SOPRA LA DISCESA
DE' GRAVI
Per la convessità de' Canali curvilinei.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Professore di Matematica sublime nell' Università di Pavia.

La considerazione degli accidenti del moto ne' gravi discendenti per la concavità delle curve, o de' canali curvilinei situati in piani verticali ha arricchito la Scienza generale del moto di molto belle ed inaspettate verità, che ora formano nelle opere de' moderni Geometri una parte non ultima della Dinamica. Ma la discesa de' gravi non per la concavità, ma per la convessità delle curve, o de' canali curvilinei giacenti in piani verticali non sembra fino ad ora essere stata l' oggetto delle speculazioni de' Geometri, e indarno si cercherebbe di ciò alcun cenno ne' Trattati di Meccanica anche più estesi. Comunque però voglia interpretarsi un tal silenzio degli Scrittori, questo genere di moto ha alcune proprietà che lo distinguono, e che pajono meritare l' esame e lo studio de' coltivatori della Dinamica. La principale di queste proprietà consiste nel distaccarsi che ordinariamente fa un corpo dalla convessità della curva o del canale dopo aver trascorso un certo spazio, il quale trovasi più o meno grande secondo la diversità della curva per cui il grave discende, e del punto da cui comincia la discesa. Frutto di picciolo ſtudio intorno a sì curioſo argomento ſono i ſeguenti Teoremi, de' quali ommetto per ora la dimoſtrazione.

Ognuno intenderà, che qui ſi preſcinde dalle reſiſtenze del mezzo, e dallo sfregamento, e che ſi concepiſce la maſſa del grave ridotta e concentrata in un punto.

TEOREMA I.

Se in un cerchio verticalmente eretto per la ſua conveſſità ſcavata in forma di canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza (cioè la verticale compreſa tra le due orizzontali guidate per gli eſtremi dell'arco) è ſempre un terzo dell'altezza di detto arco continuato ſino al diametro orizzontale.

TEOREMA II.

Nella parabola conica ſituata coll'aſſe verticale, un grave diſcendente per la ſua conveſſità ſcanalata, e che incomincia a muoverſi da un punto qualunque del canale parabolico, ſeguita ſempre a muoverſi lungo il canale ſenza mai diſtaccarſene o abbandonarlo.

TEOREMA III.

Situata l'elliſſe conica coll'aſſe maggiore verticale, ed eſſendo quell'aſſe $= 2a$, il ſuo parametro $= 2p$, un grave, che partendo dal vertice diſcende per la ſua conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo aver traſcorſo un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla ra-

dice della ſeguente equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$.
La ſteſſa equazione cubica ſi ritrova anche quando l'aſſe verticale dell'elliſſe è il minore, e il corpo parte dal vertice di queſt'aſſe, col ſolo divario, che in queſto caſo a indica il ſemiaſſe minore, p il ſemiparametro di queſt'aſſe, x l'aſciſſa del medeſimo.

Se poi il grave invece di cominciare il ſuo moto dal vertice dell'elliſſe ſi ſpicca da un punto più baſſo diſtante per l'intervallo b dalla orizzontale che paſſa pel vertice, convien riſolvere l'equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2px}{a-p} + \frac{pa^3+2a^2b}{a-p} = 0$ per ottenere il valore dell'aſciſſa corriſpondente a quel punto dell'elliſſe, che è il punto del diſtacco.

TEOREMA IV.

Per l'iperbola conica tenuta col ſuo aſſe traverſo verticale, con un procedere affatto ſimile a quello del Teorema precedente, s'incontra l'equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{a+p} + \frac{pa^3}{a+p} = 0$, la di cui radice x ſarà l'aſciſſa dell'arco iperbolico, deſcritto il quale il corpo, che incomincia a diſcendere dal vertice, ſi diſtacca dalla conveſſità del canale. Ma qui un tal diſtacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola, avvegnachè eſſendo poſitivi tutti i termini della predetta equazione, il valor reale di x non può eſſere che negativo; il che nell'ipoteſi, in cui ſiamo, è un aſſurdo. Dunque il grave che diſcende per la conveſſità d'un canale iperbolico reſta ſempre unito al canale anche protratto in infinito ſenza ſtaccarſene mai. Lo ſteſſo accade anche quando il corpo comincia a diſcendere da un punto più baſſo del vertice.

TEOREMA

TEOREMA V.

Se la figura del canale è quella d' una parabola di genere superiore rappresentata dall' equazione $y^m = x$, essendo m un numero intero > 2, il grave che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico, si distacca allor quando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{\frac{m}{2m-2}}$, la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{(27)}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, ed in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così discorrendo.

Che se il grave in vece di spiccarsi dalla sommità del canale partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale che passa per la sommità sia $= a$, allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere quest' equazione $x^{\frac{2m-2}{m}} - \frac{2(m-1)a}{m-2} x^{\frac{m-2}{m}} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza a resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

TEOREMA VI.

Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, e supposto che il corpo incominci a rotolare dalla ſommità dell' aſſe verticale giù per la conveſſità ſi trova $\left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{\frac{m}{2m-2n}}$ per l' altezza di quell' arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorſo diſcendendo, ſi diſtacca dal canale.

Qualora poi il grave incominci il ſuo moto da un punto più baſſo del vertice, e ſia a la depreſſione verticale di queſto luogo, ſi ritrova il punto del diſtacco mediante la riſoluzione dell' equazione

$$x^{\frac{2m-2n}{m}} - \frac{2(m-n)a}{m-2n} x^{\frac{m-2n}{m}} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0,$$ dalla di cui radice ſottraendo la quantità a ſi ottiene l' altezza dell' arco, al termine del quale giunto che ſia il corpo, queſto abbandona il canale.

TEOREMA VII.

In tutte le elliſſi, ed iperbole ſuperiori rappreſentate dall' equazione generaliſſima $y^{m+n} = f(a \mp x)^n x^m$, ove a eſprime l' aſſe traverſo, f una grandezza coſtante dipendente dalla proprietà di queſte curve, il corpo che parte dalla ſommità dell' aſſe verticale, e diſcende per la conveſſità della curva, non ſe ne diſtacca ſe non dopo aver paſſato un arco, il quale ha per altezza la radice dell' equazione $2mn(m+n)a^2 x^{\frac{2n}{m+n}}(a \mp x)^{\frac{m-n}{m+n}}$, $= (ma \mp (m+n)x)\left((m+n)^2 x^{\frac{2n}{m+n}}(a \mp x)^{\frac{2m}{m+n}} + m^2 g^2 a^2 \mp 2m(m+n)ag^2 x + (m+n)^2 g^2 x^2\right)$, e proſegue poi liberamente il ſuo moto in una parabola conica ſecondo la nota legge dei projetti.

TEOREMA VIII.

Sia l'iperbola equilatera (*fig. IX*) FOM fra gli asintoti ortogonali AC, AB, de' quali AC sia verticale, AB orizzontale, e guidata per la sommità O la verticale ON parallela all'asintoto AC, si piglino in essa le ascisse $OH = x$, e si ponga il lato della potenza dell'iperbola OS ovvero $SA = 1$. Un grave, che si spicca dalla sommità O, e discende per la convessità OEF dell'iperbola, non si distacca da essa se non dopo aver corso per un arco, la di cui altezza viene rappresentata dalla radice dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 * - \frac{2}{3} = 0.$$

Che se il grave in vece di spiccarsi dal vertice incomincia a discendere da un punto più basso distante per l'intervallo a dalla orizzontale che passa pel vertice, si presenta quest'altra equazione biquadratica da risolversi $x^4 + \frac{8-4a}{3}x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \left(\frac{2+4a}{3}\right) = 0$, la di cui radice dà l'altezza di quell'arco iperbolico, dal quale togliendosi il primo arco di altezza a il residuo è appunto quello, al di cui termine giunto che sia il corpo, si disimpegna dalla curva, e prosegue il suo cammino con moto libero.

TEOREMA IX.

Nella parabola Apolloniana (*fig. X*) ANM descritta col parametro p, e situata in un piano verticale, ma coll'asse MO orizzontale, dal punto dato A, da cui il grave si lascia cadere giù pel perimetro convesso ANM, condotta la verticale $AB = \lambda$, e prese su questa le ascisse $AF = x$, è mestieri risolvere l'equazione cubica

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ per determinare l'altezza AF di quel tal arco AN, al di cui estremo N giunto che sia il grave partito da A, si libera dalla curva, ed abbandona il canale, che si suppone sempre aperto esteriormente.

Qualunque volta il grave parte da un punto più basso di A, e distante per l'intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A, ritrova l'equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 - \frac{1}{2}p^2 a = 0,$$

e la radice di questa dà l'altezza dell'arco, dal quale sottratto l'arco di altezza a il residuo è appunto il ricercato, vale a dire quello, il di cui punto infimo è il punto del distacco.

Se nell'ipotesi della gravità costante si vuole collocato il corpo nella convessità della parabola in punto infinitamente distante dal vertice M, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all'asse orizzontale acquisti un valore infinito, allora si fa manifesto, che nell'equazione

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda x^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ il valore della radice x non può essere che infinito, altrimenti verrebbe l'assurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l'infinito sarebbe uguale a zero. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dalla sommità della parabola verticalmente collocata, ma coll'asse orizzontale, e discende per la convessità, corre uno ſpazio infinito prima di ſtaccarſi dal canale, o piuttoſto non ſi diſtacca mai.

TEOREMA X.

Nella Cicloide ſituata coll'aſſe verticale il grave, che dalla ſua ſommità diſcende per la conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo eſſere arrivato al punto, che reſta ſotto il vertice un ſemidiametro del circolo generatore. E generalmente da qualunque punto incominci il corpo a diſcendere, eſſo abbandona il canale cicloidale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello ſteſſo arco continuato ſino alla baſe orizzontale della Cicloide.

TEOREMA XI.

Se vuolſi che il corpo partendo (*fig. XI*) dal vertice A diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della Ciſſoide ACO riferita all' aſſe AM parallelo all' aſintoto verticale FN, e ſi chiamano al ſolito x, y le coordinate ortogonali AB, BC, a il ſemidiametro AP del cerchio generatore; il punto del diſtacco del corpo ſi trova eſſer quello, a cui corriſponde $y = \frac{8}{9}a$, oſſia il corpo ſi diſtacca dal canale dopo aver paſſato un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore.

E ſe il corpo parte da un punto inferiore al vertice A, e diſtante dalla orizzontale AF d'una data quantità b, la radice dell' equazione cubica $y^3 - \frac{16a}{9}y^2 + \frac{64a^2+36b^2}{81}y - \frac{8ab^2}{9} = 0$ dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di ciſſoide, dal quale ſe ſi sottrae l' arco compreso fra il vertice ed il principio del moto si ha l'arco ricercato, al di cui termine giunto che sia il grave, abbandona la curva.

TEOREMA XII.

Sia (*fig. XII*) *OBS* la logaritmica situata in un piano verticale, col suo asintoto *MN* al di sopra di essa ed orizzontale. Si supponga la sottangente costante $=1$, e la *FB* normale all' asintoto ed eguale alla sottangente si produca indefinitamente in *P*, e si prendano le ordinate ortogonali $BI=x$, $IS=y$. Ciò stante, un corpo, che incomincia a discendere dal punto *B* (che chiameremo vertice) lungo la convessità *BS* della logaritmica, si allontana dalla curva dopo aver percorso un arco, la di cui altezza o ascissa $x=\sqrt{2}$, cioè uguaglia la diagonale del quadrato descritto sopra la sottangente.

Qualora poi il mobile parta da un punto inferiore al vertice *B*, e la distanza di tal punto dalla retta orizzontale guidata per *B* sia $=a$, il mobile si distacca dalla curva dopo esser caduto da un arco, che ha per altezza $x-a=\sqrt{(1+(a+1)^2)}$, cioè l' ipotenusa d'un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la sottangente della logaritmica, l' altro cateto è la somma di questa sottangente e della distanza del principio del detto arco dalla orizzontale guidata pel vertice.