ſcegliere quello, che rende un ſuono vigoroſo e chiaro, eſcluſi gli altri, che o per eſſere troppo lunghi riſpettivamente alla groſſezza producono un ſuono ſnervato, e ſenza corpo, o per eſſere troppo corti tramandano un ſuono muto, ed ottuſo. Se il cilindro preſcelto ſi trova uniſono col C baſe d'uno ſtrumento coriſta, s'intenda diviſa la ſua lunghezza in parti 10000, il ſuono diametro in parti 1000, ed in relazione a tali diviſioni ſi

ſtabiliſcano le miſure dei cilindri più acuti a norma della mia tavola. Che ſe lo ſteſſo cilindro foſſe uniſono ad un altro ſuono per eſempio *A* della prima Ottava; dovendo eſſere giuſto la tavola la lunghezza d'un tal cilindro 6965, ed il diametro 813; ſi concepiſcano diſtribuiti la lunghezza, ed il diametro nei detti numeri di parti 6965, 813, ed in riguardo a sì fatti compartimenti ſi determinino coll'ajuto della mia tavola le dimenſioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro *A*.

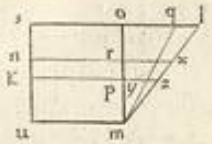
Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro preſcelto foſſero dati eſempigrazia in linee, ſi potranno trovare le miſure degli altri cilindri eſpreſſe parimente in linee col mezzo della regola del tre. Sieno cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro *A* appartenente alla prima Ottava, e ſi voglia ſapere di quante linee debbono eſſer compoſti la lunghezza, ed il diametro del cilindro *C* baſe dello ſtrumento. Si faccia come la lunghezza del cilindro *A* a quella del cilindro *C* notate nella mia tavola, cioè come 6965 a 10000, così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale, il quale s'eguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro *C*. Non altrimenti ſe faremo come 813 a 1000 diametri, che la mia tavola aſſegna ai cilindri *A*, *C*, così il numero delle linee, onde conſta il diametro del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale; pareggerà queſto il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro *C*.

In uno ſtrumento lavorato ſecondo il mio metodo gli ſcannelli ſu i quali s' appoggiano i cilindri, e che debbono ſtare ſotto i loro circoli d' ammortimento, hanno ad eſſere di figura curva, la quale facilmente ſi deſcrive, eſſendo nota dei mentovati circoli la poſizione.


S
O
Q
L
N
R
X
K
P
y
Z
V
M

O
F
R
H
G
P
I
M

Fig. 1.


s
o
q
l
n
r
x
K
P
y
z
u
m

o
f
r
h
g
P
i
m

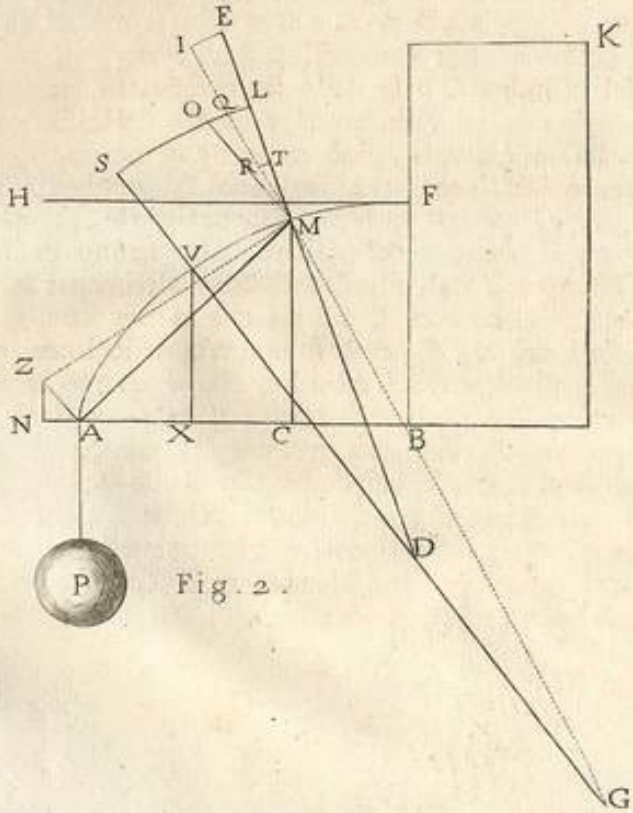

E
I
K
O
Q
L
S
R
T
H
F
M
V
Z
N
A
X
C
B
D
P
G

Fig. 2.

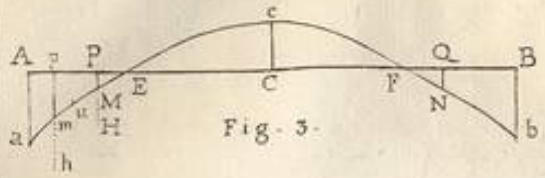


Fig. 3.

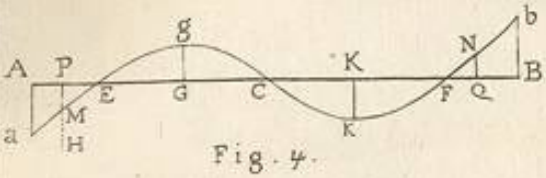


Fig. 4.

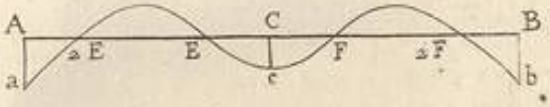


Fig. 5.

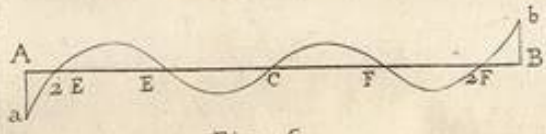


Fig. 6.

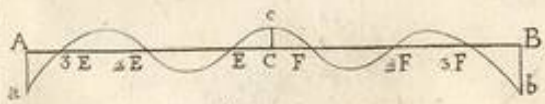


Fig. 7

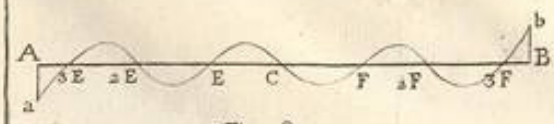


Fig. 8.

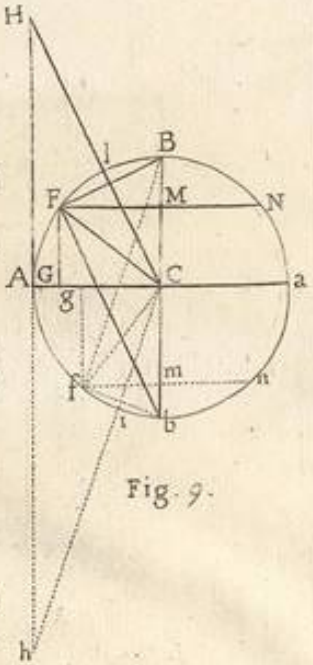


Fig. 9.